sion auf sich zogen, um so mehr, als die theoretische Seite dieser Instrumente in einem der oben genannten Vorträge schon zum Gegenstande eingehender Erörterung gemacht worden war.

Anlage zum Jahresberichte der mathematisch-physikalisch-chemischen Section.

Ueber Planimeter.

Mit einer Tafel Abbildungen.

Von Dr. Püning.

Den praktischen Geometern begegnet unzählige Mal die Aufgabe, aus Karten oder Plänen, die nach einem bestimmten Massstabe gezeichnet sind, den Flächeninhalt der verschiedenen grösseren und kleineren Grundstücke zu berechnen. Da das Zerlegen der Figuren in Dreiecke und die Ausmessung dieser Dreiecke mit Zirkel und Massstab, verbunden mit den nöthigen Rechnungen, eine etwas lästige Arbeit ist, so hat es nicht an Bemühungen gefehlt, die genannte Aufgabe durch mechanische Hülfsmittel zu erleichtern. Zunächst wendet man Platten aus Glas oder Horn an, auf denen kleine Quadrate eingeritzt sind; man legt dieselben auf die Karten und findet dann durch Abzählen der Quadrate und Abschätzen der kleineren Theile den Inhalt. Auch zerlegt man die Figur durch die sog. Harfe — einen Rahmen mit parallel-gespannten Fäden von gleichen Abständen — in Paralleltrapeze, von welchen man dann blos die Mittellinien zu messen hat.

Die übrigen zahlreichen Apparate zur Bestimmung des Flächeninhaltes lassen sich in zwei Klassen theilen: 1) in solche, die blos zur Ausmessung von Dreiecken und Vierecken dienen und 2) in solche, welche nach dem einmaligen Umfahren einer ganz beliebigen Figur sofort den Flächeninhalt derselben angeben. Planimeter der ersten Art sind z. B. das Pediometer von Schireck, 1825 erfunden; es beruhte auf der Formel $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$; ferner das Wagner'sche und das gegen 1850 patentirte von Horsky und Kraft; dieselben sind jetzt veraltet. Von Planimetern der zweiten Art ist auch eine ziemliche Reihe erfunden und construirt worden. Obschon dieselben allerdings jetzt dem Amsler'schen Polar-Planimeter gewichen sind, welches wohl das denkbar einfachste dieser Art von Instrumenten ist, mag es doch von Interesse sein, auch einige andere derartige Instrumente kennen zu lernen.

Zunächst ist ein Apparat zu erwähnen, bei welchem ein Kegel benutzt wird. (Fig. 1.) A ist der Stift, mit welchem die Fläche, deren Inhalt zu ermitteln ist, umfahren wird. Mit demselben verbunden ist die Stange AB, welche bei allen Bewegungen des Fahrstiftes sich selbst parallel bleibt, und damit ist weiter verbunden die nach oben führende winkelige Stange mit dem Indexrädchen R, dessen Ebene senkrecht zu AB ist. Dieses Rädchen berührt die obere horizontale Kante des Kegels K, der mit seinem unteren Rande auf der Ebene ruht. Der Kegel ist mit der Stange AB so verknüpft, dass er allen ihren seitlichen Bewegungen rollend folgt, die Bewegung in ihrer Längerichtung aber nicht mitmacht. Aus dieser Einrichtung des Instrumentes, das übrigens auf einer Metallplatte ruht und mancherlei Schienen und Führungen besitzt, um den Parallelismus der Bewegungen zu wahren, ergibt sich, dass bei einer Bewegung des Fahrstiftes in der Richtung von AB das Indexrädchen über den Kegel schleift ohne sich zu drehen. Bei einer Bewegung ⊥ AB dagegen rotirt das Rädchen, indem der rollende Kegel ihm Bewegung mit ertheilt; jede andere Bewegung lässt sich in diese beiden zerlegen. Die Drehung des Rädchens fällt um so grösser aus, je weiter der Berührungspunkt des Rädchens von der Spitze des Kegels entfernt liegt. Wenn CD die Gerade ist, bei deren Beschreibung das Rädchen genau die Spitze des Kegels berührt, so ist jede Drehung proportional der Fläche, welche von der beschriebenen Linie, von CD, und seitlich von 2 Senkrechten begrenzt wird. Fährt man mit dem Stifte etwa von E über F nach G, so entspricht die Umdrehung des Rädchens der Fläche EFGCD; zieht man darauf von G über H nach E, so entspricht die Drehung der Fläche GHECD, aber in entgegengesetztem Sinne, so dass nach dem Umfahren der ganzen Figur EFGHE die Drehung des Rädchens eben dieser Fläche entspricht.

Die diesem Instrumente zu Grunde liegende ganz geniale Idee stammt bereits aus dem Jahre 1814 und zwar von dem Königl. bayerischen Trigonometer Joh. Martin Hermann, der dann mit Hülfe des bayerischen Steuerrathes Laemmle das erste Planimeter construirte. Das Instrument wurde jedoch wenig bekannt, so dass sogar Opikofer 1827 dasselbe nochmal erfand. Später erhielt das Planimeter mancherlei Umgestaltungen in der Construction. So entstand das Planimeter von Ernst, 1836 von der Pariser Akademie mit einem Preise belohnt; ferner das von John Sang; 1849 construirte Wetli in Zürich ein Planimeter, in welchem der rotirende Kegel durch eine horizontale sich drehende Kreisfläche ersetzt wurde; 1850 brachte Hansen in Gotha noch weitere Verbesserungen an. Der Grundgedanke war immer derselbe: Parallelismus in den Bewegungen, Rollen des Indexrädchen nicht direct auf dem Papier, sondern auf einem rotirenden Kegel oder einer sich drehenden Scheibe. Die genannten Instrumente drangen schon allmälig in die Praxis ein und lieferten, wenigstens die besseren, recht genaue und durchaus befriedigende Resultate, jedoch stand der hohe Preis von immerhin ungefähr 150 Gulden, ihrer rascheren Verbreitung im Wege.

Plötzlich in den Jahren 1855 und 56 kam eine Umwälzung, es wurden die ersten Polar-Planimeter erfunden. 1855 erfand Bouniakowsky in Petersburg ein Polar-Planimeter, planimètre pantographe von ihm genannt. Es besteht (Fig. 2.) aus einem verschiebbaren Rhombus; eine Ecke P wird vermittelst einer dort befindlichen Spitze durch einen Stich in das Papier der Karte befestigt, es ist das der Pol. An der gegenüberliegenden Ecke befindet sich der Fahrstift. Drei gleiche Stangen bbb geben auf den Seiten des Rhombus zwei bei den Bewegungen des Fahrstiftes sich verschiebende Punkte AA an; durch die Stange AA wird dann das Rädchen R auf PD als Achse hin- und herbewegt. Dieses Rädchen, welches auf dem Papier theils rollt theils schleift, gibt durch seine Drehung die Grösse der umfahrenen Fläche an.

Prof. Decher in Augsburg wurde durch das genannte Planimeter angeregt, ein anderes ähnliches zu erfinden. (Fig. 3.) P ist der Pol, F der Fahrstift. $PA = AF = GH$; $PG = AH = GJ = JH = \frac{1}{2} PA$. JK steht $\perp$ GH und schiebt auf PA als Achse das Indexrädchen R hin und her. Der nicht sehr schwere Beweis für die Richtigkeit dieser Planimeter möge uns hier erlassen bleiben. Aehnliche Instrumente sind noch von Keller in Rom und Fichtbauer erfunden.

Die erwähnten Planimeter drangen aber nicht ins Leben; denn im Jahre 1856 trat Amsler-Laffon in Schaffhausen mit der Erfindung des nach ihm benannten Amsler'schen Polar-Planimeters hervor und damit war dem ganzen Planimeter-Rangstreit ein Ende gemacht. Höchste Einfachheit, Leichtigkeit der Anwendung, Schärfe der Resultate und mässiger Preis (11—17 Thlr.) sichern ihm überall den Vorzug.

Zwei Stangen a und b sind durch ein Charnier verbunden, am Ende von a ist die Polspitze, am Ende von b der Fahrstift. Die Stange b ist über das Charnier hinaus verlängert und trägt dort die Laufrolle R, deren Ebene senkrecht zu b steht; die Rolle trägt eine Trommel, deren Umfang in 100 Theile getheilt ist und mit Hülfe eines Nonius noch Tausendstel des Rollenumfanges zu erkennen gibt. Die Axe der Rolle setzt mittelst einer Schraube ohne Ende noch eine horizontale kleine Scheibe in Drehung, um öftere Umdrehungen der Rolle anzugeben. Um die Richtigkeit des Instrumentes nachzuweisen, ist zunächst zu bemerken, dass beim Gebrauche desselben die Bewegung des Rädchens theilweise eine rollende und theilweise eine gleitende ist. Bewegt sich das Rädchen in der Richtung seiner Ebene über das Papier, so rollt sich die ganze beschriebene Strecke auf dem Rädchen ab; wird dasselbe in der zu seiner Ebene senkrechten Richtung über das Papier gezogen, so schleift es, ohne sich zu drehen. Bewegt sich das Rädchen in einer Richtung, die mit der Ebene desselben etwa den Winkel δ bildet, um eine Strecke s, so ergibt sich der abgerollte Bogen als $s \cos \delta$. Bei dem Instrumente gibt es nun einen Kreis, bei dessen Beschreibung durch den Fahrstift das Rädchen sich gar nicht dreht. Man erhält diesen Kreis, indem man das Instrument so bewegt, dass die Ebene des Rädchens immer auf den Pol gerichtet ist. Der Pol ist der Mittelpunkt dieses Kreises; er heisst der Grundkreis; für ihn ist $r^2 = a^2 + b^2 + 2bc$, wenn r sein Radius und c der Abstand des Rädchens vom Charnier ist. Wir denken uns nun zunächst ein Flächenstück ABCD (Fig. 5.) umfahren, welches von dem Grundkreise, einem concentrischen Kreise und seitlich von 2 Radien begrenzt wird. Dabei übt die Strecke CD, als ein Theil des Grundkreises, gar keine Einwirkung auf das Rädchen aus; die Wirkungen der Strecken BD und CA heben sich auf, weil sie gleich und in Folge des Umfahrens offenbar einander entgegen gerichtet sind. Es bleibt also festzustellen, ob das Rädchen, während der Fahrstift die Strecke AB zurücklegt, eine Drehung macht, welche der Fläche ABCD entspricht. ABCD ist ein Bruchtheil, etwa λ, eines Kreisringes und sein Inhalt (J) ergibt sich leicht als:

$$J = \lambda \cdot 2\pi\, b\, (a \cos \varphi - c) \qquad (I.).$$

Das Rädchen läuft während dessen auf einem Kreise, dessen Radius PR, dessen ganze Peripherie also $2\pi PR$ ist, und es legt davon auch den Bruchtheil λ zurück, also $\lambda \cdot 2\pi PR$. Die Ebene des Rädchens bildet aber mit dem gemachten Wege einen Winkel, etwa δ, und dann ist die Bogenlänge (u), um die sich dasselbe dreht:

$$u = \lambda \cdot 2\pi PR \cos \delta.$$

Nun findet sich $PR \cos \delta = RJ = HJ - c = a \cos \varphi - c$, und mithin ist:

$$u = \lambda \cdot 2\pi\, (a \cos \varphi - c). \qquad (II.)$$

Aus I. und II. folgt:

$$J = b\, u,$$

d. h. in Worten: Die umfahrene Fläche ABCD ist gleich einem Rechteck, dessen eine Seite b und dessen andere Seite gleich dem auf der Indexrolle abgewickelten Bogen ist. Die Länge der Stücke a und c ist für die Resultate des Instruments völlig gleichgültig.

Haben wir für die angenommene einfache Figur die Richtigkeit des Instrumentes bewiesen, so müssen wir das Gefundene auf alle anderen Figuren verallgemeinern. Wir denken uns jede andere Figur durch Strahlen vom Pol ausgehend in Streifen, wie die vorher besprochenen zerlegt, und dann die Figur umfahren. Die Bewegungen des Fahrstiftes lassen sich in Componenten in der Richtung zum Pol und solche senkrecht dazu zerlegen. Die ersteren heben sich nach einmaligem Umfahren der Figur sämmtlich auf, während die letzteren sich addiren und zum Schluss die Grösse der Figur angeben. Der Pol ist in der Regel ausserhalb der zu umfahrenden Figur zu wählen; will man den Pol innerhalb derselben annehmen, so hat man den Flächeninhalt des Grundkreises dem erhaltenen Resultate hinzuzufügen.

Die Theorie des Polar-Planimeters ist aber noch einer Verallgemeinerung fähig. Der Gang des Beweises sei in aller Kürze angedeutet. AC (Fig. 6.) sei eine gerade Stange mit zwei Stiften B und C und einem Rädchen in A. Bewegt man diese Stange um eine sehr kleine Strecke in die Lage $A_1 B_1 C_1$, so ist die Fläche BCB_1C_1, welche BC bestreicht, die Summe aus dem Parallelogramm

BCB_0C_0 und der Differenz der Dreiecke $A_1C_1C_0 - AB_1B_0$. Der Winkel dieser Dreiecke an A_1 sei α, so ist:

$$BCB_1C_1 = b\,u + \alpha\,\frac{b^2 + 2bc}{2},$$

worin u wieder der auf dem Rädchen abgewickelte Bogen ist. Bewegt man die Stange (Fig. 7.) bis in die entfernte Lage $A_2B_2C_2$, so addiren sich die kleinen Bogen und Winkel und die von BC bestrichene Fläche ist:

$$BCDEB_2C_2 = b\,u_1 + \beta\,\frac{b^2 + 2bc}{2};$$

wird die Stange darauf über F und G zurückbewegt, so ist:

$$B_2C_2FGBC = b\,u_2 + \beta\,\frac{b^2 + 2bc}{2}.$$

Bildet man nun die Differenz der genannten Flächen, so fallen die letzten Summanden fort, und man erhält, da die letzte Drehung des Rädchens der ersten entgegengesetzt ist, b mal der algebraischen Summe der abgewickelten Bogen $b\,u_1 + b\,u_2$, kurz $= b\,u$, worin u dann der zum Schluss abgewickelte Bogen ist. Jene Differenz ist aber nichts als $J - J_1$; also ist:

$$J - J_1 = b\,u.$$

Daraus folgt nun ohne weiteres, dass, wenn man B auf einer beliebigen Linie zu laufen zwingt, $J = b\,u$ ist. Es ist also für unser Polar-Planimeter gar nicht nöthig, dass B d. h. das Charnier des Instrumentes einen Kreis beschreibe, der Apparat zeigt genau so an, wenn das Charnier sich auf einer Geraden oder einer anderen Curve bewegte.

Seitdem Amsler 1856 sein Polar-Planimeter in der Revue encyclopédique VIII. 213 beschrieb, und auch Schaffhausen 1856 eine Schrift „Ueber die mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren insbesondere über einen neuen Planimeter“, veröffentlichte, arbeiteten viele an der Vervollkommnung der Theorie. Wittstein und Reitz lieferten Theorien unter unbeschränktem Gebrauche der höheren Mathematik, Bremiker schrieb ein Büchelchen, in dem er auf elementarem Wege dem praktischen Geometer die Sache klar zu machen suchte. In der Hannoverschen Zeitschrift 1872, Bd. 18, erschien eine Abhandlung: Der Amsler'sche Integrator. Im Civilingenieur 1866 schrieb Cherest: Ueber den Amsler'schen Polar-

Planimeter, eine gleichbetitelte Abhandlung erschien daselbst 1874 von Rehls. Ingenieur Trunk schrieb ein Werk: Die Planimeter. Auch noch in den neuesten Bänden der Wiener Akademischen Berichte (LVI, 325 und LVIII, 189) finden sich Untersuchungen über diesen Gegenstand von A. Schell, desgleichen im Münchener Repertorium für Experimental-Physik, XI. 6. Neuerdings soll der geniale Erfinder unseres Instrumentes ein anderes wieder denkbar einfaches Planimeter construirt haben, zur Ermittelung des Flächeninhaltes von Ländern aus den geographischen Karten, bei denen doch die verschiedenen Theile nach verschiedenem Massstabe gezeichnet sind. Die Einrichtung desselben ist jedoch noch nicht weiter veröffentlicht.

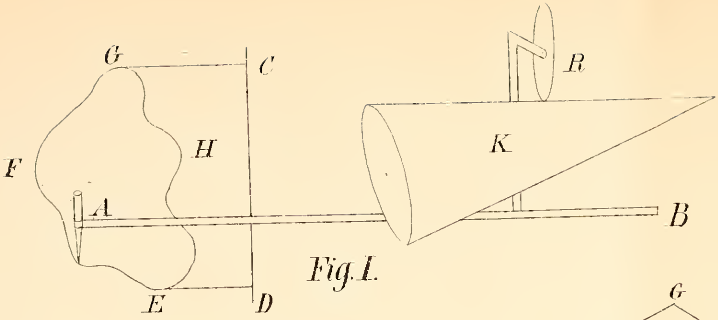

Fig. I.

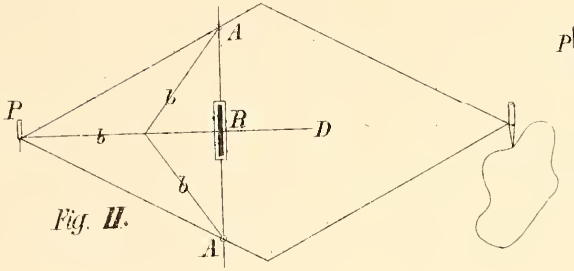

Fig. II.

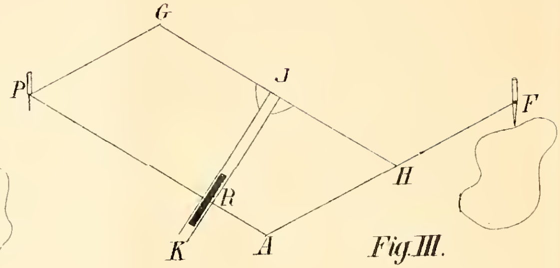

Fig. III.

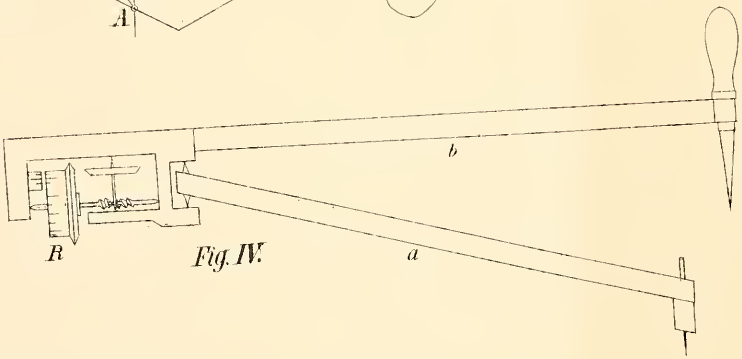

Fig. IV.

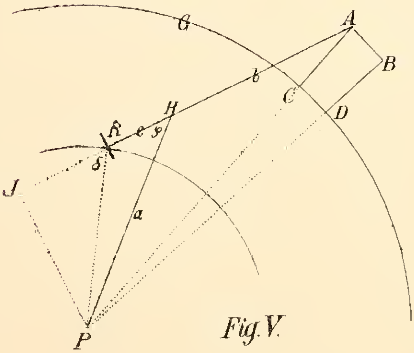

Fig. V.

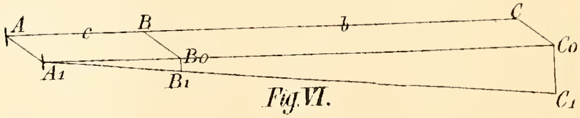

Fig. VI.

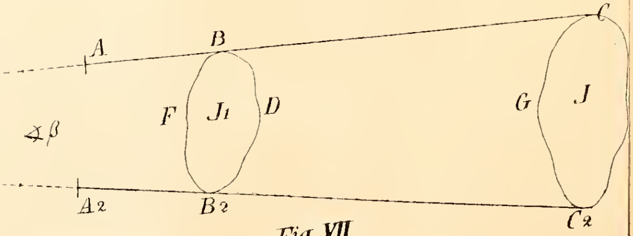

Fig. VII.