# Über einige Formen und Formeln aus der Theorie der Rosenhain'schen Funktionen.

Von

**J. Thomae.**

Betrachtet man die doppelt periodischen Funktionen, welche in einem Periodenparallelogramm überall eindeutig sind, direkt als Funktionen ihres Arguments, so läßt sich die Theorie dieser Funktionen in einem hohen Grade von Vollständigkeit erledigen mit Hilfe der bekannten Liouville'schen Sätze, die von Borchardt in Crelle's Journal B. 88 veröffentlicht sind. Der Mangel analoger Sätze für die vierfach periodischen eindeutigen Funktionen zweier Veränderlichen bewirkt es, daß man zu einem befriedigenden Abschluß dieser Theorie auf dem von Herrn Rosenhain und analog für drei Veränderliche von Herrn Weber betretenen Wege nicht gelangt. Gleichwohl hat die Verfolgung dieses Weges ihren besonderen Reiz, einmal, weil die Aussicht auf Wegräumung der bisher unübersteiglichen Schranken nicht ganz abgeschnitten ist, sodann aber auch, weil dieser Weg doch ganz sicher zu einer Stelle führt, von der aus völlig klar übersehen wird, welche algebraischen Formen mit ihren Integralen den vierfach periodischen Funktionen zugeordnet sind, so daß die andere bekannte, die erste zu ergänzen bestimmte Methode, welche die Argumente als Integrale algebraischer Funktionen von vornherein auffaßt, nun von selbst gegeben wird. Es leidet aber der erste von Rosenhain eingeschlagene Weg noch an einem andern Übelstand, nämlich der Unübersichtlichkeit der überreichen Formen und Formeln, welche zum Teil dadurch verursacht wird, dass Rosenhain die algebraischen Moduln auf drei reduziert. In der Theorie der elliptischen Funktionen war es für Legendre eine wesentliche Aufgabe, sie als Funktionen eines Parameters oder Moduls darzustellen, weil er Tafeln für die Rechnung herstellen wollte, was für diese Funktionsklasse auch heute noch bis zu einem gewissen Grade als nützlich gelten kann. Für die ultraelliptischen Funktionen ist aber die Anfertigung solcher Tafeln wohl niemals in Aussicht genommen, und es ist deshalb die Reduktion auf eine Minimalzahl von Parametern überflüssig. — Hier soll nun an einigen Beispielen gezeigt werden, wie sich manche Formelsysteme durch eine Formel repräsentiren lassen, ohne Anwendung von Symbolen, welche selbst wieder eine längere Rechnung nötig machen, was zum Teil dadurch bewirkt wird, daß die algebraischen Moduln nicht auf drei reduziert werden.

Die Thetafunktion mit der Charakteristik $\begin{bmatrix} h_1, & h_2 \\ g_1, & g_2 \end{bmatrix}$ wird durch die Gleichung definiert

$$\vartheta_{g_1,\, g_2}^{h_1,\, h_2}(v_1, v_2) = \Sigma\Sigma e^{\frac{1}{4}f(2m_1+h_1,\, 2m_2+h_2) + (2m_1+h_1)(v_1+\frac{1}{2}g_1 i\pi) + (2m_2+h_2)(v_2+\frac{1}{2}g_2 i\pi)},$$

in der $f(x, y)$ die wesentlich negative Form $\tau_{11}x^2 + 2\tau_{12}xy + \tau_{22}y^2$ ist, und die Summation über alle ganzen positiven und negativen $m_1$, $m_2$ zu erstrecken ist. Die Charakteristik, in der $h_1 = h_2 = g_1 = g_2 = 0$ ist, wird in der Bezeichnung als Index der Thetafunktion einfach fortgelassen. Für $(v_1, v_2)$ wird auch nur $(v)$ geschrieben und noch

$$f_1(x, y) = \tau_{11}x + \tau_{12}y, \quad f_2(x, y) = \tau_{21}x + \tau_{22}y$$

als Abkürzung eingeführt, und es werde an die bekannten Gleichungen erinnert

$$(1.)\quad \vartheta_{g_1,\, g_2}^{h_1,\, h_2}(v_1, v_2) =$$
$$\vartheta(v_1 + \tfrac{1}{2}f_1(h_1, h_2) + \tfrac{1}{2}g_1 i\pi,\ v_2 + \tfrac{1}{2}f_2(h_1, h_2) + \tfrac{1}{2}g_2 i\pi)\, e^{\frac{1}{4}f(h_1, h_2) + h_1v_1 + h_2v_2 + \frac{1}{2}(h_1g_1 + h_2g_2)i\pi}.$$

$$(2.)\quad \vartheta_{g_1 + 2\mu_1,\, g_2 + 2\mu_2}^{h_1 + 2\nu_1,\, h_2 + 2\nu_2}(v) = (-1)^{h_1\mu_1 + h_2\mu_2}\vartheta_{g_1,\, g_2}^{h_1,\, h_2}(v).$$

$$(3.)\quad \vartheta_{g_1,\, g_2}^{h_1,\, h_2}(v_1 + \tfrac{1}{2}f_1(h'_1, h'_2) + \tfrac{1}{2}g'_1 i\pi,\ v_2 + \tfrac{1}{2}f_2(h'_1, h'_2) + \tfrac{1}{2}g'_2 i\pi) =$$
$$\vartheta_{g_1,\, g_2}^{h_1,\, h_2}(v)\,.\, e^{-h'_1v_1 - h'_2v_2 - \frac{1}{4}f(h'_1, h'_2) - \frac{1}{2}i\pi((g_1+g'_1)h'_1 + (g_2+g'_2)h'_2)}.$$

$$(4.)\quad \vartheta_{g_1,\, g_2}^{h_1,\, h_2}(-v) = (-1)^{h_1g_1 + h_2g_2}\vartheta_{g_1,\, g_2}^{h_1,\, h_2}(v).$$

Ist $(v_1, v_2) = (0, 0)$, so lassen wir diese Argumente hinter den Thetafunktionen einfach fort.

Die sechs ungeraden Charakteristiken bezeichnen wir durch einen griechischen Buchstaben, z. B. durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\zeta$, oder durch $\mu$, $\mu'$ u. s. w., oder auch durch die Zahlen von 1 bis 6 in eckigen Klammern. In letzterer Bezeichnungsweise ordnen wir die Charakteristiken den Zahlen so zu, daß in den beiden Reihen

$$\begin{matrix} 11 & 01 & 01 & 10 & 10 & 11 \\ 01' & 01' & 11' & 11' & 10' & 10 \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \end{matrix}$$

die oben stehenden Charakteristiken ein für allemal zu den darunter stehenden Zahlen gehören, so daß die letztern in eckigen Klammern, oder als Indices an den Thetafunktionen auch ohne Klammern die ersteren repräsentieren. Treten als untere Indices an den Thetafunktionen mehrere Zahlen oder Buchstaben auf, so ist als Charakteristik die zu nehmen, welche der Summe jener Zahlen oder Buchstaben entspricht. Die Summe aller ungeraden Charakteristiken ist kongruent $\begin{bmatrix} 00 \\ 00 \end{bmatrix}$ und wird mit [0] bezeichnet. Die Summe dreier ungerader Charakteristiken ist stets gerade und zwar ist:

$$(6.)\quad [1+2+3] \equiv \begin{bmatrix} 11 \\ 11 \end{bmatrix} \equiv [4+5+6],\ [1+2+4] \equiv \begin{bmatrix} 00 \\ 11 \end{bmatrix} \equiv [3+5+6],$$
$$[1+2+5] \equiv \begin{bmatrix} 00 \\ 10 \end{bmatrix} \equiv [3+4+6],\ [1+2+6] \equiv \begin{bmatrix} 01 \\ 10 \end{bmatrix} \equiv [3+4+5],$$
$$[1+3+4] \equiv \begin{bmatrix} 00 \\ 01 \end{bmatrix} \equiv [2+5+6],\ [1+3+5] \equiv \begin{bmatrix} 00 \\ 00 \end{bmatrix} \equiv [2+4+6],$$
$$[1+3+6] \equiv \begin{bmatrix} 01 \\ 00 \end{bmatrix} \equiv [2+4+5],\ [1+4+5] \equiv \begin{bmatrix} 11 \\ 00 \end{bmatrix} \equiv [2+3+6],$$
$$[1+4+6] \equiv \begin{bmatrix} 10 \\ 00 \end{bmatrix} \equiv [2+3+5],\ [1+5+6] \equiv \begin{bmatrix} 10 \\ 01 \end{bmatrix} \equiv [2+3+4].$$

Es giebt funfzehn dreigliedrige Gleichungen, welche zwischen geraden Thetafunktionen mit verschwindenden Argumenten bestehen, welche sich jetzt in e i n e zusammenfassen lassen, nämlich:

$$(7.)\quad \vartheta^2_{\alpha,\gamma,\varepsilon}\,\vartheta^2_{\alpha,\gamma,\zeta} = \vartheta^2_{\alpha,\beta,\varepsilon}\,\vartheta^2_{\alpha,\beta,\zeta} + \vartheta^2_{\alpha,\delta,\varepsilon}\,\vartheta^2_{\alpha,\delta,\zeta},$$

wenn $\varepsilon\,\zeta$ beliebige ungerade Charakteristiken, die übrigen aber so geordnet sind, daß $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ ist, wobei übrigens cyklische Vertauschung oder Umkehrung der Ordnung zulässig ist.

Es giebt aber auch aus sechs Zahlen $k_1, k_2, \ldots k_6$ gebildete algebraische Ausdrücke, welche passend bezeichnet genau denselben Gleichungen (7.) Genüge leisten. Es sei

$$D_{\varkappa,\lambda,\mu} = k_\mu - k_\varkappa \,.\, k_\mu - k_\lambda \,.\, k_\lambda - k_\varkappa\,,$$

so giebt es zehn wesentlich, d. h. nicht bloß durch das Vorzeichen verschiedene Produkte von der Form

$$D_{\varkappa, \lambda, \mu} D_{\varkappa', \lambda', \mu'},$$

in denen die Indices alle von einander verschieden sind. Die $\varkappa'$, $\lambda'$, $\mu'$ mögen, wenn sie mit $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ zusammen die Zahlen 1 bis 6 ausmachen, den $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ komplementär heißen. Von den zwanzig möglichen Kombinationen dreier Elemente aus sechs gegebenen liefern nur zehn verschiedene Produkte, da diese außer den drei Zahlen noch in gleicher Verbindung die drei komplementären enthalten. Der Quotient irgend zweier solcher Produktausdrücke ist das Produkt zweier Doppelverhältnisse aus je vier Zahlen, und diese Doppelverhältnisse ändern sich bekanntlich nicht, wenn man die Zahlenebene, in der die $k_1, k_2, .. k_6$ Punkte bestimmen, einer linearen Transformation unterwirft. Man kann daher, wenn es sich nur um Werte solcher Quotienten handelt, drei der Zahlen $k$ willkürlich wählen, sie z. B. gleich 0, 1, $\infty$ setzen, und es sind diese Quotienten deshalb Funktionen von nur drei Variabeln, sie sind von dreifach unendlicher Mannigfaltigkeit.

In dem Ausdrucke

$$D_{\varkappa, \lambda, \mu'} D_{\varkappa', \lambda', \mu'} D_{\nu, \pi, \rho} D_{\nu', \pi', \rho'}$$

sollen die gestrichenen Indices den ungestrichenen komplementär sein, und es soll $[\varkappa + \lambda + \mu + \nu + \pi + \varrho] \equiv [\varepsilon + \zeta]$ sein. Die Indices an einer Größe $D$ sollen immer der Größe nach geordnet sein. Da sie mit ihren komplementären vertauscht werden können, so dürfen wir jedesmal annehmen, daß $\varepsilon$ sich unter den Zahlen $\varkappa\lambda\mu$, und $\zeta$ unter den Zahlen $\nu\pi\varrho$ vorfinde. Es sei $\mu = \varepsilon$, $\varrho = \zeta$, dann ist $[\varkappa + \lambda + \nu + \pi] \equiv [0]$, und da $\varkappa$ von $\lambda$, $\nu$ von $\pi$ verschieden sein muß, und da weder zwei noch vier verschiedene ungerade Charakteristiken zusammen $\equiv [0]$ sein können, so muß $\varkappa = \nu$, $\lambda = \pi$ sein. Es muß ebenso $\zeta$ in $\varkappa'\lambda'\mu'$ und $\varepsilon$ in $\nu'\pi'\varrho'$ vorkommen, und die beiden andern Charakteristiken unter diesen müssen wieder dieselben sein. Ist nun $\mu = \varepsilon$, $\varrho = \zeta$ gegeben, so können die beiden Charakteristiken $\alpha\beta$ auf $\frac{1}{2} . 4 . 3 = 6$ Arten aus den übrigen ausgewählt werden; da aber unsere Doppelprodukte, wie wir sie, um einen Namen zu haben, heißen wollen, in bezug auf drei Indices und die komplementären symmetrisch sind, so giebt es nur d r e i verschiedene Doppelprodukte von der vorgeschriebenen Art, welche zu $\varepsilon\zeta$ gehören.

Die drei Doppelprodukte, welche zu $\varepsilon\zeta$ gehören, haben a c h t

Elementarfaktoren gemein. Nämlich, wenn $\alpha\beta\gamma\delta$ die übrigen der Größe nach geordneten Indices sind, die Elementarfaktoren

$$k_\varepsilon - k_\alpha,\ k_\varepsilon - k_\beta,\ k_\varepsilon - k_\gamma,\ k_\varepsilon - k_\delta,$$
$$k_\zeta - k_\alpha,\ k_\zeta - k_\beta,\ k_\zeta - k_\gamma,\ k_\zeta - k_\delta.$$

Sind $\varepsilon\zeta$ nicht größer als $\alpha\beta\gamma\delta$, so werden von diesen Faktoren einige negativ zu nehmen sein, allein sie sind auch mit dem Vorzeichen in allen drei Doppelprodukten dieselben. Die nicht gemeinsamen Faktoren sind für jedes Doppelprodukt Doppelfaktoren. Bezeichnen wir das Produkt der gemeinsamen Faktoren der Kürze halber mit $\Pi$, so ergiebt sich

$$\sqrt{D_{\alpha\beta\varepsilon}\,D_{\gamma\delta\zeta}\,D_{\alpha\beta\zeta}\,D_{\gamma\delta\varepsilon}} = k_\beta - k_\alpha \,.\, k_\delta - k_\gamma \cdot \sqrt{\Pi},$$
$$\sqrt{D_{\alpha\gamma\varepsilon}\,D_{\beta\delta\zeta}\,D_{\alpha\gamma\zeta}\,D_{\beta\delta\varepsilon}} = k_\gamma - k_\alpha \,.\, k_\delta - k_\beta \cdot \sqrt{\Pi},$$
$$\sqrt{D_{\alpha\delta\varepsilon}\,D_{\beta\gamma\zeta}\,D_{\alpha\delta\zeta}\,D_{\beta\gamma\varepsilon}} = k_\delta - k_\alpha \,.\, k_\gamma - k_\beta \cdot \sqrt{\Pi},$$

woraus die Gleichung fließt

$$(7^a.)\qquad \sqrt{D_{\alpha\gamma\varepsilon}\,D_{\beta\delta\zeta}\,D_{\alpha\gamma\zeta}\,D_{\beta\delta\varepsilon}} =$$
$$\sqrt{D_{\alpha\beta\varepsilon}\,D_{\gamma\delta\zeta}\,D_{\alpha\beta\zeta}\,D_{\gamma\delta\varepsilon}} + \sqrt{D_{\alpha\delta\varepsilon}\,D_{\beta\gamma\zeta}\,D_{\alpha\delta\zeta}\,D_{\beta\gamma\varepsilon}},$$

welche funfzehn Formeln repräsentiert, weil $\varepsilon\zeta$ auf funfzehn verschiedene Arten bestimmt werden können.

Da die Quadratwurzeln aus unsern Doppelprodukten denselben dreigliedrigen Gleichungen genügen als die geraden Thetafunktionen mit verschwindenden Argumenten, so kann man sie ihnen proportional setzen. Sind die Moduln $\tau_{11}\,\tau_{12}\,\tau_{22}$ reelle Größen, so sind alle Thetaquadrate positiv reell, und wenn die $k_1\,k_2\,..\,k_6$ reell und der Größe nach geordnet sind, und die Quadratwurzeln positiv genommen werden, so sind auch die algebraischen Größen sämtlich positiv reell. Für andere Werte der $\tau$ und $k$ muß das Vorzeichen durch stetige Fortsetzung bestimmt werden. Es ergiebt sich also die eine zehn repräsentierende Formel

$$(8.)\qquad \vartheta^2_{\varkappa,\,\lambda,\,\mu} = H\sqrt{D_{\varkappa\lambda\mu}\,D_{\varkappa'\lambda'\mu'}},$$

in welcher die Indices (wenigstens rechts) der Größe nach geordnet sind und $H$ ein Proportionalitätsfaktor ist.

Es giebt noch viergliedrige Relationen zwischen den vierten Potenzen gerader Thetafunktionen mit verschwindenden Argumenten. Sie sind eine unmittelbare Folge der dreigliedrigen, und es genügen daher auch ihnen selbstredend die algebraischen Ausdrücke, wie wir an einem Beispiele zeigen. Der Ausdruck

$$D_{\alpha\gamma\varepsilon}\, D_{\beta\delta\zeta} - D_{\alpha\gamma\zeta}\, D_{\beta\delta\varepsilon} - D_{\alpha\varepsilon\zeta}\, D_{\beta\gamma\delta} - D_{\gamma\varepsilon\zeta}\, D_{\alpha\beta\delta},$$

der durch $k_\alpha - k_\beta$ teilbar ist, ist in $k_\alpha$ eine Funktion zweiten Grades, die für $k_\alpha = k_\gamma, k_\varepsilon, k_\zeta$ und folglich identisch verschwindet. Dieser algebraischen Formel entspricht die Thetaformel

$$\vartheta^4_{\alpha\gamma\varepsilon} - \vartheta^4_{\alpha\gamma\zeta} = \vartheta^4_{\alpha\varepsilon\zeta} + \vartheta^4_{\gamma\varepsilon\zeta}.$$

Die $D$ wechseln ihr Zeichen, wenn zwei Indices vertauscht werden, während die vierten Thetapotenzen von der Indicesfolge unabhängig sind, es muß deshalb das Vorzeichen besonders geprüft werden. In den beiden Formeln

$$(9.) \qquad \vartheta^4_{\alpha\gamma\varepsilon} - \vartheta^4_{\alpha\gamma\zeta} = \vartheta^4_{\alpha\varepsilon\zeta} + \vartheta^4_{\gamma\varepsilon\zeta} = \vartheta^4_{\beta\varepsilon\zeta} + \vartheta^4_{\delta\varepsilon\zeta}$$

sind alle derartigen Formeln enthalten, wenn man für $\varepsilon\zeta$ die drei Kombinationen 1, 2; 3, 4; 5, 6 wählt und $\alpha\beta\gamma\delta$ der Größe nach ordnet.

Die sogenannten Rosenhain'schen Formeln, welche die Funktionaldeterminante ungerader Thetafunktionen mit verschwindenden Argumenten durch gerade Thetafunktionen darstellen, habe ich in Crelle's Journal Band 72 in der Form erwiesen, daß

$$(10.) \qquad \frac{d\vartheta_\varepsilon}{dv_1}\frac{d\vartheta_\zeta}{dv_2} - \frac{d\vartheta_\zeta}{dv_1}\frac{d\vartheta_\varepsilon}{dv_2} = \vartheta_{\alpha\varepsilon\zeta}\,\vartheta_{\beta\varepsilon\zeta}\,\vartheta_{\gamma\varepsilon\zeta}\,\vartheta_{\delta\varepsilon\zeta}$$

sei; dabei blieb es spezieller Bestimmung vorbehalten, ob die rechte Seite positiv oder negativ zu nehmen sei. Wird aber $\varepsilon < \zeta$ angenommen und werden die Charakteristiken den Zahlen 1 bis 6 so zugeordnet, wie es unter (5.) geschehen ist, und werden für $[\varkappa + \lambda + \mu]$ die nur die Elemente 0 und 1 für $h$ und $g$ enthaltenden Charakteristiken gesetzt, wie sie unter (6.) stehen, so enthält (10.) die Rosenhain'schen Formeln sämtlich und mit dem richtigen Vorzeichen.

Zwischen je vier Quadraten ungerader Thetafunktionen finden lineare homogene Relationen statt. Auch für diese lassen sich algebraische außer den Größen $k$ von zwei Variabeln abhängende Ausdrücke finden, welche dieselben Gleichungen befriedigen. Nämlich

$$(11.) \quad \vartheta^2_\mu(v) = F^2(x-\xi)^2\,(x-k_\mu)\,(\xi-k_\mu) : \sqrt{(-1)^\mu\, w'(k_\mu)},$$

wo $F.(x-\xi)$ ein von $\mu$ unabhängiger Proportionalitätsfaktor ist, und

$$w(x) = s^2 = x-k_1 \,.\, x-k_2 \,.\, x-k_3 \,.\, x-k_4 \,.\, x-k_5 \,.\, x-k_6,$$

und $w'$ die Ableitung dieser Funktion nach $x$ ist. Für die Quadrate der geraden Thetafunktionen findet sich der etwas kompliziertere, aber auch alle Fälle zusammenfassende Ausdruck

$$(11^{a}.)\qquad \sqrt{\Delta}\,.\,\vartheta^2_{\alpha\beta\gamma}(v) : \sqrt{D_{\alpha\beta\gamma}\,D_{\alpha'\beta'\gamma'}} =$$

$$F^2\,.\Big(\sqrt{x-k_\alpha\,.\,x-k_\beta\,.\,x-k_\gamma}\;\sqrt{\xi-k_{\alpha'}\,.\,\xi-k_{\beta'}\,.\,\xi-k_{\gamma'}} -$$
$$\sqrt{x-k_{\alpha'}\,.\,x-k_{\beta'}\,.\,x-k_{\gamma'}}\;\sqrt{\xi-k_\alpha\,.\,\xi-k_\beta\,.\,\xi-k_\gamma}\Big)^2,$$

in welchem $F$ dieselbe Größe als vorhin ist, während

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & k_1, & k_1^2, & \ldots & k_1^5 \\ 1, & k_2, & k_2^2, & \ldots & k_2^5 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & k_6, & k_6^2, & \ldots & k_6^5 \end{vmatrix}$$

ist. Ein weiterer bemerkenswerter zusammenfassender Ausdruck ist der

$$(12.)\qquad \vartheta_\alpha(dv_1, dv_2) = C_\alpha\left(\frac{x-k_\alpha}{s}\,dx + \frac{\xi-k_\alpha}{\sigma}\,d\xi\right),$$

worin $C_\alpha$ eine freilich noch von $\alpha$ abhängende Konstante ist.