

GEOMETRISCHE INTEGRATIONEN

ZWEI ABHANDLUNGEN ÜBER
NEUE METHODEN ZUR INHALTSBESTIMMUNG
IN DER ELEMENTAREN GEOMETRIE

VON

JOHANNES FINSTERBUSCH

PROFESSOR AM GYMNASIUM ZU ZWICKAU I. S.

MIT FIGUREN AUF TAFELN.

Vorwort.

In der Planimetrie bildet das Quadrat, dessen Seite gleich der Längeneinheit ist, die Flächeneinheit, in der Stereometrie der Würfel, dessen Kante gleich der Längeneinheit ist, die Raumeinheit. Die Inhaltsbestimmung der Planimetrie erfordert eine Zerschneidung des Flächenstücks in Flächenteile, die zu einem Rechteck zusammengesetzt werden können, das die Längeneinheit zur Grundlinie besitzt. Die Maßzahl der Höhe ist dann zugleich die Maßzahl des Flächenstücks. Die Inhaltsbestimmung der Stereometrie erfordert analog eine Zerschneidung des Körpers in Raumeile, die zu einem geraden Prisma zusammengesetzt werden können, dessen Grundfläche das Einheitsquadrat ist. Die Maßzahl der Höhe ist dann zugleich die des Körpers.

Ist die erforderliche Anzahl der Teile eine endliche, so heißen Flächenstück und Rechteck, bez. Körper und gerades quadratisches Prisma einander endlich gleich.¹⁾ In der Planimetrie ist jedes geradlinig begrenzte Flächenstück (Polygon) endlich gleich einem Rechteck. In der Stereometrie dagegen ist ein von Ebenen begrenzter Körper (Polyeder) im allgemeinen nur dann einem geraden quadratischen Prisma endlich gleich, wenn er ein Prisma ist oder in Prismen zerlegt werden kann. Denn, wie M. Dehn¹⁾ gezeigt hat, sind eine Pyramide und ein Prisma von derselben Grundfläche und ein Drittel der Höhe nicht immer endlich gleich; z. B. das regelmäßige Tetraeder und das „entsprechende“ Prisma. Dagegen bietet die bekannte Zerschneidung eines Würfels in drei kongruente vierseitige Pyramiden ein Beispiel einer endlich gleichen quadratischen Pyramide und ihres entsprechenden Prismas²⁾.

¹⁾ M. Dehn: „Über den Rauminhalt“; Math. Annalen 1902, Bd. 55, S. 466—478.

²⁾ Hierzu bemerke ich, daß allgemeiner auch das von 6 kongruenten Rhomben begrenzte Rhomboeder von einer Hauptecke aus, deren Kanten

Ferner sind, wie ich bewiesen habe¹⁾, einander symmetrische Pyramiden endlich gleich; dagegen sind im allgemeinen nicht endlich gleich dreiseitige Pyramiden, die nur in Höhe und einander symmetrischen Grundflächen übereinstimmen, wie sie bei der Zerschneidung eines dreiseitigen Prismas auftreten.

Soll also die Pyramide von den Untersuchungen der elementaren Stereometrie nicht ausgeschlossen werden, so ist bei Inhaltsbestimmungen eine Zerschneidung in unendlich viele, mithin unendlich kleine Teile nicht zu umgehen; deren Summierung erfordert aber eine Integration. Die Inhaltsbestimmung nicht ausschließlich geradlinig begrenzter Ebenenstücke bez. nicht ausschließlich von Ebenen begrenzter Körper kann überhaupt nur durch solche unendliche Prozesse erfolgen.

Zwischen beide Arten der Inhaltsbestimmung — die Endlichgleichheit und die Integration — läßt sich eine Abart der letzteren stellen, die wir zum Unterschied geometrische Integration nennen wollen. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß ein wirkliches Summieren der unendlich kleinen Teile durch eine Flächenbez. Raumvergleichung mit den entsprechenden Elementen eines andern Flächenstücks bez. Körpers vermieden wird. Bei einem ihrer einfachsten Fälle, dem Cavalierischen Prinzip, wird die Gleichheit der Inhalte des zu untersuchenden und eines bekannten Flächenstücks bez. Körpers aus der paarweisen Übereinstimmung ihrer entsprechenden unendlich kleinen Teile gefolgert.

In den beiden vorliegenden Abhandlungen kommen bei den Inhaltsbestimmungen durchweg geometrische Integrationen zur Anwendung. Alle diese haben das gemeinsam: daß ein Flächenstück bez. Körper *I* zu seiner Inhaltsbestimmung noch zwei andere *II* und *III* erfordert, von denen wenigstens der Inhalt des einen *III* bekannt sein muß, und daß jedem der unendlich kleinen Teile dI ein dII und ein $dIII$ zugeordnet ist, also die Anzahl der Teile für alle drei Flächenstücke bez. Körper dieselbe ist.

3 gleiche spitze bez. stumpfe Winkel bilden, in gleicher Weise zerschnitten werden kann.

¹⁾ Siehe das Referat im Dresdner Anzeiger vom 26. April 1905 über meinen Vortrag „Die Endlichgleichheit einander symmetrischer Polyeder“, den ich auf der 15. Jahresversammlung des sächs. Gymnasiallehrer-Vereins in Dresden und vorher im Verein für Naturkunde zu Zwickau gehalten habe. Ich entwickelte 3 Methoden, die bez. 4, 1, 8 verschiedene Auflösungen bei einer Zerschneidung in bez. 10, 6, 6 Teile ergaben.

Es handelt sich also um ein Problem der Inhaltsvergleichung von drei Flächenstücken bez. drei Körpern, die gewissen Bedingungen genügen. Im besonderen können *I* und *II* kongruent sein.

Die geometrischen Integrationen in den beiden folgenden Abhandlungen lassen sich wie folgt kurz kennzeichnen, wobei, wie schon erwähnt, *III* immer als bekannt vorausgesetzt wird, während *I* bez. auch *II* zu bestimmen ist.

In der ersten Abhandlung liegen *I*, *II*, *III*, sowie je 3 entsprechende *dI*, *dII*, *dIII* zwischen parallelen Geraden bez. Ebenen, und es ist entweder:

- (a) $dI - dII = dIII$, also $I - II = III$ bekannt,
 I ähnlich II , also $I : II$ bekannt,
 I und II gefunden;

oder:

- (b) $dI \pm dII = dIII$, also $I \pm II = III$ bekannt,
 II bekannt,
 I gefunden.

In der zweiten Abhandlung werden *dI*, *dII*, *dIII* durch dasselbe Element einer Kurve bez. Fläche bestimmt, die *I* teilweise begrenzt, und es ist entweder:

- (c) $I \pm II = III$ bekannt,
 $dI : dII$ konstant, also $I : II$ bekannt,
 I und II gefunden;

oder:

- (d) III bekannt,
 $dI : dII = dIII : dII$ aber variabel, also $dI = dIII$,
 I gefunden.

Hiermit sind die einfachen geometrischen Integrationen — und nur solche sind berechtigt — bei weitem nicht erschöpft; doch überschreiten die im folgenden ausgeführten Inhaltsbestimmungen schon bedeutend die Grenze des Gebiets, das für gewöhnlich der elementaren Geometrie zugewiesen wird.

Die Vorteile dieser geometrischen Methode liegen auf der Hand. Sie bestehen nicht nur darin, daß bei ihr durch die räumliche Zuordnung entsprechender Flächen- bez. Körperelemente das oft mühsame Summieren einer unendlichen Reihe ganz wegfällt,

wodurch die Inhaltsberechnung wesentlich verkürzt und vereinfacht wird, sondern vor allem in ihrer Anschaulichkeit, die gleichsam den inneren Aufbau der geometrischen Gebilde enthüllt, während die arithmetische Methode erst mit der fertigen Inhaltsformel auf den geometrischen Boden zurückkehrt.

So gewinnt man ferner durch unsere Methode leicht einen Einblick in die Faktoren, die die Tragweite der Inhaltsformeln, insbesondere die der sogenannten mechanischen Quadratur bestimmen. Man erkennt z. B., warum die bekannte Simpsonsche Formel nur bis zum 3^{ten} Grade und nicht auch für höhere Grade exakt gilt.

So erfährt man weiter, aus welchem inneren Grunde eine Aufgabe schwer oder leicht der elementaren Behandlung zugänglich ist. Man erkennt, warum z. B. die Parabel leicht zu quadrieren und parabolische Körper ebenso leicht zu kubieren sind, während die Fläche des Kreises schwer und umständlich, der Inhalt eines Körpers aber, in dem er als Meridiankurve auftritt, sehr leicht zu ermitteln ist.

So ergeben sich ungezwungen die notwendigen Bedingungen für die Rationalität des Inhalts der behandelten Körper. Man übersieht sofort, warum z. B. der „Huf“ des elliptischen Halbzylinders und vieler anderer trotz irrationaler Grundfläche doch rationalen Rauminhalt hat.

Wie überraschend einfach endlich gestaltet sich nach unserer Methode die Quadratur der Hyperbel im Vergleich zur üblichen Berechnungsweise.

In den vorliegenden beiden Abhandlungen sind die Hilfssätze und Inhaltsformeln ganz allgemein für Flächenstücke bez. Körper n^{ten} Grades entwickelt worden. Ihre besondere Herleitung für den Fall $n = 2$ oder bei Beschränkung auf „Reinkörper“ n^{ten} Grades ist natürlich bedeutend einfacher und kann vielfach sogar rein-geometrisch geschehen. Unter den gegebenen Beispielen sind diese beiden Sonderfälle ihrer grundlegenden Bedeutung gemäß am meisten vertreten; trotzdem mußten eine Menge interessanter Einzelbeziehungen, die nur für Körper 2^{ten} Grades gelten, fortbleiben. Diese sollen in vorwiegend reingeometrischer Darstellung den Gegenstand einer dritten Abhandlung bilden.

Zwickau i. S., im Dezember 1905.

Joh. Finsterbusch.

I.

Über eine neue einfache und vor allem einheitliche Methode, die Rauminhalte der Körper zu bestimmen, deren Querschnittsfunktion den dritten Grad der Höhe nicht übersteigt, und ihre Verallgemeinerung.¹⁾

Einleitung.

Meine im folgenden entwickelte Methode der Rauminhaltsbestimmung geht in gewissem Sinne aus einer Weiterbildung des Cavalierischen Prinzips hervor und macht außer diesem nur noch vom Verhältnis ähnlicher Körper Gebrauch. Sie führt zur Aufstellung eines Doppelsatzes, der, seiner Einfachheit und bequemen Handhabung wegen, geeignet ist, von Anfang an allen Inhaltsberechnungen der elementaren Stereometrie als Grundlage zu dienen, und also einen einfachen und vor allem einheitlichen Aufbau ihrer Berechnungen ermöglicht, den die meisten Lehrbücher leider vermissen lassen.²⁾ Die Methode hat bei einmaliger Anwendung dieses Doppelsatzes denselben Geltungsbereich

¹⁾ Vorliegende Aufzeichnung ist, von einigen wesentlichen Verbesserungen und Zusätzen abgesehen, ein Abdruck aus den Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses zu Heidelberg 1904, S. 687—706. Sie weicht insofern von dem gehaltenen Vortrage ab, als ich die Beschränkung der Querschnittsfunktion auf den 3^{ten} Grad der Höhe, welche durch die Kürze der Zeit geboten war, fallen gelassen und am Schlusse eine einfache Ableitung der Gaußschen Formeln und einiger anderen der sogenannten mechanischen Quadratur als Anwendung meiner Methode hinzugefügt habe.

²⁾ Als löbliche Ausnahme sei z. B. Heinze-Lucke, Genetische Stereometrie erwähnt, ein Werk, das streng einheitlich angeordnet ist, da alle behandelten Körper aus einem allgemeinen „Zentralkörper“ abgeleitet werden, deren Inhaltsbestimmungen aber nicht einfach sind, da die Simpsonsche Formel benutzt wird.

wie die Simpsonsche Formel; nur ist sie bedeutend einfacher, da sie entweder nur den Mittelquerschnitt oder nur die Randquerschnitte bez. irgend zwei äquidistante, aber nicht beides als bekannt voraussetzt. Eine n -malige Anwendung des Satzes führt zum Beweise der allgemeinen „Summenformel“ für Körper $2n^{\text{ten}}$ oder $2n + 1^{\text{ten}}$ Grades. Die Methode gestattet einen und denselben Körper auf verschiedene Arten zu berechnen, unter denen natürlich immer eine den Vorzug verdient. Die allgemein übliche Archimedische Kugelberechnung z. B., die sich auch aus meiner Methode ergibt, ist nicht die einfachste, welche möglich ist, da sie den Kegelinhalt als bekannt voraussetzt.

Zur Begründung meines Doppelsatzes können verschiedene Wege eingeschlagen werden. Bei Beschränkung auf Körper zweiten Grades, über die ja viele Lehrbücher nicht hinausgehen, kann der Satz für die gleichachsigen Körper (z. B. Kugel und gleichseitige Hyperboloide) bewiesen und dann seine Gültigkeit durch affine Transformationen (sei es durch Reliefprojektion, wie man die affine Verkürzung oder Verlängerung in der Höhenrichtung nennen könnte, sei es durch affine Verschiebung oder Verwandlung der Querschnitte in ihren Ebenen) auf die allgemeinen Körper zweiten Grades ausgedehnt werden. Auch für die Prismatoide mit ebenen oder windschiefen Seitenflächen, welche hierher gehören, läßt sich der Doppelsatz leicht rein geometrisch mit Hilfe der zugeordneten Pyramide beweisen.

Ich wähle im folgenden den algebraischen Weg, weil nur dieser gestattet, den Doppelsatz in seiner allgemeinsten Form aufzustellen.

§ 1. Körper m^{ten} Grades, ihre Reduktion auf Zentralschichten, Aufstellung des Doppelsatzes.

1. Der Untersuchung werden solche Körper unterworfen, die durch eine jede zur $\xi\eta$ -Ebene parallele Ebene in der beliebigen Entfernung ξ geschnitten, einen Querschnitt Q_ξ besitzen, der durch die ganze Funktion

$$Q_\xi = A_0 + A_1 \xi + A_2 \xi^2 + A_3 \xi^3 + \dots + A_m \xi^m$$

dargestellt wird. Ein solcher gemischter Körper m^{ten} Grades kann auch als Summe von $m + 1$ Reinkörpern 0^{ten} bis m^{ten} Grades aufgefaßt werden. Durch eine Koordinatenverschiebung

längs der ξ -Achse werden sämtliche Koeffizienten mit Ausnahme des höchsten A_m verändert, wodurch unter Umständen eine wesentliche Vereinfachung der Funktion erzielt wird.¹⁾

2. Eine besondere Beachtung verdienen hierbei unter den Körpern $m = 2n^{\text{ten}}$ Grades die, deren Querschnittsfunktion durch eine gewisse Koordinatenverschiebung k in eine solche übergeführt werden kann, die ausschließlich gerade Potenzen von $z = \xi - k$ enthält. Ein solcher Körper soll Zentralkörper und die Ebene $\xi = k$ seine Zentralebene genannt werden. In bezug auf letztere besitzt der Körper in je zwei äquidistanten Ebenen, also in den Höhen $\xi = k \pm z$, gleiche Querschnitte. Daraus folgt, daß eine Zentralschicht, d. h. eine solche, deren mittlere Ebene zugleich Zentralebene des Körpers ist, durch die Zentralebene halbiert wird.

3. Soll Q die Querschnittsfunktion eines Zentralkörpers $2n^{\text{ten}}$ Grades sein, so müssen zwischen k und den Koeffizienten (ausgenommen A_0) — den n verschwindenden neuen Koeffizienten A mit ungeraden Indizes gemäß — n leicht abzuleitende Bedingungsgleichungen bestehen. Wird aus der letzten

$$A_{2n-1} \equiv A_{2n-1} + 2nA_{2n} \cdot k = 0$$

k berechnet und in die übrigen eingesetzt, so ergeben sich $n - 1$ Bedingungsgleichungen, denen die ursprünglichen $2n$ Koeffizienten A_1, A_2, \dots, A_{2n} genügen müssen, wenn nach Substitution von $\xi = k + z$ die Querschnittsfunktion übergehen soll in

$$Q = A_0 + A_2 z^2 + A_4 z^4 + \dots + A_{2n} z^{2n}.$$

4. Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir an unsere Aufgabe, den Rauminhalt eines gemischten Körpers m^{ten} Grades zu bestimmen. Um die Rechnung möglichst kurz und einfach zu gestalten, wählen wir die Mittelebene des Körpers von der Höhe h zur xy -Ebene. Der zu berechnende Körper $2n^{\text{ten}}$ oder $2n + 1^{\text{ten}}$ Grades, je nachdem $A_{2n+1} = 0$ ist oder nicht, hat dann in drei äquidistanten Ebenen $z = +z, 0, -z$ die Querschnitte

1) Jeder Reinkörper wird durch eine Verschiebung des Koordinatensystems formell zu einem gemischten Körper, aber nicht für jeden gemischten Körper gibt es eine Koordinatenverschiebung, die ihn zu einem Reinkörper macht.

$$Q_z = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots + A_{2n} z^{2n} + A_{2n+1} z^{2n+1}$$

$$Q_0 = A_0$$

$$Q_{-z} = A_0 - A_1 z + A_2 z^2 - A_3 z^3 + \dots + A_{2n} z^{2n} - A_{2n+1} z^{2n+1}.$$

Für die halbe Querschnittsumme in je zwei äquidistanten Ebenen zur Mittelebene ergibt sich demnach

$$\frac{1}{2} (Q_z + Q_{-z}) = A_0 + A_2 z^2 + A_4 z^4 + \dots + A_{2n} z^{2n},$$

woraus ohne weiteres folgt: Eine Körperschicht $2n^{\text{ten}}$ oder $2n + 1^{\text{ten}}$ Grades hat denselben Rauminhalt wie eine Zentralschicht eines Zentralkörpers $2n^{\text{ten}}$ Grades von gleicher Höhe. In diesem Satze ist zugleich die Reduktion des Körpers $2n + 1^{\text{ten}}$ Grades um einen Grad ausgesprochen.

Ganz dasselbe gilt auch von der Differenz oder Summe gleichhoher Schichten zweier Körper I und II, denn für ihre Querschnittsfunktionen Q' und Q'' folgt, wenn $A_0' \mp A_0''$ durch $Q_0' \mp Q_0''$ ersetzt wird,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [(Q_z' \mp Q_z'') + (Q_{-z}' \mp Q_{-z}'')] \\ &= (Q_0' \mp Q_0'') + (A_2' \mp A_2'') z^2 + \dots + (A_{2n}' \mp A_{2n}'') z^{2n}. \end{aligned}$$

5. Wählen wir den zweiten Körper so, daß entweder die Gleichungen

$$(D) \quad A_2' - A_2'' = 0, A_4' - A_4'' = 0, \dots, A_{2n}' - A_{2n}'' = 0$$

oder

$$(S) \quad A_2' + A_2'' = 0, A_4' + A_4'' = 0, \dots, A_{2n}' + A_{2n}'' = 0$$

bestehen, und bilden dann die Differenz der Körper, den D -Körper, oder ihre Summe, den S -Körper, so gilt für die drei Differenzen oder Summen der Querschnitte der Körper I und II, d. h. für die drei Querschnitte des D - oder S -Körpers, die wir kurz bezügl. mit G_z , G_0 , G_{-z} bezeichnen wollen:

$$\frac{1}{2} (G_z + G_{-z}) = G_0,$$

d. h.: In einem D - oder S -Körper ist die halbe Summe der Querschnitte in je zwei äquidistanten Ebenen zur Mittelebene gleich dem Mittelschnitt.

Wird der D - oder S -Körper noch einmal zwischen dieselben parallelen Ebenen gelegt, jedoch umgekehrt, wodurch z mit $-z$

vertauscht wird, so sind also dieser Doppelkörper und ein Zylinder vom Querschnitt $2G_0$ Cavalierische Körper.

Für den Rauminhalt eines solchen D - oder S -Körpers von der Höhe h erhält man daher ohne weiteres

$$(D, S) \quad V = G_0 h = \frac{1}{2} (G_z + G_{-z}) h = \frac{1}{2} (G_{\frac{h}{2}} + G_{-\frac{h}{2}}) h,$$

d. h. den **Doppelsatz**: Der Rauminhalt eines D - oder S -Körpers ist gleich einem Zylinder von gleicher Höhe, dessen Grundfläche gleich dem Mittelschnitt oder gleich der halben Summe zweier äquidistanter Schnitte, insonderheit der beiden Begrenzungsschnitte ist.

Hieran knüpfen wir im Gegensatz zu oben noch die Bemerkung, daß der einfache D - oder S -Körper zweier gemischter Körper $2n - 1^{\text{ten}}$ oder $2n^{\text{ten}}$ Grades ein Cavalierischer Körper zu einem Körper $2n - 1^{\text{ten}}$ Grades ist, dessen Querschnittsfunktion außer dem konstanten Gliede nur solche mit ungeraden Potenzen von z enthält.

6. Diese Sätze enthalten einen wichtigen Sonderfall, den wir nicht unerwähnt lassen können. Erstrecken sich nämlich obige Bedingungsgleichungen (5) auch auf die Koeffizienten mit ungeraden Indizes, unterliegen daher die Koeffizienten der Querschnittsfunktionen den Bedingungen

$$(D^*) \quad A_1' - A_1'' = 0, \quad A_2' - A_2'' = 0, \quad A_3' - A_3'' = 0, \quad \dots, \quad A_m' - A_m'' = 0$$

oder

$$(S^*) \quad A_1' + A_1'' = 0, \quad A_2' + A_2'' = 0, \quad A_3' + A_3'' = 0, \quad \dots, \quad A_m' + A_m'' = 0,$$

so folgt die einfachere Beziehung

$$G_{\frac{h}{2}} = G_z = G_0 = G_{-z} = G_{-\frac{h}{2}},$$

d. h.: In einem D^* - oder S^* -Körper sind alle dem Mittelschnitt parallele Querschnitte einander gleich, und mithin

$$(D^*, S^*) \quad V = G_0 h = G_z h = G_{\frac{h}{2}} h = \dots$$

Der D^* - oder S^* -Körper und der raumgleiche Zylinder sind also Cavalierische Körper.

7. Sind insbesondere I und II Schichten von Zentralkörpern, so folgt, da ihre Koeffizienten den Bedingungen $A'_{2n-1} \mp A''_{2n-1} = 0$ und $A'_{2n} \mp A''_{2n} = 0$ genügen, nach 3 für die Entfernungen ihrer

Zentralebene von der xy -Ebene $k' = k''$, d. h.: Der Sonderfall D^* oder S^* findet bei Zentralkörpern nur dann statt, wenn diese eine gemeinsame, der xy -Ebene parallele Zentralebene haben. Ist $A_1' = A_1'' = 0$, $A_3' = A_3'' = 0$, \dots , $A_{2n-1}' = A_{2n-1}'' = 0$, so fällt diese mit der xy -Ebene selbst zusammen.

**§ 2. Die Methoden a und b; Verwandlung der Körper
in α - oder β -Körper, ihre Meridiankurven;
Geltungsbereich der Methode a, Rekursionsformel für Zentral-
schichten $2n^{\text{ten}}$ Grades.**

8. Kehren wir zur allgemeinen Untersuchung zurück. Unsere Aufgabe ist nun, den Rauminhalt eines der beiden Körper mit Hilfe des andern zu bestimmen. Ist die Querschnittsfunktion vom 0^{ten} oder 1^{ten} Grade, so ist ein Hilfskörper überflüssig, da Körper I allein schon den oben aufgestellten Formeln D bez. S genügt. Ist die Funktion dagegen vom 2^{ten} oder von höherem Grade, so unterliegt der Hilfskörper II außer den Bedingungen (5), jedenfalls der weiteren, daß

- (a) entweder das Verhältnis seines Inhaltes zum Körper I,
(b) oder sein Inhalt selbst

von vornherein feststeht. Wir werden noch zu untersuchen haben, ob und wie weit sich diese neue Bedingung (a) oder (b) mit den unter 5 aufgestellten vereinigen läßt. Jetzt werde die Möglichkeit vorausgesetzt. Der Fall (b) scheidet vorläufig aus, da, um die Reinheit der Methode zu wahren, der Rauminhalt des Hilfskörpers ebenfalls als unbekannt anzusehen ist. Dies gilt zwar auch im Falle (b), in dem jedoch beide Körper, da ihr Raumverhältnis ν feststehen soll, durcheinander ausgedrückt werden können ($I = \nu II$). Unsere Methode zerfällt demnach in zwei, von denen Methode a, weil sie auf die Inhaltsbestimmung eines Körpers, eines Vielfachen von I oder II, hinauskommt, zunächst in Betracht zu ziehen ist, während Methode b erst dann Anwendung findet, wenn mit (a) der Rauminhalt des geeigneten Hilfskörpers gewonnen worden ist.

9. Aus einem Körper I kann nun dadurch ein anderer II von vorgeschriebenem Inhaltsverhältnis hergeleitet werden, daß eine, zwei oder alle drei Koordinaten in vorgeschriebenen Ver-

hältnissen verändert werden: $x' = \varepsilon_1 x''$, $y' = \varepsilon_2 y''$, $z' = \varepsilon_3 z''$. Dies führt auf affine und insbesondere ähnliche Verwandtschaft. Von den verschiedenen Möglichkeiten, die sich hier bieten, je nachdem sich die Veränderung auf z oder Q allein oder auf beide erstreckt, empfiehlt sich als das einfachste und naturgemäße die Ähnlichkeit heranzuziehen und zwar Q und z so zu verändern, daß zwischen beiden Körpern die Beziehungen bestehen

$$(\alpha) \quad \text{entweder} \quad Q' = \varepsilon^2 Q'' \quad \text{und} \quad z' = \varepsilon z''$$

$$(\beta) \quad \text{oder} \quad Q' = \varepsilon Q'' \quad \text{und} \quad z' = \varepsilon z''.$$

10. Nur um uns kurz ausdrücken zu können, denken wir uns sämtliche Querschnitte des Körpers I und II verwandelt

(α) entweder in ähnliche und ähnlich liegende Figuren ($Q = C_2 x^2$) mit der z -Achse als gemeinsamer Ähnlichkeitslinie,

(β) oder in Rechtecke von konstanter Breite ($Q = C_1 x$), deren eine variable Seite die Abszisse ist.

Das eine oder andere ist ja bei vielen der zu untersuchenden Körper ohnehin schon der Fall. Die so verwandelten Körper I und II sind dann gleichhohe Schichten, die

(α) entweder ähnlichen Körpern,

(β) oder Zylindern mit ähnlichen Grundflächen (in der xz -Ebene) angehören.

In letzterem Falle reduziert sich die Kubatur des Körpers auf die Quadratur der Grundfläche.¹⁾

11. Jede durch die z -Achse gehende (insbesondere die xz -) Ebene schneide die Oberfläche des Körpers in einer Meridiankurve. Deren Gleichung folgt dann aus den beiden Ausdrücken für den Querschnitt

$$(\alpha) \quad Q_z \equiv C_2 x^2 = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_m z^m$$

$$(\beta) \quad \text{oder} \quad Q_z \equiv C_1 x = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_m z^m.$$

Die ähnlichen Meridiankurven zweier Körper, die obigen Bedingungen (**a**, α) oder (**a**, β) genügen, haben im allgemeinen den Koordinatenanfangspunkt nicht zum Ähnlichkeitspunkt; es ist daher für I eine Verschiebung dieser Kurve längs der z -Achse und

¹⁾ Es entsprechen sich also immer ein stereometrisches und ein planimetrisches Problem, z. B. die Kubatur des Kegels und die Quadratur der Parabel.

kongruent $\varepsilon = 1$ und nur ihrer Lage nach verschoben. Das Verhältnis der beiden Körper I und II ist beliebig, denn es hängt von den Verschiebungen $\frac{h}{2}$ und k ab. Die Querschnittsfunktionen und Meridiankurven sind demnach:

$$(\alpha) \begin{cases} Q'_z \equiv C_2 x'^2 = A_2 \left(\frac{h}{2} + z \right)^2 \\ Q''_z \equiv C_2 x''^2 = A_2 (k + z)^2. \end{cases}$$

2) Körper II ist eine Zentralschicht eines gemischten Körpers 2^{ten} oder höheren Grades, Körper I mithin die halbe Zentralschicht von gleicher Höhe.

Die Verschiebung ist $k = \frac{h}{2}$, das Ähnlichkeitsverhältnis $\varepsilon = 2$ und zwischen I und II besteht nach 10

$$(\alpha) \quad \text{entweder} \quad I = 2^3 \cdot \frac{1}{2} II = 4 II$$

$$(\beta) \quad \text{oder} \quad I = 2^2 \cdot \frac{1}{2} II = 2 II.$$

Die Querschnittsfunktionen und Gleichungen der Meridiankurven unserer ähnlichen Zentralkörper $2n^{\text{ten}}$ Grades sind demnach entweder

$$(\alpha) \begin{cases} Q'_z \equiv C_2 x'^2 = A_0 + A_2 \left(\frac{h}{2} + z \right)^2 + A_4 \left(\frac{h}{2} + z \right)^4 + \dots + A_{2n} \left(\frac{h}{2} + z \right)^{2n} \\ Q''_z \equiv C_2 x''^2 = \frac{1}{4} A_0 + A_2 z^2 + A_4 z^4 + \dots + 2^{2n-2} A_{2n} z^{2n} \end{cases}$$

oder

$$(\beta) \begin{cases} Q'_z \equiv C_1 x' = A_0 + A_2 \left(\frac{h}{2} + z \right)^2 + A_4 \left(\frac{h}{2} + z \right)^4 + \dots + A_{2n} \left(\frac{h}{2} + z \right)^{2n} \\ Q''_z \equiv C_1 x'' = \frac{1}{2} A_0 + 2 A_2 z^2 + 8 A_4 z^4 + \dots + 2^{2n-1} A_{2n} z^{2n}. \end{cases}$$

13. Nunmehr können wir die Frage in 8 beantworten, inwieweit die Koeffizienten vorstehender Gleichungen mit den früheren Bedingungen in 5 in Einklang zu bringen sind. Selbstverständlich muß vorher Q' nach Potenzen von z geordnet werden. Da die Koeffizienten mit den höchsten Indizes immer im Vorzeichen übereinstimmen, kommen nur die Bedingungen für D -Körper (nicht S -Körper) in Betracht.

Beginnen wir mit $m = 2n = 2$. Aus vorstehenden Gleichungen folgt für jede Verschiebung k und jedes Ähnlichkeitsverhältnis ε

$$(\alpha) \quad \text{entweder} \quad A_2' = A_2'' = A_2,$$

welche mit der früheren einen Bedingung in 5 ohne weiteres übereinstimmt, und also $D = I - II = 3II$ liefert;

$$(\beta) \quad \text{oder } A_2' = A_2, \quad A_2'' = \varepsilon A_2,$$

was mit der früheren, da $\varepsilon = 2$ ist, dann im Einklang steht, wenn Q' doppelt genommen wird, und $D = 2I - II = 3II$ ergibt.

Hierbei sind die Körper $2I$ und $\frac{1}{2}II$ ähnlich, wenn bei I die Breite verdoppelt wird. Wir haben also zunächst das Resultat:

Mit Methode **a** können beliebige Schichten von Reinkörpern und Zentralschichten von gemischten Körpern zweiten Grades berechnet werden.

14. Für höhere, $2n^{\text{te}}$, Potenzen sind n voneinander unabhängige Bedingungen zugleich zu erfüllen, was nicht möglich ist. Durch Vervielfachung des Körpers I läßt sich jedoch auch hier (wie vorhin unter (β)) die Übereinstimmung der höchsten Koeffizienten erreichen, und dies ist wertvoll, weil dann durch Bildung eines Differenzkörpers der Grad um 2 erniedrigt wird, denn die zunächst entstehende Differenz vom $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist nach 4 gleich einer Zentralschicht $(2n-2)^{\text{ten}}$ Grades. Für die höchsten Koeffizienten der Querschnittsfunktionen der Körper $I^{(2n)}$ und $II^{(2n)}$ lautet die alte Bedingung (5)

$$A_{2n}' = A_{2n}'' = A_{2n}$$

und die neue (12) entweder

$$(\alpha) \quad A_{2n}' = A_{2n} \quad \text{und} \quad A_{2n}'' = 2^{2n-2} A_{2n}$$

oder

$$(\beta) \quad A_{2n}' = A_{2n} \quad \text{und} \quad A_{2n}'' = 2^{2n-1} A_{2n};$$

für den entstehenden Differenzkörper $D^{(2n-2)}$ erhalten wir daher entweder

$$(\alpha) \quad D^{(2n-2)} = 2^{2n-2} I^{(2n)} - II^{(2n)} = \frac{2^{2n}-1}{4} \cdot I^{(2n)} = (2^{2n}-1) \cdot II^{(2n)}$$

oder

$$(\beta) \quad D^{(2n-2)} = 2^{2n-1} I^{(2n)} - II^{(2n)} = \frac{2^{2n}-1}{2} \cdot I^{(2n)} = (2^{2n}-1) \cdot II^{(2n)}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Rekursionsformel, indem wir $D^{(2n-2)}$ als den neuen Körper $II^{(2n-2)}$ betrachten usw., gelangen wir zu dem Resultat: Zentralschichten von gemischten Körpern $2n^{\text{ten}}$ Grades können durch n -malige Anwendung der Methode **a** berechnet werden.

Hiermit ist unsere Aufgabe eigentlich gelöst, da nach 4 jeder Körper $2n^{\text{ten}}$ oder $2n + 1^{\text{ten}}$ Grades als Zentralschicht eines gemischten Zentralkörpers $2n^{\text{ten}}$ Grades dargestellt werden kann. Es handelt sich nur noch darum, die Kubatur wirklich auszuführen.

§ 3. Inhaltsformeln für gemischte Körper 2^{ten} — 5^{ten} Grades;
Reinkörper m^{ten} Grades,
Summenformel für gemischte Körper m^{ten} Grades.

15. Bei einmaliger Anwendung der Methode **a** können alle Körperschichten, deren Querschnittsfunktion den 3^{ten} Grad nicht übersteigt, berechnet werden; ihre n -malige Anwendung führt zur Inhaltsbestimmung aller Körperschichten $2n^{\text{ten}}$ und $2n + 1^{\text{ten}}$ Grades. Hierbei ist ganz gleichgültig, ob ein α - oder β -Körper den Berechnungen zugrunde gelegt wird. Im Falle (β) ist der Körper ein Zylinder, seine Kubatur reduziert sich, wie schon erwähnt, auf die Quadratur der Grundfläche in der xz -Ebene. Um Wiederholungen zu vermeiden, wählen wir immer nur einen α -Körper. Da die Körper 2^{ten} Grades in § 4 eingehend behandelt werden, beschränken wir uns vorläufig auf folgende Inhaltsberechnungen:

Gemischter α -Körper 2^{ten} oder 3^{ten} Grades V , gegeben durch die Höhe h , seine Begrenzungsquerschnitte G_1 und G_2 und seinen Mittelschnitt G_m . Die raumgleiche Zentralschicht $\text{II} = V$ hat dann die Randquerschnitte $Q''_{-\frac{h}{2}} = Q''_{\frac{h}{2}} = \frac{1}{2}(G_1 + G_2)$ und den Mittelschnitt $Q'_0 = G_m$, die halbe Zentralschicht I also die Randquerschnitte $Q'_{-\frac{h}{2}} = 4G_m$ und $Q'_{\frac{h}{2}} = 2(G_1 + G_2)$.

Nach 13 folgt für den D -Körper

$$D = \text{I} - \text{II} = 3\text{II} = \frac{1}{2} \left\{ \left(Q'_{-\frac{h}{2}} - Q''_{-\frac{h}{2}} \right) + \left(Q'_{\frac{h}{2}} - Q''_{\frac{h}{2}} \right) \right\} \cdot h,$$

$$3\text{II} = \frac{1}{2} \left\{ 4G_m - \frac{1}{2}(G_1 + G_2) + 2(G_1 + G_2) - \frac{1}{2}(G_1 + G_2) \right\} \cdot h,$$

und da $V = \text{II}$ ist (vergl. 25, Formel I₁)

$$V = \frac{1}{6} (G_1 + 4G_m + G_2) h.$$

Dies ist die bekannte Simpsonsche Formel, die man aber nur dann verwenden wird, wenn der Mittelschnitt auch gegeben ist

(vergl. 22, Beispiel 7) oder leicht gefunden werden kann; letzteres ist nur bei den Reinkörpern der Fall. Z. B. für den

Reinkörper 3^{ten} Grades V , gegeben durch h und Randquerschnitt G , folgt aus $G_1 = 0$ und $G_2 = G$ der Mittelschnitt $G_m = \frac{1}{2^3} \cdot G = \frac{1}{8} G$ und

$$V = \frac{1}{4} Gh.$$

Daß weder der Mittelschnitt noch die Randschnitte gegeben sein müssen, zeige folgendes Beispiel:

Gemischter α -Körper 2^{ten} oder 3^{ten} Grades, gegeben durch h und $G_{-\frac{h}{3}}$, $G_{-\frac{h}{6}}$, $G_{\frac{h}{6}}$, $G_{\frac{h}{3}}$. Die Querschnitte der raumgleichen Zentralschicht II sind dann $Q''_{-\frac{h}{3}} = Q''_{\frac{h}{3}} = \frac{1}{2} (G_{-\frac{h}{3}} + G_{\frac{h}{3}})$ und $Q''_{-\frac{h}{6}} = Q''_{\frac{h}{6}} = \frac{1}{2} (G_{-\frac{h}{6}} + G_{\frac{h}{6}})$, die der halben Zentralschicht I also $Q'_{-\frac{h}{6}} = 4Q''_{\frac{h}{6}} = 2(G_{-\frac{h}{6}} + G_{\frac{h}{6}})$ und $Q'_{\frac{h}{6}} = 4Q''_{\frac{h}{6}} = 2(G_{-\frac{h}{6}} + G_{\frac{h}{6}})$, und als D -Körper folgt

$$D = I - II = 3II = \frac{1}{2} \left\{ (Q'_{-\frac{h}{6}} - Q''_{-\frac{h}{6}}) + (Q'_{\frac{h}{6}} - Q''_{\frac{h}{6}}) \right\} h,$$

der Inhalt $V = II$ ist demnach (vergl. 25, Formel I₂'')

$$V = \frac{1}{6} (2G_{-\frac{h}{3}} + G_{-\frac{h}{6}} + G_{\frac{h}{6}} + 2G_{\frac{h}{3}}) h.$$

Als Beispiel für zweimalige Anwendung der Methode a wählen wir folgende Berechnung:

Gemischter α -Körper 4^{ten} oder 5^{ten} Grades V , gegeben durch h und die Querschnitte $G_{-\frac{h}{2}}$, $G_{-\frac{h}{4}}$, G_0 , $G_{\frac{h}{4}}$, $G_{\frac{h}{2}}$, die

den Körper in vier gleichhohe Schichten teilen. Betrachten wir die raumgleiche Zentralschicht 4^{ten} Grades V als II⁽⁴⁾, so ist

$Q''_{-\frac{h}{2}} = Q''_{\frac{h}{2}} = \frac{1}{2} (G_{-\frac{h}{2}} + G_{\frac{h}{2}})$, $Q''_{-\frac{h}{4}} = Q''_{\frac{h}{4}} = \frac{1}{2} (G_{-\frac{h}{4}} + G_{\frac{h}{4}})$ und $Q'_0 = G_0$; für die halbe Zentralschicht I⁽⁴⁾ von gleicher Höhe folgt $Q'_{-\frac{h}{2}} = 4G_0$, $Q'_0 = 2(G_{-\frac{h}{4}} + G_{\frac{h}{4}})$ und $Q'_{\frac{h}{2}} = 2(G_{-\frac{h}{2}} + G_{\frac{h}{2}})$.

Nach der Rekursionsformel in 14 ergibt sich hieraus als Schicht 3^{ten} Grades

$$D^{(3)} = 4I^{(4)} - II^{(4)} = 15II^4 = 15V,$$

ein Körper, der $G_1 = 4Q'_{\frac{h}{2}} - Q''_{\frac{h}{2}} = 16G_0 - \frac{1}{2}(G_{-\frac{h}{2}} + G_{\frac{h}{2}})$,
 und $G_2 = 4Q'_{\frac{h}{2}} - Q''_{\frac{h}{2}} = \frac{15}{2}(G_{-\frac{h}{2}} + G_{\frac{h}{2}})$ zu Randschnitten und
 $G_m = 4Q'_0 - Q''_0 = 8(G_{-\frac{h}{4}} + G_{\frac{h}{4}}) - G_0$ zum Mittelschnitt hat.
 Sein Inhalt ist nach der in Beispiel (1) gewonnenen Simpson-
 schen Formel:

$$D^{(3)} = 15V = \frac{h}{6} \left\{ 12G_0 + 32(G_{-\frac{h}{4}} + G_{\frac{h}{4}}) + 7(G_{-\frac{h}{2}} + G_{\frac{h}{2}}) \right\}.$$

Also ist bei besserer Anordnung (vergl. **25**, Formel II₂):

$$V = \frac{h}{90} \left\{ 7G_{-\frac{h}{2}} + 32G_{-\frac{h}{4}} + 12G_0 + 32G_{\frac{h}{4}} + 7G_{\frac{h}{2}} \right\}.$$

Im besonderen:

Gemischte α -Zentralschicht 4^{ten} Grades V , deren Meri-
 diankurve eine gewöhnliche Parabel ist, deren Scheiteltangente
 der z -Achse parallel läuft, gegeben durch h , den Mittelschnitt G_0
 und die Randschnitte G_4 . Da bei der Parabel die Abszissen sich
 wie die Quadrate der Ordinaten verhalten, so folgt für die äqui-
 distanten Querschnitte $(\sqrt{G_0} - \sqrt{G_{\frac{h}{4}}}) : (\sqrt{G_0} - \sqrt{G_{\frac{h}{2}}}) = 1 : 2^2$
 oder $4\sqrt{G_{\frac{h}{4}}} = 3\sqrt{G_0} + \sqrt{G_{\frac{h}{2}}}$; die der Formel entsprechenden
 Querschnitte sind also G_0 , $G_{-\frac{h}{4}} = G_{\frac{h}{4}} = \frac{1}{16}(3\sqrt{G_0} + \sqrt{G_1})^2$,
 $G_{-\frac{h}{2}} = G_{\frac{h}{2}} = G_1$, und der Inhalt

$$V = \frac{h}{15} \left\{ 8G_0 + 4\sqrt{G_0 G_1} + 3G_1 \right\}.$$

Hieraus: Parabolischer Faßkörper, gegeben durch Länge h ,
 Spundtiefe $2r_0$ und Bodendurchmesser $2r_1$ des Fasses¹⁾:

$$V = \frac{\pi h}{15} \left\{ 8r_0^2 + 4r_0 r_1 + 3r_1^2 \right\}.$$

Reinkörper 4^{ten} Grades V , gegeben durch h und Rand-
 schnitt G , dessen entsprechende Querschnitte also 0 , $(\frac{1}{4})^4 G$,
 $(\frac{1}{2})^4 G$, $(\frac{3}{4})^4 G$, G sind,

$$V = \frac{1}{5} Gh.$$

¹⁾ Max Simon, Die Entwicklung der Elementargeometrie, Seite 196
 bis 197, Literatur über Faßberechnungen.

Reinkörper 5^{ten} Grades V , gegeben durch h und Rand-
schnitt G , dessen entsprechende Querschnitte also $0, \left(\frac{1}{4}\right)^5 G,$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^5 G, \left(\frac{3}{4}\right)^5 G, G$ sind,

$$V = \frac{1}{6} Gh.$$

In gleicher Weise durch dreimalige Anwendung der Methode a
den Inhalt des gemischten α -Körpers 6^{ten} oder 7^{ten} Grades zu
berechnen — d. h. ihn auf den gemischten Körper 5^{ten} Grades, den
wir eben behandelt haben, zurückzuführen — ist nicht ratsam, da
9 äquidistante Querschnitte erforderlich sind, während 7 oder 8
äquidistante schon genügen (vergl. 25). Im allgemeinen, d. h.
für Körper $2n^{\text{ten}}$ und $2n + 1^{\text{ten}}$ Grades, sind $2n + 1$ äquidistante
Querschnitte erforderlich, während schon $2n + 1$ oder $2n + 2$
genügen.

16. Die eben entwickelten Formeln lassen auf das allgemeine
Gesetz schließen, daß für einen Reinkörper m^{ten} Grades der
Inhalt $V = \frac{1}{m+1} Gh$ ist. Dies soll durch Induktion bewiesen
werden. Wir haben demnach zu zeigen, daß, wenn ein Rein-
körper von der Querschnittsfunktion $Q = A\xi^m, m = 0, 1, 2, \dots,$
 $2n - 2$ vorausgesetzt, die Inhaltsformel

$$V_{\xi=0}^{\xi=h} = \frac{Ah^{m+1}}{m+1} = \frac{Q_{(\xi=h)} h}{m+1}$$

hat, diese auch noch für $m = 2n - 1$ und $m = 2n$, also
allgemein gilt.

Beweis für $m = 2n - 1$. Ist $Q = A\xi^{2n-1} = A(k+z)^{2n-1}$ und
 $h = 2k$, so folgt nach 4

$$\frac{1}{2} (Q_z + Q_{-z}) = A \left\{ k^{2n-1} + \binom{2n-1}{2} k^{2n-3} z^2 + \dots + \binom{2n-1}{2n-2} k z^{2n-2} \right\},$$

also der Voraussetzung gemäß

$$V_{z=-k}^{z=k} = 2Ak^{2n} \left\{ 1 + \binom{2n-1}{2} \frac{1}{3} + \binom{2n-1}{4} \frac{1}{5} + \dots + \binom{2n-1}{2n-2} \frac{1}{2n-1} \right\}.$$

Nun ist

$$\binom{2n-1}{\lambda} \frac{1}{\lambda+1} = \frac{1}{2n} \binom{2n}{\lambda+1},$$

folglich

$$V_{z=-k}^{z=k} = \frac{2Ak^{2n}}{2n} \left\{ \binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \binom{2n}{5} + \dots + \binom{2n}{2n-1} \right\}.$$

Unter Berücksichtigung der Identität

$$\frac{(1+1)^\lambda - (1-1)^\lambda}{2} = 2^{\lambda-1} = \binom{\lambda}{1} + \binom{\lambda}{3} + \binom{\lambda}{5} + \dots$$

ergibt sich

$$V_{\xi=0}^{\xi=h} = V_{z=-k}^{z=k} = \frac{2Ak^{2n}}{2n} \cdot 2^{2n-1} = \frac{A \cdot (2k)^{2n-1} \cdot 2k}{2n} = \frac{Q_{(\xi=h)}^h}{2n}, \quad \text{q. e. d.}$$

Beweis für $m = 2n$. Die Anwendung unserer Rekursionsformel (14, α) auf den zu berechnenden Reinkörper V (= der halben Zentralschicht I) vom Querschnitt $Q = A\xi^{2n} = A(k+z)^{2n}$ und der ähnlichen Zentralschicht II vom Querschnitt $Q'' = 2^{2n-2}A z^{2n}$ (vergleiche 12, α) ergibt für den Querschnitt G der Körperdifferenz $2n - 1^{\text{ten}}$ Grades

$$G = 2^{2n-2} Q - Q''$$

$$= 2^{2n-2} A \left\{ k^{2n} + \binom{2n}{1} k^{2n-1} z + \binom{2n}{2} k^{2n-2} z^2 + \dots + \binom{2n}{2n-1} k z^{2n-1} \right\},$$

mithin für den Querschnitt der Zentralschicht $2n - 2^{\text{ten}}$ Grades

$$\frac{G_z + G_{-z}}{2} = 2^{2n-2} A \left\{ k^{2n} + \binom{2n}{2} k^{2n-2} z^2 + \dots + \binom{2n}{2n-2} k^2 z^{2n-2} \right\}$$

und demnach für seinen Inhalt $D^{(2n-2)} = 2^{2n-2} \text{I} - \text{II}$ oder

$$\frac{2^{2n} - 1}{4} \cdot V_{z=-k}^{z=k}$$

$$= 2^{2n-2} \cdot 2Ak^{2n+1} \left\{ 1 + \binom{2n}{2} \frac{1}{3} + \binom{2n}{4} \frac{1}{5} + \dots + \binom{2n}{2n-2} \frac{1}{2n-1} \right\}.$$

Wird in der Klammer $\binom{2n}{2n} - 1 = 0$ hinzugefügt und wie vorhin berücksichtigt, daß $\binom{2n}{\lambda} \frac{1}{\lambda+1} = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{\lambda+1}$ ist, so folgt

$$\frac{2^{2n} - 1}{4} \cdot V_{z=-k}^{z=k}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2^{2n-1} A k^{2n+1}}{2n+1} \left\{ \binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{3} + \dots + \binom{2n+1}{2n-1} + \binom{2n+1}{2n+1} - 1 \right\} \\ &= \frac{2^{2n-1} A k^{2n+1}}{2n+1} \left\{ 2^{2n} - 1 \right\}, \end{aligned}$$

und endlich

$$V_{\xi=0}^{\xi=h} = V_{z=-k}^{z=k} = \frac{A \cdot (2k)^{2n} \cdot 2k}{2n+1} = \frac{Q_{(\xi=h)}^h}{2n+1}, \quad \text{q. e. d.}$$

Bei Anwendung der Rekursionsformel (β) würde sich der Beweis fast ebenso gestaltet haben.

Da nun für die Reinkörper 0^{ten} bez. 1^{ten} Grades von der Querschnittsfunktion A_0 bez. $A_1 \xi$ der Inhalt

$$A_0 h = Q_{(\xi=h)} h \quad \text{bez.} \quad \frac{1}{2} A_1 h^2 = \frac{1}{2} Q_{(\xi=h)} h$$

der Formel genügt, so ist damit ihre allgemeine Gültigkeit als Inhaltsformel für Reinkörper bewiesen, und zugleich (da die β -Körper Zylinder sind) die Quadratur der Parabeln m^{ten} Grades für ganzzahliges m gewonnen.¹⁾

Mithin hat auch ein gemischter Körper vom Querschnitt

$$Q = A_0 + A_1 \xi + A_2 \xi^2 + \cdots + A_m \xi^m$$

und der Höhe h den Inhalt

$$V_{\xi=0}^{\xi=h} = A_0 h + \frac{1}{2} A_1 h^2 + \frac{1}{3} A_2 h^3 + \cdots + \frac{1}{m+1} A_m h^{m+1},$$

oder in anderer Form: Ein gemischter Körper $2n^{\text{ten}}$ bez. $2n+1^{\text{ten}}$ Grades vom Querschnitt

$$Q = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_{2n} z^{2n} + A_{2n+1} z^{2n+1}$$

und ebenso eine Zentralschicht $2n^{\text{ten}}$ Grades vom Querschnitt

$$G = A_0 + A_2 z^2 + A_4 z^4 + \cdots + A_{2n} z^{2n}$$

und der Höhe $h = 2k$ hat den Inhalt

$$V_{z=-k}^{z=+k} = 2 \left\{ A_0 k + \frac{1}{3} A_2 k^3 + \frac{1}{5} A_4 k^5 + \cdots + \frac{1}{2n+1} A_{2n} k^{2n+1} \right\}.$$

§ 4. Die Körper zweiten Grades; ihr Doppelsatz; ihre indirekte Inhaltsbestimmung nach den Methoden a und b.

17. Nachdem eine allgemeine Inhaltsformel gewonnen, scheint nunmehr die Methode a selbst ihren Zweck erfüllt zu haben, und die noch zu behandelnde Methode b, die Inhaltsbestimmung eines Körpers mit Hilfe eines bekannten Körpers, überhaupt überflüssig geworden zu sein. Dem ist jedoch nicht so. Für einen gemischten Körper beliebig hoher Potenz von gegebener Querschnittsfunktion ist es allerdings geraten, ihn nach eben entwickelter Formel direkt als algebraische Summe von Reinkörpern zu berechnen, wie es ja die Integralrechnung auch tut;

¹⁾ Eine viel kürzere elementare Ableitung dieser Inhalts- bez. Flächenformel, auch für gebrochene und negative Exponenten der höheren Parabeln (der Meridiankurven der α - und β -Reinkörper), gebe ich in meiner zweiten Abhandlung.

für einen gemischten Körper 1^{ten} oder 2^{ten} Grades dagegen ist es, wie an Beispielen gezeigt werden soll, überraschend einfacher, ihn als einen einzigen aufzufassen — darin liegt das wesentlich Neue — und nach Methode **a** oder **b**, also indirekt mit Hilfe eines *D*- bez. *S*-Körpers zu bestimmen. Vor allen Dingen umgeht man auf diese Weise schon die Aufstellung der Querschnittsfunktion, denn als Bestimmungsstücke sind in diesen Fällen gewöhnlich außer der Höhe *h* nicht deren Konstanten A_0, A_1, A_2 , sondern ein oder zwei Querschnitte selbst und eine die Gestalt der Meridiankurve bestimmende Größe gegeben.

Methode **a** kann nach **13** ohne weiteres nur für beliebige Schichten von Reinkörpern und Zentralschichten von gemischten Körpern zweiten Grades in Frage kommen. Da aber alle anderen Schichten — selbst die von Körpern dritten Grades — nach **4** durch zentrale Schichten zweiten Grades ersetzt werden können, so reicht Methode **a** für alle hierher gehörenden Berechnungen aus.

Doch ist ihre Anwendung, die im allgemeinen (vergl. **15** erstes Beispiel) den Mittelquerschnitt und die Randschnitte erfordert, nur in wenigen Fällen ratsam, nämlich nur dann, wenn von der Zentralschicht der Mittelschnitt (wie beim Reinkörper 2^{ten} Grades) oder die Randschnitte (wie beim gemischten endlichen Vollkörper 2^{ten} Grades) verschwinden. In allen anderen Fällen führt Methode **b** viel einfacher zum Ziele, besonders dann, wenn bei gegebenem Mittelschnitt der Reinkörper und bei gegebenen Randschnitten der gemischte endliche Vollkörper als Hilfskörper verwendet werden. Beide Methoden ergänzen sich also aufs beste, da Methode **b** gerade die Körper am vorteilhaftesten als bekannte Hilfskörper verwendet, die mit Methode **a** bequem sich berechnen lassen.

18. Ehe wir uns den Inhaltsberechnungen der Körper ersten und zweiten Grades zuwenden, soll auf ihre Meridiankurven und die Bedingungen für das Zustandekommen eines *D*- oder *S*-Körpers näher eingegangen werden.

Der Querschnitt und die Meridiankurve eines gemischten Körpers ersten oder zweiten Grades, je nachdem $A_2 = 0$ ist oder nicht, sei

$$(\alpha) \quad Q_z \equiv C_2 x^2 = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 = A_0 + A_2 (z + k)^2$$

oder

$$(\beta) \quad Q_z \equiv C_1 x = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 = A_0 + A_2 (z + k)^2.$$

Nach 3 ist hierbei

$$k = \frac{A_1}{2A_2} \quad \text{und} \quad A_0 = A_0 - A_2 k^2.$$

Die Meridiankurve stellt mit Ausnahme (β_1) einen Kegelschnitt dar und zwar, wenn

(α_1)	$A_2 = 0$	Parabel P_1 , deren Achse	} z -Achse ist,
(α_2)	{ $A_2 > 0$ und	$A_0 > 0$ Hyperbel H_1 , deren Neben-	
		$A_0 < 0$ „ H_2 , deren Haupt-	
		$A_0 = 0$ Geradenpaar H_0 , dessen	
{ $A_2 < 0$ und	$A_0 > 0$ Ellipse E , deren eine Achse		
{ $A_0 < 0$ imag. Ellipse E_i ,			
(β_1)	$A_2 = 0$	Gerade,	
(β_2)	$A_2 \geq 0$	Parabel P_2 , deren Achse der positiven oder negativen x -Achse parallel läuft.	

19. Von den Halbachsen des zentrischen Meridiankegelschnittes des α -Körpers sei a der x -Achse parallel und liege c in der z -Achse. Laufen die parallelen Querschnitte keiner Achse parallel, so bedeuten a und c konjugierte Halbmesser, und als Koordinatensystem ist das schiefwinklige zu betrachten, dessen z -Achse die Richtung von c hat.

Für die Ellipse oder Hyperbel ist $\frac{a^2}{c^2} = \mp \frac{A_2}{C_2}$.

Alle Meridiankurven eines α -Körpers gehen durch dieselben reellen oder imaginären Punkte der z -Achse, stimmen also im Mittelpunkte und dem Halbmesser c überein, wie leicht daraus gefolgert werden kann, daß alle Meridiankurven dieselben Koeffizienten A_0, A_1, A_2 haben, und nur C_2 sich ändert.

Die α -Körper selbst sollen nur nach ihren Meridiankurven als parabolische, elliptische und hyperbolische Schichten erster oder zweiter Art bezeichnet werden; die Gestalt der untereinander ähnlichen und ähnlich gelegenen Querschnitte mit der z -Achse als gemeinsamer Ähnlichkeitslinie kommt hierbei gar nicht in Betracht. Die hyperbolischen Schichten besitzen einen Asymptotenkörper (Pyramide oder Kegel), dessen Querschnitte denen der Schicht ähnlich sind. Die Mantel-

fläche einer Schicht gehört im besonderen einer Fläche zweiter Ordnung an, wenn die ähnlichen oder ähnlich gelegenen Querschnitte ebenfalls Kegelschnitte sind, deren Mittelpunkte auf der z -Achse liegen.

Alle α -Körper werden längs eines jeden Querschnitts Q von einem Tangentialkörper (Pyramide oder Kegel) berührt, dessen Spitze auf der z -Achse liegt; denn alle Meridiankurven sind der ähnlichen und ähnlich gelegenen Querschnitte zufolge affin. Rückt bei dem hyperbolischen α -Körper der Querschnitt ins Unendliche, so wird der Tangentialkörper zum Asymptotenkörper.

Die im allgemeinen nicht ähnlichen Meridiankurven zweier α -Körper mit ähnlichen und ähnlich gelegenen Querschnitten stimmen in den Koeffizienten $C_2' = C_2''$ überein. Jeder der beiden α -Körper 2^{ten} Grades ist ein Zentralkörper (2) von der Gleichung (α) in 18. Das beiden gemeinsame Koordinatensystem läßt sich so verschieben, daß auch $A_1' = A_1''$ wird. Die Querschnittsfunktionen bez. Meridiankurven lauten dann:

$$Q_z' \equiv Cx'^2 = A_0' + A_1z + A_2'z^2,$$

$$Q_z'' \equiv Cx''^2 = A_0'' + A_1z + A_2''z^2.$$

Die Differenz beider Körper ist ebenfalls ein Zentralkörper. Aus seiner Querschnittsfunktion

$$Q_z' - Q_z'' \equiv C(x'^2 - x''^2) = (A_0' - A_0'') + (A_2' - A_2'')z^2$$

folgt, daß er die xy -Ebene zur Zentralebene hat. Je zwei zu ihr äquidistante Querschnitte des Differenzkörpers sind also einander gleich und im besonderen gleich Null. Beide Körper schneiden sich demnach auf zwei äquidistanten Ebenen, deren Abstand $h = 2z$ aus $z^2 = -\frac{A_0' - A_0''}{A_2' - A_2''}$ folgt.

Ist nicht nur $A_1' = A_1''$, sondern auch $A_0' = A_0''$, so fallen diese beiden Ebenen in eine zusammen: die beiden Körper berühren einander, und ihre Differenz bildet einen Reinkörper.

20. Nach 11 stimmen nun zwei ähnliche α -Meridiankurven für jedes Ähnlichkeitsverhältnis ε in den Koeffizienten $C_2' = C_2''$ und $A_2' = A_2''$ überein. Dasselbe gilt auch von zwei ähnlich-konjugierten Hyperbeln H_1' und H_2'' , d. h. solchen, von denen jede der konjugierten der andern ähnlich ist. Da nach 5 ein D -Körper nur an die Bedingung $A_2' - A_2'' = 0$ ge-

bunden ist, so kann er also entweder durch zwei elliptische oder durch zwei hyperbolische Schichten gleicher oder verschiedener Art hergestellt werden. Für einen S -Körper ist $A_2' + A_2'' = 0$ Bedingung: A_2' und A_2'' haben demnach verschiedene Vorzeichen, und seine Herstellung erfordert also eine elliptische und eine hyperbolische Schicht erster oder zweiter Art. Aus obigen Bedingungen ergibt sich daher in allen Fällen, abgesehen vom Vorzeichen: $\frac{A_2'}{C_2'} = \frac{A_2''}{C_2''}$, also die Gleichheit der Verhältnisse entsprechender konjugierter Durchmesser, insbesondere der Achsen.

Die Meridiankurve des β -Körpers ist immer eine Parabel, deren Achse mit der x -Achse parallel läuft. Die β -Körper gehören demnach immer parabolischen Zylindern an. Da zwei β -Meridiankurven als Parabeln ähnlich sind, diese für ein beliebiges Ähnlichkeitsverhältnis ε nach 11 aber in A_2' und A_2'' nicht übereinstimmen, sondern der Bedingung $\varepsilon A_2' \mp A_2'' = 0$ genügen, so muß, um nach 5 die Bedingung für den D - bez. S -Körper herzustellen, die erste Schicht ε fach genommen werden.

Soll hiernach der **Doppelsatz** in 5 und sein Sonderfall in 6 für Körperschichten zweiten Grades gelten, so unterliegen diese für das Zustandekommen eines D - bez. S -Körpers folgenden Bedingungen:

Den D_α -Körper
bilden zwei elliptische oder
zwei hyperbolische Schichten
gleicher oder verschiedener Art

von gleicher Höhe, deren parallele Querschnitte einander ähnlich sind, und deren entsprechende Meridiankurven in den Verhältnissen der gleichgerichteten Achsen übereinstimmen. Hierbei können entweder beide Schichten zugleich in parabolische Schichten, deren Achsen mit der z -Achse zusammenfallen, oder von den hyperbolischen Schichten eine bez. beide in die der Asymptotenkörper ausarten.

Da der D_α - oder S_α -Körper nach 5 vom ersten Grade ist, so kann er nach 18 immer eine parabolische Schicht, deren Achse die z -Achse ist, zum Cavalierischen Körper haben.

Einen D_α^* -Körper

Den S_α -Körper
bilden eine elliptische und
eine hyperbolische Schicht
erster oder zweiter Art

Einen S_α^* -Körper

im besonderen bilden obige Schichten dann, wenn ihre Begrenzungsebenen der Zentrale der Meridiankurven parallel laufen. Hierbei gehören parabolische Schichten kongruenten Körpern an, deren Achsen

gleich gerichtet sind. | entgegengesetzt gerichtet sind.

Der D_α^* - oder S_α^* -Körper ist Cavalierischer Körper eines Zylinders.

Den D_β -Körper | Den S_β -Körper

bilden parabolische Schichten von gleicher Höhe und einander

gleich gerichteten, | entgegengesetzt gerichteten, der x -Achse parallelen Parabel-Achsen. Die Querschnittsrechtecke sind nicht ähnlich, wohl aber die parabolischen Zylinderkörper, denen die Schichten zugehören, wenn die Breite (d.h. hier die Mantellinie des Zylinders) der ε -fach zu nehmenden Schicht vervielfacht wird.

Der D_β - oder S_β -Körper kann nach 18 eine Prismenschicht von trapezförmiger Grundfläche in der xz -Ebene zum Cavalierischen Körper haben.

Einen D_β^* -Körper | Einen S_β^* -Körper

im besonderen bilden obige Schichten dann, wenn ihre Parabel-Achsen in eine zusammenfallen.

Der D_β^* - oder S_β^* -Körper ist Cavalierischer Körper eines rechteckigen Prismas.

Zu vorstehenden Sätzen mag ganz besonders bemerkt werden, daß, falls die den D - oder D^* -Körper bildenden Schichten gleicher Art sind, sie ähnlichen und ähnlich gelegenen Körpern zugehören.

In der früheren Bezeichnungsweise lautet

der Doppelsatz in Formel

entweder:

$$\left. \begin{matrix} D_\alpha \\ S_\alpha \end{matrix} \right\} = I \mp II = (Q_0' \mp Q_0'') \cdot h = \frac{1}{2} \left\{ \left(Q_{-\frac{h}{2}}' \mp Q_{-\frac{h}{2}}'' \right) + \left(Q_{\frac{h}{2}}' \mp Q_{\frac{h}{2}}'' \right) \right\} \cdot h$$

oder:

$$\left. \begin{matrix} D_\beta \\ S_\beta \end{matrix} \right\} = \varepsilon I \mp II = (\varepsilon Q_0' \mp Q_0'') \cdot h = \frac{1}{2} \left\{ \left(\varepsilon Q_{-\frac{h}{2}}' \mp Q_{-\frac{h}{2}}'' \right) + \left(\varepsilon Q_{\frac{h}{2}}' \mp Q_{\frac{h}{2}}'' \right) \right\} \cdot h.$$

Hierbei ist das Verhältnis

$$\varepsilon = \frac{\alpha'}{\alpha''} = \frac{c'}{c''} = \frac{p'}{p''} = \dots$$

der die beiden Meridiankurven bestimmenden Konstanten (Halbachsen α , c bez. Halbparameter p) ganz beliebig.

Wenn im Falle (β), wo die Kubatur auf eine Quadratur hinauskommt, dem Problem sein stereometrischer Charakter dadurch erhalten wird, daß εI als ein Körper, desgl. $\varepsilon Q'$ als ein Querschnitt von ε -facher Breite aufgefaßt wird, so sind beide Formeln nicht mehr verschieden und beziehen sich durchweg auf Schichten von Körpern, deren entsprechende, ihre Gestalt bestimmende Größen gleiches Verhältnis haben.

21. Um die Einfachheit der Methoden **a** und **b** zu zeigen, mögen nun Beispiele von Inhaltsberechnungen folgen, in denen wir uns auf den Fall beschränken, daß die parallelen Querschnitte senkrecht auf der Halbachse c in der z -Achse stehen. Soll jedoch allgemein c nur ein konjugierter Halbmesser vom Neigungswinkel ω gegen die xy -Ebene sein, so ist in den betreffenden Formeln c bez. die Querschnittskonstante Γ_0 durch $c \sin \omega$ bez. $\frac{\Gamma_0}{\sin^2 \omega}$ zu ersetzen.

Mit Γ_0 werde der Hauptquerschnitt eines elliptischen oder hyperbolischen Körpers von der Halbachse $c = 1$ und der Querschnitt des Asymptotenkörpers in der Höhe $c = 1$ bezeichnet. Die Begrenzungsquerschnitte einer Schicht seien G_1 und G_2 , ihr Mittelschnitt G_m ; im Falle einer Zentralschicht ist letzterer der Hauptquerschnitt $G_0 = c^2 \Gamma_0$.

Wir beginnen mit der

Berechnung von Körpern ersten Grades:

- | | |
|--|--|
| (1 α) Parabolische Schicht,
deren Achse die z -Achse ist, | (1 β) Keil-Schicht oder Prisma,
dessen trapezförmige Grundfläche in der xz -Ebene liegt, |
|--|--|

gegeben durch die Schichthöhe h und entweder die Randschnitte G_1 , G_2 oder den Mittelschnitt G_m oder zwei äquidistante Querschnitte G_{-z} , G_z . Die Inhaltsformel kann sofort hingeschrieben werden, da die Schicht als Körper ersten Grades der D - bez. S -Körper selbst ist.

$$J = \frac{h}{2} (G_1 + G_2) = h G_m = \frac{h}{2} (G_{-z} + G_z).$$

Berechnung von Körpern zweiten Grades nach Methode a.

Hier handelt es sich immer um Aufstellung eines D -Körpers, der mit D_α oder D_β bezeichnet werden soll, je nachdem Methode **a** auf einen α - oder β -Körper angewendet wird.

(2 $_\alpha$) Kegel oder Pyramide (= II), gegeben durch die Höhe h und $Q''_{-\frac{h}{2}} = G$. Als Hilfskörper wird ein Stumpf I umgeschrieben,

der dem ähnlichen Vollkörper von doppelter Höhe, also 8-fachem Inhalt, angehört. Seine Randschnitte sind

$$Q'_{-\frac{h}{2}} = 4G \quad \text{und} \quad Q'_h = G.$$

Da der Ergänzungskörper = II, so folgt I = 7II, also

$$D_\alpha = I - II = 6II = \frac{1}{2} \left\{ (4G - G) + (G - 0) \right\} h,$$

und, da $J = II$ ist,

$$J = \frac{1}{3} Gh.$$

(3 $_\alpha$) Kegel- oder Pyramidenstumpf, d. h.

{	Differenz
	Summe

 zweier Vollkörper (= I), gegeben durch h ,

$$Q'_{-\frac{h}{2}} = G_1 \quad \text{und} \quad Q'_h = G_2.$$

Ist II der Vollkörper von der Höhe h , so ist $Q''_h = 0$. Aus der

Ähnlichkeit aller drei in Frage kommender Vollkörper folgt für die Querschnitte

$$\sqrt{Q''_{-\frac{h}{2}}} = \sqrt{Q'_{-\frac{h}{2}}} \mp \sqrt{Q'_h} = \sqrt{G_1} \mp \sqrt{G_2}$$

und ferner für die Inhalte

$$I : II = (\sqrt{G_1}^3 \mp \sqrt{G_2}^3) : (\sqrt{G_1} \mp \sqrt{G_2})^3.$$

Wird der hieraus sich ergebende Wert für II in die Gleichung für den D -Körper

$$D_\alpha = I - II = \frac{1}{2} \left\{ G_1 - (\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})^2 + G_2 \right\} \cdot h = h \sqrt{G_1 G_2}$$

eingesetzt, so folgt

$$I - \frac{(\sqrt{G_1} \mp \sqrt{G_2})^3}{\sqrt{G_1}^3 \mp \sqrt{G_2}^3} \cdot I = h \sqrt{G_1 G_2}$$

und nach einigen Umformungen

$$I = \frac{h(\sqrt{G_1}^3 \mp \sqrt{G_2}^3)}{3(\sqrt{G_1} \mp \sqrt{G_2})}$$

und hieraus endlich die Formel

$$J = \frac{h}{3} (G_1 \pm \sqrt{G_1 G_2} + G_2),$$

die wir also ohne Benutzung der oben (2) abgeleiteten Inhaltsformel für den Vollkörper gewonnen haben. (Vergl. 22, 11_a.)

Ebenso einfach wie (2) gestaltet sich folgende Berechnung vom

(4) Reinkörper 2^{ten} Grades:

(4_α) Kegel oder Pyramide (= I), gegeben durch h und $Q'_h = G$; $Q'_{-\frac{h}{2}} = 0$. Hilfskörper II ist ein Doppelkegel oder eine

Doppelpyramide mit gemeinsamer Spitze der Teilkörper. Für

diese Zentralschicht II ist $Q''_{-\frac{h}{2}} = Q''_{\frac{h}{2}} = \frac{1}{4} G$, also

$$D_\alpha = I - II = \frac{3}{4} I = \frac{1}{2} \left\{ \left(0 - \frac{1}{4} G \right) + \left(G - \frac{1}{4} G \right) \right\} h,$$

$$J = \frac{1}{3} G h.$$

Mit Benutzung der Mittelschnitte ist die Rechnung noch einfacher: $Q'_0 = \frac{1}{4} G$ und $Q''_0 = 0$, also

$$D_\alpha = I - II = \frac{3}{4} I = \left(\frac{1}{4} G - 0 \right) h,$$

$$J = \frac{1}{3} G h.$$

Dieselbe Formel gilt für einen Doppelkörper, gegeben durch die Gesamthöhe h und die Randschnitte G .

(4_β) Konkaver parabolischer Zylinder (= I), gegeben durch die Parabelordinate h und $Q'_h = G = b g$, wenn b die konstante Breite des Querschnittsrechtecks bedeutet; $Q'_{-\frac{h}{2}} = 0$. Die

Berechnung ist identisch mit der Quadratur des konkaven Parabelsegmentes, dessen Scheiteltangente die z -Achse ist.

Für die Zentralschicht II folgt, da $\varepsilon = 2$ ist, $Q''_{-\frac{h}{2}} = Q''_{\frac{h}{2}} = \frac{1}{2} G$,

also

$$D_\beta = 2I - II = \frac{3}{2} I = \frac{1}{2} \left\{ \left(0 - \frac{1}{2} G \right) + \left(2 \cdot G - \frac{1}{2} G \right) \right\} h,$$

$$J = \frac{1}{3} G h = \frac{1}{3} b g h.$$

Mit Benutzung der Mittelschnitte ist die Rechnung noch einfacher: $Q_0' = \frac{1}{4}G$ und $Q_0'' = 0$, also, da $\varepsilon = 2$ ist,

$$D_\beta = 2I - II = \frac{3}{2}I = \left(2 \cdot \frac{1}{4}G - 0\right)h,$$

$$J = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3}bgh.$$

Die Fläche des konkaven Parabelsegmentes ist also ein Drittel des umgeschriebenen Rechtecks. $F = \frac{1}{3}gh$.

(5) Endlicher gemischter Vollkörper 2^{ten} Grades:

(5_a) Elliptischer Vollkörper (= II), gegeben durch h und den Mittelschnitt $Q_0'' = G$. Hilfskörper I ist ein halber elliptischer Vollkörper. Die Randschnitte sind $Q'_{-\frac{h}{2}} = 4G$, $Q'_{\frac{h}{2}} = 0$ und $Q''_{-\frac{h}{2}} = Q''_{\frac{h}{2}} = 0$, also

$$D_\alpha = I - II = 3II = \frac{1}{2} \left\{ (4G - 0) + (0 - 0) \right\} h,$$

$$J = \frac{2}{3}Gh.$$

Dieselbe Formel gilt für den halben elliptischen Vollkörper, gegeben durch seine Höhe h und seinen Randschnitt G .

(5_b) Konvexer parabolischer Zylinder (= II), gegeben durch die Parabelsehne h und den Mittelschnitt $Q_0'' = G = bg$, wenn b wieder die konstante Breite der Querschnittsrechtecke bedeutet. Die Berechnung ist identisch mit der Quadratur des konvexen Parabelsegmentes, dessen Scheiteltangente der z -Achse parallel läuft. I ist die halbe Zentralschicht, also $\varepsilon = 2$. Die Randschnitte sind $Q'_{-\frac{h}{2}} = 2G$, $Q'_{\frac{h}{2}} = 0$ und $Q''_{-\frac{h}{2}} = Q''_{\frac{h}{2}} = 0$, also

$$D_\beta = 2I - II = 3II = \frac{1}{2} \left\{ (2 \cdot 2G - 0) + (0 - 0) \right\} h,$$

$$J = \frac{2}{3}Gh = \frac{2}{3}bgh.$$

Die Fläche des konvexen Parabelsegmentes ist also zwei Drittel des umgeschriebenen Rechtecks. $F = \frac{2}{3}gh$.

(6) Im besonderen:

(6_a) Ellipsoid von den Halbachsen a, b, c . Da $h = 2c$ und $G_0 = ab\pi$ ist, folgt aus (5_a)

$$J = \frac{4\pi}{3}abc.$$

Kugel vom Radius a . Da $h = 2a$ und $G_0 = a^2\pi$ ist, folgt

$$J = \frac{4\pi}{3}a^3 = \frac{\pi}{6}h^3.$$

Bemerkenswert ihres rationalen Inhalts wegen sind ferner die Sonderfälle, deren Grundflächen G_0 rational sind; z. B. der für die Inhaltsberechnung verschiedener Gewölbeformen wichtige

(6 $''_a$) Huf des elliptischen Halbzyinders, begrenzt durch die Meridianellipse von den Halbachsen a und c als Halbzyindergrundfläche und eine beliebige andere durch die z -Achse gehende Ebene; gegeben durch a, c und die Mantellinie b des Zylinders in der xy -Ebene. Da in diesem Falle der elliptische Vollkörper die Höhe $h = 2c$ und das rechtwinklige Dreieck von den Katheten a und b zur Grundfläche $G_0 = \frac{1}{2}ab$ hat, so folgt nach (5 $_a$) aus

$$J = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}ab \cdot 2c$$

$$J = \frac{2}{3}abc.$$

Hieraus: Kreiszyinder-Huf (vergl. 10 $'_a$), wenn $a = c$ ist,

$$J = \frac{2}{3}a^2b.$$

(7 u. 8) Schicht des gemischten Körpers 2 ten Grades:

Wir behandeln fortan nur α -Körper, da die gemischten β -Körper ohne weiteres auf die unter (4 $_\beta$) und (5 $_\beta$) betrachteten zurückzuführen sind. (Vergl. 12—15 und 17—19.)

(7 $_a$) Nicht zentrale hyperbolische und elliptische Schicht, gegeben durch die Höhe h , die Randschnitte G_1, G_2 und den Mittelschnitt G_m . Vor Anwendung der Methode **a** ist die Schicht in die raumgleiche Zentralschicht von den Randschnitten $\frac{1}{2}(G_1 + G_2)$ und demselben Mittelschnitt G_m überzuführen. Die in 15 (1. Beisp.) schon ausgeführte Berechnung ergab als Inhalt

$$J = \frac{h}{6} (G_1 + 4G_m + G_2).$$

Wir heben hervor, daß die Zentralschicht und die ursprünglich gegebene ähnlichen Gebilden 2 ten Grades angehören, da die Summe der Randschnitte und der Mittelschnitt unverändert bleiben, und nach (15) bei ähnlichen Querschnitten die Gestalt des Raumgebildes von dem Ausdruck $G_1 + G_2 - 2G_m$ abhängt.

Die Schicht ist, wie unten in (15) näher begründet wird, hyperbolisch oder elliptisch, je nachdem $G_1 + G_2 \geq 2G_m$ ist und wird im Grenzfall $G_1 + G_2 = 2G_m$ parabolisch (1_α); die hyperbolische Schicht artet in einen Stumpf ihres Asymptotenkörpers aus, d. h. in die Differenz oder Summe zweier Kegel bez. Pyramiden (3_α), wenn $\sqrt{G_1} \pm \sqrt{G_2} = 2\sqrt{G_m}$ ist. Eine besondere Behandlung verdient der Fall $G_1 = G_2$, oder die

(8 $_\alpha$) Hyperbolische und elliptische Zentralschicht (= II), gegeben durch h , den Mittelschnitt $Q_0'' = G_0$ und die Randschnitte $Q''_{\frac{h}{2}} = Q''_{\frac{h}{2}} = G_1$. Für I, die halbe Zentralschicht von gleicher Höhe, erhält man $Q'_{\frac{h}{2}} = 4G_0$ und $Q'_h = 4G_1$ und aus $D_\alpha = I - II = 3II = \frac{1}{2} \left\{ (4G_0 - G_1) + (4G_1 - G_1) \right\} h = (2G_0 + G_1) h$
 $J = \frac{h}{3} (2G_0 + G_1)$.

Diese Formel, die also einen Sonderfall der vorigen darstellt, geht für $G_0 = 0$ in die Formel des Reinkörpers (2) und (4) und für $G_1 = 0$ in die des elliptischen Vollkörpers (5) über. In (9) machen wir von ihr eine wichtige Anwendung.

Im besonderen: Zentralschicht des Rotationshyperboloids 1^{ter} Art und Rotationsellipsoids (elliptischer Faßkörper¹⁾), gegeben durch h und die Radien r_0 und r_1 der Kreise des Mittelschnitts und der Randschnitte

$$J = \frac{\pi h}{3} (2r_0^2 + r_1^2).$$

(9 $_\alpha$) Hyperbolischer und elliptischer Sektor, gegeben durch die Schichthöhe h seiner Begrenzungszone (d. h. der Mantelfläche der Schicht) und den parallelen Hauptquerschnitt G_0 des hyperbolischen oder elliptischen Körpers.

Die Schicht (8) zerfällt in den Reinkörper von den Randschnitten G_1 und der Höhe h und einen hyperbolischen oder elliptischen Sektor. Da der Inhalt des ersteren nach (2) oder (4) gleich $\frac{1}{3} G_1 h$ ist, folgt für den letzteren $\frac{2}{3} G_0 h$, also ein Ausdruck, der von G_1 unabhängig ist. Also: Alle Zentralsektoren von gleicher Höhe, die Körpern 2^{ten} Grades von gleichem Hauptquerschnitt G_0 zugehören, haben gleichen Rauminhalt.

¹⁾ Siehe die Bemerkung auf S. 19.

Wird aus einem solchen Körper parallel zu G_0 eine beliebige Schicht von der Höhe h geschnitten, so hat der zu ihrer Zone gehörende Sektor, als Differenz bez. Summe zweier halben Zentral-sektoren von den Höhen $h_1 \mp h_2 = h$ berechnet, den Inhalt

$$J = \frac{2}{3} G_0 (h_1 \mp h_2)$$

oder auch

$$J = \frac{2}{3} G_0 h.$$

D. h.: Alle elliptischen und hyperbolischen Sektoren, die in der Schichthöhe h ihrer Zonen und im parallelen Hauptquerschnitt G_0 übereinstimmen, haben gleichen Rauminhalt. Im Grenzfall $2c = h$ wird der Sektor zum elliptischen Vollkörper, im Falle $c = \infty$ zum Sektor eines Zylinders oder Prismas vom Querschnitt G_0 und der Höhe h .

Hiernach kann ein hyperbolischer oder elliptischer Sektor bez. Vollkörper leicht in eine vorgeschriebene Anzahl gleicher Sektoren geteilt werden.

(10_a) In einem besonderen Falle läßt sich aus dieser Raumformel eine Flächenformel für die Zone des Sektors gewinnen. Ist nämlich der Körper 2^{ten} Grades, dem der Sektor angehört, entweder ein Kugelkeil bez. eine Vollkugel oder ein Kreis-zylinderhuf bez. ein Gebilde (z. B. Klostergewölbe), das aus einer Summe solcher Kreis-zylinderhufe sich zusammensetzt: ist also die Meridiankurve ein Kreis und G_0 ein Ausschnitt entweder eines Kreises oder eines Kreistangentenvielecks bez. diese selbst, so kann der Sektor als eine Pyramide aufgefaßt werden, deren Grundfläche die Zone und deren Höhe der Radius ist. Dasselbe gilt von dem Sektor, dessen Zone dem über G_0 errichteten Zylinder- oder Prismamantel angehört. Da nun beide raumgleiche Sektoren als Pyramiden gleicher Höhe auch gleiche Grundflächen haben, so folgt: Alle Zonen von gleicher Schichthöhe eines der betrachteten Sonderkörper sind einander flächengleich, und zwar gleich der Zone (Mantel) von gleicher Höhe des über G_0 errichteten Zylinders oder Prismas.

Hiernach kann eine Zone, deren Sektor einem Kugelkeil oder einem Kreis-zylinderhuf angehört (aber nur eine solche!), leicht in eine vorgeschriebene Anzahl gleicher Flächenstreifen zerschnitten werden.

(10_a) Bezeichnet a den Radius der eingeschriebenen Kugel

des Sonderkörpers, ferner M die Zone eines Sektors J , so folgt aus $3J = Ma = 2G_0h$ die Flächenformel $M = \frac{2h}{a} G_0$.

Hieraus folgt z. B. für die ganze Zone des Kreiszyklinders (6_α) der rationale Flächeninhalt $M = 2ab$.

22. Inhaltsbestimmung von Körpern zweiten Grades nach Methode b.

Sie zerfallen in 4 Arten, je nachdem ein D -, S -, D^* -, S^* -Körper aufgestellt wird. Auch hier können wir uns mit Ausnahme (11_β) auf Berechnungen von α -Körpern beschränken.

(11) Schicht des Reinkörpers 2^{ten} Grades, d. h. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Differenz} \\ \text{Summe} \end{array} \right\}$ zweier Vollkörper (= I), gegeben durch h , $Q'_{\frac{h}{2}} = G_1$ und $Q''_{\frac{h}{2}} = G_2$.

Da die Berechnungen für den α - und β -Körper vollständig übereinstimmen, behandeln wir beide nebeneinander:

(11_α) Kegel- oder Pyramidenstumpf. (Vergl. 3_α)

Wird der Körper als Schicht des Asymptotenkörpers eines hyperbolischen Körpers aufgefaßt und II als achsenverhältnissgleicher elliptischer Vollkörper von gleicher Höhe, so ist, da sich in ähnlichen Körpern die Querschnitte wie die Quadrate der Höhen verhalten

(11_β) Schicht des konkaven parabolischen Zylinders.

Ist II der konvexe parabolische Vollzylinder von kongruenter Meridian-Parabel, $\varepsilon = 1$, von der Sehne h , so ist, da sich die Abszissen — hier auch die Querschnitte als Rechtecke von konstanter Breite — wie die Quadrate der Ordinaten — hier der Höhen — verhalten

$$\sqrt{Q_0''} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{Q'_{\frac{h}{2}}} \mp \sqrt{Q''_{\frac{h}{2}}} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{G_1} \mp \sqrt{G_2} \right) \text{ und } Q''_{\frac{h}{2}} = Q'_h = 0.$$

$$S_\alpha = I + II = J + \frac{2}{3} Q_0'' h = \frac{1}{2} \left\{ (G_1 - 0) + (G_2 - 0) \right\} h$$

$$J + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \left(\sqrt{G_1} \mp \sqrt{G_2} \right)^2 h = \frac{1}{2} (G_1 + G_2) h$$

$$J = \frac{h}{3} (G_1 \pm \sqrt{G_1 G_2} + G_2).$$

Ebenso einfach gestaltet sich die Berechnung bei Verwendung der Mittelschnitte. Ist II die Zentralschicht des kongruenten Reinkörpers 2^{ten} Grades von der Höhe h , also $Q_0'' = 0$, so folgt aus demselben Grunde wie oben:

für die Randschnitte $\sqrt{Q''_{-\frac{h}{2}}} = \sqrt{Q''_{\frac{h}{2}}} = \frac{1}{2} (\sqrt{G_1} \mp \sqrt{G_2})$

und für den Mittelschnitt von I $\sqrt{Q'_0} = \frac{1}{2} (\sqrt{G_1} \pm \sqrt{G_2})$.

$$D_\alpha = I - II = J - \frac{1}{3} Q''_{\frac{h}{2}} h = Q'_0 h$$

$$J - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} (\sqrt{G_1} \mp \sqrt{G_2})^2 h = \frac{1}{4} (\sqrt{G_1} \pm \sqrt{G_2})^2 h$$

$$J = \frac{h}{3} (G_1 \pm \sqrt{G_1 G_2} + G_2).$$

Wird $G_1 = bg_1$ und $G_2 = bg_2$ gesetzt, so folgt für den Parallelstreifen von der Höhe h , der von der Parabel und ihrer Scheiteltangente begrenzt wird,

$$F = \frac{h}{3} (g_1 \pm \sqrt{g_1 g_2} + g_2).$$

(12—15) Schicht des gemischten α -Körpers 2^{ten} Grades

(12) Nicht zentrale $\left\{ \begin{array}{l} \text{hyperbolische Schicht 1^{ter} od. 2^{ter} Art,} \\ \text{elliptische Schicht. (Vergl. 7.)} \end{array} \right.$

(12' $_\alpha$) Die Schicht (= I) ist gegeben durch die Höhe h , $Q'_{-\frac{h}{2}} = G_1$, $Q'_{\frac{h}{2}} = G_2$ und Γ_0 , den Mittelschnitt des achsenverhältnigleichen elliptischen Vollkörpers von der Halbachse 1 in der z -Achse. Ist II der elliptische Vollkörper von der Höhe h , also $Q''_0 = \Gamma_0 \left(\frac{h}{2}\right)^2$ und $Q''_{-\frac{h}{2}} = Q''_{\frac{h}{2}} = 0$, so folgt

$$\left. \begin{array}{l} S \\ D_\alpha \end{array} \right\} = I \pm II = J \pm \frac{2}{3} \Gamma_0 \left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{1}{2} \left\{ (G_1 - 0) + (G_2 - 0) \right\} h$$

$$J \pm \frac{1}{6} \Gamma_0 h^3 = \frac{1}{2} (G_1 + G_2) h$$

$$J = \frac{h}{6} \left\{ 3(G_1 + G_2) \mp \Gamma_0 h^2 \right\}.$$

(12' $_\alpha$) Die Schicht (= I) ist gegeben durch die Höhe h , den Mittelschnitt der Schicht $Q'_0 = G_m$ und Γ_0 , den Querschnitt in der Höhe 1 des Asymptotenkörpers achsenverhältnisgleicher hyperbolischer Körper. Ist II der asymptotische Doppelkörper von der Höhe h , also $Q''_0 = 0$ und $Q''_{-\frac{h}{2}} = Q''_{\frac{h}{2}} = \Gamma_0 \left(\frac{h}{2}\right)^2$, so folgt

$$\left. \begin{matrix} D_\alpha \\ S_\alpha \end{matrix} \right\} = I \mp II = J \mp \frac{1}{3} \Gamma_0 \left(\frac{h}{2}\right)^2 h = (G_m - 0) h,$$

$$J \mp \frac{1}{12} \Gamma_0 h^3 = G_m h$$

$$J = \frac{h}{12} \{ 12 G_m \pm \Gamma_0 h^2 \}.$$

(12''') Da die gegebenen Größen nur den Rauminhalt der Schicht, nicht diese selbst, vollständig bestimmen, und von Γ_0 die Gestalt des ganzen Raumgebildes abhängt, so folgt:

Alle α -Schichten ähnlicher elliptischer oder hyperbolischer, insbesondere parabolischer Körper, die im Mittelquerschnitt und der Höhe übereinstimmen, haben gleichen Rauminhalt.

Im Grenzfall $\Gamma_0 = 0$ wird die Schicht parabolisch (1 $_\alpha$). In (15) sind die Bedingungen im Zusammenhange erörtert, unter denen eine bestimmte Art möglich ist.

(13) Im besonderen:

Schicht des Rotations- $\left\{ \begin{matrix} \text{Hyperboloids 1}^{\text{ter}} \text{ od. } 2^{\text{ter}} \text{ Art} \\ \text{Ellipsoids} \end{matrix} \right\}$,

dessen Rotationsachse die z -Achse ist, gegeben durch $\left(\frac{a}{c}\right)$, also

$$\Gamma_0 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \pi, \quad h \text{ und}$$

(13') entweder die Radien r_1 und r_2 der Begrenzungskreise

$$J = \frac{\pi h}{6} \left\{ 3(r_1^2 + r_2^2) \mp \left(\frac{a}{c} h\right)^2 \right\},$$

(13'') oder den Radius r_m des Mittelkreises

$$J = \frac{\pi h}{12} \left\{ 12 r_m^2 \pm \left(\frac{a}{c} h\right)^2 \right\}.$$

Werden r_1, r_2, r_m nur als Abszissen der Meridiankurve und π als eine beliebige Konstante aufgefaßt, so gelten vorstehende Formeln ganz allgemein wie die in (12).

(14) Hieraus:

(14') Schicht des Rotations-Paraboloids, wenn $\frac{a}{c} = 0$, also $\Gamma_0 = 0$,

$$J = \frac{\pi h}{2} (r_1^2 + r_2^2) = \pi h r_m^2.$$

(14'') Kreiskegelstumpf, d. h. $\left\{ \begin{matrix} \text{Differenz} \\ \text{Summe} \end{matrix} \right\}$ zweier Kegel,

wenn $\frac{a}{c} = \frac{r_1 \mp r_2}{h} = \tan \alpha$ ist, wo α den Winkel zwischen Achse und Mantellinie bedeutet,

$$J = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 \pm r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{\pi h}{12} (12r_m^2 + h^2 \tan^2 \alpha).$$

$$(14''') \left\{ \begin{array}{l} \text{Schicht des gleichseitigen Rotationshyper-} \\ \text{boloids} \\ \text{Kugelschicht} \end{array} \right\},$$

wenn $\frac{a}{c} = 1$, also $\Gamma_0 = \pi$ ist,

$$J = \frac{\pi h}{6} \{3(r_1^2 + r_2^2) \mp h^2\} = \frac{\pi h}{12} \{12r_m^2 \pm h^2\}.$$

(15) Bedingungsgleichungen zwischen den gegebenen Größen.

Zwischen den verschiedenen gegebenen Größen der Inhaltsformeln, die wir für jeden einzelnen Körper sämtlich als positiv voraussetzen, bestehen gewisse Bedingungsgleichungen, die erkennen lassen, zwischen welchen Grenzen ein Körper überhaupt oder als bestimmte Art möglich ist. Wir gewinnen diese Grenzen durch Betrachtung der Sonderfälle: So trennt die parabolische Schicht P die elliptischen E von den hyperbolischen, der Asymptotenkörper H_0 die hyperbolischen Schichten 1^{ter} H_1 von denen 2^{ter} Art H_2 und die halbe Zentralschicht einer Gattung die Schichten, die aus der Differenz (δ) zweier solcher hervorgehen, von denen, die aus ihrer Summe (σ) bestehen. Für die hyperbolischen Körper 2^{ter} Art gibt es keine eigentliche Schicht $H_2 \sigma$, die aus der Summe zweier halber Zentralschichten besteht, da der Körper die xy -Ebene nicht schneidet. Die Ordinaten $z^2 < c^2$ der Meridiankurve ergeben imaginäre Abszissen x , denen, der Ähnlichkeit der Querschnitte $Q = Cx^2$ zufolge, negative Querschnitte entsprechen. Diese erfüllen einen negativ zu nehmenden elliptischen Vollkörper von der Höhe $2c$, der gleichsam die Ergänzung des hyperbolischen Körpers 2^{ter} Art bildet. Umgekehrt kann letzterer als die negative Fortsetzung des ersteren angesehen werden, da wiederum den Ordinaten $z^2 > c^2$ der Meridianellipse imaginäre Abszissen entsprechen.

Die Gleichsetzung der beiden Werte in (12) bez. (13) für den Inhalt der $\left\{ \begin{array}{l} \text{hyperbolischen} \\ \text{elliptischen} \end{array} \right\}$ Schicht liefert zwischen den gegebenen Größen die wichtige Bedingungsgleichung:

$$h^2 \Gamma_0 = \pm 2(G_1 + G_2 - 2G_m)$$

bez.

$$h^2 \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \pm 2(r_1^2 + r_2^2 - 2r_m^2).$$

Hieraus folgt: für die parabolische Schicht

$$G_1 + G_2 = 2G_m \quad \text{bez.} \quad r_1^2 + r_2^2 = 2r_m^2,$$

also

$$\Gamma_0 = 0 \quad \text{bez.} \quad \left(\frac{a}{c}\right) = 0;$$

für die Differenz- oder Summenschicht des Asymptotenkörpers nach (3_a) oder (11_a)

$$\sqrt{G_1} \pm \sqrt{G_2} = 2\sqrt{G_m} \quad \text{bez.} \quad r_1 \pm r_2 = 2r_m,$$

also

$$\Gamma_0 = \left(\frac{\sqrt{G_1} \mp \sqrt{G_2}}{h}\right)^2 \quad \text{bez.} \quad \left(\frac{a}{c}\right) = \frac{r_1 \mp r_2}{h};$$

für die halbe Zentralschicht von der Höhe h , wenn die Bedingungsgleichung auf die Zentralschicht von der Höhe $2h$ angewendet wird, wobei von $G_1 > G_2$ als Randschnitte G_1 und als Mittelschnitt G_2 zu nehmen sind oder umgekehrt, je nachdem die Schicht hyperbolisch oder elliptisch ist,

$$\Gamma_0 = \frac{G_1 - G_2}{h^2} \quad \text{bez.} \quad \left(\frac{a}{c}\right) = \frac{\sqrt{r_1^2 - r_2^2}}{h}.$$

(15') Die in (12_a) gegebenen Größen h , $G_1 > G_2$, Γ_0 , bez. h , $r_1 > r_2$, $\left(\frac{a}{c}\right)$ bestimmen daher: eine hyperbolische Schicht 1^{ter} $H_{1\delta}$, $H_{1\sigma}$, oder 2^{ter} Art $H_{2\delta}$, $H_{2\sigma}$, wenn

$$0 < (\Gamma_0)_{2\delta} < \frac{(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})^2}{h^2} < (\Gamma_0)_{1\delta} < \frac{G_1 - G_2}{h^2} < (\Gamma_0)_{1\sigma} < \frac{(\sqrt{G_1} + \sqrt{G_2})^2}{h^2} < (\Gamma_0)_{2\sigma} < \infty$$

bez.

$$0 < \left(\frac{a}{c}\right)_{2\delta} < \frac{r_1 - r_2}{h} < \left(\frac{a}{c}\right)_{1\delta} < \frac{\sqrt{r_1^2 - r_2^2}}{h} < \left(\frac{a}{c}\right)_{1\sigma} < \frac{r_1 + r_2}{h} < \left(\frac{a}{c}\right)_{2\sigma} < \infty,$$

und eine elliptische Schicht E_δ , E_σ , wenn

$$0 < (\Gamma_0)_\delta < \frac{G_1 - G_2}{h^2} < (\Gamma_0)_\sigma < \infty$$

bez.

$$0 < \left(\frac{a}{c}\right)_\delta < \frac{\sqrt{r_1^2 - r_2^2}}{h} < \left(\frac{a}{c}\right)_\sigma < \infty.$$

(15'') Aus vorstehenden Ungleichungen für Γ_0 bez. $\left(\frac{a}{c}\right)$ können mit Hilfe obiger Bedingungsgleichung Grenzbedingungen für G_m bez. r_m hergeleitet werden:

Die in (7), außer h , das nicht in Betracht kommt, gegebenen Größen G_1, G_m, G_2 bez. r_1, r_m, r_2 bestimmen:

eine hyperbolische Schicht, wenn

$$\begin{aligned} \frac{G_1 + G_2}{2} > (G_m)_{2\delta} > \frac{(\sqrt{G_1} + \sqrt{G_2})^2}{4} > (G_m)_{1\delta} > \frac{G_1 + 3G_2}{4} > (G_m)_{1\sigma} \\ > \frac{(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})^2}{4} > (G_m)_{2\sigma} \end{aligned}$$

bez.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}} > (r_m)_{2\delta} > \frac{r_1 + r_2}{2} > (r_m)_{1\delta} > \frac{\sqrt{r_1^2 + 3r_2^2}}{2} > (r_m)_{1\sigma} \\ > \frac{r_1 - r_2}{2} > (r_m)_{2\sigma} \end{aligned}$$

und eine elliptische Schicht, wenn

$$\frac{G_1 + G_2}{2} < (G_m)_\delta < \frac{3G_1 + G_2}{4} < (G_m)_\sigma < \infty$$

bez.

$$\sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}} < (r_m)_\delta < \frac{\sqrt{3r_1^2 + r_2^2}}{2} < (r_m)_\sigma < \infty.$$

(15''') Die in (12'') gegebenen Größen h, G_m, Γ_0 , bez. $h, r_m, \left(\frac{a}{c}\right)$ bestimmen, wie schon erwähnt, nur den Inhalt der Schicht, nicht diese selbst; deshalb sind in diesem Falle innerhalb gewisser Grenzen verschiedene Arten von Körperschichten möglich.

Die hyperbolischen Schichten H_1, H_2 und die des Asymptotenkörpers H_0 sind mit Ausnahme $H_{1\sigma}$ an die Bedingungen gebunden

$$(\Gamma_0)_\delta < \frac{4G_m}{h^2} < (\Gamma_0)_\sigma \quad \text{bez.} \quad \left(\frac{a}{c}\right)_\delta < \frac{2r_m}{h} < \left(\frac{a}{c}\right)_\sigma$$

und die elliptischen E an die Bedingungen

$$(\Gamma_0)_\delta < \frac{4G_m}{3h^2}; (\Gamma_0)_\sigma < \frac{4G_m}{h^2} \quad \text{bez.} \quad \left(\frac{a}{c}\right)_\delta < \frac{2r_m}{h\sqrt{3}}; \left(\frac{a}{c}\right)_\sigma < \frac{2r_m}{h}.$$

(16_a) Differenzschicht zweier Körper 2^{ten} Grades, die ähnliche und ähnlich gelegene Querschnitte haben und in den Randquerschnitten übereinstimmen (vergl. 19), gegeben durch die Schichthöhe h und die Querschnittskonstanten Γ'_0 und Γ''_0 der beiden Begrenzungskörper.

Sind G_1 und G_2 die gemeinsamen Randschnitte der beiden Körperschichten, so folgt aus der Inhaltsformel (12'_a), wenn

{ beide Körper hyperbolisch oder elliptisch sind }
 { ein Körper hyperbolisch, der andere elliptisch ist } , für die Differenz
 ihrer Schichten

$$J = \frac{1}{6} h^3 (\Gamma_0' \mp \Gamma_0'').$$

Dies ist aber der Inhalt eines elliptischen Vollkörpers von der Höhe h und der Querschnittskonstante $\Gamma_0 = \Gamma_0' \mp \Gamma_0''$. Da in der Formel G_1 und G_2 nicht vorkommen, und nach 19 für den Differenzkörper je zwei äquidistante Querschnitte zum Mittelschnitt einander gleich sind, so ergibt sich:

Alle Differenzschichten von gleicher Höhe je zweier α -Körper 2^{ten} Grades, von denen die einen und desgl. die andern je untereinander ähnlich sind, haben den elliptischen Vollkörper von gleicher Höhe zum Cavalierischen Körper, dessen Querschnittskonstante obiger Bedingung entspricht.

Ist der eine Begrenzungskörper ein Stumpf (δ), so pflegt man die Differenzschicht Rinde zu nennen.

(16'_a) { Hyperbolische } Rinde, gegeben durch h, G_1, G_2
 { Elliptische }

und $\Gamma_0' = \Gamma_0$, die Querschnittskonstante der hyperbolischen oder elliptischen Schicht. Da nach (15) die Querschnittskonstante des Stumpfs $\Gamma_0'' = \left(\frac{\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}}{h}\right)^2$ ist, so folgt:

$$J = \frac{h}{6} \{ (\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})^2 \mp h^2 \Gamma_0 \}.$$

Hieraus: Parabolische Rinde, wenn $\Gamma_0 = 0$ gesetzt wird,

$$J = \frac{h}{6} (\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})^2.$$

(16''_a) Im besonderen:

Rinde des Rotations- { Hyperboloids }
 { Ellipsoids }, gegeben durch

$h, r_1, r_2, \frac{a}{c}$ oder $\Gamma_0 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \pi$,

$$J = \frac{\pi h}{6} \{ (r_1 - r_2)^2 \mp \left(\frac{a}{c} h\right)^2 \}.$$

Hieraus: Kugelrinde, gegeben durch h und Sehne s , wobei $s^2 = (r_1 - r_2)^2 + h^2$ und $a = c$ ist,

$$J = \frac{\pi}{6} h s^2.$$

Ebenso: Rinde des Rotations-Paraboloids

$$J = \frac{\pi h}{6} (r_1 - r_2)^2 = \frac{\pi h}{6} (s^2 - h^2).$$

(17) Kappe des $\left\{ \begin{array}{l} \text{hyperbolischen Körpers 2}^{\text{ter}} \text{ Art} \\ \text{elliptischen Körpers} \end{array} \right\}$,

(= II), gegeben durch h , Γ_0 und G_1 . Aus Formel (12') folgt, wenn $G_2 = 0$ ist,

$$\left. \begin{array}{l} S_\alpha \\ D_\alpha \end{array} \right\} J = \frac{h}{6} \{ 3G_1 \mp h^2 \Gamma_0 \}.$$

(17') Die Kappe (= II) ist gegeben durch h , c und Γ_0 . I ist ein Stumpf des Asymptotenkörpers von den Randquerschnitten $Q'_{-\frac{h}{2}} = c^2 \Gamma_0$ und $Q'_{\frac{h}{2}} = (c \pm h)^2 \Gamma_0$. Ersterer ist gleich dem Hauptquerschnitt G_0 des Körpers. Nur die elliptische Kappe kann G_0 enthalten.

$$\left. \begin{array}{l} D_\alpha^* \\ S_\alpha^* \end{array} \right\} = I \mp II = h \cdot Q'_{-\frac{h}{2}}$$

$$\frac{h}{3} \{ c^2 \Gamma_0 + c(c \pm h) \Gamma_0 + (c \pm h)^2 \Gamma_0 \} \mp II = h \cdot c^2 \Gamma_0$$

$$\pm II = \frac{h}{3} \{ \pm 3ch + h^2 \} \Gamma_0$$

$$J = \frac{h^2 \Gamma_0}{3} (3c \pm h).$$

(17'') Ist von der Kappe h , c und $Q''_{\frac{h}{2}} = G_1$ gegeben, so folgt dem D^* - bez. S^* -Körper zufolge aus

$$Q'_{\frac{h}{2}} \mp Q''_{\frac{h}{2}} = (c \pm h)^2 \Gamma_0 \mp G_1 = c^2 \Gamma_0 \quad \text{oder} \quad G_1 = h(2c \pm h) \Gamma_0$$

Γ_0 , und durch Elimination von Γ_0 aus einer der obigen Formeln

$$J = \frac{h(3c \pm h)}{3(2c \pm h)} G_1.$$

(17''') Im besonderen: Parabolische Kappe. Aus (17), wenn $\Gamma_0 = 0$, oder aus (17''), wenn $c = \infty$ gesetzt wird, folgt

$$J = \frac{1}{2} h G_1.$$

(18) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Hyperbolische Zentralschicht 1}^{\text{ter}} \text{ Art} \\ \text{Elliptische Zentralschicht} \end{array} \right\}$. (Vergl. 8.)

Die Zentralschicht (= I), gegeben durch h , Γ_0 und die Rand-schnitte G_1 , folgt aus Formel (12'), wenn $G_2 = G_1$ ist,

$$\left. \begin{array}{l} S_{\alpha}^* \\ D_{\alpha}^* \end{array} \right\} \quad J = \frac{h}{6} \{ 6 G_1 \mp h^2 \Gamma_0 \}.$$

Hieraus: Halb-Zentralschicht von der Höhe h

$$J = \frac{h}{3} \{ 3 G_1 \mp 2 h^2 \Gamma_0 \}.$$

(18') Die Zentralschicht (= I), gegeben durch h, Γ_0 und den Mittelschnitt G_0 , folgt aus Formel (12'')

$$\left. \begin{array}{l} D_{\alpha}^* \\ S_{\alpha}^* \end{array} \right\} \quad J = \frac{h}{12} \{ 12 G_0 \pm h^2 \Gamma_0 \}.$$

Hieraus: Halb-Zentralschicht von der Höhe h

$$J = \frac{h}{3} \{ 3 G_0 \pm h^2 \Gamma_0 \}.$$

(18'') Die Zentralschicht (= I) ist gegeben durch $h, c, Q_0' = G_0$. Ist II der achsenverhältnisgleiche Asymptotenkörper, also $Q_0'' = 0$ und $Q_{-c}'' = Q_c'' = G_0$, so folgt $Q_{-\frac{h}{2}}'' = Q_{\frac{h}{2}}'' = \left(\frac{h}{2c}\right)^2 G_0$.

$$\left. \begin{array}{l} D_{\alpha}^* \\ S_{\alpha}^* \end{array} \right\} = I \mp II = J \mp \frac{1}{3} h \cdot \left(\frac{h}{2c}\right)^2 G_0 = h G_0.$$

$$J = \frac{h}{3} \left\{ 3 \pm \left(\frac{h}{2c}\right)^2 \right\} G_0.$$

Hieraus: Halb-Zentralschicht von der Höhe h

$$J = \frac{h}{3} \left\{ 3 \pm \left(\frac{h}{c}\right)^2 \right\} G_0.$$

Im Sonderfall der Kugel erhält man die Archimedische Kugelberechnung.

(18''') Die Zentralschicht ist gegeben durch h, c, Γ_0 . Aus jeder der letzten beiden Formeln folgt, da $G_0 = c^2 \Gamma_0$ ist,

$$J = \frac{h}{12} \{ 12 c^2 \pm h^2 \} \Gamma_0.$$

Hieraus: Halb-Zentralschicht von der Höhe h

$$J = \frac{h}{3} \{ 3 c^2 \pm h^2 \} \Gamma_0.$$

(18^{IV}) Ist von der Zentralschicht h, c und $Q_{-\frac{h}{2}}' = Q_{\frac{h}{2}}' = G_1$ gegeben, so folgt dem D^* - bez. S^* -Körper zufolge aus

$$Q_{\frac{h}{2}}' \mp Q_{\frac{h}{2}}'' = G_1 \mp \left(\frac{h}{2}\right)^2 \Gamma_0 = c^2 \Gamma_0 \quad \text{oder} \quad G_1 = \frac{4c^2 \pm h^2}{4} \Gamma_0$$

Γ_0 , und durch Elimination von Γ_0 aus Formel (18) oder (18''')

$$J = \frac{h(12c^2 \pm h^2)}{3(4c^2 \pm h^2)} G_1.$$

Hieraus: Halb-Zentralschicht von der Höhe h

$$J = \frac{h(3c^2 \pm h^2)}{3(c^2 \pm h^2)} G_1.$$

(19) Im besonderen folgt aus (17) und (18) für $h = c$ und entweder den Hauptquerschnitt G_0 oder den Randschnitt G_1 oder die Querschnittskonstante Γ_0 :

Asymptotenkörper

$$J = \frac{1}{3} G_1 c = \frac{1}{3} c^3 \Gamma_0.$$

Halber elliptischer Vollkörper

$$J = \frac{2}{3} G_0 c = \frac{2}{3} c^3 \Gamma_0.$$

Halbe hyperbolische Zentralschicht (1^{ter} Art)

$$J = \frac{4}{3} G_0 c = \frac{4}{3} c^3 \Gamma_0.$$

Hyperbolische Kappe (2^{ter} Art)

$$J = \frac{4}{9} G_1 c = \frac{4}{9} c^3 \Gamma_0.$$

(19') Ferner ergeben sich für die zentrischen Flächen 2^{ter} Ordnung von den Halbachsen a, b, c , wenn also $G_0 = ab\pi$ oder $\Gamma_0 = \frac{ab}{c^2} \pi$ gesetzt wird:

Kappe des { Hyperboloids 2^{ter} Art,
Ellipsoids

$$J = \frac{\pi ab}{3c^2} h^2 (3c \pm h),$$

Zentralschicht des { Hyperboloids 1^{ter} Art,
Ellipsoids

$$J = \frac{\pi ab}{12c^2} h (12c^2 \pm h^2).$$

Halb-Zentralschicht

$$J = \frac{\pi ab}{3c^2} h (3c^2 \pm h^2).$$

(19'') Hieraus für $h = c$ die bekannten Formeln:

Asymptotenkegel

$$J = \frac{\pi}{3} abc,$$

Halbellipsoid

$$J = \frac{2\pi}{3} abc,$$

Halbe Zentralschicht des Hyperboloids 1^{ter} Art

$$J = \frac{4\pi}{3} abc,$$

Kappe des Hyperboloids 2^{ter} Art

$$J = \frac{4\pi}{3} abc.$$

§ 5. Die sogenannte mechanische Quadratur;
Ableitung der Gaußschen Formeln für die Minimalzahl der
Querschnitte und anderer Formeln.

23. Die mechanische Quadratur von Flächen bez. mechanische Kubatur von Körpern besteht bekanntlich darin, den Inhalt einer Fläche bez. eines Körpers durch eine Anzahl von Ordinaten bez. Querschnittswerten, die mit gewissen Koeffizienten verbunden sind, exakt oder näherungsweise auszudrücken. Hierbei ist also die Querschnittsfunktion selbst nicht bekannt. Die in 15 gegebenen Berechnungen sind hierher gehörende Beispiele. Für Körper m^{ten} Grades lassen sich unzählig viele derartige Formeln aufstellen, doch darf die Zahl der gegebenen Querschnitte nicht unter eine gewisse, von m abhängige Minimalzahl herabsinken, wenn die Formel exakt und nicht nur eine Näherungsformel für den Inhalt sein soll. Nach diesen Vorbemerkungen mögen die Gaußschen Formeln der mechanischen Quadratur*) und einige andere nach meiner Methode in einfacher Weise abgeleitet werden.

Für die Inhaltsbestimmung der Körper $2n^{\text{ten}}$ und $2n + 1^{\text{ten}}$ Grades sind übereinstimmend wenigstens $n + 1$ Werte der Querschnittsfunktion

*) C. F. Gauß, Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. Werke III. Band, S. 163—196; ferner aus den Göttingischen gelehrten Anzeigen abgedruckt S. 202—206.

Eine „elementare Ableitung einiger Formeln der mechanischen Quadratur“, insbesondere der ersten drei Gaußschen Formeln, hat auch E. Lampe in den Sitzungsberichten der Berliner math. Gesellsch. gegeben. Siehe deren Abdruck im Archiv d. Math. Bd. V, 1903, S. 29—35.

Herr E. Lampe machte mich ferner auf seinen Vortrag: „Zur mechanischen Quadratur“ aufmerksam, den er am 12. September 1893 in Nürnberg gehalten hat. Siehe den Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung III, S. 102—106.

$$Q(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_{2n} z^{2n} + A_{2n+1} z^{2n+1}$$

erforderlich, die paarweise äquidistant zum Mittelschnitt liegen.

Dieser Gaußsche Satz erhellt sofort aus unserem Reduktions-
satze 4, nach welchem jeder der beiden Körper durch eine in-
haltsgleiche Zentralschicht $2n^{\text{ten}}$ Grades ersetzt werden kann.
Ihre Querschnittsfunktion

$$G(z) = A_0 + A_2 z^2 + \dots + A_{2n} z^{2n}$$

hat $n + 1$ Koeffizienten, erfordert also gerade so viel Bestim-
mungsstücke, als nach Gauß Funktionswerte Q gegeben sein
müssen. Nun ist unser Ersatzkörper eine Zentralschicht, also
 $G(z) = G(-z)$; die $n + 1$ erforderlichen Querschnitte müssen
daher symmetrisch zum Mittelschnitt angeordnet sein. Wir er-
halten,

wenn n ungerade ist, $\mu = \frac{n+1}{2}$ symmetrisch gelegene Paare
von Querschnitten, dagegen

wenn n gerade ist, $\mu = \frac{n}{2}$ symmetrisch gelegene Paare und
den Mittelschnitt.

Die so angeordneten $n + 1$ Querschnitte G haben nur
 $(n + 1 - \mu)$ verschiedene Werte, es werden also μ Bestimmung-
stücke frei, welche gerade zur Ermittlung gewisser, vorläufig
unbekannter Koeffizienten ϱ hinreichen.

Die Inhaltsformel nimmt, wenn wir zur Abkürzung

$$G(z_\mu) = G(-z_\mu)$$

mit G_μ bezeichnen und $2G_\mu$ für $Q(z_\mu) + Q(-z_\mu)$ setzen, die
Gestalt an

$$\frac{h}{-\frac{h}{2}} = \frac{h}{\varrho_0 + 2\varrho_1 + \dots + 2\varrho_\mu} \left\{ \varrho_0 G_0 + 2\varrho_1 G_1 + 2\varrho_2 G_2 + \dots + 2\varrho_\mu G_\mu \right\},$$

wobei $\varrho_0 = 0$ oder 1 zu setzen ist, je nachdem n ungerade oder
gerade ist. Die Möglichkeit dieser Formel erhellt schon daraus,
daß sie für gleiche Querschnitte in die Zylinderformel übergeht.

Aus obiger Querschnittsfunktion $Q(z)$ oder $G(z)$ folgt nach
16 für den Inhalt aber auch

$$\frac{h}{-\frac{h}{2}} = A_0 h + \frac{1}{3} A_2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 h + \dots + \frac{1}{2n+1} A_{2n} \left(\frac{h}{2}\right)^{2n} h.$$

Die Übereinstimmung beider Formeln auch für die Reinkörper 2^{ten}, 4^{ten}, ..., 2^{n^{ten}} Grades liefert die nötigen Bestimmungsgleichungen zur Berechnung der $n + 1$ Unbekannten z_μ und ϱ_μ . Die eine noch fehlende Gleichung erledigt sich dadurch, daß, wenn $\varrho_0 = 0$ ist, $\varrho_1 = 1$ gesetzt werden kann, dagegen wenn $\varrho_0 = 1$ ist, $z_0 = 0$ sein muß.

In der Formel für V ist dann die Funktion Q wieder einzuführen, also zu setzen

$$2\varrho_\mu G_\mu = \varrho_\mu (Q(z_\mu) + Q(-z_\mu)).$$

24. Stellen wir nun die ersten drei Gaußschen Formeln auf:

Körper 0^{ten} oder 1^{ten} Grades. $n = 0$, $\varrho_0 = 1$, $\mu = 0$.

$$(0_0) \quad V_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = h Q(0). \quad (\text{I. Gaußsche Formel})$$

Körper 2^{ten} oder 3^{ten} Grades. $n = 1$, $\varrho_0 = 0$, $\mu = 1$.

$$V_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{2\varrho_1} \{2\varrho_1 G_1\} = A_0 h + \frac{1}{3} A_2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 h.$$

Für den Reinkörper 2^{ten} Grades ist $G_1 = A_2 z_1^2$, also der Inhalt

$$h \cdot A_2 z_1^2 = \frac{1}{3} A_2 \frac{h^2}{4} h$$

und mithin

$$z_1^2 = \frac{h^2}{12}, \quad z_1 = \pm \frac{h}{6} \sqrt{3}.$$

Aus

$$V_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{2} \{Q(z_1) + Q(-z_1)\}$$

erhalten wir also:

$$(1_0) \quad V_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{2} \left\{ Q\left(\frac{h}{6} \sqrt{3}\right) + Q\left(-\frac{h}{6} \sqrt{3}\right) \right\}. \quad (\text{II. Gaußsche Formel})$$

Körper 4^{ten} oder 5^{ten} Grades. $n = 2$, $\varrho_0 = 1$, $\mu = 1$.

$$V_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{1+2\varrho_1} \{G_0 + 2\varrho_1 G_1\} = A_0 h + \frac{1}{3} A_2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 h + \frac{1}{5} A_4 \left(\frac{h}{2}\right)^4 h.$$

Für den Reinkörper 2^{ten} Grades ist $G_0 = 0$ und $G_1 = A_2 z_1^2$, also der Inhalt

$$\frac{h}{1+2\varrho_1} \{2\varrho_1 A_2 z_1^2\} = \frac{1}{3} A_2 \frac{h^2}{4} \cdot h$$

und mithin

$$(1) \quad \frac{\varrho_1}{1+2\varrho_1} z_1^2 = \frac{h^2}{24}.$$

Für die Reinkörper 4^{ten} Grades ist $G_0 = 0$ und $G_1 = A_4 z_1^4$, also der Inhalt

$$\frac{h}{1+2\varrho_1} \{2\varrho_1 A_4 z_1^4\} = \frac{1}{5} A_4 \frac{h^4}{16} \cdot h$$

und mithin

$$(2) \quad \frac{\varrho_1}{1+2\varrho_1} z_1^4 = \frac{h^4}{160}.$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) ergibt sich durch Division

$$z_1^2 = \frac{3}{20} h^2; \quad z_1 = \pm \frac{h}{10} \sqrt{15}.$$

Wird dieser Wert in Gleichung (1) eingesetzt, so folgt

$$\varrho_1 = \frac{5}{8}.$$

Aus

$$V^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{1+2\varrho_1} \left\{ Q(0) + \varrho_1 (Q(z_1) + Q(-z_1)) \right\}$$

erhalten wir also:

$$(II_0) \quad V^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{18} \left\{ 5 Q\left(\frac{h}{10} \sqrt{15}\right) + 8 Q(0) + 5 Q\left(-\frac{h}{10} \sqrt{15}\right) \right\}.$$

(III. Gaußsche Formel)

Gauß führt die Berechnung bis $n = 6$, also bis zu den Körpern 12^{ten} und 13^{ten} Grades aus. Die drei eben entwickelten Formeln sind die einzigen bis zu $n = 6$, welche rationale Koeffizienten ϱ aufweisen. Im III. Bd. Seite 206 von Gauß' Werken steht, daß die Koeffizienten in den meisten Fällen Irrationalgrößen sind. Ich vermute, daß sie für die Körper vom 16^{ten} und 17^{ten} Grad wieder rational sind und die Rationalität der Koeffizienten demselben Gesetz gehorcht, das Gauß für die algebraische Auflösbarkeit der Kreisteilungsgleichung aufgestellt hat.

25. Es erübrigen noch einige Bemerkungen über andere Formeln der sogenannten mechanischen Quadratur: Ist für einen gemischten Körper $2n^{\text{ten}}$ oder $2n + 1^{\text{ten}}$ Grades gerade die Minimalzahl $n + 1$ von Querschnitten vorgeschrieben, so ist die von Gauß aufgestellte die einzig mögliche exakte Inhaltsformel (N_0); ist dagegen die Zahl der vorgeschriebenen Funktions-

werte um k größer, so lassen sich in ganz derselben Weise für jedes k unendlich viele Inhaltsformeln (N_k) ableiten, nur können von den zu bestimmenden Größen z und ϱ noch k willkürlich angenommen werden. So erhält man z. B. für

Körper bis zum 3^{ten} Grade $n = 1$

bei 3 Funktionswerten $k = 1$, also für $\varrho_0 = 1$, $z_0 = 0$ und das frei gewählte $z_1 = \pm \frac{h}{2}$ das zugeordnete $\varrho_1 = \frac{1}{4}$, mithin die bekannte Simpsonsche Formel (vergl. 15, S. 17)

$$(I_1) \quad V_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{6} \left\{ Q\left(\frac{h}{2}\right) + 4Q(0) + Q\left(-\frac{h}{2}\right) \right\},$$

bei 4 Funktionswerten $k = 2$, also für $\varrho_0 = 0$, $\varrho_1 = 1$ und die frei gewählten $z_1 = \pm \frac{h}{2}$ und $z_2 = \pm \frac{h}{4}$ das zugeordnete $\varrho_2 = 8$, mithin

$$(I_2') \quad V_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{18} \left\{ Q\left(\frac{h}{2}\right) + 8Q\left(\frac{h}{4}\right) + 8Q\left(-\frac{h}{4}\right) + Q\left(-\frac{h}{2}\right) \right\},$$

ebenso für die frei gewählten $z_1 = \pm \frac{h}{2}$ und $z_2 = \pm \frac{h}{6}$ das zugeordnete $\varrho_2 = 3$, mithin die Cotes-Newtonsche Formel

$$(I_2'') \quad V_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{8} \left\{ Q\left(\frac{h}{2}\right) + 3Q\left(\frac{h}{6}\right) + 3Q\left(-\frac{h}{6}\right) + Q\left(-\frac{h}{2}\right) \right\}$$

und ebenso für die frei gewählten $z_1 = \pm \frac{h}{3}$ und $z_2 = \pm \frac{h}{6}$ das zugeordnete $\varrho_2 = \frac{1}{2}$, mithin (vergl. 15, S. 18)

$$(I_2''') \quad V_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{6} \left\{ 2Q\left(\frac{h}{3}\right) + Q\left(\frac{h}{6}\right) + Q\left(-\frac{h}{6}\right) + 2Q\left(-\frac{h}{3}\right) \right\}.$$

Ferner erhält man z. B. für

Körper bis zum 5^{ten} Grade $n = 2$

bei 4 Funktionswerten $k = 1$, also für $\varrho_0 = 0$, $\varrho_1 = 1$, und das frei gewählte $z_1 = \pm \frac{h}{2}$ die zugeordneten $z_2 = \pm \frac{h}{10} \sqrt{5}$ und $\varrho_2 = 5$, mithin

$$(II_1) \quad V_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{12} \left\{ Q\left(\frac{h}{2}\right) + 5Q\left(\frac{h}{10} \sqrt{5}\right) + 5Q\left(-\frac{h}{10} \sqrt{5}\right) + Q\left(-\frac{h}{2}\right) \right\}$$

bei 5 Funktionswerten $k = 2$, also für $\varrho_0 = 1$, $z_0 = 0$ und die

frei gewählten $z_1 = \pm \frac{h}{2}$ und $z_2 = \pm \frac{h}{4}$ die zugeordneten $q_1 = \frac{7}{12}$ und $q_2 = \frac{8}{3}$, mithin (vergl. 15, S. 19)

$$(II_2) \quad V^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{90} \left\{ 7 Q\left(\frac{h}{2}\right) + 32 Q\left(\frac{h}{4}\right) + 12 Q(0) + 32 Q\left(-\frac{h}{4}\right) + 7 Q\left(-\frac{h}{2}\right) \right\}.$$

Diese Beispiele mögen genügen. Jede dieser Formeln (N_k) stellt bei Anwendung auf einen Körper, dessen Grad $2n + 1$ übersteigt, nur eine mehr oder weniger gute Näherungsformel dar. So sind z. B. für den Körper 4^{ten} oder 5^{ten} Grades von den angeführten Formeln mit 4 Querschnitten (I_2'), (I_2'') und (I_2''') Näherungsformeln, (II_1) dagegen eine exakte Inhaltsformel.*) Auf die Fehlerbestimmung der Näherungsformeln hier einzugehen, würde zu weit führen.

*) Die Formeln (I_1), (I_2'') und (II_2) befinden sich in der Abhandlung von Gauß, a. a. O. S. 168.

Die Formeln (I_2'), (I_2'') und (I_2''') fand ich früher einmal — beim Suchen nach solchen, die $Q(0)$ nicht enthalten — dadurch, daß ich den Körper V in 2, bez. 3 gleich hohe Schichten A, B , bez. A, C, B zerschnitt und die Simpsonsche Formel (I_1) auf die 3 bez. je 4 durch () bezeichneten Schichten anwandte. Ich erhielt so Formel

$$(I_2') \text{ aus } 3V = 4(A) + 4(B) - (A + B),$$

$$(I_2'') \text{ „ } 4V = (A + C + B) - 3(C) + 3(A + C) + 3(B + C),$$

$$(I_2''') \text{ „ } 2V = 3(A) + 3(C) + 3(B) - (A + C + B).$$

Meine Formel (II_1) für Körper bis zum fünften Grade ist die einzige exakte Formel von vier Funktionswerten, die die Begrenzungsquerschnitte enthält.

II.

Die Quadratur höherer Parabeln und Hyperbeln und die Kubatur solcher Körper, die diese binomischen Kurven und verwandte trinomische zu Meridian- kurven haben.*)

Einleitung.

Das Problem der Inhaltsbestimmung von Körpern mit trinomischer Meridiankurve n^{ten} Grades, mit dessen elementarer Lösung vorliegende Abhandlung sich beschäftigt, ist — von einigen Sonderfällen abgesehen — überhaupt noch nicht gestellt worden. Da alle Aufgaben eine einheitliche Behandlung erfahren, so ist auch meine Lösung der schon bekannten Sonderfälle, z. B. der Quadratur höherer Parabeln und Hyperbeln, vollständig neu und deckt sich nur für die Apollonische Parabel mit der bekannten Flächenbestimmung mittels des Satzes von den Ergänzungspallelogrammen. Schon im Vorwort, S. 5, habe ich auf die Vorteile meiner geometrischen Methode gegenüber der hergebrachten arithmetischen hingewiesen. Letztere stützt sich bei der Quadratur genannter höherer Kurven bekanntlich auf den Satz

$$\lim_{k=\infty} \frac{1^n + 2^n + \dots + k^n}{k^{n+1}} = \frac{1}{n+1}$$

und ist demnach nur für $n > -1$, aber nicht für $n \leq -1$ brauchbar, während meine „Methode c“ für jedes ganze oder gebrochene $n \geq -1$ gilt und nur für $n = -1$ versagt. Aber auch in diesem kritischen Falle, dem z. B. die Quadratur der gewöhn-

*) Vorliegende Abhandlung ist aus Vorträgen entstanden, die ich am 6. Februar 1905 im Verein für Naturkunde zu Zwickau und am 10. April 1906 auf der 16. Jahresversammlung sächs. Gymnasiallehrer zu Freiberg gehalten habe.

lichen Hyperbel entspricht, führt meine „Methode δ “ im Gegensatz zu der gebräuchlichen, aber äußerst umständlichen Berechnungsart in einfachster Weise mit Hilfe der logarithmischen Kurve zum Ziele. Das Gleiche gilt für die Quadratur dieser Kurve selbst und die an betreffender Stelle behandelten Raumprobleme.

§ 6. Die binomischen und trinomischen α - und β -Meridiankurven; ihre Büschel und deren Asymptotenkurven.

26. Die binomischen und trinomischen Kurven, die eine einfache elementare Bestimmung ihres Flächeninhaltes oder des Rauminhaltes von Körpern gestatten, deren Meridiankurven sie sind, gehören als Sonderfälle einer Kurvengattung an, deren Gleichung in rechtwinkligen oder schiefwinkligen Parallelkoordinaten auf eine der Formen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m \pm \left(\frac{z}{c}\right)^n = \pm 1$$

gebracht werden kann. Die Querschnitte eines Körpers, dessen Inhalt wir ermitteln, seien (wie in 10 der vorhergehenden Abhandlung) in Ebenen, die der xy -Ebene parallel laufen,

- (α) entweder einander ähnliche und ähnlich gelegene Figuren mit der z -Achse als gemeinsamer Ähnlichkeitslinie,
 (β) oder Rechtecke von konstanter Breite.

Ferner habe der Körper in der xz -Ebene eine Meridiankurve von der besonderen Form

$$(\alpha) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{z}{c}\right)^n = \lambda,$$

oder

$$(\beta) \quad \frac{x}{a} \pm \left(\frac{z}{c}\right)^n = \lambda,$$

wobei n und λ beliebige reelle positive oder negative ganze oder gebrochene Zahlen bedeuten, während m immer 2 bez. 1 ist.

Im Falle (α) sind die Meridiankurven des Körpers, deren Ebenen also durch die z -Achse gehen, affin.*) Ihre Gleichungen sind binomisch oder trinomisch, je nachdem $\lambda = 0$ ist oder nicht.

*) Und umgekehrt: Sind in einem Körper die Meridiankurven, deren Ebenen durch die z -Achse gehen, affin, so sind die Querschnitte in Ebenen, die der xy -Ebene parallel laufen, ähnlich und ähnlich gelegen.

Im Falle (β) ist der Körper ein Zylinder (Prisma); seine Kubatur reduziert sich also auf die Quadratur seiner Grundfläche, d. h. hier seiner Meridiankurve in der xz -Ebene. Die im allgemeinen trinomische Gleichung der Kurve (β) läßt sich durch eine Verschiebung $a\lambda$ des Koordinatenanfangspunktes längs der x -Achse stets in eine binomische überführen.

Je nachdem n positiv oder negativ ist, werden die binomischen Kurven höhere Parabeln oder Hyperbeln (\equiv negative höhere Parabeln) genannt, da sie als Sonderfälle die Apollonische Parabel und Hyperbel (deren Asymptoten hier Koordinatenachsen sind) enthalten. In gleicher Weise könnte man die trinomischen Kurven, besonders für ein gerades n , als positive und negative höhere Kegelschnitte bezeichnen.

27. Fassen wir λ als Parameter auf und lassen λ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so stellt in beiden Fällen (α) und (β) jede der beiden Gleichungen einen Büschel von Kurven dar, die einander im Unendlichen berühren. Dies ist leicht zu begründen: Unterscheiden wir je zwei Kurven eines Büschels vorübergehend durch die Indizes, so ergibt die Subtraktion zweier Gleichungen (α_1), (α_2) bez. (β_1), (β_2) für gleiche Abszissen $x_1 = x_2 = x$

$$\left(\frac{z_1}{c}\right)^n - \left(\frac{z_2}{c}\right)^n = \lambda_1 - \lambda_2 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n - 1 = (\lambda_1 - \lambda_2) \left(\frac{c}{z_2}\right)^n.$$

Nun folgt, so lange es reell möglich ist, für $x = \infty$, wenn $n > 0$ ist, $z = \infty$ und wenn $n < 0$ ist, $z = 0$. Es ist also für $n \geq 0$ immer $\lim_{x=\infty} \left(\frac{c}{z}\right)^n = 0$ und folglich für $x = \infty$ auch $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n - 1 = 0$, d. h. $z_1 = z_2$. Da hiernach zwei beliebige, mithin alle Kurven eines Büschels für $x = \infty$ eine und dieselbe Ordinate haben, und da ferner, wie aus der unten **29** entwickelten Subtangente folgt, auch diese sich für große x immer mehr der Grenze $\frac{nx}{2}$ im Falle (α) und nx im Falle (β), d. h. der Subtangente der zum Büschel gehörenden binomischen Kurve nähert, so ist die Berührung aller Kurven des Büschels damit bewiesen. Für $n < 0$ ist nach obigem die x -Achse ihre gemeinsame Asymptote.

Da im Falle (β), wie schon erwähnt, durch Koordinatenverschiebung die Gleichung einer jeden Büschelkurve λ in die der

binomischen Kurve übergeht, so besteht ein Büschel (β) immer aus einem System kongruenter Kurven mit gemeinsamer x -Achse. Während wir uns also im Falle (α) mit den Kurvenbüscheln zu beschäftigen haben, genügt im Falle (β) die Betrachtung der binomischen Kurve.

28. In jedem der beiden Büschel werden die beiden trinomischen Kurvenarten $\lambda > 0$ und $\lambda < 0$ durch die binomische Kurve $\lambda = 0$ getrennt. Da alle Kurven sich im Unendlichen berühren, so soll die letztere die Asymptotenkurve des Büschels genannt werden.

Wählen wir $\lambda = +1, 0, -1$, so erhalten wir in jedem Büschel von den drei verschiedenen Kurvenarten eines Büschels je eine Kurve, deren Gleichung wir als Normalform der betreffenden Kurvenart bezeichnen wollen. Jede beliebige Kurve kann durch Division durch λ auf die Normalform gebracht werden. Die sechs Normalformen der Kurven im Falle (α) sind:

$$\begin{array}{l|l} (1_\alpha) & \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^n = 1, & (2_\alpha) & \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^n = 1, \\ (3_\alpha) & \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^n = 0, & (4_\alpha) & \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^n = 0, \\ (5_\alpha) & \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^n = -1, & (6_\alpha) & \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^n = -1. \end{array}$$

Dem einen α -Büschel gehören die Kurven 1, 3, 5 und dem andern α -Büschel 2, 4, 6 an. Die Konstanten a und c sollen bei rechtwinkligen Koordinaten die Halbachsen, bei schiefwinkligen die konjugierten Halbmesser der trinomischen Kurven*) und die für $n \neq 2$ aus $\frac{c^n}{a^2} = p^{n-2}$ sich ergebende Konstante p der Parameter der binomischen Kurve**) genannt werden.

Obige Gleichung (4_α) zerfällt in die beiden

$$(3_\beta, 4_\beta) \quad \frac{x}{a} \pm \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{n}{2}} = 0.$$

*) Während eine jede Kurve zweiten Grades ∞ viele Paare konjugierter Halbmesser besitzt, hat unsere Kurve n^{ten} Grades nur ein Paar konjugierter Halbmesser, in bezug auf welche als Koordinatenachsen ihre Gleichung trinomisch wird.

**) nicht zu verwechseln mit λ , dem Parameter des Büschels.

Die binomischen Kurven im Falle (α) und (β) sind also identisch, wenn $n_\alpha = 2n_\beta$ ist.

Die Halbachsen oder die beiden konjugierten Halbmesser einer beliebigen Kurve λ des Büschels ergeben sich demnach aus den Gleichungen $a_\lambda^2 = a^2 \lambda$ und $c_\lambda^n = c^n \lambda$. Da hieraus durch Elimination von λ

$$\left(\frac{a_\lambda}{a}\right)^2 - \left(\frac{c_\lambda}{c}\right)^n = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{c_\lambda^n}{a_\lambda^2} = \frac{c^n}{a^2} = p^{n-2}$$

sich ergibt, so erkennt man durch Vergleich mit obiger Gleichung (4 _{α}), daß die Halbachsen einer jeden trinomischen Kurve der Büschel ein zusammengehöriges Koordinatenpaar der binomischen Asymptotenkurve der Büschel bilden, und ferner, daß $\frac{c_\lambda^n}{a_\lambda^2}$ eine Invariante der Kurven beider Büschel ist.

Für $n_\alpha = 2$ folgt aus letzterem $\frac{c_\lambda}{a_\lambda} = \text{konst.}$, also die Ähnlichkeit aller Kurven gleicher Art der Büschel (ähnliche Ellipsen und Hyperbeln), und für $n_\alpha \neq 2$, daß das Achsenverhältnis von Kurve zu Kurve veränderlich ist, und z. B. nur eine gleichachsige Kurve jeder Art in einem Büschel vorhanden ist.

Da in den Gleichungen nur x^2 vorkommt, so hat jede Kurve die z -Achse zur orthogonalen oder schiefen Symmetrielinie.

Im Sonderfalle $n_\alpha = 1$ bestehen die Büschel aus kongruenten Parabeln vom Parameter $p = \frac{a^2}{c}$ mit der z -Achse als gemeinsamer Achse.

Durch eine affine Transformation und zwar durch Parallelprojektion auf eine durch die x - oder z -Achse gehende Ebene kann eine jede Kurve in eine gleichachsige $a_\lambda = c_\lambda$ übergeführt werden.

Der Einfachheit wegen sind deshalb in den Figuren gleichachsige α -Kurven in rechtwinkligen Koordinaten und diese nur zur Hälfte dargestellt worden und zwar für die Exponenten

$$n_\alpha = \pm \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 4.$$

Die binomischen Kurven darunter sind zugleich β -Kurven für die Exponenten

$$n_\beta = \pm \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2}, 2.$$

Die Kurve mit negativem Exponenten n geht aus der entsprechenden mit positivem hervor durch eine Transformation nach dem Prinzip der reziproken Ordinaten.*)

Hierbei entsprechen unter den abgebildeten binomischen Kurven z. B. der Geraden die Hyperbel, der Parabel die Gravitationskurve.

Die α -Kurvenbüschel für verschiedene negative Exponenten n weichen nicht wesentlich in Gestalt voneinander ab. Kurven mit negativem Exponenten n haben die x -Achse und je eine Kurve (1_α) und (2_α) außerdem die Parallelen zur z -Achse $x = \pm a_2$ zu gemeinsamen Asymptoten.

Die sechs Normalformen stellen nicht für jedes n auch sechs verschiedene reelle Kurvenarten dar, sondern sie sind entweder paarweise übereinstimmend und nur der Lage nach verschieden, falls alle sechs reell sind, oder sie haben vier verschiedene reelle Formen, falls zwei Kurven imaginär sind. In letzterem Falle enthält der eine Büschel drei reelle Kurvenarten und der andere nur eine und die imaginären.

Ist, μ und ν als relativ prim vorausgesetzt, das rationale $n = \pm \frac{\mu}{\nu}$, so sind drei Fälle zu unterscheiden:

μ gerade, ν ungerade. Von den α -Kurven sind 1, 2, 4, 6 reell, 3, 5 imaginär. Die x -Achse ist Symmetrieachse jeder Kurve.

μ und ν ungerade. Alle sechs α -Kurven sind reell. Die

*) Ich behalte mir vor, auf diese Kurven demnächst in einer kleinen Abhandlung: „Das Prinzip der reziproken Ordinaten (Hyperbelverwandtschaft), ein Seitenstück zu dem der reziproken Radien (Kreisverwandtschaft)“ eingehend zurückzukommen. Einige neue Sätze daraus, die logarithmische Kurve und die Kettenlinie betreffend, habe ich bereits im Jahre 1901 Herrn G. Loria brieflich mitgeteilt. Siehe dessen Werk: „Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven“. 1902. S. 543—544, 667, 688—689. Merkwürdigerweise ist noch nicht auf die allgemeine Eigenschaft dieser Hyperbelverwandtschaft hingewiesen worden, daß entsprechende Gebilde in den kleinsten Teilen affin sind, während bekanntlich kreisverwandte in den kleinsten Teilen ähnlich (konform) sind. Als selbstentsprechende Gebilde treten z. B. hyperbolische Paraboloiden auf. Über Kreisverwandtschaft siehe u. a. meine Programmabhandlungen: „Beiträge zur synthetischen Geometrie ebener Kreissysteme und damit im Zusammenhange stehender höherer Kurven“. Werdau, 1888, No. 548; 1890, No. 570 und 1892, No. 578 (ausgegeben 1893 mit No. 579).

Büschel 1, 3, 5 und 2, 4, 6 sind kongruent und liegen einander symmetrisch zur x -Achse.

μ ungerade, ν gerade. Von den α -Kurven sind 1, 2, 4, 6 reell, 3, 5 imaginär. Die Kurven haben nur positive Ordinaten z .

In allen drei Fällen sind also im ersten Quadranten, auf den wir uns im wesentlichen beschränken, die α -Kurven 1, 2, 4, 6 vorhanden und ebenso die binomische β -Kurve 4_p . (Vergl. die Figurentafeln.)

Mit Hilfe der Koordinaten $x_{(4)} | z_{(4)}$ der binomischen α -Kurve (4) können die trinomischen leicht konstruiert werden. Wird nämlich aus je einer der Gleichungen (1), (2), (6) und Gleichung (4) die Ordinate z eliminiert, so folgen für die Abszissen der trinomischen Kurven, die gleichen Ordinaten $z_{(1)} = z_{(2)} = z_{(6)} = z_{(4)}$ zugehören, die mit Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes leicht konstruierbaren Ausdrücke

$$x_{(1)}^2 = a^2 - x_{(4)}^2, \quad x_{(2)}^2 = a^2 + x_{(4)}^2, \quad x_{(6)}^2 = -a^2 + x_{(4)}^2.$$

§ 7. Tangentenrichtung und Subtangente der Kurven in § 6 und der Exponential- oder Logarithmischen Kurve.

29. Ehe wir an unsere eigentliche Aufgabe herantreten, müssen wir noch die Tangentenrichtung und die Subtangente unserer Kurven kennen lernen. Um den elementaren Charakter der Abhandlung zu wahren, sollen diese Größen nicht ohne weiteres mit Hilfe der Formeln der Differentialrechnung bestimmt, sondern direkt aus der allgemeinen Gleichung unserer Kurven entwickelt werden. Wir halten es jedoch für angemessen, keine neuen Zeichen einzuführen, sondern das Differentialzeichen d der höheren Analysis zu gebrauchen. Die Ausdrücke dx , dz bedeuten also keine Produkte, sondern unendlich kleine Differenzen, Differentiale, d. h. Differenzen zweier unendlich wenig voneinander abweichender Größen x bez. z .

Wir wenden unsere Kurvengleichung

$$(\alpha) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{z}{c}\right)^n = \lambda \quad \text{oder} \quad \left(\frac{z}{c}\right)^n = \mp \frac{x^2 - a^2 \lambda}{a^2}$$

$$(\beta) \quad \frac{x}{a} - \left(\frac{z}{c}\right)^n = 0 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{z}{c}\right)^n = \frac{x}{a}$$

auf zwei Punkte $x_1|z_1$ und $x_2|z_2$ einer Kurve an, und ermitteln durch Subtraktion der beiden Gleichungen für die Sekante den Differenzenquotient $\frac{z_1 - z_2}{x_1 - x_2}$ und gewinnen aus diesem dadurch, daß wir die beiden Punkte unendlich nahe an den Punkt $x|z$ heranrücken, also $x_1 = x_2 = x$ und $z_1 = z_2 = z$ setzen, für die Tangente den Differentialquotient $\frac{dz}{dx}$. Da der Exponent n eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl sein kann, so haben wir vier Fälle zu unterscheiden.

Beginnen wir mit dem Differentialquotienten der α -Kurven:

Für $n_\alpha = +\mu$ ergibt die Subtraktion der beiden Kurvengleichungen:

$$\frac{z_1^\mu - z_2^\mu}{c^\mu} = \mp \frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2}$$

oder in Faktoren zerlegt

$$\frac{(z_1 - z_2)(z_1^{\mu-1} + z_1^{\mu-2}z_2 + z_1^{\mu-3}z_2^2 + \dots + z_2^{\mu-1})}{c^\mu} = \mp \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{a^2},$$

also für die Sekante den Differenzenquotienten

$$\frac{z_1 - z_2}{x_1 - x_2} = \mp \frac{c^\mu}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1^{\mu-1} + z_1^{\mu-2}z_2 + z_1^{\mu-3}z_2^2 + \dots + z_2^{\mu-1}}$$

und beim Übergang zur Tangente den Differentialquotienten

$$\frac{dz}{dx} = \mp \frac{c^\mu}{a^2} \cdot \frac{2xz}{\mu z^{\mu-1}} = \mp \frac{2xz}{\mu a^2} \cdot \left(\frac{c}{z}\right)^\mu.$$

Wird mit Hilfe obiger Kurvengleichung $\left(\frac{z}{c}\right)^\mu$ entfernt, so verschwindet auch das doppelte Vorzeichen, und wir erhalten für beliebige Kurven beider Büschel

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2xz}{\mu(x^2 - a^2\lambda)} = \frac{2xz}{n(x^2 - a^2\lambda)}.$$

Wir unterlassen absichtlich, je nachdem x oder z als unabhängige Variable betrachtet wird, z oder x mit Hilfe der Kurvengleichung zu eliminieren, weil $\frac{dz}{dx}$ in vorstehender Form für unsere Zwecke am brauchbarsten ist.

Für $n_\alpha = -\mu$ ist die Kurvengleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{c}{z}\right)^\mu = \lambda \quad \text{oder} \quad \left(\frac{c}{z}\right)^\mu = \mp \frac{x^2 - a^2 \lambda}{a^2}.$$

Die Subtraktion zweier Gleichungen ergibt

$$\left(\frac{c}{z_2}\right)^\mu - \left(\frac{c}{z_1}\right)^\mu = \frac{(z_1^\mu - z_2^\mu)c^\mu}{z_1^\mu z_2^\mu} = \pm \frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2},$$

also den Differenzenquotienten

$$\frac{z_1 - z_2}{x_1 - x_2} = \pm \frac{(x_1 + x_2) z_1^\mu z_2^\mu}{a^2 c^\mu (z_1^{\mu-1} + z_1^{\mu-2} z_2 + \dots + z_2^{\mu-1})}$$

und endlich den Differentialquotienten

$$\frac{dz}{dx} = \pm \frac{2xz^2\mu}{a^2 c^\mu \mu z^{\mu-1}} = \pm \frac{2xz}{\mu a^2} \cdot \left(\frac{z}{c}\right)^\mu$$

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{2xz}{\mu(x^2 - a^2\lambda)} = \frac{2xz}{n(x^2 - a^2\lambda)}$$

wie oben.

Für $n_\alpha = \frac{\mu}{\nu}$ ist die Kurvengleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \lambda \quad \text{oder} \quad \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \mp \frac{x^2 - a^2 \lambda}{a^2}.$$

Wir benutzen die Faktorenerlegung

$$z_1^{\frac{\mu}{\nu}} - z_2^{\frac{\mu}{\nu}} = \left(z_1^{\frac{1}{\nu}} - z_2^{\frac{1}{\nu}}\right) \left(z_1^{\frac{\mu-1}{\nu}} + z_1^{\frac{\mu-2}{\nu}} z_2^{\frac{1}{\nu}} + \dots + z_2^{\frac{\mu-1}{\nu}}\right)$$

und deren Sonderfall für $\mu = \nu$

$$z_1 - z_2 = \left(z_1^{\frac{1}{\nu}} - z_2^{\frac{1}{\nu}}\right) \left(z_1^{\frac{\nu-1}{\nu}} + z_1^{\frac{\nu-2}{\nu}} z_2^{\frac{1}{\nu}} + \dots + z_2^{\frac{\nu-1}{\nu}}\right)$$

und erhalten aus beiden durch Division

$$\frac{z_1^{\frac{\mu}{\nu}} - z_2^{\frac{\mu}{\nu}}}{z_1 - z_2} = \frac{z_1^{\frac{\mu-1}{\nu}} + z_1^{\frac{\mu-2}{\nu}} z_2^{\frac{1}{\nu}} + \dots + z_2^{\frac{\mu-1}{\nu}}}{z_1^{\frac{\nu-1}{\nu}} + z_1^{\frac{\nu-2}{\nu}} z_2^{\frac{1}{\nu}} + \dots + z_2^{\frac{\nu-1}{\nu}}}.$$

Durch Subtraktion der beiden Kurvengleichungen folgt

$$z_1^{\frac{\mu}{\nu}} - z_2^{\frac{\mu}{\nu}} = \mp \frac{c^\nu}{a^2} (x_1^2 - x_2^2)$$

und nach obiger Faktorenerlegung

$$\frac{z_1 - z_2}{x_1 - x_2} = \mp \frac{c^{\frac{\mu}{v}}}{a^2} (x_1 + x_2) \frac{\left(z_1^{\frac{v-1}{v}} + z_1^{\frac{v-2}{v}} z_2^{\frac{1}{v}} + \dots + z_2^{\frac{v-1}{v}} \right)}{\left(z_1^{\frac{\mu-1}{v}} + z_1^{\frac{\mu-2}{v}} z_2^{\frac{1}{v}} + \dots + z_2^{\frac{\mu-1}{v}} \right)},$$

für den Differentialquotienten also

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \mp \frac{2xc^{\frac{\mu}{v}} \cdot v z^{\frac{v-1}{v}}}{a^2 \cdot \mu z^{\frac{\mu-1}{v}}} = \mp \frac{2xc^{\frac{\mu}{v}}}{\frac{\mu}{v} a^2 z^{\frac{\mu-1}{v}}} = \mp \frac{2xz}{\frac{\mu}{v} a^2} \cdot \left(\frac{c}{z} \right)^{\frac{\mu}{v}} \\ &= \frac{2xz}{\frac{\mu}{v} (x^2 - a^2 \lambda)} = \frac{2xz}{n(x^2 - a^2 \lambda)} \end{aligned}$$

wie oben.

Für $n_\alpha = -\frac{\mu}{v}$ gestaltet sich die Entwicklung ganz analog; wir sparen uns deshalb die Darlegung. Es resultiert dieselbe Formel wie in den drei betrachteten Fällen; sie gilt also für jedes rationale n .

Da sich nun jede irrationale Größe beliebig eng zwischen zwei rationale, also zwei Brüche, einschließen läßt, so darf die Formel auch für irrationale Exponenten als gültig betrachtet werden.

In ganz gleicher Weise, nur etwas einfacher, erhält man für die vier Fälle $n_\beta = \pm \mu, \pm \frac{\mu}{v}$, den Differentialquotienten der β -Kurve.

Es gelten also für die Büschel der trinomischen α -Kurven bez. die binomische β -Kurve ganz allgemein folgende Formeln:

$$(\alpha) \quad \left(\frac{x}{a} \right)^2 \pm \left(\frac{z}{c} \right)^n = \lambda; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2xz}{n(x^2 - a^2 \lambda)},$$

$$(\beta) \quad \left(\frac{x}{a} \right) - \left(\frac{z}{c} \right)^n = 0; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{nx}.$$

Ganz abgesehen davon, daß bei den Inhaltsbestimmungen die Differentialquotienten gerade in der eben aufgestellten Form am einfachsten sich verwenden lassen, kann aus ihr auch sofort die Subtangente ermittelt werden.

Denken wir uns die Tangente der Kurve vom Berührungspunkt bis zum Schnittpunkt mit der Abszissenachse gezogen und

die Projektion dieser Strecke als Subtangente s_x bezeichnet, so folgt aus ähnlichen Dreiecken ohne weiteres:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\text{Ordinate } z}{\text{Subtangente } s_x},$$

und wir erhalten daher für die Meridiankurven im Falle (α) und (β)

$$(\alpha) \quad \text{Subtangente } s_x = \frac{n(x^2 - a^2\lambda)}{2x} = \frac{n}{2} x \left(1 - \frac{a^2\lambda}{x^2}\right),$$

$$(\beta) \quad \text{Subtangente } s_x = nx.$$

Die Subtangente aller Kurven λ eines α -Büschels nähern sich demnach für sehr große x immer mehr dem Werte der Subtangente $s_x = \frac{n}{2} x$ der binomischen Asymptotenkurve*).

In gleicher Weise läßt sich die Subtangente s_z auf der z -Achse aus

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\text{Abszisse } x}{\text{Subtangente } s_z}$$

bestimmen. Für die binomische Kurve ($\lambda = 0$) folgt

$$(\alpha) \quad \text{Subtangente } s_z = \frac{2}{n} z,$$

$$(\beta) \quad \text{Subtangente } s_z = \frac{1}{n} z.$$

30. Ganz ebenso gestaltet sich die Berechnung des Differentialquotienten, wenn in der Kurvengleichung an Stelle von $\left(\frac{z}{c}\right)^n$ eine konvergente Potenzreihe, z. B. die Exponentialfunktion

$$e^{\frac{z}{c}} = 1 + \frac{1}{1} \left(\frac{z}{c}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(\frac{z}{c}\right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{z}{c}\right)^3 + \dots$$

tritt. Es handelt sich dann um „binomische“ oder „trinomische“ Kurven

*) In gleicher Weise kann auch die allgemeinere Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m \pm \left(\frac{z}{c}\right)^n = \lambda$$

direkt behandelt werden. Man erhält

$$\frac{dz}{dx} = \frac{m x^{m-1} z}{n(x^m - a^m \lambda)} \quad \text{und Subtangente } s_x = \frac{n}{m} x \left(1 - \frac{a^m \lambda}{x^m}\right).$$

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \quad & \left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm e^{\frac{z}{c}} = \lambda, & \text{bez.} & \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm e^{\frac{z}{c}} = \lambda, \\
 (\beta) \quad & \frac{x}{a} - e^{\frac{z}{c}} = 0, & & \quad \frac{x}{a} - e^{\frac{z}{c}} = 0,
 \end{aligned}$$

die als Exponentialkurven parabolischer bez. hyperbolischer Art bezeichnet werden können, da beide Kurvenarten in gleichem Sinne hyperbelverwand¹⁾ sind wie oben die höheren Parabeln und Hyperbeln.

Wir gehen auf die trinomischen Exponentialkurven hier nicht ein¹⁾, bestimmen aber von der binomischen Kurve parabolischer Art

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \quad & \left(\frac{x}{a}\right)^2 - e^{\frac{z}{c}} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x}{a} = e^{\frac{z}{2c}} \quad \text{oder} \quad \frac{z}{2c} = \log \text{ nat } \frac{x}{a}, \\
 (\beta) \quad & \frac{x}{a} - e^{\frac{z}{c}} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{z}{c} = \log \text{ nat } \frac{x}{a},
 \end{aligned}$$

die auch im Falle (α) eine gewöhnliche Exponential- oder logarithmische Kurve ist, Differentialquotient und Subtangente, weil diese Kurve bei einigen Inhaltsbestimmungen als Hilfskurve dienen soll.

Wir legen nur die Kurve (β) unserer Berechnung zu Grunde, da wir im Falle (α) nur nötig haben, c durch $2c$ zu ersetzen.

Die Subtraktion zweier Kurvengleichungen (β) für die Punkte $x_1 | z_1$ und $x_2 | z_2$ ergibt

$$\frac{x_1 - x_2}{a} = e^{\frac{z_1}{c}} - e^{\frac{z_2}{c}} = \frac{z_1 - z_2}{c} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{z_1^2 - z_2^2}{c^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{z_1^3 - z_2^3}{c^3} + \dots,$$

also den Differenzenquotient

$$\frac{x_1 - x_2}{z_1 - z_2} = \frac{a}{c} \left\{ 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{z_1 + z_2}{c} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2}{c^2} + \dots \right\}$$

und endlich den Differentialquotient

$$\frac{dx}{dz} = \frac{a}{c} \left\{ 1 + \frac{1}{1} \left(\frac{z}{c}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{z}{c}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{z}{c}\right)^3 + \dots \right\}$$

oder

$$(\beta) \quad \frac{dx}{dz} = \frac{a}{c} \cdot e^{\frac{z}{c}} = \frac{x}{c}.$$

¹⁾ Siehe die Anmerkung auf S. 56.

In gleicher Weise folgt für die Kurve (α)

$$(\alpha) \quad \frac{dx}{dz} = \frac{a}{2c} \cdot e^{\frac{z}{2c}} = \frac{x}{2c}.$$

Zu $z=0$ ergibt sich $x=a$ und $\frac{dx}{dz} = \frac{a}{c}$; die Kurve schneidet also die x -Achse.

Zu $z = \infty$ gehört $x = 0$ und $\frac{dx}{dz} = 0$; die z -Achse ist daher Asymptote der Kurve. Da ferner für die Subtangente s_z auf der z -Achse nach S. 61 die Gleichung

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\text{Abszisse } x}{\text{Subtangente } s_z}$$

gilt, so hat die Exponential- oder logarithmische Kurve (α) bez. (β) auf der Asymptote die konstante Subtangente $2c$ bez. c .

§ 8. Methode c: Allgemeine Sätze zur Inhaltsbestimmung der α - und β -Körper, wenn $n \geq -1$ ist.

31. Behandeln wir zunächst

Methode c_α : die Inhaltsbestimmung des α -Körpers,

der durch die binomische oder trinomische Meridiankurve λ eines Büschels (vergl. die Figurentafeln)

$$(\alpha) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{z}{c}\right)^n = \lambda \quad \text{oder} \quad \left(\frac{z}{c}\right)^n = \mp \frac{x^2 - a^2\lambda}{a^2}$$

und durch die Konstante Γ seiner ähnlichen und ähnlich gelegenen Querschnitte $Q_z = x^2\Gamma$ parallel der xy -Ebene bestimmt ist. Diese Konstante Γ steht mit der früheren Γ_0 (vergl. 21) in dem Zusammenhange $a^2\Gamma = c^2\Gamma_0$.

Wir gewinnen im folgenden in einfacher Weise den Inhalt des Körpers durch gleichzeitige Betrachtung seines „zugehörigen Zylinders“, der $a_\lambda^2\Gamma = a^2\lambda\Gamma$ zur Grundfläche und die z -Achse zur Achse hat.

Je nachdem $n \geq 0$ ist, hat der Zylinder den Körperquerschnitt $Q_{z=0}$ oder $Q_{z=\infty}$ zur Grundfläche; es ergibt sich also: Die Körper (1_α) und (2_α) werden von ihm in der xy -Ebene berührt bez. geschnitten oder er ist ihr asymptotischer Zylinder; für die Körper (3_α) und (4_α) degeneriert er in die z -Achse; und für die Körper

(5_α) und (6_α) ist er negativ in Rechnung zu bringen, da $\lambda < 0$ zufolge seine Grundfläche negativ ist.

Bestimmen wir also bei einem Körper mit trinomischer Meridiankurve nicht den Querschnitt Q allein, sondern die aus Körper- und Zylinderquerschnitt sich ergebende algebraische Differenz

$$G_z = x^2\Gamma \mp a_\lambda^2\Gamma = (x^2 - a^2\lambda)\Gamma,$$

d. h., je nachdem $\lambda \geq 0$ ist, die Differenz bez. Summe beider Querschnitte, und nur für $\lambda = 0$, also beim Körper mit binomischer Meridiankurve, den vollen Körperquerschnitt, so ergibt sich nach Einführung von z mit Hilfe der Kurvengleichung (α)

$$\begin{matrix} (1, 3, 5) \\ (2, 4, 6) \end{matrix} \quad G_z = \mp \left(\frac{z}{c}\right)^n a^2\Gamma,$$

ein Ausdruck, der den Parameter λ der von uns betrachteten Kurvenbüschel nicht mehr enthält, sondern nur noch von z abhängt. Wir finden also:

Für alle α -Körper, deren Meridiankurven einen Büschel bilden, und ihre zugeordneten Zylinder ist in einer jeden, der xy -Ebene parallelen Ebene der Querschnitt G_z konstant.¹⁾

Wird eine Schicht, deren parallele Querschnitte G (nicht Q !) sind, kurz als Querschicht I_λ bezeichnet, so folgt:

Satz I_α. Alle Querschichten I_λ der Körper des Büschels, die zwischen denselben parallelen Ebenen $z = z_1$ und $z = z_2$ liegen, sind als Cavalierische Körper einander gleich und insbesondere gleich der Vollschicht $I_{\lambda=0}$ des Asymptotenkörpers.¹⁾

¹⁾ Diese Sätze gelten noch viel allgemeiner für α -Körper, deren Meridiankurve die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm f\left(\frac{z}{c}\right) = \lambda$$

hat, wenn die Funktion $f\left(\frac{z}{c}\right)$ innerhalb der in Frage kommenden Grenzen eindeutig und stetig ist, z. B. auch für die Funktion der Exponentialgröße

$$f\left(\frac{z}{c}\right) = e^{\frac{z}{c}}. \quad (\text{Vgl. § 10.})$$

Mithin kann die volle Schicht eines Körpers mit trinomischer Meridiankurve $\lambda \geq 0$ aus seiner Querschicht I_λ , insbesondere aus $I_{\lambda=0}$ der binomischen Asymptotenkurve, durch Addition bez. Subtraktion des zugehörigen Zylinders bestimmt werden.

Wählen wir nun zwei verschiedene Körper λ' und λ'' eines oder beider Büschel mit ihren zugeordneten Zylindern, so erhellt aus dem eben gewonnenen Satze:

Für alle der xy -Ebene parallelen Ebenen ist die Querschnittsdifferenz bez. Summe $Q' \mp Q''$ (nicht $G' - G''!$), je nachdem beide Körper einem oder beiden Büscheln angehören, konstant und zwar gleich der algebraischen Querschnittsdifferenz $a^2(\lambda' - \lambda'')\Gamma$ der zugehörigen Zylinder.

Die Differenz bez. Summe der beiden Körperschichten ist also ein Cavalierischer Körper eines Zylinders und bildet daher einen D^* - bez. S^* -Körper (vergl. 6).

32. Wir denken uns jetzt zu der zwischen den Koordinaten z_1 und z_2 gelegenen Querschicht I_λ eines Körpers die den Begrenzungsquerschnitten zugehörigen Zylindermäntel konstruiert, und nennen den von beiden Mänteln und der xy -Ebene begrenzten Körper II_λ die zugeordnete Mantelschicht. Dann entspricht der unendlich dünnen, durch z und dz bestimmten Querschicht $dI_\lambda = G_z \cdot dz$ eine unendlich dünne Mantelschicht $dII_\lambda = z \cdot dG_\lambda$. (Vergl. die Figurentafel.) Ihre Grundfläche, das Flächendifferential dG_λ , erhalten wir durch folgende Überlegung:

Die endliche Mantelschicht hat die Flächendifferenz

$$G_{z_1} - G_{z_2} = Q_{z_1} - Q_{z_2} = x_1^2\Gamma - x_2^2\Gamma = (x_1 + x_2)\Gamma \cdot (x_1 - x_2)$$

zur Grundfläche. Für die unendlich dünne Mantelschicht ergibt sich also, wenn $x_1 = x_2 = x$ und $x_1 - x_2 = dx$ gesetzt wird, das Flächendifferential $dG = 2x\Gamma \cdot dx$.

Das Verhältnis der Rauminhalte der beiden zugeordneten, d. h. demselben Element der Meridiankurve zukommenden, unendlich dünnen Schichten dI und dII ist demnach

$$\frac{dI}{dII} = \frac{G_z \cdot dz}{z \cdot dG} = \frac{(x^2 - a^2\lambda)\Gamma \cdot dz}{z \cdot 2x\Gamma \cdot dx} = \frac{x^2 - a^2\lambda}{2xz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Da nun nach **29**

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2xz}{n(x^2 - a^2\lambda)}$$

ist, so folgt die einfache und wichtige Beziehung

$$\frac{dI}{dII} = \frac{1}{n}$$

und ebenso für je zwei zugeordnete endliche Schichten der

Satz II_α. In jedem α -Körper von binomischer oder trinomischer Meridiankurve ist das Verhältnis einer Querschicht I zur zugeordneten Mantelschicht II konstant, und zwar gleich dem reziproken Werte des Exponenten n_α . $I : II = 1 : n_\alpha^1$.

Nach Satz **I_α** folgt hieraus der

Satz III_α. Für alle α -Körper der Büschel sind die Mantelschichten II_λ , die durch dieselben Ordinaten z_1 und z_2 der Meridiankurven bestimmt werden, einander gleich.²⁾

Und ferner: Die Grundflächen $(G_{z_1} - G_{z_2})_\lambda$ dieser Mantelschichten II_λ sind einander gleich. Wird z als unabhängige Variable, also dz als konstant angesehen, so ist für ein vorgeschriebenes z die abhängige Variable x und ebenso dx noch von λ abhängig, also für die einzelnen Körper verschieden. Das Flächendifferential $dG_\lambda = 2x_\lambda \Gamma \cdot dx_\lambda$ dagegen ist für alle Körper der Büschel konstant.

33. Diese Sätze, besonders Satz **II_α**, bilden nun ein einfaches Mittel, die α -Körper I und II selbst zu bestimmen. Wir können uns hierbei im wesentlichen auf Schichten mit positiven Ordinaten z , also auf Schichten der Körper 1, 2, 4, 6, beschränken.

Setzen wir in jedem Falle voraus, daß für

die Ordinaten z

$$n \geq 0 \quad \infty > z_1 > z_2 > 0$$

ist, so folgt aus obiger Formel in **31** für

¹⁾ Eine andre Ableitung dieses Satzes, jedoch nur für den α_4 -Körper geltend, siehe in **35**.

²⁾ Für $n = 2$ und $z_2 = 0$ führt dieser Satz auf einen Sonderfall, der auf S. 41 unter (16) behandelten Differenzschicht zweier Körper 2^{ten} Grades.

die absolut genommenen Querschnitte $G = \left(\frac{z}{c}\right)^n a^2 \Gamma = \left(\frac{z}{c}\right)^n c^2 \Gamma_0$

$$n > 0 \quad \infty > G_1 > G_2 > 0$$

$$n = 0 \quad G = \text{konst.}$$

$$n < 0 \quad 0 < G_1 < G_2 < \infty$$

und demnach für

die Zylinder- bez. Prismeninhalte $Gz = \left(\frac{z}{c}\right)^{n+1} a^2 c \Gamma = \left(\frac{z}{c}\right)^{n+1} c^3 \Gamma_0$

$$n > -1 \quad \infty > G_1 z_1 > G_2 z_2 > 0$$

$$n = -1 \quad Gz = \text{konst.}$$

$$n < -1 \quad 0 < G_1 z_1 < G_2 z_2 < \infty.$$

Hierbei ist besonders bemerkenswert, daß, wenn $n < 0$ ist, der Ausdruck Gz für $z = 0$ und $z = \infty$ die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$ annimmt, und daß $Gz = 0$ ist für $z = 0$ bez. $z = \infty$, je nachdem $n \geq -1$ ist.

34. Für die Summe oder Differenz der absolut genommenen Schichten folgt

$$n \geq 0, \quad I \pm II = G_1 z_1 - G_2 z_2.$$

Im ersten Falle $n > 0$ leuchtet dies ohne weiteres ein. Im zweiten Falle $n < 0$ jedoch, wo die beiden Schichten einander teilweise überdecken, fällt bei der Subtraktion ihr gemeinsamer Teil fort, und die mit $I - II$ gleiche Differenz der Restkörper, zweier Zylinder bez. Prismen, ergibt

$$I - II = G_1(z_1 - z_2) - (G_2 - G_1)z_2 = G_1 z_1 - G_2 z_2,$$

wie im ersten Falle.

Für $n > 0$ folgt, da nach Satz III_α $I : II = 1 : n$ ist,

$$I = \frac{1}{1+n} (G_1 z_1 - G_2 z_2), \quad II = \frac{n}{1+n} (G_1 z_1 - G_2 z_2);$$

für $n < 0$, also $n = -\mu$, folgt in gleicher Weise aus $I : II = 1 : \mu$

$$I = \frac{1}{1-\mu} (G_1 z_1 - G_2 z_2), \quad II = \frac{\mu}{1-\mu} (G_1 z_1 - G_2 z_2).$$

Es gelten also bei Berücksichtigung der Vorzeichen ganz allgemein die

Inhaltsformeln der Querschichten I und Mantelschichten II:

$$(\alpha) \quad n \geq 0, \quad I = \frac{1}{1+n} (G_1 z_1 - G_2 z_2), \quad II = \frac{n}{1+n} (G_1 z_1 - G_2 z_2).$$

Hierbei ergibt sich für die Körper 2_α , 4_α , 6_α von positiven Querschnitten G obigen Ungleichungen gemäß I immer als positiv, II jedoch als negativ, wenn $n < 0$ ist; für die Körper 1_α , 3_α , 5_α , deren G negativ zu nehmen sind, I immer als negativ, II jedoch als positiv, wenn $n < 0$ ist.

Absolut genommen folgt $I \cong II$, je nachdem $n^2 \cong 1$ ist. Im Falle $n = 0$ wird I zum Zylinder bez. Prisma und $II = 0$.

Für $n_\alpha = -1$ versagt unsere Methode, da I und II den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ annehmen. Wir erledigen diesen kritischen Fall in § 10 nach Methode d_α .

Da nur für den Körper 4_α mit binomischer Meridiankurve die Querschicht I zugleich die volle Schicht darstellt, erübrigt noch, für die Körper mit trinomischer Meridiankurve die Inhaltsformeln ihrer Vollschichten aufzustellen. Bezeichnet $G_c = a^2 \Gamma$ die Grundfläche, also $C = G_c \cdot (z_1 - z_2)$ den Inhalt des zugehörigen Zylinders, so hat nach 31 die Vollschicht eines trinomischen Körpers den Inhalt

$$V = C + I.$$

Hierbei ist bei den Körpern 5_α und 6_α , $\lambda = -1$ zufolge, C negativ und bei den Körpern 1_α und 5_α nach oben I negativ zu nehmen.

35. Für den binomischen α -Körper läßt sich aus den eben bestimmten Schichten I oder II noch auf den Sektor S_α schließen, der seine Spitze im Koordinatenanfang hat und wie I und II durch dieselbe zwischen G_1 und G_2 liegende Zone der Körperoberfläche mit begrenzt wird. Der Inhalt dieses Sektors ist die algebraische Summe entweder von I und zwei Kegeln, die G_1 und G_2 zu Grundflächen haben, oder von II und den beiden Ergänzungskörpern der Kegel.

$$(\alpha_4) \quad S_{z_2}^{z_1} = \begin{cases} \frac{1}{3} G_2 z_2 - \frac{1}{3} G_1 z_1 + I = \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{1+n} \right) (G_1 z_1 - G_2 z_2) \\ \frac{2}{3} G_1 z_1 - \frac{2}{3} G_2 z_2 - II = \left(\frac{2}{3} - \frac{n}{1+n} \right) (G_1 z_1 - G_2 z_2) \end{cases} \\ = \frac{2-n}{3(1+n)} (G_1 z_1 - G_2 z_2),$$

$$(\alpha_4) \quad S = \frac{2-n}{3} I = \frac{2-n}{3n} II = \frac{1}{3} (2I - II).$$

Für die Größenverhältnisse aller drei Körper ergibt sich hieraus in Vervollständigung des früheren

$$(\alpha_4) \quad 3S : 2I : II = (2 - n_\alpha) : 2 : n_\alpha.$$

Dies läßt sich auch mit Hilfe der Subtangente $= \frac{n_\alpha}{2} x$ der binomischen Meridiankurve α_4 (vgl. 29) ermitteln. Da die Körperdifferenziale dS , dI , dII , die einem und demselben Oberflächenelement entsprechen, als Pyramide ($= \frac{1}{3}$ Prisma), Keil ($= \frac{1}{2}$ Prisma) und Prisma von gleicher (∞ kleiner) Grundfläche aufgefaßt werden können, so folgt, wenn ihre Höhen mit h_S , h_I , h_{II} bezeichnet werden,

$$3dS : 2dI : dII = h_S : h_I : h_{II}.$$

Aus einer Figur erhellt ohne weiteres bei Berücksichtigung der Vorzeichen die Beziehung $h_S = h_I - h_{II}$ und ferner auf Grund ähnlicher Dreiecke

$$h_S : h_I : h_{II} = \left(1 - \frac{n_\alpha}{2}\right) x : x : \frac{n_\alpha}{2} x = (2 - n_\alpha) : 2 : n_\alpha.$$

Folglich verhält sich

$$3dS : 2dI : dII = (2 - n_\alpha) : 2 : n_\alpha.$$

Dieselben Verhältnisse haben aber auch die endlichen Körper S , I , II ; also gilt obige Proportion.

In gleicher Weise wie oben können die Sektoren der trinomischen α -Körper als algebraische Summe der entsprechenden vollen Horizontalschicht und zweier Kegel berechnet werden. (Vgl. § 9.)

36. Die Inhaltsbestimmung der β -Körper gestaltet sich der eben betrachteten ganz analog; nur können wir uns kürzer fassen, da nach 26 nur Körper mit binomischer Meridiankurve in Betracht kommen. Da ferner die Querschnitte Rechtecke von konstanter Breite b sind, so reduziert sich unsere Aufgabe auf die

Methode c_β : die Quadratur der binomischen β -Kurve

in der xz -Ebene. Die Gleichung dieser Kurve, die höhere Parabel oder Hyperbel genannt wird, je nachdem $n \geq 0$ ist, lautet

$$(\beta) \quad \frac{x}{a} - \left(\frac{z}{c}\right)^n = 0.$$

Des Zusammenhanges mit dem früheren wegen unterlassen wir es, die beiden Konstanten a und c in eine zusammenzuziehen.

Wird ein von zwei Abszissen x begrenzter Flächenstreifen ein Querstreifen I und ein von zwei Ordinaten z begrenzter ein Längsstreifen II genannt, so folgt für zwei einander zugeordnete, d. h. das gleiche Kurvenelement enthaltende unendlich dünne Streifen oder Flächendifferentiale

$$dI = x dz \quad \text{und} \quad dII = z dx$$

und für ihr Verhältnis $\frac{dI}{dII} = \frac{x dz}{z dx}$. Da nach **29** $\frac{dz}{dx} = \frac{z}{nx}$ ist, ergibt sich wie früher $\frac{dI}{dII} = \frac{1}{n}$ und ebenso für je zwei zugeordnete endliche Streifen der

Satz II _{β} . Bei einer binomischen Kurve ist das Verhältnis des Querstreifens I zum zugehörigen Längsstreifen II konstant, und zwar gleich dem reziproken Werte des Exponenten n_{β} . $I : II = 1 : n_{\beta}$. (Vergl. **39**.)

37. Bei der Flächenberechnung der Streifen I und II beschränken wir uns wieder auf solche mit positiven Ordinaten und setzen in jedem Falle voraus, daß für

die Ordinaten z

$$n \geq 0 \quad \infty > z_1 > z_2 > 0.$$

Aus obiger Kurvengleichung (β) in **36** folgt dann für

die Abszissen $x = \left(\frac{z}{c}\right)^n a$

$$n > 0 \quad \infty > x_1 > x_2 > 0$$

$$n = 0 \quad x = \text{konst.}$$

$$n < 0 \quad 0 < x_1 < x_2 < \infty$$

und demnach für

die Rechtecke $xz = \left(\frac{z}{c}\right)^{n+1} ac$

$$n > -1 \quad \infty > x_1 z_1 > x_2 z_2 > 0$$

$$n = -1 \quad xz = \text{konst.}$$

$$n < -1 \quad 0 < x_1 z_1 < x_2 z_2 < \infty.$$

Hierbei ist besonders zu beachten, daß, wenn $n < 0$ ist, der Ausdruck xz für $z = 0$ und $z = \infty$ die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$

annimmt, und daß $xz = 0$ ist für $z = 0$ bez. $z = \infty$, je nachdem $n \geq -1$ ist.

38. Für die Summe oder Differenz der absolut genommenen Flächenstreifen folgt

$$(\beta) \quad n \geq 0 \quad I \pm II = x_1 z_1 - x_2 z_2.$$

Im ersten Falle $n > 0$ ist dies wieder ohne weiteres klar. Im zweiten Falle $n < 0$ jedoch, wo die beiden Streifen einander teilweise überdecken, fällt bei der Subtraktion ihr gemeinsamer Teil fort und die mit $I - II$ gleiche Differenz der Flächenreste, zweier Rechtecke, ergibt

$$I - II = x_1(z_1 - z_2) - (x_2 - x_1)z_2 = x_1 z_1 - x_2 z_2$$

wie im ersten Falle.

Genau in derselben Weise wie oben in **34** führt Satz **II** _{β} bei Berücksichtigung der Vorzeichen zu den allgemein gültigen

Inhaltsformeln für die Querstreifen I und Längstreifen II

$$(\beta) \quad n \geq 0 \quad I = \frac{1}{1+n}(x_1 z_1 - x_2 z_2), \quad II = \frac{n}{1+n}(x_1 z_1 - x_2 z_2).$$

Diese ergeben, obigen Ungleichungen gemäß, I immer mit positivem, II jedoch mit negativem Vorzeichen, wenn $n < 0$ ist. Absolut genommen ist $I \geq II$, je nachdem $n^2 \geq 1$ ist. Für $n = 0$ wird I zum Rechteck und $II = 0$. Im Falle $n_\beta = -1$, dem die Apollonische Hyperbel entspricht, müssen wir einen andern Weg einschlagen, da (wie oben für $n_\alpha = -1$) I und II den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ annehmen. Wir behandeln diese Quadratur in § 10 nach Methode **d** _{β} .

39. In gleicher Weise wie unter **35** läßt sich aus einem der beiden Streifen I oder II auf den Sektor S_β schließen, der seine Spitze im Koordinatenursprung hat und wie I und II von demselben Kurvenbogen mit begrenzt wird. Da S_β die algebraische Summe von I oder II und zwei Dreiecken ist, so folgt

$$(\beta) \quad S_{z_2}^{z_1} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} x_2 z_2 - \frac{1}{2} x_1 z_1 + I = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1+n} \right) (x_1 z_1 - x_2 z_2) \\ \frac{1}{2} x_1 z_1 - \frac{1}{2} x_2 z_2 - II = \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{1+n} \right) (x_1 z_1 - x_2 z_2) \end{array} \right\} \\ = \frac{1-n}{2(1+n)} (x_1 z_1 - x_2 z_2)$$

oder

$$(\beta) \quad S = \frac{1-n}{2} I = \frac{1-n}{2n} II = \frac{1}{2} (I - II).$$

Die Größenverhältnisse aller drei Flächenstücke sind also

$$(\beta) \quad 2S : I : II = (1 - n_\beta) : 1 : n_\beta.$$

Dies ergibt sich auch mit Hilfe der Subtangente $= n_\beta \cdot x$ der β -Kurve (vgl. 29). Da die Flächendifferentiale dS , dI , dII , die einem und demselben Kurvenelement zugehören, als Dreieck und zwei Parallelogramme aufgefaßt werden können, die das gemeinsame Kurvenelement zur Grundlinie haben, so folgt ganz ähnlich wie unter 35 aus einer Figur $h_S = h_I - h_{II}$, ferner

$$2dS : dI : dII = h_S = h_I : h_{II} = (1 - n_\beta) : 1 : n_\beta$$

und hieraus obige Proportion für endliche Flächenstücke.

§ 9. Die Umgestaltung der allgemeinen Inhaltsformeln und ihre Anwendung zur Berechnung bestimmter α - und β -Körper, wenn $n \geq -1$ ist.

40. Die vier verschiedenen α -Körper, 1, 2, 4, 6, mit positiven Ordinaten z entsprechen namentlich für gerade positive Exponenten n den vier Körpern 2^{ten} Grades, die in 21 und 22 behandelt worden sind, und zwar α_1 dem elliptischen Körper, α_2 dem hyperbolischen 1^{ter}, α_6 dem hyperbolischen 2^{ter} Art und α_4 dem Asymptotenkörper (Kegel, Pyramide). Auch hier kann analog 21 (15), was die Horizontalschichten anlangt, jeder der beiden Körper α_1 und α_6 als negative Fortsetzung des andern betrachtet werden.

Die Körper α_4 bez. β mit binomischer Meridiankurve sind in der ersten Abhandlung als „Reinkörper“ bezeichnet worden.

Da die β -Körper nach 26 Prismen oder Zylinder sind, beschränken wir uns bei ihnen auf die Quadratur ihrer Grundfläche in der xz -Ebene.

Nach dem in 33 über z , G , Gz und in 37 über z , x , xz Dargelegten bleiben die Raum- bez. Flächeninhalte der Schichten bez. Streifen I und II auch endlich, wenn von den, die Inhalte bestimmenden Größen eine Ordinate z oder ein Querschnitt G bez. eine Abszisse x unendlich groß wird, sofern nur für diesen

Fall $Gz = 0$ bez. $xz = 0$ ist. Erstrecken sich die α -Schichten bez. β -Streifen mit positiven Ordinaten entweder von $z = h$ bis $z_2 = 0$ oder bis $z_1 = \infty$, so sind mit Ausnahme $n = -1$ stets bei einem dieser beiden Sonderfälle die Querschicht I_α und ihre zugehörige Mantelschicht II_α bez. zwei einander entsprechende Streifen I_β und II_β von endlichem Inhalt.

Für $n = -1$ dagegen werden in beiden Fällen die Inhalte unendlich groß (vgl. § 10).

Wir berechnen zunächst:

(1 $_\alpha$) Querschicht I_α und Mantelschicht II_α zwischen den Grenzen $z_1 = h$, $z_2 = 0$ oder $z_1 = \infty$, $z_2 = h$ (wobei für $n \geq -1$ beim Körper α_1 $h \leq c$ und beim Körper α_6 $h \geq c$ zu nehmen ist). Gegeben sei die Ordinate h , die zugleich Höhe oder Ergänzungshöhe von I ist, und deren Querschnitt $G_h = G$. Je nach der Größe von n sind drei Fälle zu unterscheiden:

Die Meridiankurve bez. ihre Asymptotenkurve ist eine höhere Parabel, also

(1 $_\alpha'$) $n > 0$. Für die endlichen Schichten folgt aus $z_1 = h$, $G_{z_1} = G$, $z_2 = 0$, $G_{z_2} = 0$

$$(\alpha_{1, 2, 4}) \quad I_0^h = \frac{1}{1+n} Gh, \quad II_0^h = \frac{n}{1+n} Gh;$$

dagegen ist

$$(\alpha_{2, 4, 6}) \quad I_h^\infty = \infty, \quad II_h^\infty = \infty.$$

Die Meridiankurve bez. ihre Asymptotenkurve ist eine höhere Hyperbel:

(1 $_\alpha''$) Ist $0 > n > -1$, so folgt für die endlichen Schichten aus $z_1 = h$, $G_{z_1} = G$, $z_2 = 0$, $G_{z_2} = \infty$

$$(\alpha_{2, 4, 6}) \quad I_0^h = \frac{1}{1+n} Gh, \quad II_0^h = \frac{n}{1+n} Gh;$$

dagegen ist

$$(\alpha_{1, 2, 4}) \quad I_h^\infty = \infty, \quad II_h^\infty = \infty.$$

(1 $_\alpha'''$) Ist $-1 > n$, so folgt für die endlichen Schichten aus $z_2 = h$, $G_{z_2} = G$, $z_1 = \infty$, $G_{z_1} = 0$

$$(\alpha_{1, 2, 4}) \quad I_h^\infty = -\frac{1}{1+n} Gh, \quad II_h^\infty = -\frac{n}{1+n} Gh;$$

dagegen ist

$$(\alpha_{2, 4, 6}) \quad I_0^h = \infty, \quad II_0^h = -\infty.$$

(2_α) Binomischer Sektor $S_α$, der seine Spitze im Koordinatenanfang hat. Seine Meridiankurve ist also die binomische Kurve $α_4$. Sind die gegebenen Größen dieselben, wie unter (1), so folgt:

$$(α_4) \quad \begin{aligned} n > -1, \quad S_0^h &= \frac{2-n}{3(1+n)} Gh, \quad S_h^\infty = \infty, \\ -1 > n, \quad S_h^\infty &= \frac{n-2}{3(1+n)} Gh, \quad S_0^h = \infty. \end{aligned}$$

(3_α) Ist statt des Grenzquerschnittes $G_h = G$, der Querschnitt $G_c = a^2 \Gamma = c^2 \Gamma_0$ des zugehörigen Zylinders zum $α$ -Körper gegeben, so kann, da nach 31 $G_h = \left(\frac{h}{c}\right)^n G_c$ folgt, in vorstehenden Formeln

$$Gh = \left(\frac{h}{c}\right)^n \cdot G_c h = \left(\frac{h}{c}\right)^{n+1} \cdot G_c c = \left(\frac{h}{c}\right)^{n+1} \cdot c^3 \Gamma_0$$

gesetzt werden.

Für den Sonderfall $n=2$ fällt hierbei c ganz aus der Formel heraus $(Gh)_{n=2} = h^3 \Gamma_0$.

(4_β) Obige Formeln (1) gelten auch für die binomischen $β$ -Schichten, deren rechteckige Querschnitte $G = bg$ die konstante Breite b und die Abszisse $x = g$ zu Seiten haben.¹⁾ Man hat demnach in den Formeln (1) nur G durch g zu ersetzen, um die Grundflächen in der xz -Ebene dieser Zylinder, die

(4_β') Querstreifen $I_β$ und Längsstreifen $II_β$, zwischen den Grenzen $z_1 = h, z_2 = 0$ oder $z_1 = \infty, z_2 = h$ zu erhalten. Ist die Ordinate h und ihre zugehörige Abszisse g gegeben, so folgt ganz analog wie (1_α) für die endlichen Streifen

$$(β) \quad \left. \begin{aligned} n > -1 \quad I_0^h \\ -1 > n \quad I_h^\infty \end{aligned} \right\} = \frac{1}{1+n} gh, \quad \left. \begin{aligned} II_0^h \\ II_h^\infty \end{aligned} \right\} = \frac{n}{1+n} gh.$$

(5_β) Binomischer Sektor $S_β$, dessen Spitze der Koordinatenanfang ist. Sind dieselben Größen wie unter (4_β) gegeben, so folgt:

$$(β) \quad \left. \begin{aligned} n > -1, \quad S_0^h \\ -1 > n, \quad S_h^\infty \end{aligned} \right\} = \frac{1-n}{2(1+n)} gh.$$

(6) Als binomische $α$ - und $β$ -Meridiankurven ergeben sich im besonderen für

¹⁾ Ein $α$ -Körper kann im besonderen auch Rechtecke zu Querschnitten haben; diese sind aber als ähnliche Figuren nicht von konstanter Breite.

$n_\alpha = 8$ und $n_\beta = 4$		Biquadratische Parabel $z^4 = p^3 x$, deren Scheiteltangente	} die z -Achse ist.
4	2	Apollonische Parabel $z^2 = px$, deren Scheiteltangente	
3	$\frac{3}{2}$	Semikubische Parabel $z^3 = px^2$, deren Wendetangente	
2	1	Gerade durch den Koordinatenursprung.	
$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	Semikubische Parabel $x^3 = pz^2$, deren Wendetangente	} die x -Achse ist.
1	$\frac{1}{2}$	Apollonische Parabel $x^2 = pz$, deren Scheiteltangente	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	Biquadratische Parabel $x^4 = p^3 z$, deren Scheiteltangente	
0	0	die Parallele $x = p$ zur z -Achse.	
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	Biquadratische Hyperbel $x^4 z = p^5$,	} die der x -Achse schneller sich nähert als der z -Achse.
- 1	$-\frac{1}{2}$	Quadratische Hyperbel ¹⁾ $x^2 z = p^3$,	
$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	Semikubische Hyperbel $x^3 z^2 = p^5$,	
- 2	- 1	Apollonische Hyperbel $xz = p^2$,	
- 3	$-\frac{3}{2}$	Semikubische Hyperbel $x^2 z^3 = p^5$,	} die der z -Achse schneller sich nähert als der x -Achse.
- 4	- 2	Quadratische Hyperbel ¹⁾ $xz^2 = p^3$,	
- 8	- 4	Biquadratische Hyperbel $xz^4 = p^5$,	

(7) In den unter (1), (2), (4), (5) ermittelten allgemeinen Raum- bez. Flächeninhaltsformeln von I , II und S ist im besonderen für die Koeffizienten von Gh bez. gh zu setzen,

¹⁾ Die quadratische Hyperbel $x^2 z = p^3$ führt auch den Namen Gravitationskurve, weil sie das Diagramm des Newtonschen Gesetzes darstellt, daß die Anziehungskraft z zweier Körper indirekt proportional dem Quadrate ihrer Entfernung x ist. Vergl. z. B.: G. Holzmüller, Ingenieurmathematik, 1. Bd., und Elemente der Mathematik, 3. Bd.

Ebenso könnte diese Kurve in der andern Lage $xz^2 = p^3$ Tragfähigkeitskurve genannt werden, weil bei Balken gleicher Länge die Tragfähigkeit von der Breite x und dem Quadrate der Höhe z abhängt.

wenn $n > 0$ ist:

$$\begin{aligned}
 n &= \infty, \quad 8, \quad 4, \quad 3, \quad 2, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{4}{3}, \quad 1, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad 0, \\
 \frac{1}{1+n} &= 0, \quad \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{3}{7}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{4}{5}, \quad 1, \\
 \frac{n}{1+n} &= 1, \quad \frac{8}{9}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{4}{7}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{5}, \quad 0, \\
 \frac{2-n}{3(1+n)} &= -\frac{1}{3}, \quad -\frac{2}{9}, \quad -\frac{2}{15}, \quad -\frac{1}{12}, \quad 0, \quad \frac{1}{15}, \quad \frac{2}{21}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{4}{15}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{7}{15}, \quad \frac{2}{3}, \\
 \frac{1-n}{2(1+n)} &= -\frac{1}{2}, \quad -\frac{7}{18}, \quad -\frac{3}{10}, \quad -\frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{6}, \quad -\frac{1}{10}, \quad -\frac{1}{14}, \quad 0, \quad \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{3}{10}, \quad \frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

und wenn $n < 0$ ist:

$$\begin{aligned}
 n &= -\frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{2}{3}, \quad -1, \quad -\frac{4}{3}, \quad -\frac{3}{2}, \quad -2, \quad -3, \quad -4, \quad -8, \quad -\infty, \\
 \frac{1}{1+n} &= \frac{4}{3}, \quad 2, \quad 3, \quad \infty, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{7}, \quad 0, \\
 \frac{n}{1+n} &= -\frac{1}{3}, \quad -1, \quad -2, \quad -\infty, \quad 4, \quad 3, \quad 2, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{8}{7}, \quad 1, \\
 \frac{2-n}{3(1+n)} &= 1, \quad \frac{5}{3}, \quad \frac{8}{3}, \quad \infty, \quad -\frac{10}{3}, \quad -\frac{7}{3}, \quad -\frac{4}{3}, \quad -\frac{5}{6}, \quad -\frac{2}{3}, \quad -\frac{10}{21}, \quad -\frac{1}{3}, \\
 \frac{1-n}{2(1+n)} &= \frac{5}{6}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{5}{2}, \quad \infty, \quad -\frac{7}{2}, \quad -\frac{5}{2}, \quad -\frac{3}{2}, \quad -1, \quad -\frac{5}{6}, \quad -\frac{9}{14}, \quad -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

(7') Hierzu ist zu bemerken: Für ganze positive Exponenten n sind diese Inhalte in anderer Weise schon in der ersten Abhandlung unter **15** bestimmt worden.

Dem hier ausscheidenden kritischen Falle $n = -1$ entspricht die Kubatur der α -Körper, die die Gravitationskurve $x^2z = p^3$ zur Meridiankurve haben, bez. die Quadratur der Hyperbel $xz = p^2$, während die Quadratur der ersteren Kurve (vergl. auch $12_\beta'''$) und die Kubatur eines α -Körpers, der die Hyperbel zur Meridiankurve hat (vergl. $(9_\alpha''')$), endliche Resultate liefert. Die andere Lage der Gravitationskurve dagegen, d. h. die Kurve $xz^2 = p^3$, gibt in beiden Fällen α und β endliche Inhalte (vergl. auch $(12_\beta''')$).

41. Die in **34** bis **39** abgeleiteten Formeln für die Querschicht I_α , Mantelschicht II_α und den binomischen Sektor S_α bez. die Streifen I_β , II_β und den Sektor S_β enthalten außer n die beiden Grenzquerschnitte G_1 , G_2 bez. Abszissen g_1 , g_2 und deren zugehörige Ordinaten z_1 , z_2 als Bestimmungsstücke. Ihre Zahl kann selbst im allgemeinen Fall um eins vermindert werden.

(8_α') Vollsicht des binomischen α-Körpers und Querschicht I des trinomischen α-Körpers n^{ten} Grades, gegeben durch die Höhe $z_1 - z_2 = h$ und die Begrenzungsquerschnitte $G_{z_1} = G_1$, $G_{z_2} = G_2$. Aus der Formel $G_z = a^2 \left(\frac{z}{c}\right)^n \Gamma$ in 31 folgt $G_1 : G_2 = z_1^n : z_2^n$ oder

$$G_1^{\frac{1}{n}} : G_2^{\frac{1}{n}} : \left(G_1^{\frac{1}{n}} - G_2^{\frac{1}{n}}\right) = z_1 : z_2 : (z_1 - z_2)$$

und durch Erweiterung mit $z_1 - z_2$ aus der Inhaltsformel

$$I = \frac{1}{1+n} (G_1 z_1 - G_2 z_2) = \frac{z_1 - z_2}{1+n} \left(G_1 \frac{z_1}{z_1 - z_2} - G_2 \frac{z_2}{z_1 - z_2}\right).$$

Wir erhalten also als Inhalt

$$(\alpha_1, 2, 4, 6) \quad I = \frac{h}{1+n} \cdot \frac{G_1^{1+\frac{1}{n}} - G_2^{1+\frac{1}{n}}}{G_1^{\frac{1}{n}} - G_2^{\frac{1}{n}}}.$$

Diese allgemeine Formel kann durch $G_1^{\frac{1}{n}} - G_2^{\frac{1}{n}}$ gekürzt werden.

(8_α'') Mantelschicht II des binomischen und trinomischen α-Körpers n^{ten} Grades, gegeben durch die Grundfläche $G_{z_1} - G_{z_2} = G$ und die Grenzhöhen $z_1 = h_1$, $z_2 = h_2$. Ganz analog wie oben (8_α') folgt

$$G_1 : G_2 : (G_1 - G_2) = h_1^n : h_2^n : (h_1^n - h_2^n)$$

und durch Erweiterung mit $G_{z_1} - G_{z_2}$ aus der Inhaltsformel

$$II = \frac{n}{1+n} (G_1 z_1 - G_2 z_2) = \frac{n(G_1 - G_2)}{1+n} \left(z_1 \frac{G_1}{G_1 - G_2} - z_2 \frac{G_2}{G_1 - G_2}\right).$$

Wir erhalten also als Inhalt

$$(\alpha_1, 2, 4, 6) \quad II = \frac{nG}{1+n} \cdot \frac{h_1^{1+n} - h_2^{1+n}}{h_1^n - h_2^n}.$$

Diese allgemeine Formel kann durch $h_1 - h_2$ gekürzt werden.

(9_α) Wird $n = \frac{1}{\nu}$ gesetzt, so nimmt Formel I die Gestalt von II an und umgekehrt, nur sind an Stelle von n , G , h die Buchstaben ν , h , G getreten.

Man erhält

$$I_{(n)} = \frac{\nu h}{1 + \nu} \cdot \frac{G_1^{1+\nu} - G_2^{1+\nu}}{G_1^\nu - G_2^\nu}, \quad II_{(n)} = \frac{G}{1 + \nu} \cdot \frac{h_1^{1 + \frac{1}{\nu}} - h_2^{1 + \frac{1}{\nu}}}{h_1^{\frac{1}{\nu}} - h_2^{\frac{1}{\nu}}}.$$

Bei der Berechnung der Schichten zweier Körper, deren Exponenten reziproke Werte sind, können also nach Bestimmung der Schichten des einen Körpers die des andern sofort hingeschrieben werden.

Im besonderen (für bestimmte n) beschränken wir uns teils auf solche Schichten, die früher schon in anderer Weise behandelt worden sind, teils auf solche, deren Inhaltsformeln eine besonders einfache Gestalt annehmen. Wir stellen dabei immer je zwei mit reziproken n zusammen, um das gegenseitige Entsprechen der betreffenden Formeln hervorzuheben. Gegeben seien natürlich dieselben Bestimmungsstücke wie in den allgemeinen Formeln.

$$(9_\alpha') \quad n_\alpha = 1, \quad I = \frac{1}{2} (G_1 + G_2) \cdot h, \quad II = \frac{1}{2} (h_1 + h_2) \cdot G.$$

$$(9_\alpha'') \quad \begin{cases} n_\alpha = 2, & I = \frac{1}{3} h \cdot (G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2), & II = \frac{2}{3} G \cdot \frac{h_1^3 + h_1 h_2 + h_2^3}{h_1 + h_2}; \\ n_\alpha = \frac{1}{2}, & II = \frac{1}{3} G \cdot (h_1 + \sqrt{h_1 h_2} + h_2), & I = \frac{2}{3} h \cdot \frac{G_1^2 + G_1 G_2 + G_2^2}{G_1 + G_2}. \end{cases}$$

$$(9_\alpha''') \quad \begin{cases} n_\alpha = -2, & I = h \cdot \sqrt{G_1 G_2}, & II = \frac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2} \cdot G; \\ n_\alpha = -\frac{1}{2}, & II = G \cdot \sqrt{h_1 h_2}, & I = \frac{2G_1 G_2}{G_1 + G_2} \cdot h. \end{cases}$$

Die Schichten $(9_\alpha')$ und $(9_\alpha''')$ lassen sich demnach als Prismen oder Zylinder deuten, die bei gleicher Höhe h bez. Grundfläche G das arithmetische, geometrische, harmonische Mittel der Begrenzungsquerschnitte G_1, G_2 bez. Höhen h_1, h_2 zur Grundfläche bez. Höhe haben. Vergleiche zu $n_\alpha = 1$, parabolische Schicht, **21** (1_α) und zu $n_\alpha = 2$, Pyramiden- oder Kegestumpf, **21** (3_α) und zu $n_\alpha = -2$, Schichten des hyperbolischen Körpers, die Bemerkung **40** $(7')$.

(10_α) Binomischer Sektor S , dessen Spitze der Koordinatenursprung ist, gegeben entweder durch dieselben Größen wie unter $(8')$ oder wie unter $(8'')$. Aus den in **35** aufgestellten Formeln folgt:

$$(11_\alpha) \quad S = \frac{2-n}{3(1+n)} h \frac{G_1^{1+\frac{1}{n}} - G_2^{1+\frac{1}{n}}}{\frac{1}{G_1^n} - \frac{1}{G_2^n}} = \frac{2-n}{3(1+n)} G \frac{h_1^{1+n} - h_2^{1+n}}{h_1^n - h_2^n}.$$

(11_β) Im Falle β wird das in (9_α) erwähnte Entsprechen der Formeln für I und II für reziproke Exponenten ein vollständiges, da hier gleichartige Größen: Abszisse *g* und Ordinate *h*, vertauscht werden. *I*_β und *II*_β sind nicht mehr verschiedengestaltete Gebilde, sondern beides Trapeze, die einen Kurvenbogen zu einer Nebenseite haben. Da zwei binomische β-Gleichungen mit reziproken Exponenten *n*_β und *v*_β = $\frac{1}{n_\beta}$ nicht wie im Falle α zwei verschiedene Kurven, sondern ein und dieselbe Kurve nur in zwei verschiedenen Lagen (mit vertauschten Koordinatenachsen) darstellen, so ist hier für je dieselben gegebenen drei Strecken *I*_{*n*_β} ≡ *II*_{*v*_β} und *II*_{*n*_β} ≡ *I*_{*v*_β}. Für den

(11_β') Querstreifen *I*_β und Längsstreifen *II*_β der binomischen β-Kurve,

I gegeben durch die Höhe *z*₁ - *z*₂ = *h* und die Grenzabszissen
*x*₁ = *g*₁, *x*₂ = *g*₂,
II gegeben durch die Breite *x*₁ - *x*₂ = *g* und die Grenzordinaten
*z*₁ = *h*₁, *z*₂ = *h*₂,

folgt daher ganz analog (8_α') mit Hilfe der Gleichung der β-Kurve *x* = *a* ($\frac{z}{c}$)^{*n*} aus der allgemeinen Formel in 38 oder einfacher, wenn, wie in (4_β) *G* durch *g* gesetzt wird:

$$(12_\beta) \quad \left\{ \begin{aligned} I_{(n)} &= \frac{h}{1+n} \cdot \frac{g_1^{1+\frac{1}{n}} - g_2^{1+\frac{1}{n}}}{\frac{1}{g_1^n} - \frac{1}{g_2^n}} = \frac{vh}{1+v} \cdot \frac{g_1^{1+v} - g_2^{1+v}}{g_1^v - g_2^v} = II_{(v)}, \\ II_{(n)} &= \frac{ng}{1+n} \cdot \frac{h_1^{1+n} - h_2^{1+n}}{h_1^n - h_2^n} = \frac{g}{1+v} \cdot \frac{h_1^{1+\frac{1}{v}} - h_2^{1+\frac{1}{v}}}{\frac{1}{h_1^v} - \frac{1}{h_2^v}} = I_{(v)}. \end{aligned} \right.$$

Hierbei ist also zu beachten, daß im Falle *v* = $\frac{1}{n}$ die *g* Ordinaten und die *h* Abszissen bedeuten.

Im besonderen ergibt sich für

$$(12_\beta') \quad n_\beta = 1, \quad \left\{ \begin{aligned} I_{(n)} &= \frac{1}{2} (g_1 + g_2) h = II_{(v)} \\ II_{(n)} &= \frac{1}{2} (h_1 + h_2) g = I_{(v)} \end{aligned} \right\} v_\beta = 1,$$

$$(12_{\beta}''') \quad n_{\beta} = 2, \left\{ \begin{array}{l} I_{(n)} = \frac{1}{3} h (g_1 + \sqrt{g_1 g_2} + g_2) = II_{(v)} \\ II_{(n)} = \frac{2}{3} g \frac{h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2}{h_1 + h_2} = I_{(v)} \end{array} \right\} \nu_{\beta} = \frac{1}{2}.$$

$$(12_{\beta}''') \quad n_{\beta} = -2, \left\{ \begin{array}{l} I_{(n)} = h \cdot \sqrt{g_1 g_2} = II_{(v)} \\ II_{(n)} = \frac{2 g_1 g_2}{g_1 + g_2} \cdot h = I_{(v)} \end{array} \right\} \nu_{\beta} = -\frac{1}{2}.$$

Vergleiche hierzu das unter (9_α) über die Deutung der Formeln Gesagte.

(13_β) Sektor S_{β} , dessen Spitze der Koordinatenvorsprung ist, gegeben bez. durch dieselben Größen, wie in (11_β). Aus den in 39 aufgestellten Formeln folgt:

$$(\beta) \quad S_{(n)} = \frac{(1-n)h}{2(1+n)} \cdot \frac{g_1^{1+\frac{1}{n}} - g_2^{1+\frac{1}{n}}}{\frac{1}{g_1^n} - \frac{1}{g_2^n}} = \frac{(1-n)g}{2(1+n)} \cdot \frac{h_1^{1+n} - h_2^{1+n}}{h_1^n - h_2^n} = -S_{(v)}.$$

42. Volle Horizontalschicht V der trinomischen α -Körper.

Wir bemerken, daß — abweichend von der ersten Abhandlung, wo die gegebenen Begrenzungsquerschnitte mit G_1 und G_2 bezeichnet wurden — hier der Buchstabe Q beibehalten werden soll, da G Querschnitte der Querschicht I bedeuten. Es seien also $Q_{z_1} = Q_1$ und $Q_{z_2} = Q_2$ die Begrenzungsquerschnitte der Schicht von der Höhe $z_1 - z_2 = h$. Nur der Querschnitt des zugehörigen Zylinders, der gleich dem der Querschicht I in der Höhe c ist, werde mit G_c bezeichnet, damit wir, je nachdem $n \geq 0$ ist, nicht zwischen $Q_{z=0} \equiv G_c$ und $Q_{z=\infty} \equiv G_c$ zu unterscheiden brauchen.

Da nach 34 der Inhalt unsrer Schicht die algebraische Summe der Zylinder und der Querschicht I ist, so folgt für

(14) V , gegeben durch die Höhe h , die Begrenzungsquerschnitte Q_1, Q_2 und den Querschnitt G_c des zugehörigen Zylinders, wenn in der Querschicht

$$I = \frac{h}{1+n} \cdot \frac{G_1^{1+\frac{1}{n}} - G_2^{1+\frac{1}{n}}}{G_1^{\frac{1}{n}} - G_2^{\frac{1}{n}}}.$$

G_1 und G_2 , also allgemein die

$$\begin{aligned} (\alpha_1) \quad G_z &= G_c - Q_z & V &= G_c h - I, \\ (\alpha_2) \quad G_z &= -G_c + Q_z \text{ gesetzt werden,} & V &= G_c h + I, \\ (\alpha_3) \quad G_z &= G_c + Q_z & V &= -G_c h + I. \end{aligned}$$

(14') Sind analog **22**, (12') der ersten Abhandlung h , Q_1 , Q_2 und die Querschnittskonstante Γ_0 gegeben, so muß aus vorstehender Formel $G_c = c^2 \Gamma_0$ eliminiert werden. Nun kann G_c zunächst durch G_1 , G_2 , h und Γ_0 ausgedrückt werden, denn da diese Größen auch dem binomischen Körper angehören, so folgt aus der Gleichung der binomischen Kurve:

$$\left(\frac{z}{c}\right)^n = \frac{G_z}{G_c}$$

und hieraus

$$\frac{h}{c} = \frac{z_1 - z_2}{c} = \left(\frac{G_1}{G_c}\right)^{\frac{1}{n}} - \left(\frac{G_2}{G_c}\right)^{\frac{1}{n}}$$

oder

$$\frac{h \sqrt{\Gamma_0}}{\sqrt{G_c}} = \sqrt[n]{\frac{G_1}{G_c}} - \sqrt[n]{\frac{G_2}{G_c}},$$

also eine Gleichung, die nach G_c aufgelöst werden kann.

Sind aber die Q_z statt der G_z gegeben, so tritt in vorstehender Formel an Stelle eines G_z nach (14) eine algebraische Summe von G_c und Q_z , und dann kann die Gleichung im allgemeinen nicht nach G_c aufgelöst werden. Mithin kann auch die trinomische Schicht V im allgemeinen nicht explizite durch h , Q_1 , Q_2 , Γ_0 dargestellt werden.

(14'') Im besonderen jedoch, z. B. für $n=2$, ist dies möglich. Da vorstehende Gleichung für $n=2$ in

$$h \sqrt{\Gamma_0} = \sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}$$

übergeht, also G_c nicht mehr enthält, so empfiehlt es sich, in der Inhaltsformel vorläufig G_1 und G_2 beizubehalten. Man erhält zunächst nach Kürzung in I

$$\begin{aligned} (\alpha_1) \quad V &= G_c h \mp \frac{h}{3} (G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2) \\ (\alpha_2) \quad &= G_c h \mp \frac{h}{6} \{ 3G_1 + 3G_2 - (\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})^2 \} \\ &= \frac{h}{6} \{ 3(G_c \mp G_1) + 3(G_c \mp G_2) \pm h^2 \Gamma_0 \}. \end{aligned}$$

Die Formel für (α_6) unterscheidet sich von (α_2) nur dadurch, daß G_c negativ ist.

Da die Glieder, die jetzt noch G_c enthalten, nach (14) gerade die gegebenen Q_1 und Q_2 sind, so wird die Berechnung von G_c überflüssig, und man erhält

$$\begin{matrix} (\alpha_1) \\ (\alpha_2, 6) \end{matrix} \quad V = \frac{h}{6} \left\{ 3 Q_1 + 3 Q_2 \pm h^3 \Gamma_0 \right\},$$

eine Formel, die mit 22 (12') übereinstimmt.

In (14') konnte der Inhalt der allgemeinen Schicht, gegeben durch h , Q_1 , Q_2 und Γ_0 , nicht explizite gefunden werden; dasselbe gilt, wenn c außer h , Q_1 , Q_2 gegeben ist. Der Inhalt ist jedoch explizite bestimmbar für eine

(14'') Trinomische Schicht V , gegeben durch c , Γ_0 und die Ordinaten h_1 und h_2 . Da $G_c = c^3 \Gamma_0$ und $h = h_1 - h_2$ ist, und ferner für $I = G_1 h_1 - G_2 h_2$ nach 40 (3)

$$I = G_c \left(\frac{h_1}{c} \right)^n h_1 - G_c \left(\frac{h_2}{c} \right)^n h_2$$

gesetzt werden kann, so folgt aus der Formel in (14)

$$\begin{matrix} (\alpha_1), (-\alpha_6) \\ (\alpha_2) \end{matrix} \quad V = c^3 \Gamma_0 \cdot (h_1 - h_2) \mp \frac{c^3 \Gamma_0}{1+n} \left[\left(\frac{h_1}{c} \right)^n h_1 - \left(\frac{h_2}{c} \right)^n h_2 \right],$$

$$V = c^3 \Gamma_0 \left\{ \frac{h_1 - h_2}{c} \mp \frac{1}{1+n} \left[\frac{h_1^{n+1} - h_2^{n+1}}{c^{n+1}} \right] \right\}.$$

Die Formel für (α_6) ergibt den negativen Wert von (α_1) .

(14''') Trinomische Schicht V , gegeben durch die Begrenzungsquerschnitte Q_1 , Q_2 und deren Ordinaten $z_1 = h_1$, $z_2 = h_2$.

Aus der Gleichung der binomischen Kurve folgt

$$\frac{G_1}{G_2} = \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^n.$$

Wird G_1 und G_2 nach (14) durch Q_1 bez. Q_2 und das unbekanntes G_c ausgedrückt, so erhält man zunächst

$$\begin{matrix} (\alpha_1, 2) \\ (\alpha_6) \end{matrix} \quad G_c = \pm \frac{h_1^n Q_2 - h_2^n Q_1}{h_1^n - h_2^n};$$

da ferner $h = h_1 - h_2$ ist, so ist der zugehörige Zylinder bestimmt. Mit Hilfe G_c könnte nun in den Gleichungen (14) G_1 , G_2 und endlich I in den gegebenen Größen ausgedrückt werden. Ohne weiteres führt jedoch nach 41 (8'') die Formel

$$I = \frac{1}{n} II = \frac{G}{1+n} \cdot \frac{h_1^{n+1} - h_2^{n+1}}{h_1^n - h_2^n}$$

zum Ziele, da

$$\begin{matrix} (\alpha_1) \\ (\alpha_2, 6) \end{matrix} \quad G = G_1 - G_2 = \mp (Q_1 - Q_2).$$

Nach (14) ergibt sich demnach für alle drei trinomische Schichten die gleiche Formel

$$(\alpha_{1, 2, 6}) \quad V = \frac{(h_1^n Q_2 - h_2^n Q_1)(h_1 - h_2)}{h_1^n - h_2^n} + \frac{(Q_1 - Q_2)(h_1^{n+1} - h_2^{n+1})}{(1+n)(h_1^n - h_2^n)}.$$

Diese nimmt nach einer leichten Umformung die einfachere Gestalt

$$(\alpha_{1, 2, 6}) \quad V_{h_2}^{h_1} = \frac{n}{1+n} \cdot \frac{h_1^n Q_2 - h_2^n Q_1}{h_1^n - h_2^n} \cdot (h_1 - h_2) + \frac{h_1 Q_1 - h_2 Q_2}{1+n}$$

an und kann als algebraische Summe eines trinomischen und zweier binomischer Vollkörper gedeutet werden.

Besondere Beachtung verdienen die Sonderfälle, in denen entweder eine Ordinate der Begrenzungsquerschnitte gleich c oder gleich Null ist. Vergleiche für $n = 2$ in der ersten Abhandlung 22 (17—19).

(15) Kappe α_1 bez. α_6 und trinomische Schicht α_2 , deren $\left\{ \begin{matrix} \text{größte} \\ \text{kleinste} \end{matrix} \right\}$ Ordinate c ist.

Ist Höhe h , Begrenzungsquerschnitt Q und Γ_0 gegeben, so kann der Inhalt V nicht explizite dargestellt werden, da die in (14') aufgestellte Gleichung auch in diesem Sonderfalle nicht nach G_c aufgelöst werden kann.

(15') Ist jedoch h , Q und c gegeben, so kann aus Gleichung (14') G_c ermittelt werden, da es nur unter einem Wurzelausdruck vorkommt. Man erhält (auch direkt mit Hilfe der binomischen Kurve), je nachdem c die große oder kleine Begrenzungsordinate ist, als wichtige Beziehungsgleichung zwischen Q und $G_c = c^2 \Gamma_0$

$$n > 0 \left\{ \begin{matrix} (\alpha_1) \\ (\alpha_2) \\ (\alpha_6) \\ (\alpha_2) \end{matrix} \right. \quad \begin{matrix} c^2 \Gamma_0 = G_c = \frac{c^n}{c^n \mp (c-h)^n} Q_{c-h} \\ c^2 \Gamma_0 = G_c = \frac{c^n}{(c+h)^n \mp c^n} Q_{c+h} \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} (\alpha_6) \\ (\alpha_2) \\ (\alpha_1) \\ (\alpha_2) \end{matrix} \right\} n < 0$$

(15'') Ist h , c und Γ_0 gegeben, so folgt aus (14'''),

wenn $h_1 = c$ und $h_2 = c - h$ gesetzt wird:

$$n > 0 \left\{ \begin{matrix} (\alpha_1) \\ (\alpha_2) \end{matrix} \right. V_{c-h}^c = c^3 \Gamma_0 \left\{ \frac{h}{c} \mp \frac{1}{1+n} \left[1 - \left(\frac{c-h}{c} \right)^{n+1} \right] \right\} \left. \begin{matrix} (\alpha_6) \\ (\alpha_2) \end{matrix} \right\} n < 0,$$

und wenn $h_1 = c + h$ und $h_2 = c$ gesetzt wird:

$$n > 0 \left\{ \begin{matrix} (\alpha_6) \\ (\alpha_2) \end{matrix} \right. V_c^{c+h} = c^3 \Gamma_0 \left\{ \mp \frac{h}{c} + \frac{1}{1+n} \left[\left(\frac{c+h}{c} \right)^{n+1} - 1 \right] \right\} \cdot \left. \begin{matrix} (\alpha_1) \\ (\alpha_2) \end{matrix} \right\} n < 0.$$

(15''') Ist außer c , h , statt Γ_0 entweder G_c oder Q gegeben, so kann mit obiger Beziehungsgleichung (15') diese Formel sofort in gewünschter Weise umgestaltet werden.

(16) Halbe Hauptschicht α_2 und α_1 bez. α_6 (je nachdem $n \geq 0$), d. h. Schicht V , deren eine Begrenzungsebene der Hauptquerschnitt Q_0 des Körpers ist, während $Q_z = Q$ der andere in der Höhe h sei. Für $n > 0$ ist $Q_0 = G_c$, dem Querschnitt des zugehörigen Zylinders und für $n < 0$ ist $Q_0 = \infty$. Für diese Querschnitte ergibt sich ähnlich wie oben (15') die Beziehung

$$\begin{matrix} (\alpha_1), (\alpha_6) \\ (\alpha_2) \end{matrix} \quad c^2 \Gamma_0 = G_c = \frac{c^n}{c^n \mp h^n} Q.$$

(16') Ist c , h , Γ_0 gegeben, so folgt aus (14'''), wenn $h_1 = h$ und $h_2 = 0$ gesetzt wird,

$$n > 0 \left\{ \begin{matrix} (\alpha_1) \\ (\alpha_2) \end{matrix} \right. V_0^h = c^2 \Gamma_0 \cdot h \left\{ 1 \mp \frac{1}{1+n} \left(\frac{h}{c} \right)^n \right\} \cdot \left. \begin{matrix} (\alpha_6) \\ (\alpha_2) \end{matrix} \right\} 0 > n > -1.$$

(16'') Ist wiederum c , h und entweder G_c oder Q gegeben so liefert hieraus obige Beziehung (16) die gewünschte Formel.

(16''') Ist h , Q_h und der Querschnitt G_c des zugehörigen Zylinders gegeben, so kann im Falle $n > 0$, wo $Q_0 \equiv G_c$ ist, der Inhalt sofort aus (14^{IV}) abgeleitet werden, wenn $h_1 = h$, $Q_1 = Q_h$ und $h_2 = 0$, $Q_2 = G_c$ gesetzt wird; aber auch nach (14) folgt aus der Querschicht $I = \frac{h}{1+n} G_h$ für

$$n > 0 \left\{ \begin{matrix} (\alpha_1) \\ (\alpha_2) \end{matrix} \right. V_0^h = G_c h \mp \frac{h}{1+n} G_h = \frac{h}{1+n} \left\{ n G_c + (G_c \mp G_h) \right\},$$

$$V_0^h = \frac{h}{1+n} \left\{ n Q_0 + Q_h \right\}$$

oder, wenn G_c absolut genommen wird, für

$$0 > n > -1, \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_6) \\ (\alpha_2) \end{array} \right\} V_0^h = \mp G_c h + \frac{h}{1+n} G_n = \frac{n}{1+n} \left\{ \mp n G_c + (\mp G_c + G_n) \right\},$$

$$V_0^h = \frac{h}{1+n} \left\{ \mp n G_c + Q_h \right\}.$$

(17) Insbesondere ergeben sich aus (15'') für $h = 0$ bez. $h = c$, oder aus (16') für $h = c$

$$n > 0 \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1) \quad V_0^c = \frac{n}{1+n} c^3 \Gamma_0 = \frac{n}{1+n} c G_c \quad (\alpha_6) \\ (\alpha_2) \quad V_0^c = \frac{2+n}{1+n} c^3 \Gamma_0 = \frac{2+n}{1+n} c G_c \quad (\alpha_2) \\ (\alpha_2) \quad V_c^{2c} = \frac{2^{n+1}+n}{1+n} c^3 \Gamma_0 = \frac{2^{n+1}+n}{1+n} c G_c \quad (\alpha_2) \\ (\alpha_6) \quad V_c^{2c} = \frac{2(2^n-1)-n}{1+n} c^3 \Gamma_0 = \frac{2(2^n-1)-n}{1+n} c G_c \quad (\alpha_1) \end{array} \right\} 0 > n > -1.$$

Im Falle $n = 2$ erhält man für (α_1) , (α_2) , (α_6) die in **21** (19) für den elliptischen und die hyperbolischen Körper 1^{ter} und 2^{ter} Art aufgestellten Formeln.

(18) Besonderes Interesse bietet die ganze Hauptschicht für $n > 0$, auf die wir uns beschränken. Sie nimmt, je nachdem n gerade oder ungerade ist, eine andere Form an.

Für ein gerades n ist jede eine Zentralschicht, da für jede Ordinate $Q_z = Q_{-z}$ ist.

Für ein ungerades n sind die Hauptschichten (α_1) und (α_2) identisch und liegen nur in bezug auf die Hauptebene symmetrisch. Es ist also, wenn wir die Querschnitte kurz durch ihre Indizes bezeichnen, $(\alpha_1)_{-z} = (\alpha_2)_z$ und $(\alpha_2)_{-z} = (\alpha_1)_z$. Da nun nach (14) für jede Ordinate z $Q_{(\alpha_1)} + Q_{(\alpha_2)} = 2G_c$ ist, so folgt für jeden der Körper (α_1) , (α_2) bei ungeradem n , daß $Q_z + Q_{-z} = 2G_c$ also konstant ist.

Bei ungeradem n ist daher die Hauptschicht in bezug auf die Hauptebene (aber nur für diese) als Mittelebene nach **5** ein sogenannter *D*- oder *S*-Körper.

Werden zwei halbe Hauptschichten verschiedener Art, d. h. je eine von (α_1) und (α_2) , zu einer ganzen Hauptschicht vereinigt, so ist diese im Gegensatz zu oben bei geradem n ein *D*- oder *S*-Körper und bei ungeradem n eine Zentralschicht. Für den Inhalt einer solchen zusammengesetzten Hauptschicht ergeben sich

dieselben beiden Formeln, die wir jetzt für die zwei Formen der einfachen Hauptschicht aufstellen.

(18') Hauptschicht \equiv Zentralschicht, also für gerades n , gegeben durch h , c und Γ_0 .

Wird in (16') h durch $\frac{h}{2}$ ersetzt und der Inhalt verdoppelt, oder wird in (14''') $h_1 = \frac{h}{2}$ und $h_2 = -\frac{h}{2}$ gesetzt, so folgt

$$\begin{aligned} (\alpha_1) \quad & V^{\frac{h}{2}} = c^2 \Gamma_0 h \left\{ 1 \mp \frac{1}{1+n} \left(\frac{h}{2c} \right)^n \right\}. \\ (\alpha_2) \quad & -\frac{h}{2} \end{aligned}$$

(18'') Ist h_1 der Mittelquerschnitt Q_0 und die gleichen Randquerschnitte Q_1 gegeben, so folgt nach (16'''), wenn h durch $\frac{h}{2}$ ersetzt und der Inhalt verdoppelt wird,

$$(\alpha_1), (\alpha_2) \quad V^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{1+n} \left\{ n Q_0 + Q_1 \right\}.$$

Diese Formel ist eine Verallgemeinerung der auf Zentralschichten angewendeten Simpsonschen Regel. (Vergl. **15** und **21**, 7, 8.)

Bei elliptischen Querschnitten stellt (α_1) einen Faßkörper dar.

(18''') Hauptschicht $\equiv D$ - oder S -Körper, also für ungerades n , gegeben durch h , c und Γ_0 oder G_c . Wie in (18') folgt

$$(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \quad V^{\frac{h}{2}} = c^2 \Gamma_0 h = G_c h.$$

(18^{IV}) Ist h und der Mittelquerschnitt $Q_0 \equiv G_c$ oder die beiden Randschnitte $Q_{\frac{h}{2}}$, $Q_{-\frac{h}{2}}$ gegeben, so folgt

nach (14^{IV}) oder (16'''), da hier $Q_{\frac{h}{2}} + Q_{-\frac{h}{2}} = 2 Q_0$ ist,

$$(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \quad V^{\frac{h}{2}} = \frac{1}{2} \left(Q_{\frac{h}{2}} + Q_{-\frac{h}{2}} \right) h = Q_0 h.$$

Für $n = 1$ erhält man die Schicht eines parabolischen Körpers. (Vgl. **21** (1)).

(19) Bemerkenswert sind die Sonderfälle für $h = 2c$.

Bei ungeradem n entsteht ein Körper, der seiner Gestalt (besonders bei elliptischen Querschnitten) wegen Glocke (α_1)

oder Kessel (α_2) genannt werde. Da sein Inhalt von n unabhängig ist, so haben alle Körper, die in Höhe und Mittelschnitt übereinstimmen, denselben Inhalt wie der Zylinder

$$(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \quad V_{-c}^c = 2cQ_0.$$

(19') Bei geradem n entsteht ein Vollkörper (α_1)

$$(\alpha_1) \quad V_{-c}^c = \frac{2n}{1+n} cQ_0.$$

(19'') Ist in letzterem Falle im besonderen Q_0 ein rechtwinkliges Dreieck von den Katheten a und b , so entsteht ein Huf (vergl. 21 (6 $_{\alpha''}$)) von rationalem Inhalt

$$(\alpha_1) \quad V = \frac{n}{1+n} abc.$$

Auch diese Sonderkörper können nach (18) aus zwei halben Hauptschichten verschiedener Art zusammengesetzt werden.

(20) Der trinomische Sektor S , der seine Spitze im Koordinatenursprung hat, kann mit Hilfe des binomischen Sektors bestimmt werden. Hierbei ist es einfacher, nicht die Querschicht I , sondern die Mantelschicht II heranzuziehen. Ist h , $Q_0 \equiv G_c$ und entweder der Begrenzungsquerschnitt Q_h oder G_h gegeben, so folgt für $n > 0$, wenn wir uns auf Sektoren zwischen den Grenzen $z_2 = 0$ und $z_1 = h$ beschränken:

$$\begin{matrix} (\alpha_2) \\ (\alpha_1) \end{matrix} \quad n > 0 \quad S_0^h = \frac{2}{3} h Q_h \mp II = \frac{2}{3} h (G_c \pm G_h) \mp \frac{n}{1+n} h G_h$$

oder

$$\begin{matrix} (\alpha_2) \\ (\alpha_1) \end{matrix} \quad n > 0 \quad S_0^h = \frac{2}{3} h G_c \pm \frac{2-n}{3(1+n)} h G_h.$$

(20') Da das zweite Glied der binomische Sektor des Asymptotenkörpers ist, und im ersten Glied weder n noch c vorkommt, so folgt:

Die algebraische Summe eines trinomischen Sektors und des Sektors des binomischen Asymptotenkörpers ist vom Verhältnis $\frac{c}{a}$ und dem Exponenten $n > 0$ unabhängig und konstant, vorausgesetzt, daß $G_c h$ seinen Wert nicht ändert.

(20'') Hieraus folgt noch allgemeiner, daß dieser Satz auch für zwei trinomische Sektoren gilt, deren Meridiankurven demselben Büschel angehören. Die konstante algebraische Summe ist dann $\frac{2}{3}(G_c' \mp G_c'')h$.

(20''') Im besonderen ergibt sich für $n=2$, wo der binomische Sektor verschwindet, der Satz 21 (9_α) auf S. 33.

(21) Nach (16) ist die halbe Zentralschicht (Hauptschicht) eines jeden trinomischen Körpers gleich $\frac{h}{1+n}(nG_c + Q_1)$. Da nun $\frac{h}{1+n}Q_1 = I$ als Querschicht eines binomischen Körpers n^{ten} Grades gedeutet werden kann, so ist für alle trinomischen Körper n^{ten} Grades, die in G_c und h übereinstimmen, für beliebige Q_1 der von beiden Körpern begrenzte Rest konstant. Wird dieser als Sektor höherer Art $S^{n,n}$ bezeichnet, weil er durch Ausschneidung eines binomischen Körpers ebenfalls n^{ten} Grades (nicht 2^{ten} Grades wie beim gewöhnlichen Sektor $S^{n,2}$) erzeugt wird, so folgt:

Alle trinomischen Sektoren höherer Art, die in Schichthöhe h und Querschnitt G_c des zugehörigen Zylinders übereinstimmen, haben gleichen Rauminhalt

$$(\alpha_{1,2,6}) \quad n > -1 \quad S = \frac{n}{1+n} h G_c.$$

(21') Dasselbe gilt auch für einen Sektor, der die Differenz zweier höherer Sektoren eines trinomischen Körpers ist, wenn unter der Schichthöhe h die Höhendifferenz verstanden wird.

(21'') Im besonderen führt $n=2$ auch hier wieder auf den Satz 21 (9_α).

§ 10. Methode d: Flächen- und Rauminhaltsberechnung im kritischen Falle $n = -1$.

43. Die im vorigen § 9 zur Inhaltsbestimmung angewendete Methode c gilt für jedes $n \geq -1$, versagt aber für $n = -1$, da sie in diesem Falle auf einen unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ führt. Dieser kritische Fall erfordert daher, wie schon in der Einleitung (S. 51) angedeutet wurde, eine andere Behandlungsweise, die als

Methode **d** bezeichnet werden soll.¹⁾ Dem Fall $n = -1$ entspricht als Raumproblem (α) die Kubatur der Körperschichten, die die Gravitationskurve oder eine der daraus abgeleiteten trinomischen Kurven zu Meridiankurven haben, als Flächenproblem (β) die Quadratur der Apollonischen Hyperbel.

Beide Probleme erfordern zu ihrer Lösung nach Methode **d** die Logarithmische oder Exponentialkurve, die im Falle (α) als Meridiankurve eines Hilfskörpers, im Falle (β) als Hilfskurve selbst auftritt. Die Inhaltsbestimmung dieser Hilfsgebilde selbst nach Methode **d** gestaltet sich noch einfacher, da diese Gebilde zugleich ihre eigenen Hilfsgebilde sind.

Wir behandeln

Methode d_β : das Flächenproblem

als das einfachere zuerst und seiner Bedeutung gemäß ausführlicher als das Raumproblem.

(1 $_\beta$) Die zu quadrierende Hyperbel, bezogen auf die Asymptoten als Koordinatenachsen, habe nach **29** die Gleichung

$$\frac{x}{a} = \frac{c}{z} \quad \text{oder} \quad xz = ac,$$

den Differentialquotient $\frac{dz}{dx} = -\frac{z}{x}$ und die Subtangente auf der z -Achse $s_z = -z$.

Wir unterlassen absichtlich, die beiden Konstanten a und c in eine zusammenzuziehen (obwohl dadurch die Entwicklung etwas einfacher würde), weil $a|c$ die Koordinaten eines beliebigen Hyperbelpunktes $x_1|z_1$ darstellen, während im anderen Falle \sqrt{ac} die einander gleichen Koordinaten des Scheitels der Hyperbel bedeutet.

Unsere Methode d_β besteht nun in folgendem (vergl. auf Tafel II Fig. 2):

(2 $_\beta$) Wir legen durch den Punkt $a|c$ die Parallelen zu den Asymptoten und ferner eine die Hyperbel in diesem Punkte berührende logarithmische Kurve, deren Asymptote mit der Hyperbelasymptote z zusammenfällt. Da für den Berührungspunkt die entsprechenden Subtangenten beider Kurven übereinstimmen, und die der Hyperbel $s_{z=c} = -c$ ist, so hat die konstante Subtangente der logarithmischen Kurve also auch diesen Wert. Verglichen mit der Kurve in **30** liegt demnach die logarithmische

¹⁾ Ich habe diese Methode am 5. November 1904 gefunden.

Kurve in bezug auf die Hyperbelasymptoten als Achsen hier so, daß ihre Ordinatenachse entgegengesetzt gerichtet und außerdem ihr Koordinatenanfangspunkt längs der z -Achse um c verschoben ist. Bezeichnen $\xi|\zeta$ ihre Koordinaten, so dürfen wir unter der Bedingung, daß nur solche Punkte von Hyperbel und logarithmischer Kurve aufeinanderbezogen werden, die in den Abszissen übereinstimmen, $\xi \equiv x$ und $d\xi \equiv dx$ setzen. Die Gleichung der die Hyperbel berührenden logarithmischen Kurve lautet daher

$$\frac{\pi}{a} = e^{\frac{c-\xi}{c}} \quad \text{oder} \quad \frac{c-\xi}{c} = \log \text{nat} \frac{\pi}{a}$$

und ihr Differentialquotient

$$\frac{d\pi}{d\xi} = -\frac{x}{c}.$$

(3 _{β}) Weisen wir nun jedem in der Richtung der x -Achse endlich sich erstreckenden Flächenelement dI der Hyperbel das parallele dL der logarithmischen Kurve zu, dessen Kurvenelement durch dieselben Größen x und dx bestimmt ist, und ferner jedem dL das auf ihm liegende Flächenelement dR_a des Rechtecks von der Breite a , die beide also durch dieselben Größen ξ und $d\xi$ bestimmt sind, so ist

$$dI = x dz, \quad dL = x d\xi, \quad dR_a = a d\xi.$$

Hieraus folgt unter Benutzung obiger Differentialquotienten

$$\frac{dI}{dL} = \frac{dz}{d\xi} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{d\xi} = \frac{z}{x} \cdot \frac{x}{c} = \frac{z}{c} = \frac{a}{x}$$

und ferner

$$\frac{dR_a}{dL} = \frac{a}{x},$$

also verhält sich (vergl. S. 3 des Vorworts)

$$dI : dL = dR_a : dL,$$

und es ist also

$$dI = dR_a \quad \text{und ebenso} \quad I = R_a,$$

d. h.: Der Hyperbelstreifen $I = II$ ist gleich dem Rechteck von den Seiten a und $(c - \xi)$.

$$II_a^x = I_z^c = a(c - \xi) = ac \log \text{nat} \frac{x}{a} = ac \log \text{nat} \frac{c}{z}.$$

Da nach der Hyperbelgleichung $x_1 z_1 = x_2 z_2 = ac$ ist, folgt auch für die einander entsprechenden gleichen Streifen, die zu zwei beliebigen Kurvenpunkten gehören,

$$I_{z_2}^{z_1} = II_{x_1}^{x_2} = ac \log \text{nat} \frac{z_1}{z_2} = ac \log \text{nat} \frac{x_2}{x_1}.$$

(4_β) Weisen wir ferner die drei in der Richtung der z -Achse endlich sich erstreckenden Flächenelemente, die durch x und dx bestimmt sind, also dII der Hyperbel, dL_2 der logarithmischen Kurve und dR_c des Rechtecks von der Höhe c einander zu, so ist

$$dII = z dx = x dz = dI = dR_c,$$

$$dL_2 = \xi dx \quad \text{und} \quad dR_c = c dx.$$

Aus letzterem folgt unter Benutzung obiger Differentialquotienten (2_β) und (3_β) für dL

$$\frac{dL}{dR_c} = \frac{x d\xi}{c dx} = -1^1),$$

also

$$dL = -dR_c \quad \text{und ebenso} \quad L = -R_c,$$

d. h.: Der Horizontalstreifen der logarithmischen Kurve ist gleich einem Rechteck von den Seiten c und $(x-a)$.

$$L_\xi^c = c(x-a) = ac \left(\frac{x}{a} - 1 \right) = ac \left(e^{\frac{c-\xi}{c}} - 1 \right).$$

(4_{β'}) Im besonderen ergibt sich für $\xi = \infty$

$$L_0^\infty = ac,$$

d. h.: Das von der Abszisse a bis ins ∞ sich erstreckende Flächenstück der logarithmischen Kurve von der Subtangente c ist gleich dem Rechteck aus den Seiten a und c .

(5_β) Obige Flächendifferentiale in (3_β) und (4_β) ergeben noch eine Flächenbeziehung zwischen der Hyperbel und der logarithmischen Kurve. Nach (3_β) und (4_β) ist

$$dL = dR_c \quad \text{und} \quad dR_a = dII;$$

hieraus folgt

$$(dL - dR_a) = (dR_c - dII).$$

Werden nun die durch den Berührungspunkt beider Kurven gezogenen Parallelen zur x - und z -Achse als Koordinatenachsen angesehen, so erhellt aus der Gleichheit dieser beiden in Klammern

¹⁾ Da dieser Differentialquotient konstant ist, so erübrigt sich die Anwendung der Methode d. Da hier die zu quadrierende logarithmische Kurve und ihre Hilfskurve sich decken, so würde man erhalten

$$\frac{dL}{dL} = 1, \quad \frac{dR_0}{dL} = -1 \quad \text{und} \quad dL : dL = -dR_c : dL.$$

stehenden Flächenelemente, die durch dasselbe x und dx bestimmt sind, auch die Gleichheit der endlichen Flächenstücke

$$(L - R_a)_\xi^c = (R_c - II)_a^x,$$

d. h.: Das hyperbolische Dreieck von den Katheten $(x-a)$ und $(c-z)$ ist gleich dem logarithmischen Dreieck von den Katheten $(x-a)$ und $(c-\xi)$.

Da die rechtwinkligen Dreiecke in der Breite $(x-a)$ übereinstimmen, so ist immer bei der Fläche mit der kleineren Höhe die Hypotenuse nach außen, bei der Fläche mit der größeren Höhe nach innen gekrümmt.

(6 _{β}) Es interessiert die Frage nach der Rationalität der Flächeninhalte. Bedeutet κ eine rationale Größe, so folgt

für die Hyperbel, wenn $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_2}{x_1} = e^x$ ist, der rationale Inhalt

$$I = \kappa \cdot ac,$$

für die logarithm. Kurve, wenn $\frac{x}{a} = \kappa$ ist, der rationale Inhalt

$$L = (\kappa - 1)ac.$$

(7 _{β}) Hyperbelstreifen $I = II$, gegeben durch $x_1 = g_1$, $x_2 = g_2$ und $z_1 - z_2 = h$, oder durch $z_1 = h_1$, $z_2 = h_2$ und $x_2 - x_1 = g$. Aus der Kurvengleichung folgt

$$z_1 - z_2 = h = \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) ac = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} ac,$$

$$x_2 - x_1 = g = \left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} \right) ac = \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2} ac.$$

Werden die hieraus für ac sich ergebenden Werte in die Gleichungen (3 _{β})

$$I = ac \log \text{nat} \frac{x_2}{x_1} = ac \log \text{nat} \frac{z_1}{z_2} = II$$

eingesetzt, so folgt

$$I = \frac{g_1 g_2}{g_1 - g_2} h \log \text{nat} \frac{g_1}{g_2} = \frac{h_1 h_2}{h_1 - h_2} g \log \text{nat} \frac{h_1}{h_2} = II.$$

(7 _{β} ') Hierdurch ist zugleich der Hyperbelsektor S bestimmt, da aus $n = -1$ nach (39) $S = I = II$ folgt.

(8 _{β}) Durch obige drei Größen in (7 _{β}) können nun ferner die beiden einander gleichen Trapeze $T_1 = T_2$ bestimmt werden, die

zwei Ordinaten oder zwei Abszissen zu parallelen Seiten haben, desgleichen das mit ihnen flächengleiche Dreieck Δ , dessen Ecken die beiden Kurvenpunkte und der Koordinatenursprung sind. Man erhält

$$T_1 = (g_1 + g_2) \frac{h}{2} = \Delta = (h_1 + h_2) \frac{g}{2} = T_2.$$

Es folgt daher für das

(8 $_{\beta}'$) Hyperbelsegment M , gegeben durch obigen Größen in (7 $_{\beta}$),

$$M = T_1 - I = \Delta - S = T_2 - II.$$

(8 $_{\beta}''$) Handelt es sich nicht um eine gleichseitige, sondern um eine schiefwinklige Hyperbel vom Asymptotenwinkel ω , so ist der schiefwinkligen Koordinaten wegen in den Formeln $h \sin \omega$ statt h , bez. $g \sin \omega$ statt g zu setzen, oder kurz, die Fläche mit $\sin \omega$ zu multiplizieren.

Insbesondere ergibt sich für ein

(8 $_{\beta}'''$) Symmetrisches Segment der gleichseitigen Hyperbel, gegeben durch die Koordinaten der Begrenzungssehne $x_1 = z_2 = g_1$ und $x_2 = z_1 = g_2$, da $h = g_2 - g_1$ ist,

$$M = \frac{1}{2} (g_2^2 - g_1^2) - g_1 g_2 \log \text{nat} \frac{g_2}{g_1},$$

oder in den Koordinaten $g_1 = x$, $g_2 = z$ eines Endpunktes der Hyperbelsehne ausgedrückt

$$M = \frac{1}{2} (z^2 - x^2) - xz \log \frac{z}{x}.$$

(9 $_{\beta}$) Beziehen wir die gleichseitige Hyperbel nicht auf ihre Asymptoten, sondern auf ihre Achsen als Koordinatenkreuz und nennen letztere $\xi | \eta$, so ergeben die rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecke, die ξ oder η , bez. x oder z zu Katheten haben,

$$\begin{aligned} z - x &= \eta \sqrt{2}, & z + x &= \xi \sqrt{2}, \\ x \sqrt{2} &= \xi - \eta, & z \sqrt{2} &= \xi + \eta. \end{aligned}$$

Als Gleichung der gleichseitigen Hyperbel folgt aus

$$xz = ac \qquad \xi^2 - \eta^2 = 2ac = \alpha^2,$$

worin α die Halbachsen der Kurve bedeuten.

Hieraus ergibt sich, wenn η durch $\frac{\alpha}{\beta} \eta$ ersetzt wird, als Gleichung der allgemeinen Hyperbel von den Halbachsen α und β

$$\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^2 = 1.$$

(10 _{β}) Symmetrisches Segment der gleichseitigen Hyperbel, gegeben durch die Koordinaten ξ, η eines Endpunktes der Begrenzungssehne,

$$M = \xi\eta - \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2) \log \text{nat} \frac{\xi + \eta}{\xi - \eta}.$$

Wird zur Abkürzung mit Hilfe der Gleichung der Kurve die Halbachse α eingeführt, so folgt

$$M = \xi\eta - \alpha^2 \log \text{nat} \frac{\xi + \eta}{\alpha} = \xi\eta - \alpha^2 \log \text{nat} \frac{\alpha}{\xi - \eta}.$$

(10 _{β} ') Symmetrisches Segment der allgemeinen Hyperbel, gegeben durch das Achsenverhältnis $\frac{\beta}{\alpha}$ und die Koordinaten ξ, η eines Endpunktes der Begrenzungssehne. Sowohl ihre Fläche als ihre Ordinaten sind das $\frac{\beta}{\alpha}$ fache der vorigen; an Stelle der alten Ordinate tritt also $\frac{\alpha}{\beta} \eta$. Man erhält (da $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \xi \cdot \frac{\alpha}{\beta} \eta = \xi\eta$ ist)

$$M = \xi\eta - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\alpha} (\xi^2 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \eta^2) \log \text{nat} \frac{\xi + \frac{\alpha}{\beta} \eta}{\xi - \frac{\alpha}{\beta} \eta}.$$

Die Formel gewinnt aber an Regelmäßigkeit, wenn statt des Verhältnisses der Achsen diese selbst eingeführt werden

$$M = \xi\eta - \alpha\beta \log \text{nat} \left(\frac{\xi}{\alpha} + \frac{\eta}{\beta}\right).$$

(10 _{β} '') In allen diesen Formeln stellt das zweite Glied die Fläche des Sektors dar. Aus vorstehender Formel kann noch ein

(11 _{β}) Symmetrischer Hyperbelstreifen J gefunden werden, der das Segment zu dem Rechteck von den Seiten ξ und 2η ergänzt; man erhält

$$J = \xi\eta + \alpha\beta \log \text{nat} \left(\frac{\xi}{\alpha} + \frac{\eta}{\beta}\right).$$

(11 _{β} ') Aus vorstehenden Formeln können sofort solche für schief abgeschnittene gefunden werden. Es bedeuten dann ξ und

η die Koordinaten eines Endpunktes der Hyperbelsehne, bezogen auf das schiefwinklige Koordinatensystem, dessen ξ -Achse durch den Mittelpunkt der Sehne geht und dessen η -Achse ihr parallel läuft, ferner α und β konjugierte Halbmesser. Ist außer diesen Größen in der eben angegebenen Bedeutung noch der Koordinatenwinkel φ gegeben, so erhält man den Inhalt der betreffenden Figur, wenn Formel (10 $_{\beta}'$) bez. (11 $_{\beta}$) mit $\sin \varphi$ multipliziert wird.

44. Ganz analog gestaltet sich

Methode d $_{\alpha}$: das Raumproblem.

(12 $_{\alpha}$) Die Gravitationskurve, welche die Meridiankurve des zu kubierenden α -Körpers bildet, hat nach 29 die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{c}{z} \quad \text{oder} \quad x^2 z = a^2 c,$$

den Differentialquotient $\frac{dz}{dx} = -\frac{2z}{x}$ und die Subtangente auf der z -Achse $s_z = -2z$.

Auch hier stellt $a|c$ einen beliebigen Kurvenpunkt dar. Die einander ähnlichen Querschnitte seien $G_z = x^2 \Gamma = x^2 \frac{c^2}{a^2} \Gamma_0$.

(13 $_{\alpha}$) Wir legen durch den Punkt $a|c$ die parallele Ebene zur xy -Ebene, den zugehörigen Zylinder von der Grundfläche $G_c = a^2 \Gamma = c^2 \Gamma_0$, dessen Mantellinien der z -Achse parallel sind, und ferner einen Hilfskörper L , dessen Meridiankurve eine, die Gravitationskurve im Punkte $a|c$ berührende logarithmische Kurve ist, deren Asymptote mit der z -Achse zusammenfällt. Der Hilfskörper berührt die zu bestimmende Schicht längs des Querschnitts G_c , beide Körper haben also den Tangentialkegel gemeinsam, dessen Höhe die Subtangente $s_{z=c} = -2c$ ist.

Da hiernach die affinen Meridiankurven des Hilfskörpers in allen durch die z -Achse gehenden Ebenen in ihrer konstanten Subtangente $2c$ übereinstimmen, so sind sie kongruent¹⁾, während

¹⁾ Vergl. nach Anmerkung auf S. 56 meine Mitteilung an G. Loria, a. a. O. S. 544. In meinem Satze: „Die Projektion der logarithmischen Kurve auf eine jede Ebene, welche durch die Asymptote, bez. eine zur Asymptote senkrechte Achse geht, ist eine ihr kongruente bez. ähnliche Kurve“, steht dort am Schlusse affin statt ähnlich. Ersteres ist aber als allgemein geltende Eigenschaft parallelprojizierter Gebilde für vorstehenden Satz nicht von Bedeutung, jedoch das letztere.

die Meridiane der zu bestimmenden Schicht als binomische Kurven nur ähnlichen Kurven angehören. Die zu G_c parallelen Querschnitte des Hilfskörpers sind ebenfalls einander ähnlich.

Die Gleichung der die Gravitationskurve berührenden logarithmischen Kurve in der xz -Ebene ist hier

$$\frac{x}{a} = e^{\frac{c-\xi}{2c}} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 = e^{\frac{c-\xi}{c}} \quad \text{oder} \quad \frac{c-\xi}{2c} = \log \text{nat} \frac{x}{a}$$

und ihr Differentialquotient $\frac{dx}{d\xi} = -\frac{x}{2c}$.

(14_a) Weisen wir nun jedem parallel der xy -Ebene endlich sich erstreckenden Raumelement dI der zu bestimmenden Schicht das parallele dL des Hilfskörpers zu, dessen Oberflächenelement durch dieselben Größen x und dx bestimmt ist, und ferner jedem dL das auf ihm liegende Raumelement dR_a des „zugehörigen“ Zylinders von der Grundfläche $G_c = a^2\Gamma$, die beide also durch dieselben Größen ξ und $d\xi$ bestimmt sind, so ist

$$dI = x^2\Gamma \cdot dz, \quad dL = x^2\Gamma \cdot d\xi, \quad dR_a = a^2\Gamma \cdot d\xi.$$

Hieraus folgt unter Benutzung obiger Differentialquotienten

$$\frac{dI}{dL} = \frac{dz}{d\xi} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{d\xi} = \frac{2z}{x} \cdot \frac{x}{2c} = \frac{z}{c} = \frac{a^2}{x^2}$$

und ferner

$$\frac{dR_a}{dL} = \frac{a^2}{x^2},$$

also verhält sich (vergl. S. 3 des Vorwortes)

$$dI : dL = dR_a : dL$$

und es ist

$$dI = dR_a \quad \text{und ebenso} \quad I = R_a.$$

D. h.: Der Inhalt der zu bestimmenden Querschicht I und ebenso der ihr gleichen Mantelschicht II ist gleich einem Zylinder von der Grundfläche G_c und der Höhe $(c-\xi)$.

Unter Benutzung von (13_a) ergeben sich daher die Inhaltsformeln:

$$\begin{aligned} II_a^x &= I_z^c = G_c(c-\xi) = G_c \cdot 2c \log \text{nat} \frac{x}{a} \\ &= G_c \cdot c \log \text{nat} \left(\frac{x}{a}\right)^2 \\ &= G_c \cdot c \log \text{nat} \frac{c}{z} = a^2\Gamma \cdot c \log \text{nat} \frac{c}{z} = c^3\Gamma_0 \log \text{nat} \frac{c}{z}, \end{aligned}$$

oder auch, da nach der Gleichung der Gravitationskurve

$$x_1^2 z_1 = x_2^2 z_2 = a^2 c$$

ist,

$$I_{z_2}^{z_1} = II_{x_1}^{x_2} = c^3 \Gamma_0 \log \text{nat} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 = c^3 \Gamma_0 \log \text{nat} \frac{z_1}{z_2}.$$

(15_α) Weisen wir ferner die drei in der Richtung der z -Achse endlich sich erstreckenden Raumelemente, die durch x und dx oder, was dasselbe besagt, $G_z \equiv G_\zeta$ und $dG_z \equiv dG_\zeta$ bestimmt sind, also die drei Mantelschichtenelemente dII des zu bestimmenden Körpers, dL_2 des Hilfskörpers und dR_c des Hohlzylinders von der Höhe c einander zu, so ist

$$dII = z \cdot dG_z = z \cdot 2x dx \Gamma = x^2 \Gamma \cdot dz = G_z dz = dI,$$

$$dL_2 = \xi \cdot dG_z, \quad dR_c = c \cdot dG_z = c \cdot 2x dx \Gamma.$$

Aus letzterem folgt unter Benutzung obiger Differentialquotienten (14_α) für dL

$$\frac{dL}{dR_c} = \frac{x^2 \Gamma \cdot d\xi}{2cx \Gamma \cdot dx} = -1^1),$$

also auch $L = R_c$, d. h.:

Die Querschicht des Hilfskörpers ist gleich einem Hohlzylinder von der Höhe c und der Grundfläche $x^2 \Gamma - a^2 \Gamma$.

$$L_\zeta^c = c(x^2 - a^2) \Gamma = c \left(\left(\frac{x}{a} \right)^2 - 1 \right) a^2 \Gamma = G_c c \left(e^{\frac{c-\zeta}{c}} - 1 \right) = c^3 \Gamma_0 \left(e^{\frac{c-\zeta}{c}} - 1 \right).$$

(15_{α'}) Im besonderen ergibt sich für $\zeta = \infty$

$$L_c^\infty = G_c c,$$

d. h.: Der von der Fläche G_c bis ins ∞ sich erstreckende Teil des Körpers, dessen Meridiane logarithmische Kurven von der Subtangente $2c$ sind, ist gleich einem Zylinder, der G_c zur Grundfläche und die halbe Subtangente c zur Höhe hat.

(16_α) Querschicht $I =$ Mantelschicht II des Körpers, dessen Meridiane Gravitationskurven sind. I gegeben durch die Begrenzungsquerschnitte $x_1^2 \Gamma = G_1$, $x_2^2 \Gamma = G_2$ und die Höhe $z_1 - z_2 = h$. Aus der Gleichung der Meridiankurve $x^2 z = a^2 c$ folgt

$$h = a^2 c \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} \right) = \frac{a^2 c (x_2^2 - x_1^2)}{x_1^2 x_2^2}.$$

¹⁾ Auch hier wird die Anwendung der Methode d überflüssig, (Vergl. die Bemerkung zu (4_β).

Der hieraus sich ergebende Wert von a^2c in Formel (14_α) eingesetzt, ergibt

$$I = \frac{x_1^2 x_2^2 h \Gamma}{x_2^2 - x_1^2} \log \text{nat} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2$$

und durch Einführung obiger gegebener Größen

$$I = \frac{G_1 G_2 h}{G_1 - G_2} \log \text{nat} \frac{G_1}{G_2}.$$

(16_α') In gleicher Weise berechnet man II , gegeben durch die Grenzhöhen $z_1 = h_1$, $z_2 = h_2$ und die Grundfläche $x_2^2 - x_1^2 \Gamma = G$. Aus der Gleichung der Meridiankurve folgt

$$x_2^2 - x_1^2 = a^2 c \left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} \right) = \frac{a^2 c (z_1 - z_2)}{z_1 z_2}.$$

Der hieraus sich ergebende Wert von a^2c in Formel (14_α) eingesetzt, gibt

$$II = \frac{(x_2^2 - x_1^2) z_1 z_2 \Gamma}{z_1 - z_2} \log \frac{z_1}{z_2}$$

und durch Einführung der gegebenen Größen

$$II = \frac{h_1 h_2 G}{h_1 - h_2} \log \frac{h_1}{h_2}.$$

(16_α'') Diese Endformeln für $I = II$ gelten auch für die Querbez. Mantelschichten der entsprechenden trinomischen Körper.

Wir behandeln zum Schlusse noch die

(17_α) Volle Horizontalschicht V der trinomischen α -Körper und verweisen zunächst auf das in 42 Gesagte.

Obwohl der Inhalt V , wenn h , Q_1 , Q_2 und Γ_0 gegeben sind, bestimmt werden kann, da ($n = -1$ zufolge) die Berechnung von G_c nach 42 (14') auf eine Gleichung nur 4^{ten} Grades führt, so werden doch die Formeln so ungeschickt, daß wir darauf verzichten. Wir geben nur die Entwicklungen, die in 42 den Beispielen (14''') und (14^{IV}) entsprechen.

(17_α') V , gegeben durch c , Γ_0 und die Ordinaten h_1 und h_2 .

$$\begin{aligned} (\alpha_1), (-\alpha_6) \\ (\alpha_2) \quad V &= c^2 \Gamma_0 (h_1 - h_2) \mp c^3 \Gamma_0 \log \text{nat} \frac{h_1}{h_2} \\ &= c^2 \Gamma_0 \left\{ (h_1 - h_2) \mp c \log \text{nat} \frac{h_1}{h_2} \right\}. \end{aligned}$$

(17_α'') V , gegeben durch die Begrenzungsquerschnitte Q_1 , Q_2 und deren Ordinaten h_1 , h_2 . Nach 42 (14^{IV}) erhält man zunächst für das unbekannte G_c , da $n = -1$ ist,

$$\begin{matrix} (\alpha_1), (\alpha_2) \\ (\alpha_6) \end{matrix} \quad G_c = \pm \frac{Q_1 h_1 - Q_2 h_2}{h_1 - h_2}$$

und für die Grundfläche G der Mantelschicht II

$$\begin{matrix} (\alpha_1) \\ (\alpha_2), (\alpha_6) \end{matrix} \quad G = G_1 - G_2 = \mp (Q_1 - Q_2).$$

Da nun $h = h_1 - h_2$ ist, und hier die Querschicht I durch die inhaltsgleiche Mantelschicht II ersetzt werden kann, so folgt für alle drei trinomische Schichten als algebraische Summen des zugehörigen Zylinders $G_c h$ und der Querschicht $I = II$ nach **42** (14) die gemeinsame Formel

$$(\alpha_{1, 2, 6}) \quad V = Q_1 h_1 - Q_2 h_2 + \frac{(Q_1 - Q_2) h_1 h_2}{h_1 - h_2} \log \text{nat} \frac{h_1}{h_2}.$$

Diese Formel kann auch direkt aus der Figur als algebraische Summe der Schichten $Q_1 h_1$, $Q_2 h_2$ und II abgeleitet werden.

§ 11. Anhang: Verallgemeinerung des α -Problems, zugleich Verallgemeinerung von Sätzen über Rotationskörper.

45. Das Problem des α -Körpers, dessen Inhaltsbestimmung in § 8 bis § 10 behandelt wurde, ist noch einer wichtigen Erweiterung fähig, die auf einen gemischten Körper führt, der als algebraische Summe eines α - und eines β -Körpers dargestellt werden kann.

(1) Der zu betrachtende allgemeine Körper V soll sich vom α -Körper nur dadurch unterscheiden, daß in jeder Meridianebene die Koordinatenachse z der Meridiankurve nicht mehr mit der Achse ξ der Meridianebenen zusammenfällt, sondern ihr parallel läuft. Die Affinität der Meridiankurven und nach **26** folglich auch die Ähnlichkeit der parallelen Querschnitte bleibe erhalten.

Die ξ -Achse sei also zugleich

Affinitätsachse der Meridiankurven mit ihren Koordinatenachsen z und

Ähnlichkeitslinie der Querschnitte Q .

Die z -Achse beschreibt den Mantel eines Zylinders (Prismas) von ähnlicher Grundfläche Q_y . Dieser Zylinder selbst werde kurz γ -Körper genannt; er tritt bei der Inhaltsbestimmung einer vollen Körperschicht V als dritter Teilkörper hinzu.

(2) Als Meridian gelte immer nur ein solcher Teil der Kurve, der auf einer und derselben Seite der z -Achse liegt, also ein Kurvenquadrant oder ein Teil eines solchen, soweit nur positive Ordinaten z in Betracht kommen.

Die zu betrachtende Körperschicht V heiße eine innere, wenn dieser Teil der Meridiankurve zwischen der z - und ξ -Achse sich erstreckt, sonst eine äußere. Wird der Bereich eines Kurvenquadranten von der ξ -Achse geschnitten, so zerfällt er also in einen inneren und einen äußeren Teil, sonst ist er entweder ein innerer oder ein äußerer.

(3) Die der xy -Ebene parallele Grundfläche Q der zu bestimmenden Schicht V werde von der in der $x\xi$ -Ebene gelegenen Meridiankurve, ihrer Koordinatenachse z und der Achse ξ der Meridianebenen in C, O, Ω und von den entsprechenden Punkten einer um den Winkel ω gedrehten Meridianebene in $C_\omega, O_\omega, \Omega$ geschnitten.

Werden die Strecken $OC = x, \Omega O = m$ und vorübergehend ebenso $O_\omega C_\omega = x_\omega, \Omega O_\omega = m_\omega$ gesetzt, und die entsprechenden Meridianschnitte, die zwischen Kurve und z -Achse (nicht ξ -Achse!) sich erstrecken, mit M bez. M_ω bezeichnet, so verhält sich der Affinität zufolge

$$M : M_\omega = x : x_\omega = m : m_\omega.$$

Also ist, wenn M eine Konstante, die Meridianschnittkonstante, und h die Höhe der Schicht bezeichnet,

$$M = xh \cdot M, \quad M_\omega = x_\omega h \cdot M.$$

Die Meridianschnitte der vollen bis zur ξ -Achse sich erstreckenden Körperschicht V dagegen sind die algebraische Summe von M bez. M_ω und dem zwischen der z - und ξ -Achse liegenden Rechteck mh bez. $m_\omega h$.

(4) Je nach der Reihenfolge der Punkte C, O, Ω sind für jede binomische oder trinomische Meridiankurve drei Arten von Schichten zu unterscheiden:

äußere Schicht 1 ^{ter} Art	$V'_a,$	$\Omega OC,$	$\Omega C = + m + x,$
innere Schicht	$V_i,$	$\Omega CO,$	$\Omega C = + m - x,$
äußere Schicht 2 ^{ter} Art	$V''_a,$	$O\Omega C,$	$\Omega C = - m + x.$

Jeder dieser drei Körper V werde durch die Meridianebenen,

von denen je zwei benachbarte den unendlich kleinen Winkel $d\omega$ einschließen mögen, in Raumelemente dV zerschnitten. Jeder solche unendlich schmale Keil dV kann in die algebraische Summe von drei Raumelementen $dV_\alpha, dV_\beta, dV_\gamma$ je eines α -, β -, γ -Körpers zerlegt werden. Dementsprechend werde irgend ein Querschnitt Q in Flächenelemente dQ und jeder von diesen wieder in die algebraische Summe von $dQ_\alpha, dQ_\beta, dQ_\gamma$ zerlegt.

In den ohne weiteres verständlichen Figuren 4 auf Tafel II sind für die drei Arten von Körperschichten die Zerlegung eines Flächenelementes dQ dargestellt und der Einfachheit wegen die unendlich kleinen Flächenteile nur durch ihre Indizes bezeichnet worden. Man erhält

$$(i), \begin{matrix} (a') \\ (a'') \end{matrix} \quad dQ = dQ_\alpha \pm dQ_\beta + dQ_\gamma \text{ und ebenso } dV = dV_\alpha \pm dV_\beta + dV_\gamma.$$

Die α - bez. die γ -Elemente ergeben, zu endlichen Körpern zusammengesetzt, einen eigentlichen α - bez. den γ -Körper; dagegen lassen sich die unendlich kleinen Zylinder, die die β -Elemente bilden, nur in dem Sonderfall, daß es sich um einen Rotationskörper handelt, ohne weiteres zu einem endlichen Zylinder zusammenlegen. Aber auch im allgemeinen Falle soll die Summe der β -Flächenelemente bez. der β -Raumelemente Q_β bez. V_β genannt werden. Es bestehen also bez. die Gleichungen:

$$(i), \begin{matrix} (a') \\ (a'') \end{matrix} \quad Q = Q_\alpha \pm Q_\beta + Q_\gamma \text{ und ebenso } V = V_\alpha \pm V_\beta + V_\gamma.$$

Fällt O mit Ω zusammen, so wird $V_\beta = 0$ und $V_\gamma = 0$ und es resultiert der α -Körper $V = V_\alpha$.

46. Sind die ähnlichen Querschnitte: Grundfläche Q_γ des γ -Körpers und Grundfläche Q (bez. beide Begrenzungsquerschnitte) der zu bestimmenden gemischten Schicht in irgend einer Form gegeben, so können die entsprechenden Querschnitte des α - und β -Körpers bestimmt werden.

(5) Aus der Ähnlichkeit der Flächenelemente $dQ_\alpha \sim dQ \sim dQ_\gamma$ folgt $Q_\alpha \sim Q \sim Q_\gamma$, also auch durch Einführung der Querschnittskonstante Γ und der Abszissen

$$\begin{matrix} (a') \\ (i) \\ (a'') \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} Q_\alpha' \\ Q_\alpha \\ Q_\alpha'' \end{matrix} \right\} = x^2 \Gamma, \quad \left. \begin{matrix} Q = (m+x)^2 \Gamma, \\ Q = (m-x)^2 \Gamma, \\ Q = (x-m)^2 \Gamma, \end{matrix} \right\} = m^2 \Gamma, \quad \left. \begin{matrix} Q_\gamma \\ Q_\gamma \\ Q_\gamma \end{matrix} \right\}$$

Durch Vergleichung der Quadratwurzeln dieser Ausdrücke ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{(a')} \quad \sqrt{Q} &= \sqrt{Q_\gamma} + \sqrt{Q_\alpha'} & Q_\alpha' &= (\sqrt{Q} - \sqrt{Q_\gamma})^2 \\ \text{(i)} \quad \sqrt{Q} &= \sqrt{Q_\gamma} - \sqrt{Q_\alpha} & \text{und hieraus} \quad Q_\alpha &= (\sqrt{Q_\gamma} - \sqrt{Q})^2 \\ \text{(a'')} \quad \sqrt{Q} &= \sqrt{Q_\alpha''} - \sqrt{Q_\gamma} & Q_\alpha'' &= (\sqrt{Q} + \sqrt{Q_\gamma})^2 \end{aligned}$$

Der α -Körper kann also bestimmt werden. Die Formeln für Q_α' und Q_α stimmen überein.

(6) Für den β -Körper folgt aus (4) mittels (5)

$$\begin{aligned} \text{(a')} \quad Q_\beta' & \\ \text{(i)} \quad Q_\beta & \\ \text{(a'')} \quad Q_\beta'' & \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{(a')} \\ \text{(i)} \\ \text{(a'')} \end{aligned}} \right\} = 2m\alpha\Gamma = \begin{cases} 2\sqrt{Q_\alpha' Q_\gamma} \\ 2\sqrt{Q_\alpha Q_\gamma} \\ 2\sqrt{Q_\alpha'' Q_\gamma} \end{cases} = \begin{cases} 2(\sqrt{Q Q_\gamma} - Q_\gamma) \\ 2(Q_\gamma - \sqrt{Q Q_\gamma}) \\ 2(Q_\gamma - \sqrt{Q Q_\gamma}) \end{cases}$$

(7) Bevor die β -Raumelemente zu einem β -Körper zusammengelegt werden können, müssen sie umgestaltet werden. Wird vorübergehend die veränderliche unendlich kleine Breite des Grundflächenelementes dQ_β mit db_ω bezeichnet, so ist $dQ_\beta = x_\omega \cdot db_\omega$ und $dV_\beta = M_\omega \cdot db_\omega$. Nach (3) folgt

$$dV_\beta = x_\omega hM \cdot db_\omega = hM \cdot dQ_\beta$$

und endlich nach (4)

$$V_\beta = hM \cdot Q_\beta.$$

Es ist also, da nach (6) Q_β bekannt ist, V_β für alle drei Arten von Schichten bestimmt.

(8) Besonders einfach und für alle drei Schichtenarten geltend gestaltet sich die Formel, wenn statt der Meridianflächenkonstante M der Meridianschnitt M selbst eingeführt wird. Man erhält

$$V_\beta = hM \cdot 2m\alpha\Gamma = M \cdot 2m\Gamma.$$

(9) Der Inhalt des γ -Körpers ist ohne weiteres bekannt:

$$V_\gamma = hQ_\gamma = hm^2\Gamma.$$

47. Für die drei Arten der vollen Körperschichten V ergeben sich daher, wenn unter den notwendigen Bestimmungsgrößen

(1) entweder die Meridianflächenkonstante M und die ähnlichen Querschnitte Q , Q_γ gegeben sind,

$$\begin{aligned} \text{(a')}, \text{(i)} \\ \text{(a'')} \end{aligned} \quad V = V_\alpha - hM \cdot 2(Q_\gamma \mp \sqrt{Q Q_\gamma}) + hQ_\gamma,$$

(2) oder die Meridianfläche M , die Querschnittskonstante Γ und die Abszisse m des γ -Körpers gegeben sind,

$$(i), (a') \quad V = V_\alpha \pm M \cdot 2m\Gamma + hm^2\Gamma.$$

(3) Besonders einfach gestaltet sich die letzte Inhaltsformel für eine Schicht $(V' - V_\gamma)$, die Differenz der äußeren (a') und des γ -Körpers, bez. eine Schicht $(V_\gamma - V)$, die Differenz des γ -Körpers und der inneren Schicht (i) . Jede von ihnen stimmt mit V_α in den Meridianschnitten M überein. Man erhält

$$\begin{aligned} (V' - V_\gamma) &= V_\alpha' + M \cdot 2m\Gamma, \\ (V_\gamma - V) &= -V_\alpha + M \cdot 2m\Gamma. \end{aligned}$$

(4) Ebenso einfach wird die Inhaltsformel für die Schicht $(V' - V)$, die Differenz der äußeren (a') und vollen inneren (i) , da in diesem Falle $V_\alpha' = V_\alpha$ und $M' = M$ ist. Man erhält (auch als Summe der beiden Formeln (3))

$$(V' - V) = 2M \cdot 2m\Gamma.$$

(5) Für den Sonderfall eines Rotationskörpers ist $\Gamma = \pi$ zu setzen. Die Formel (4) geht in die Pappus-Guldinsche Regel über, nach welcher der Inhalt eines Rotationskörpers gleich dem Produkte aus Meridianschnitt (hier $2M$) und Schwerpunktsweg (hier $2m\pi$) sich ergibt. Aber auch die beiden Formeln (3) führen in diesem Falle auf bekannte und viel gebrauchte Formeln.¹⁾

48. Der Inhalt V verlangt die Kenntnis des Meridianschnittes, also können Körper von trinomischer Meridiankurve mit unsern in §§ 8—10 entwickelten Formeln nicht allgemein berechnet werden. Für $n = 2$ ist dies möglich, da in § 10 die Hyperbelstreifen bestimmt worden sind, während die elliptischen als bekannt vorausgesetzt werden dürfen. Handelt es sich dagegen um Körper mit binomischer Meridiankurve, so kann mit unsern Hilfsmitteln die Aufgabe ganz allgemein gelöst werden.

¹⁾ Siehe z. B.: G. Holzmüller, Elemente der Stereometrie, Bd. III, S. 5. Über Geschichte und Erweiterungen der Pappus-Guldinschen Regel vgl. a. a. O. S. 45 und besonders Cantor, Geschichte der Mathematik, Bd. II. Bei den mir bekannten Erweiterungen dieses Satzes wird der Körper dadurch erzeugt, daß ein unveränderliches Flächenstück mit seinem Schwerpunkt normal längs einer Raumkurve sich bewegt, während der Meridianschnitt unsrer Körper affin veränderlich ist, dafür aber der Beschränkung unterliegt, daß sein Schwerpunkt eine ebene Kurve beschreibt.

Wir berechnen, um wenigstens ein Beispiel zu geben, die Gemischte parabolische Zentralschicht $2n^{\text{ten}}$ Grades, gegeben durch den Mittelquerschnitt $Q_y = Q_0$, die Randquerschnitte $Q = Q_1$ und die Höhe h . Da die Meridiankurve eine Parabel n^{ter} Ordnung $z^n = px$ sein soll, so ist für den α -Körper $n_\alpha = 2n$ und für den β -Körper $n_\beta = n$ zu nehmen.

Nach 40 (1) ist $V_\alpha = \frac{1}{1+2n} h Q_\alpha$. Da ferner nach 40 (4) der Meridianschnitt M der $(1+n)^{\text{te}}$ Teil des umgeschriebenen Rechtecks ist, so folgt für die Konstante $M = \frac{1}{1+n}$. Wir erhalten also, wenn die Schicht als eine innere aufgefaßt wird,

$$(i) \quad V = \frac{h}{1+2n} (\sqrt{Q_0} - \sqrt{Q_1})^2 - \frac{2h}{1+n} (Q_0 - \sqrt{Q_0 Q_1}) + h Q_0$$

und nach leichter Umformung

$$V = \frac{h}{2n^2 + 3n + 1} \left\{ 2n^2 Q_0 + 2n \sqrt{Q_0 Q_1} + (n+1) Q_1 \right\}.$$

Diese Formel gilt sowohl für die konkave (a') als auch für die konvexe (i) Zentralschicht, je nachdem $Q_0 \leq Q_1$ ist.

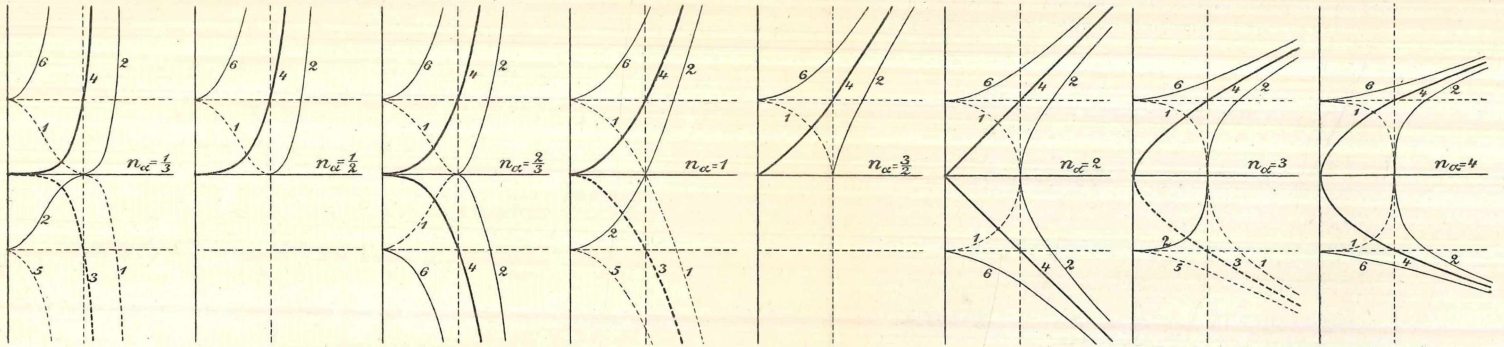
Hieraus: Parabolischer Faßkörper $2n^{\text{ten}}$ Grades mit elliptischen Böden, gegeben durch die Länge h , die große Spundtiefe $2r_0$, den großen Bodendurchmesser $2r_1$ und das Achsenverhältnis $\frac{b}{a}$ der ähnlichen elliptischen Querschnitte,

$$V = \frac{\pi}{2n^2 + 3n + 1} \cdot \frac{b}{a} \cdot h \left\{ 2n^2 r_0^2 + 2n r_0 r_1 + (n+1) r_1^2 \right\}.$$

Für $n=2$ gehen diese Formeln in die auf S. 19 gefundenen über.

Abgeschlossen am 20. März 1908.

Joh. Finsterbusch.



Sämliche Figuren zu den Seiten 54-57.

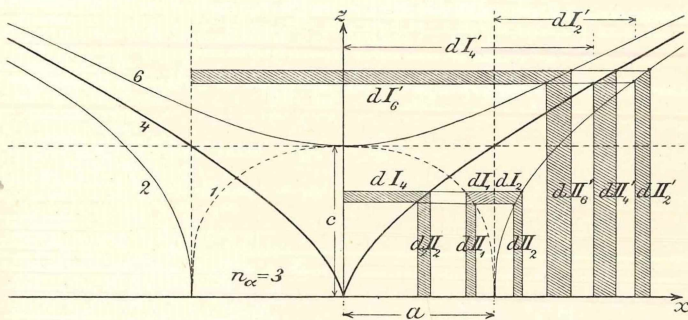
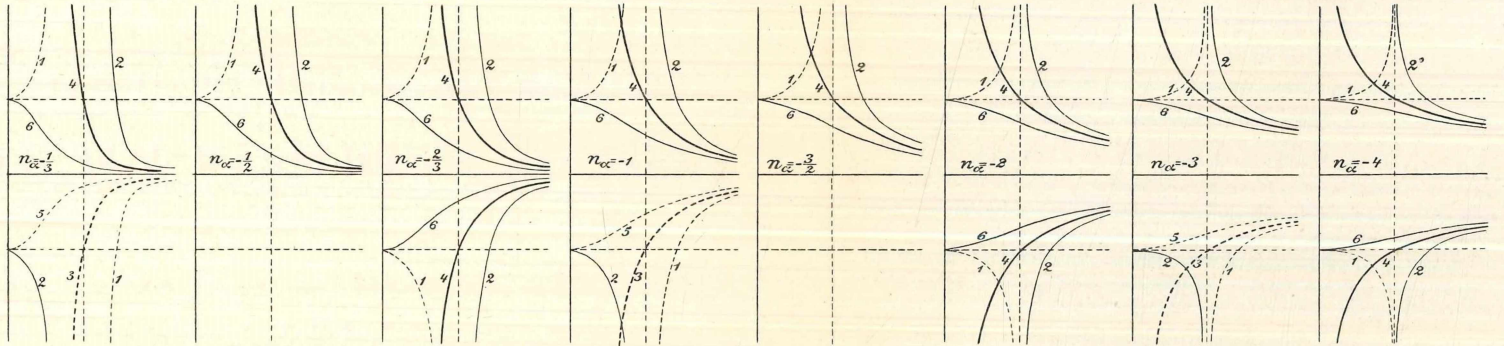


Fig. 1 (zu Seite 65)

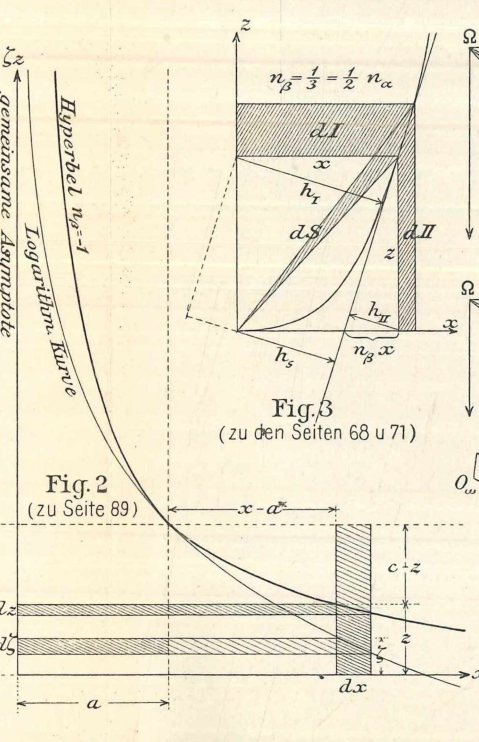
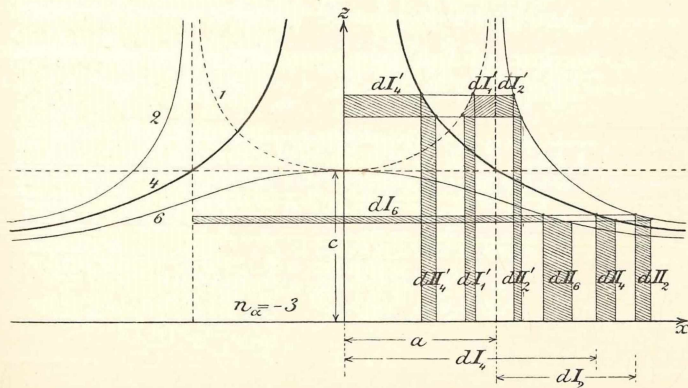


Fig. 3 (zu den Seiten 68 u 71)

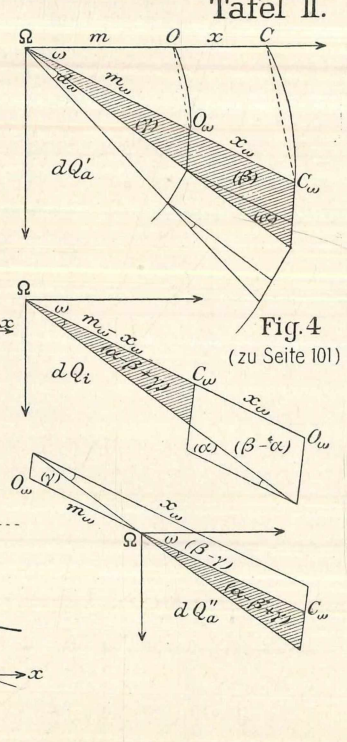


Fig. 4 (zu Seite 101)