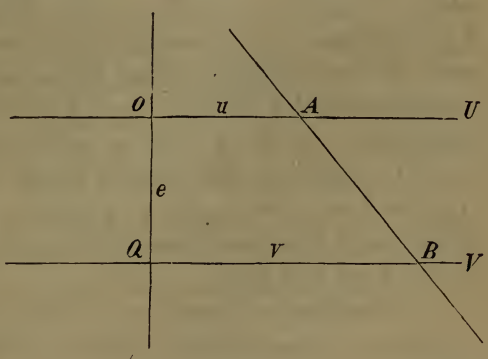
Anlage II. zum Berichte der mathematisch-physikalisch-chemischen Section.

Ueber ein neues Liniencoordinatensystem.

Von Dr. Schwering.

Man hat bisher bei Untersuchungen, die mit Hülfe von Liniencoordinaten geführt sind, sich fast nur auf projectivische Eigenschaften beschränkt und demgemäss kaum andere als trilineare Systeme zur Anwendung gebracht. In meiner heutigen kleinen Vorlesung beabsichtige ich, ein System zur Sprache zu bringen, welches auch für Fragen, die metrische Eigenschaften betreffen, mir sehr gute Dienste geleistet hat. Es soll mein Bestreben dahin gerichtet sein, auch denjenigen Herren, denen der Begriff Liniencoordinaten wenig oder gar nicht geläufig ist, verständlich zu werden.

Seien zwei parallele Gerade im Abstande e von einander gegeben, die von der Senkrechten OQ geschnitten werden. Die beiden Parallelen nennen wir Coordinatenaxen, die Punkte O, Q Grundpunkte unseres Systems. Es möge eine beliebige Gerade die Coordinatenaxen in den Punkten A, B treffen; dann ist die Lage der Geraden in der Ebene der Coordinatenaxen eindeutig bestimmt, sobald die in derselben Richtung gemessenen Strecken u = OA, v = QB gegeben sind. Man kann daher diese Strecken die Coordinaten der Geraden AB nennen.



Zunächst ist ein Zweifel zu beseitigen, der bei Betrachtung einer den Coordinatenaxen parallel gehenden Geraden entstehen könnte. Eine solche Gerade schneidet ja die Coordinatenaxen gar nicht, besitzt also keine ersichtlichen Coordinaten. Um diese Schwierigkeit zu erledigen, betrachten wir den Schnittpunkt c irgend einer Geraden (etwa der AB in unserer Figur) mit OQ. Drehen wir die Gerade um diesen Punkt C, bis sie in die den Axen parallele Lage gelangt, so werden die Coordinaten u, v immerfort wachsen und schliesslich unendlich werden; das Verhältniss derselben aber bleibt ungeändert, nämlich gleich $CO:CQ$. Demnach besitzen die den Axen parallel gehenden Geraden zwei unendlich grosse Coordinaten, die zu einander in einem gegebenen Verhältnisse stehen. Diese Geraden entsprechen daher in unserm System den Punkten der unendlich fernen Geraden für Cartesische Punktcoordinaten.

Betrachten wir nun die Gleichung

$$Au + Bv + C = o.$$

Zu jedem gegebenen u liefert dieselbe ein einziges v. Bestimmen wir zu einer beliebig angenommenen Werthreihe $u_1, u_2, u_3, \ldots$ die zugehörigen $v_1, v_2, v_3, \ldots$ und ziehen die den Paaren (u, v) entsprechenden Geraden, so werden wir das geometrische Bild der vorstehenden Gleichung erhalten. Ich behaupte, dass dieses Bild ein Punkt ist, durch welchen die Geraden (u, v) alle hindurchgehen. Denn, sei (u_0, v_0) eine Gerade (ein Strahl), deren Coordinaten der vorstehenden Gleichung genügen, so dass

$$Au_0 + Bv_0 + C = o.$$

Dann ergibt sich durch Subtraction $A(u - u_0) + B(v - v_0) = o$ oder $u - u_0 : v - v_0 = B : - A$. Demnach haben die Differenzen der Coordinaten ein constantes Verhältniss, was nur dann sein kann, wenn die Geraden durch einen festen Punkt laufen. Man wird daher die Gleichung $Au + Bv + C = o$ als Gleichung eines Punktes bezeichnen. So ist $u + v = o$ die Gleichung des Mittelpunktes von OQ, während jeder andere Punkt dieser Linie eine Gleichung von der Form $Au + Bv = o$ besitzt. Die Gleichung $u - v = C$ gehört einem unendlich fernen Punkte zu, der in einer leicht angebbaren Richtung zu finden ist.

Betrachten wir irgend eine Gleichung höherer Ordnung zwischen u und v, so wird dadurch, dass die Gerade (u, v) alle verschiedenen dadurch bedingten Lagen annimmt, eine gewisse Curve umhüllt werden. Da sonach jede Gerade als Tangente dieser Curve auftritt, nennt man die Liniencoordinaten auch wohl Tangentencoordinaten. Sei die Gleichung der Curve $F(u, v) = o$ vom $n^{\underline{ten}}$ Grade, so wird man aus der Combination derselben mit der Gleichung eines Punktes im Allgemeinen n Lösungen $(u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)$ finden, die sowohl der einen wie der andern genügen. Daraus folgt, dass von jedem beliebigen Punkte aus sich n Tangenten an die Curve $F(u, v) = o$ ziehen lassen. Die Curve ist, wie man zu sagen pflegt, $n^{\underline{ter}}$ Classe.

Discutirt man die allgemeine Gleichung u^1 zweiten Grades

$$a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 + 2a_{13}u + 2a_{23}v + a_{33} = 0,$$

so ergibt sich, dass dieselbe entweder in das System zweier Punkte zerfällt oder eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel darstellt. Rücksichtlich der Einzelheiten dieser Discussion verweise ich auf die demnächst erscheinende Abhandlung. Ich erlaube mir an dieser Stelle nur Folgendes hervorzuheben. Lässt man einen Kreis die Coordinatenaxen in den Punkten O und Q berühren, so wird die Gleichung des Kreises

$$u \cdot v = \tfrac{1}{4}e^2.$$

Betrachtet man eine Ellipse mit den Halbaxen $b = \frac{1}{2}e$ und a, nimmt also die Tangenten in den Endpunkten der kleinen Axe zu Coordinatenaxen, so wird die Gleichung der Ellipse

$$u \cdot v = a^2.$$

Ebenso bedeutet

$$u \cdot v = -a^2$$

eine analog liegende Hyperbel. Es ergibt sich hieraus eine sehr einfache Methode, durch Zeichnung die Ellipse und Hyperbel aus dem Kreise abzuleiten.

Stellen wir mit der Kreisgleichung $u \cdot v = \frac{1}{4}e^2$ die Gleichung des imaginären und, wie die Form seiner Gleichung zeigt, unendlich fernen, Punktes $u - v = ei$ zusammen, so resultirt zur Ermittlung der 2 Tangenten, welche von dem Punkte aus an den Kreis gehen, die Gleichung $v^2 + vei - \frac{1}{4}e^2 = 0$. Dieselbe besitzt zwei zusammenfallende Wurzeln, die beiden Tangenten sind von einander also nicht verschieden. Demnach gehört der Punkt dem Kreise an. Jeder Kreis besitzt zwei unendlich ferne imaginäre Punkte mit den Gleichungen:

$$u - v = ei, \quad u - v = -ei.$$

Der kundige Leser weiss, wie hiernach sich die Theorie der Brennpunkte für unser Coordinatensystem gestalten wird.

Für die K a r d i o i d e (Sohnke Aufg. Dritte Aufl. S. 172) ergibt sich, wenn man die Doppeltangente zur Axe der u, die derselben parallele Tangente zur Axe der v nimmt und die Punkte O, Q durch die Rückkehrtangente bestimmen lässt,

$$v = \frac{24r^2u}{4u^2 - 3r^2}.$$

Nehmen wir die Asymptote der Kissoide zur Axe der v, legen die Axe der u durch den Rückkehrpunkt (ib. S. 154), so wird ihre Gleichung:

$$v^3 + 27r^2u = o.$$

Die sämmtlichen Kreisrollcurven, zu denen auch die Kardioide gehört, lassen sich unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte betrachten. Wenn nämlich zwei Punkte sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten auf der Peripherie eines Kreises bewegen, so umhüllt die Verbindungslinie derselben eine solche Rollcurve. Sind die Geschwindigkeiten der beiden Punkte c, c′ und werden zwei parallele Tangenten des Kreises zu Coordinatenaxen genommen, so resultirt die Gleichung der Rollcurve durch Elimination von φ, φ' aus den Gleichungen:

$$u \cdot \operatorname{tg} \varphi + v \cdot \cot \varphi = 2r$$
$$u \cdot \operatorname{tg} \varphi' + v \cdot \cot \varphi' = 2r$$
$$\varphi : \varphi' = c : c'.$$

Die Curve wird nur dann algebraisch, wenn das Verhältniss $c : c'$ rational ist. Die Gleichung der Kardioide wird in diesem Systeme

$$4r^2 (2u + v) = v (3u + v)^2.$$

Die Doppeltangente geht den Axen parallel durch den Punkt $3u + v = o$. Die Gleichung des Rückkehrpunktes ist $2u + v = o$.