JOHANNES KEPLER
GESAMMELTE WERKE

IM AUFTRAG DER
DEUTSCHEN FORSCHUNGSGEMEINSCHAFT
UND DER
BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
BEGRÜNDET VON
WALTHER VON DYCK UND MAX CASPAR
HERAUSGEGEBEN VON
FRANZ HAMMER

C.H.BECK'SCHE VERLAGSBUCHHANDLUNG
MÜNCHEN

JOHANNES KEPLER
GESAMMELTE WERKE

BAND IX

MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

BEARBEITET VON
FRANZ HAMMER

C.H.BECK'SCHE VERLAGSBUCHHANDLUNG
MÜNCHEN MCMLX

Gedruckt mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft in der
C. H. Beck'schen Buchdruckerei, Nördlingen
Printed in Germany

STEREOMETRIA DOLIORVM

NOVA STEREOMETRIA DOLIORVM VINARIORVM, INPRImis Auſtriaci, figuræ omnium aptiſsimæ;

ET

USUS IN EO VIRGÆ CUBIcæ compendioſiſſimus & plane ſingularis.

Acceſſit

STEREOMETRIÆ ARCHIMEdeæ Supplementum.

Authore

Ioanne Kepplero, Imp. Cæſ. Matthiæ I. ejuſq́; fidd. Ordd. Auſtriæ ſupra Anaſum Mathematico.

Cum privilegio Cæſareo ad annos XV.

ANNO *M. DC. XV.*

LINCII

Excudebat JOANNES PLANCVS, ſumptibus Authoris.

A 2 ILLVSTRISSIMO DOMINO

D. MAXIMILIANO,

† Domino DE LIECHTENSTEIN et Nickelspurg, Domino Rabenspurgi, Hohenaugae, Butschavizij, Poserizij et Neogradi, Sacrae Caesareae Maiestatis Consiliario, Camerario et stabuli Praefecto, etc.

Nec non

ILLVSTRI ET GENEROSO DOMINO
D. HELMHARDO IÖRGERO,

in Tollet, Keppach, Grebing et Hernals, Domino Steireccij et Erlachij, Lib: Baroni de Creüspach: Archiducatus Austriae supra Anasum aulae Magistro provinciali haereditario: Sacrae Caesareae Maiestatis ad Cameram aulicam Consiliario; et pro tempore Provinciae dictae ex Baronibus Ordinario;

Dominis meis gratiosissimis

Cum superiori Novembri mense, Illustrissime Domine, Illustris et Generose L. Baro, Domini Gratiosissimi, novam nuptam domum
A 2 v dedu|xissem; tempore tali, quando Austria, vindemiâ copiosâ, nec minus generosâ collectâ, plurimis onerarijs adverso Danubio missis, opes suas Norico nostro dividebat, litusque omne Lincianum vasis vinarijs tolerabili precio venalibus obstructum visebatur: conveniens erat officio mariti, bonique patris familias, ut domui meae de necessario potu prospicerem. Dolijs igitur aliquot domum illatis et conditis, post dies quatuor venit venditor cum virga mensoria, qua unâ et eâdem cados promiscuè omnes exploravit sine discrimine, sine respectu figurae, sine ratiocinatione vel calculo. Demissa enim acie virgae aeneâ in orificium infusorium pleni cadi transversim ad calcem utriusque orbis lignei, quos fundos vernaculo usu dictitamus, postquàm utrinque aequalis apparuit haec longitudo à ventris summo ad utriusque circularis Tabulae imum: de nota numeri, quae erat impressa virgae eo loco, quo desinebat haec
A 3 longitudo, pronunciavit| numerum amphorarum, quas caperet cadus: secundum quem numerum ratio fuit inita precij.

Mirari ego, si transversa linea per corpus dimidij cadi ducta argumentum esse posset capacitatis; dubitare etiam de fide huius dimensio-

30) quos

nis; cum cadus inter binos orbes brevissimus, tantummodò orbibus paulo latioribus, eoque perexiguae capacitatis, possit habere eandem longitudinem ab infusorio, ad orbis alterutrius imum. Subijt memoriam laboriosa dimensio ad Rhenum usitata: ubi aut cados implent, et per singulas liquoris amphoras numerando transeunt, cum fastidiosa temporis occupatione, notasque capacitatis inurunt vasis exploratis: aut etsi virgis mensorijs utuntur, ut plurimum tamen diametros orbium et longitudinem tabularum curvatarum metiuntur: easque inter se multiplicant, variasque cautiones adhibent, de Orbium inter se inaequalitate, ventris amplitudine, curvatura tabularum: neque sibi invicem satis|faciunt; quin A3v alij alios erroris arguunt.

Cùm igitur didicissem, usum hunc virgae transversalis publica hic authoritate stabilitum, et juratam illi mensorum fidem: visum est non inconveniens novo marito, novum Mathematicorum laborum principium, certitudinem huius compendiosae, et ad rem familiarem pernecessariae dimensionis ad leges Geometricas explorare, fundamentaque, si quae essent, in lucem proferre.

Cùm autem speculatio haec superiori triduo jucunda quadam varietate successisset, adeò ut certi quid pronunciari posset: jamque ad perscribendam et excolendam hanc demonstrationem, quippe quòd jam erat mente comprehensa, calamum stringerem: non diu mihi quaerendi erant, quos dedicatione, quod principium erat libelli, alloquerer; qui ingenij rectitudine demonstrationum ἀκρίβειαν aequarent, pulchritudinemque earum singulari cupiditate prosequerentur: talem enim Te, Illustrissime Domine DE LIECHTENSTEIN, mi|hi praedicavit Medicus tuus A4 D. IOANNES WODDERBORNIVS Scotus, vir Mathematicis artibus exercitatissimus, eòque mihi amicissimus, qui commodùm interveniens, Tui memoriam mihi praesentiâ suâ renovavit: Talem etiam Te Illustris et Generose L. B. IÖRGERE, longo usu cognitum habebam: quâ in laude ita pares estis; ut injuriam alterutri facere videri possim, quippe utriusque cliens, si alterum solum nominarem.

Et quid impediat, quo minus collegas hic vos designem? quippe in negocio, ubi non jam nobilitatis, non dignitatis, non virtutum politicarum, non ullius rei, quam Mathematicus cernere soleat; sed ingenij tantùm, et si licet addere, patrocinij mei aemulatio locum habet.

Nullâ igitur haesitatione usus, strenam GG.VV. in subeuntes Ianuarij Calendas ex speculatione mea concinnare statui: quâ et de gratitudine in Deum, pro acceptis his alijsque transacti anni beneficijs, utrinque admoneremur, juxtàque | et vos Patroni ex dedicatione rei gratae, et ego A4v author ex lectoribus et aestimatoribus intelligentibus, mutuâ voluptate frueremur: utque hoc Austriae nostrae decus, Austriacae potissimùm

Nobilitatis Proceres, vinique mensurandi ratio, vinearum latissimarum possessores, quibus vinum ad munificentiam usque suppeteret, patronos haberet.

Valete Gen: Proceres, et speculatione pulcherrimâ, delicijs vestris consuetis, animos vestros oblectate, Annumque subeuntem hilares et macti bonis omnigenis transigite: meque ut consuestis, vestrâ gratiâ porrò quoque prosequimini. Lincij, XVI. Cal. Ian. Anno Christianorum Occidentalium M.DC.XIII.

Ill^{ae} et Ill^{is} GG. VV.

Devotissimus
Imp. Caes. MATTHIAE
Ejusque fidd. Ordd. Austriae s. A.
Mathematicus

IOANNES KEPPLERVS

PRAEAMBVLVM
DE RATIONE FIGVRAE DOLII VINARII

Omnis artificiosa et compendiosa dimensio spacij, figuram etiam ordinatam requirit; nam Vasa nullius certae, nullius ordinatae figurae, ingenium respuunt, solamque manum et numerationes successivas infusi liquoris expectant.

Vasa vinaria, materiae, structurae, ususque necessitate figuram circularem sortita sunt, conicae et cylindricae affinem. Humor enim in vasis metallicis diutius contentus corrumpitur aerugine; Vitrea et testacea, nec suppetunt, nec tuta sunt; Lapidea sunt usu inepta ob pondus: superest igitur, ut vina ligneis excipiamus condamusque. At rursum ex unica trabe vasa nec facile, nec ampla, nec in necessaria copia parari possunt, et si possent, rimas agunt. Ex multis igitur lignis inter se coassatis dolia construi oportet. At commissurae lignorum nulla materia, nulla arte muniri contra effluxum humoris possunt, nisi sola vinculorum constrictione. Vincula verò cum sint ex materia flexili, ex Betulla, Quercu, aut similibus, urgente mole solubili rerum, quas cum violentia quadam constringunt, sese didunt in ambitum omnium capacissimum. Summa igitur ratione Vietores rediguntur ad circulos: ne, si venter Cadi ut dictum, circularem affectat amplitudinem, ipsi figuram aliam in oris extimis instituentes, distortum et imbecille Vas efficiant. Videre est in Lagenis, quibus Italica vina trans Alpes important in Germaniam; quae cum, usu exigente, compressae figurae sint, ut ad Mulorum latera appendi, et per angustias viarum transportari inoffensè possint: et ne longiùs procurrentes à lateribus Mulorum, ex ratione staterae plus gravent jumenta, et quassationem reddant violentiorem: qua parte sunt complanatiores, illa et imbecillius impetum sustinent, facileque dehiscunt.

Accedit et commoditas figurae circularis seu Cylindraceae, ut quia vina plaustris transportanda sunt per terram; plurimum vini, minimum ligni habeant moles. Quo nomine si Globus ex tabulis ligneis coassari posset, globosa potissimum vasa futura fuissent. At quia Globus vinculis constringi nequit, pro Globo Cylinder successit. Neque tamen is purus putus Cylinder esse potuit: nam vincula laxata statim fierent inutilia, nec possent adigi violentiùs, nisi dolium figura conicâ à medio

17) Beta

ventris utrinque nonnihil coarctaretur. Est et apta haec figura ad volvendum in directum (unde Cylindro nomen) adque vehendum in plaustris; et geminata basi, in quandam sui ipsius similitudinem, librationi commodissimam, visu speciosam, composita.

Cum igitur dolia vinaria Circulo Cono et Cylindro, figuris regularibus participent, apta sunt hactenus ad Geometricas dimensiones: quarum principia operae precium est in vestibulo huius speculationis collocare; ut illa ab ARCHIMEDE sunt investigata; quantum quidem huius ad oblectationem animi Geometriam amantis sufficiet: absolutae enim et omnibus numeris perfectae demonstrationes petendae sunt ex ipsis libellis Archimedeis; si quis à spinosa lectione eorum non abhorruerit.

Licet tamen in quibusdam locis, quae non attigit ARCHIMEDES, nonnihil immorari; ut inveniant et doctiores, quibus juventur, seseque oblectent.[1]

Bv

I. PARS

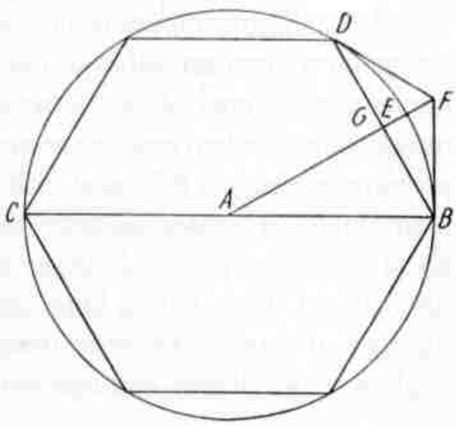
CVRVORVM REGVLARIVM STEREOMETRIA

THEOREMA I

† Principiò requirebatur cognitio proportionis Circumferentiae ad Diametrum. Et docuit ARCHIMEDES,

Rationem circumferentiae ad diametrum, esse proxime eam, quae est Numeri 22 ad 7.

Ad hoc demonstrandum usus est figuris circulo inscriptis et circumscriptis; quae cum sint infinitae; nos facilitatis causa utemur sexangula. Sit enim in circulo CBD, regulare sexangulum, cuius anguli C, D, B, latus DB, et tangant circulum duae rectae in D et B, coeantque ad communem sectionem F: et centrum A cum F connectatur lineâ AF, quae secet rectam DB in G, arcum DB in E. Cum igitur DGB sit recta, id est ductus à D in B brevissimus, DEB vero arcus, id est ductus à D in B non brevissimus, longior igitur est DEB, quam DGB.



Schema I

E contra cum recta BF tangat circulum, omnes igitur partes arcus EB sunt intra FB versus GB: quòd si EB esset recta, omnino brevior esset, quàm FB. Nam AEB, FEB anguli sunt aequipollentes Recto, cum EFB sit acutus. Ergo EB subtensa minori angulo EFB, minor est, quam FB, quippe quae maiori est subtensa. Licet autem argumentari de EB ut de recta, quia vis demonstrationis secat circulum in arcus minimos, qui aequiparantur rectis.

Quanquàm inter ea quae communi sensu sunt nota, recipi potest, † arcum DEB, intra triangulum DBF, minorem esse lineis DF, FB, quippe qui cum flectatur versus angulum DFB, nullam tamen particulam habet extra lineas DF, FB: comprehendens autem, sensu communi maius est comprehenso. Secus haberet, si arcus DEB esset linea flexuosa et inordinata.

Cum igitur DB sit latus inscripti sexanguli, et DF, FB sint duae medietates circumscripti sexanguli; arcus DEB erit circuli pars sexta: maior verò erat quàm DB, minor quàm DF, FB. Sex igitur lineae DB, minores sunt quàm circumferentia circuli, et duodecim lineae DF, vel FB, sunt maiores quàm circumferentia.

Est autem DB latus sexanguli regularis, aequale ipsi AB semidiametro. Sex igitur semidiametri AB, hoc est tres diametri CB, vel (diametro in septem aequalia divisa) viginti et una septimae, sunt breviores circumferentia. |

Vicissim cum DG, GB sint aequales, erit GB dimidium ipsius AB. B2
Quadratum verò AB aequale est junctis AG, GB quadratis, et est quadruplum quadrati GB, ergo AG est triplum quadrati GB. Proportio igitur quadratorum AB et AG est sesquitertia, linearum igitur AB et AG proportio est semi-sesquitertia, scilicet ea quae numerorum 100000 et 86603. Vt vero est AG ad AB, sic est GB ad BF. Ergo etiam inter GB et BF est proportio semi-sesquitertia; ut quia GB est dimidium ipsius AB, scilicet 50000; BF talium particularum habeat 57737 proximè. Duodecies igitur sumptus numerus iste, maior erit quam circumferentia circuli. Colligitur numerus 692844, qualium diameter habet 200000. Et qualium diameter habet 7, talium sunt in BF duodecies sumpta 24, minus una decima. Maior igitur est hic numerus ipsa circumferentia; minor autem eadem erat numerus 21. Et patet ad oculum, arcum BE propiorem esse ipsi BG, quam BF lineae. Circumferentia igitur propior est numero 21, quam numero 24, minus una decima. Ponitur igitur ab 21 recessisse per 1, ab altero verò per 2, minus una decima, ut sit nimirum 22. Haec autem longè accuratius demonstrat ARCHIMEDES in figuris multilateris, ut sunt figurae 12, 24, 48 laterum: ubi etiam apparet, paulum quid deesse circumferentiae, quo minus sit 22. ADRIANVS

19) diametri *statt* semidiametri 25) sesquitertia linearum 31) 477974 32) BD

ROMANVS eadem Methodo demonstravit, si diameter circuli secetur in partes 200000000 00000000 tunc talium partium 6283185307179586 2 ferè esse in circumferentia.

Episagma

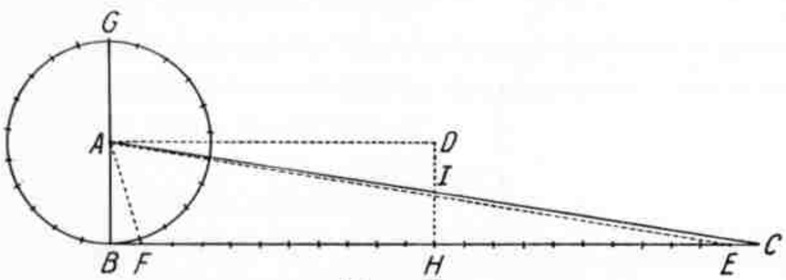
Ex tribus lineis sectionum Conicarum, quae Parabole, Hyperbole, Ellipsis dicuntur, Ellipsis est circuli aemula, et demonstravi in Com. de Motibus Martis, longitudinem Ellipticae lineae sese habere ad medium arithmeticum inter duas ejus diametros, quae axis rectus et † transversus dicuntur, similiter ut 22. ad 7. fere.

THEOREMA II

Circuli area ad aream quadratam diametri comparata, rationem habet eam quam 11. ad 14. fere.

† ARCHIMEDES utitur demonstratione indirecta, quae ad impossibile ducit: de qua multi multa: Mihi sensus hic esse videtur.

Circuli BG circumferentia partes habet totidem, quot puncta, puta infinitas; quarum quaelibet consideratur ut basis alicuius trianguli aequicruri, cruribus AB: uti ita Triangula in area circuli insint infinita, B2v omnia | verticibus in centro A coeuntia. Extendatur igitur circum-



Schema II

ferentia circuli BG in rectum, et sit BC aequalis illi, et AB ad illam perpendicularis. Erunt igitur infinitorum illorum Triangulorum, seu Sectorum, bases imaginatae omnes in una recta BC, juxta invicem ordinatae: sit una talium basium BF quantulacunque, eique aequalis CE, connectantur autem puncta F, E, C, cum A. Quia igitur triangula ABF, AEC totidem sunt super recta BC, quot sectores in area circuli, et bases BF, EC aequales illis, et omnium communis altitudo BA, quae etiam est sectorum; Triangula igitur EAC, BAF erunt aequalia, et quodlibet aequabit unum sectorem circuli; et omnia simul in linea BC bases

15) quod

habentia, id est Triangulum BAC, ex omnibus illis constans, aequabit sectores circuli omnes, id est aream circuli ex omnibus constantem. Hoc sibi vult illa Archimedea ad impossibile deductio.

Divisa igitur BC bifariam in H, fiat ABHD parallelogrammum, ut DH secet AC in I. Erit hoc parallelogrammum Rectangulum aequale areae circuli. Nam ut CB tota ad CH dimidiam, ita et AB, id est DH tota, ad IH dimidiam. Igitur HI aequat ID, et HC aequat DA, id est HB: et anguli ad I aequales, D vero et H recti. Triangulum igitur ICH, quod est extra parallelogrammum, aequale est triangulo IAD, quo parallelogrammum excedit trapezium AIHB.

Cum igitur diameter GB ponatur esse partium 7, quadratum diametri erit 49. Et cum harum partium 22 sint in circumferentia, sc: in BC, dimidia BH habebit earum 11, paulo minus, ut supra. Duc 11 in semidiametrum 3 semis, sc: in AB: fiet Rectangulum AH 38 semis.

Qualium ergò Quadratum diametri habet 49.—	Talium Area circuli inscripti habet 38 semis.
bis 98.—	— 77.
Divisi per 7. faciunt 14.—	— 11. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I

Sectoris in circulo (constituitur rectis ex centro, et ex arcu intercepto) area est aequalis rectangulo sub semidiametro et dimidio arcu.

Corollarium II

Segmenti circuli minoris (portio est per unam rectam recisa) area minor est sectoris areâ, triangulo sub sectoris et segmenti rectis comprehenso: Segmenti maioris area tanto maior est sectore suo.

Demonstratur autem in Geometricis, rectangulum sub perpendiculo trianguli et dimidia sectionis linea aequale esse areae trianguli. Ablato igitur plano huius trianguli ab area sectoris, restat area segmenti minoris, sed addito, maioris segmenti area constituitur.

In Schemate I. DABE est sector minor, DABCD maior; DGBE segmentum minus, DGBC maius; DBA triangulum, quo sector à segmento | differt. Id habet duas partes aequales et congruas, AGB, B3
AGD. Apposito igitur angulo DAG ad GBA, sic ADG ad GAB, fit rectangulum altitudine AG, latitudine GB. Et dicitur in Triangulorum doctrina, GB sinus arcus EB dimidij, GA sinus eius complementi.

Episagma I

Circulo commune hoc est cum Parabola; quod in utraque, portiones quomodocunque per unam rectam abscissae, si aequales habuerint diametros, et ipsae inter se in qualibet figura sint aequales. Arch. de Conoid. IV.

Episagma II

Paraboles area est sesquitertia areae Trianguli, habentis eandem cum Parabola basin rectam, et eandem altitudinem. Arch. de Quadr. Parabolae Prop. XVII. et XXIV.

Episagma III

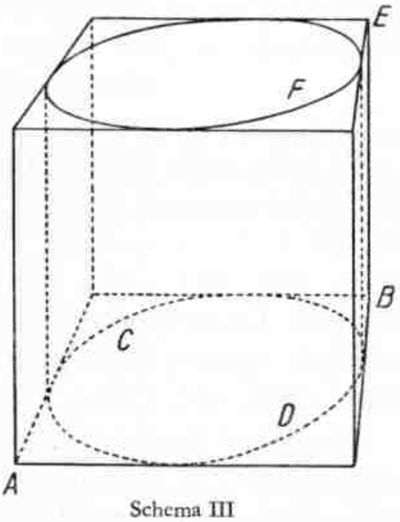
Ellipsis area, ad aream circuli est, ut minor Ellipsis Diameter ad maiorem: Et ut circulus ad quadratum diametri, sic Ellipsis ad Rectangulum diametrorum, scilicet etiam ut 11. ad 14. ferè. Arch. Sphaeroid.

THEOREMA III

Cylindri vero ad Parallelepipedum columnare rectangulum aequealtum, quod Cylindri corpus stringit quadratis suis basibus et parallelis lateribus, ratio est eadem, quae circuli ad quadratum circumscriptum, hoc est eadem quae 11. ad 14.

Vt enim CD Cylindrica basis circularis ad AB quadratum circumscriptum, ita CF corpus Cylindri, ad AE corpus parallelepipedi rectanguli, seu columnae. Arch. de Sphaera et Cylindro.

Cylinder enim et columna aequealta sunt hic veluti quaedam plana corporata: accidunt igitur illis eadem quae planis.[1]



Schema III

B3v

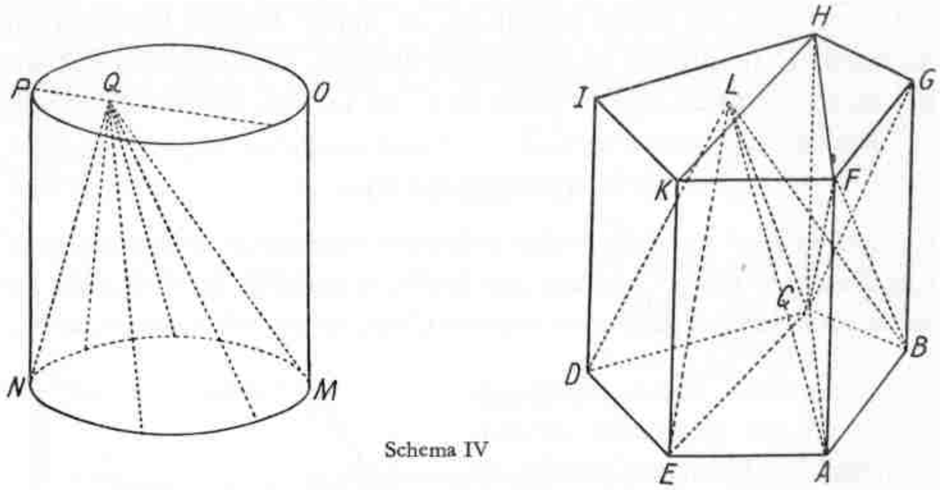
THEOREMA IV

Si Columna recta parallelarum Basium cum Pyramide, si Cylinder cum Cono eandem basin habuerit eandemque altitudinem, Triplum erit illius.

Nam omnis Columna, ut hic quinquangularis BI, bases ABCDE et FGHIK parallelas habens, et BAF, AEK caeterosque angulos rectos, solvitur in sua Pentaedra seu Prismata, ut hic quinquangularis in tria GHF, FHK, KHI, trinis parallelogrammis et binis triangulis oppositis clausa.

	Primi	Secundi	Tertij
Triangula	GHF	FHK	KHI
	BCA	ACE	ECD
Parallelogrammata	GHCB	HCAF	KECH
	HCAF	FAEK	HCDI
	FABG	KECH	IDEK

Pentaedron vero in tria Tetraedra solvitur, quorum bina semper, quae unum Planum Parallelogrammum ex aequo dividunt, aequealta sunt.



Schema IV

Sit verbi gratia Prisma primum sub GHF, BCA triangulis. Ducantur in Parallelogrammis BGFA et AFHC diagonij BF, CF, ex trianguli BCA, angulis B, C. Iis resecatur Tetraedron, cuius haec quatuor triangula BCA, BFC, BFA, AFC. Restat Pyramis quadrangula, basi BGHC, vertice F. Ducta igitur diagonios GC secat eam in duo Tetraedra: unius triangula quatuor sunt ista BGC, GFB, GFC, CFB: reliqui sunt ista, GHC, GFH, HFC, CFG.

Cùm igitur Parallelogrammum GHCB lineâ GC sit sectum bifariam, et triangula GCH, GCB aequalia, et GF altitudo eadem (nam BGF rectus est) aequalia erunt Tetraedra GCBF, GCHF. Similiter Parallelogrammum GFAB lineâ BF sectum est bifariam et in aequalia FBG, FBA. Et planum BCA rectum est ad planum GA, igitur perpendicularis ex C in BA est altitudo Tetraedrorum GBFC, et ABFC: sunt igitur aequalia. Eidem verò GBFC fuit aequale GCFH. Omnia igitur tria sunt aequalia, et Prisma HGA habet tria aequalia Tetraedra.[1]

23) Tetraedorum

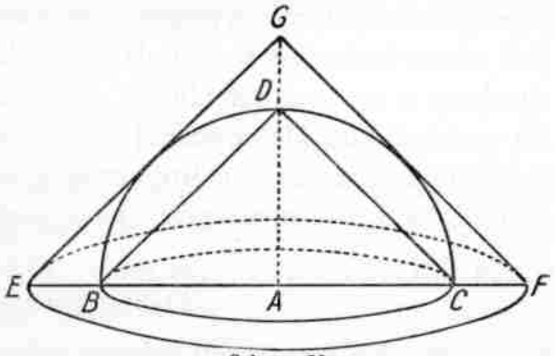
B4 Sumatur jam in basi supera FGHIK, punctum L, quod connectatur cum angulis basis inferae ABCDE, ut creetur Pyramis quinquangula: Dico illam esse tertiam partem columnae GAD. Nam basis ABCDE, lineis AC, EC in triangula tria est divisa ut prius, super quae stant et tria Pentaedra, et tres partes Pyramidis, sc. ABCL, ACEL, ECDL, et perpendicularis ex L demissa in planum BD, aequat recta latera KE, FA et caetera. Est igitur eadem altitudo Tetraedrorum ABCF, ABCL; sunt igitur aequalia. Sed ABCF est tertia pars Prismatis ABCFGH: Ergo et ABCL ejusdem tertia pars est. Similiter verò secunda Pyramidis pars ACEL, secundi Prismatis; et tertia ECDL, tertij prismatis tertiae sunt partes: Tota igitur Pyramis totius Columnae tertia pars est; et haec illius ergò triplum.

Eodem verò modo et MNOP Cylinder, cuius bases MN et OP parallelae, aequat tres conos MNQ, vertice Q ad superioris basis planum pertingentes, et eandem basin MN habentes. Demonstratio enim † analogicè applicari eadem potest, si perpendas, circulum, qui basis est Cylindri et Coni, in infinita triangula ex centro dividi, quibus totidem Prismata, totidemque partes Coni superstent, illa in axe Cylindri, hae in axe Coni convenientes.

THEOREMA V

Superficies curva Coni Rectanguli inscripti Hemisphaerio, est semidupla Baseos, † *seu circuli maximi in sphaera, et Basis eiusdem Coni est dimidia Baseos Coni rectanguli circa Hemisphaerium.*

Sphaera BDC secetur plano per centrum A, et sectio BC continuetur fiantque duo Coni Rectanguli, alter totus intra Hemisphaerium BDC, cujus axis recta AD, ex centro A, diametro perpendicularis: sitque BDC, B4v basin BC | et verticem D eundem habens cum Hemisphaerio; alter totus extra Hemisphaerium, stringens illud mediae suae superficiei lateribus, quae sint EG, FG, parallela ipsis BD, CD, habens verticem G, in axe prioris AD continuato, basin vero EF in plano sphaeram secante.



Schema V

Cum igitur BA et AD sint aequales; erunt etiam EA semidiameter basis maioris, et AG altitudo Coni exterioris aequales: Et quia EGF rectus, erit igitur EG quadrati circulo circumscripti latus, eoque aequalis

22) et Basis eiusdem Coni est *fehlt* 38) AD *statt* AG

diametro BC. Sed EF quadratum, aequale est duobus quadratis EG et GF, aequalibus diametro BC: Ergo quadratum EF duplum est quadrati BC: circulus igitur EF duplus est circuli BC. Dico etiam superficierum conicarum inter se proportionem esse duplam, et minoris conicae curvae superficiei proportionem ad aream basis BC esse semiduplam.

Nam per ea quae dicta sunt Theor. II. rectangulum sub semidiametro AB, et circumferentia tota BC, duplum est areae circuli BC. Eodem verò modo, eademque demonstrationis vi, rectangulum sub tota BD et tota † circumferentia BC, est duplum conicae curvae superficiei BDC. Quare ut AB ad BD, sic superficies plana circuli BC, ad curvam Coni BDC. Sed proportio AB ad BD est semidupla, quia quadratorum proportio est dupla; ergo et superficierum dictarum proportio est semidupla. Et quia sunt Coni similes; ut igitur basis BC plana ad Curvam BDC: sic plana EF ad curvam EGF; et permutatim, ut basis ad basin, ita conica ad conicam curvam: dupla verò est proportio inter bases; dupla igitur et inter conicas curvas.

THEOREMA VI

Convexum Sphaericum est quadruplum areae circuli maximi, qui Sphaeram per centrum secat.

Demonstrationes ARCHIMEDIS et PAPPI sunt ingeniosissimae, nec admodum faciles captu: veritas verò propositionis, et prima demonstrationis elementa elucent ex praemissis.

Est enim superficies convexa Coni maioris EGF maior superficie † Hemisphaerij BDC, minoris BDC minor; illa enim tegit Hemisphaerium, haec sub Hemisphaerio tota latet. Verisimile est igitur, Hemisphaerij superficiem esse medium proportionale inter utriusque Coni superficies. Sed minor conica est semidupla areae planae basis, maior sesquidupla ejusdem; et medium semiduplae et sesquiduplae, est dupla proportio. Ita verisimile fit, Hemisphaerij superficiem esse duplum, et Sphaerae totius superficiem esse quadruplum areae circuli maximi BC. Demonstrat verò id ARCHIMEDES necessariò ex consimilibus principijs.

THEOREMA VII

Convexum cuiuslibet segmenti sphaerae est aequale plano circuli, cujus semidiameter subtendit segmenti latitudinem à Polo ad basin.[1]

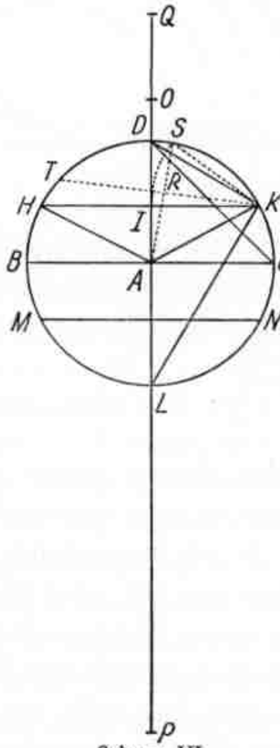
Segmenta sphaerae hic reputantur non quaelibet portiones, sed illae C tantum, cùm Sphaera ab uno plano tota secatur in partes duas, sic ut

1) GC *statt* BC 15) EGC *statt* EGF 30) duplam

quaelibet pars habeat suum polum; talis enim sectio efficit, ut basis segmentorum sit circulus planus.

Centro A sit superficies Sphaerae BDCL, et hic sit eius circulus maximus, et assumantur extrema diametri DAL pro polis segmentorum futurorum, sintque D. L. et per punctum I, perque A centrum, transeant duae perpendiculares HIK, et BAC, repraesentantes sectiones, seu circulos ad planum DBL rectos. Sicut igitur tota DL subtensa dimidio circuli LCDB à polo D ad L imum, (quod punctum jam in comparatione totius Sphaerae cum suis segmentis sustinet vicem basis) fit semidiameter circuli plani, aequalis toti curvae superficiei sphaerae, per VI: Sic etiam DC subtensa ipsi DKC dimidio arcui segmenti BCD a polo D ad basin C, fit semidiameter circuli plani, aequalis curvae superficiei segmenti seu hemisphaerij BDC, per V: Sic etiam in genere quocunque segmento sumpto, ut HKD, linea DK subtensa latitudini segmenti a D polo ad basin K, fit semidiameter circuli plani, aequantis superficiem curvam segmenti KDH: Et sumpto segmento HKL, cuius polus L, basis circularis HK, subtensa KL, fit semidiameter circuli plani, qui aequalis sit superficiei curvae segmenti KLH.

† Demonstrationem vide apud ARCHIMEDEM. Primam verò fidem tibi faciet analogia. Nam cum sic sit comparatum cum tota superficie et cum dimidia: probabile est, eandem rationem obtinere etiam in segmentis caeteris.



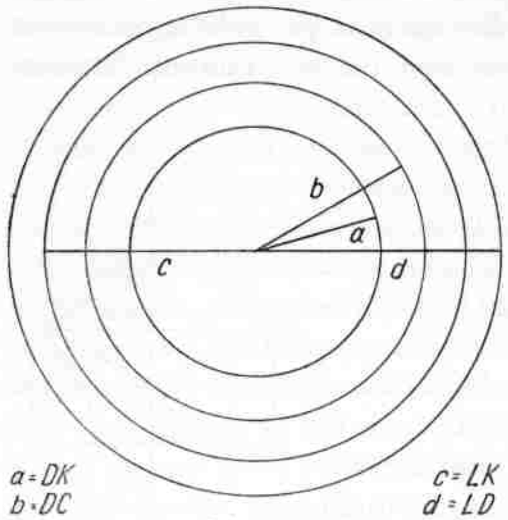
Schema VI

Corollarium

Segmenta segmentorum, quae quidem utrinque circularibus basibus terminantur, ijsdem principijs facile in planum explicantur. Nam sit BHKC segmentum segmenti BDC, cuius bases circuli HK, BC: primò fit circulus aequalis segmento sphaerae maiori BCD. Deinde alius circulus fit aequalis complemento ejus, quod proponitur segmentum segmenti. Nam complementum hoc, est segmentum sphaerae minus HKD, sive polus ejus idem sit cum priori sive alius. Ergò circulorum planorum DK, DC differentia aequabit Zonam BHKC.

5) AE *statt* A 6) BAD

Alia vero segmenta segmentorum, quae non integris circulis planis, sed eorum partibus terminantur; nisi polus D et axis DI totius segmenti HKD fuerit constitutus in concursu sectionum, nondum habent notam aequationis vel computationis suae methodum.[1]



Schema VII

THEOREMA VIII Cv

Sphaericum Convexum et ejus axis secantur à plano ad axem recto in eadem proportione.

Septimum Theorema servit Geometricae delineationi, hoc octavum arithmeticis est utilius et compendium jucundissimum. Illud planum prodit aequale curvae superficiei; hoc lineas ostendit aequivalentes segmentis.

In Sch. praecedenti, si axis totus DL valet superficiem totam DKLH, pars axis DI valet partem superficiei HDK, siquidem DI fuerit axis sectionis, id est, si fuerit rectus ad planum HK secans, idque secet in centro I, sic pars axis IL valet partem superficiei HLK.

Nam quia HDK est ad KLH, ut circulus DK ad circulum KL rectae, per VII. id est quadratum KD ad quadratum KL: At verò quadratum KD est ad quadratum KL, ut recta DI ad rectam IL: Ergò etiam ut recta DI ad rectam IL, sic HDK superficies ad KLH superficiem.

Analogia. Quemadmodum igitur in lineis BA, HI, inest proportio circularium circumferentiarum BC, HK, centris A. I. scriptarum; sic in lineis transversis DA, DI, inest proportio arearum BDC, HDK, terminatarum ad illos circulos: Et sicut DI valet aream HDK, et DA aream BDC, sic IA valet aream Zonae BHKC.

THEOREMA IX

Cylindri recti superficies est aequalis Sphaericae, quam stringit.

Creatur enim Cylindrica superficies ductu totius circumferentiae KL (in sequenti schemate) in totam diametrum KN vel GB: at ductu dimidiae circumferentiae KL, in dimidiam diametrum AB creatur pars quarta

3) HKI   5) notum   19) BK *statt* HK   32) superficies *fehlt*

† 4.6. — 24
2.3. — 6
2.2. 4

prioris, cum figurae similes sint in dupla proportione laterum: creatur verò eodem ductu area circuli maximi, per II. quae est etiam sphaericae superficiei pars quarta, per VI. Duo ergo ejusdem quadrupla sunt inter se aequalia, superficies sc. curva Cylindri KML, et superficies curva globi seu sphaerae suae GB, utraque quadruplum areae KL.

THEOREMA X

Superficies globi, et ejus cylindri, qui globum stringit, resectae ab eodem plano ad axem recto, sunt aequales.

In figura sequenti sit GB globus, LN ejus cylinder, stringens globum in medio, et in G. B. Et sit planum PST secans utramque superficiem: dico Zonam KPSTL cylindricam, esse aequalem curvae superficiei segmenti globi GR.

Videtur falsum esse, cum Cylindrica sit tam laxa, globi verò superficies sursum in angustum coeat. Sed memineris, quanto illa laxior, tanto hanc esse latiorem, cùm per obliquum ad eandem tendat altitudinem. Sed facilis est demonstratio. Cùm enim KP et GR sint aequales, et creetur Zona KPSTL ductu KP vel GR in totam circumferentiam KOL, et sic etiam Zona PSTMN creetur ductu PN vel RB in eandem circumferentiam totam: ergo ut recta GR ad RB, et BG, sic superficies cylin-
C 2 drica KT, ad TN et NL. At ut recta GR[1] ad RB et BG, sic superficies segmenti globi GR ad RB segmentum et BG totam globi superficiem, per VIII. Ergo et ut cylindrica KT ad TN et NL, sic sphaerica GR ad RB, et BG. Est autem tota Cylindrica NL aequalis toti Sphaericae GB, per IX. Ergo et pars Cylindricae KOLPST parti Sphaericae in segmento GR erit aequalis.

THEOREMA XI

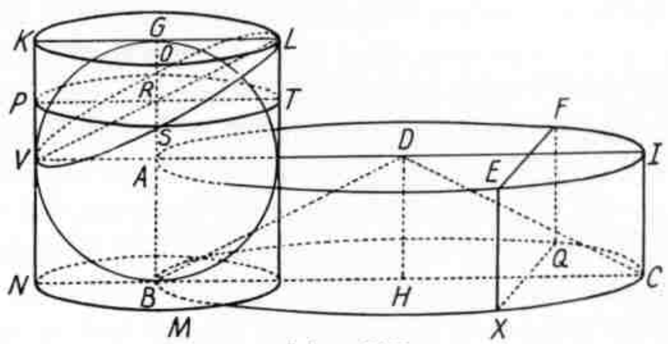
† *Corpus Cylindri est ad corpus Sphaerae, quam stringit, in proportione sesquialtera.*

Corpus enim Sphaerae ad Analogiam eorum, quae dicta sunt Theor. II. potestate in se continet infinitos veluti conos, verticibus in centro sphaerae coeuntes, basibus, quarum vicem sustinent puncta, in superficie stantibus. Sit igitur in schemate II. BG Sphaera, A centrum, coni AB, AG et similes infiniti, ijque minimi, id est, quorum Bases sint puncta B. G. vertex omnium communis A. Fiat novum Schema, in quo exten-

11) GB. 18) KRSTL 20) rectae 21) rectae 24) BC *statt* BG

datur curva superficies sphaerae in planum circulare, cuius diameter sit BC, dupla ad diametrum Sphaerae BG, quia Circulorum proportio est quadrupla per VI. praemissum: et fiat circulus ex BC, ex cuius medio puncto H surgat perpendicularis HD aequalis semidiametro AB. Sit autem Conus BDC, basi BC, vertice D: Conus iste aequale corpus habebit corpori Sphaerae BG. Omnium enim conorum AB, AG, infinitorum in sphaera, bases B. G. minimae, cum sphaerica superficie ipsa in qua insunt, in planum circulum BC extensae et juxta invicem ordinatae sunt, et pro eo quod erant in Sphaera Coni recti ABB, AGG, facti sunt hic coni scaleni DCC, DBB, excepto medio DHH, qui manet rectus, habentque omnes eandem altitudinem DH, et bases aequales, quippe minimas, omnes igitur et inter se et conis rectis in Sphaera aequales sunt; et totus conus BDC ex omnibus compositus, aequalis erit toti sphaerae BG ex omnibus compositae.

Ductâ igitur areâ circuli BC in semidiametrum HD, creatur Cylinder AICB, cuius corpus est coni BCD triplum, per IV: Est verò cylindri sphaeram stringentis duplum, quia basin BC habet, basis KL quadrup-



Schema VIII

lam, altitudinem verò HD, altitudinis BG dimidiam. Duo enim AICB cylindri invicem impositi, efficerent altitudinem aequalem ipsi BG altitudini cylindri KLB, essentque illius quadruplum, propter basin BC quadruplam baseos KL: unus igitur AICB est cylindri KLB duplum: erat verò triplum coni BDC, id est corporis Sphaerae BG, aequalis cono BDC. Ergo diviso cylindro AICB in 6: dimidium huius, scilicet 3, venit Cylindro KLB; tertia verò pars de 6, scilicet 2, venit sphaerae GB. Cylinder igitur KLB, ad sphaeram suam GB, est ut 3. ad 2. quae est proportio sesquialtera.[1]

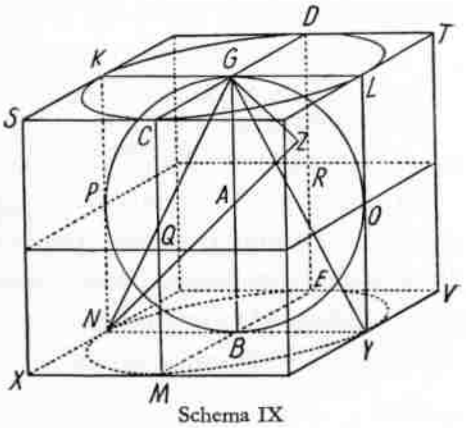
Potest idem etiam per IX. probari, si fingamus Cylindrum secari in C2v
infinita prismata, in axe cylindri coeuntia; pro basibus verò, quas habent prismata, quadrangulis, habentia lineas rectas aequales axi; quae bases prismatum omnes juxta invicem ordinentur in curva Cylindri superficie,

ut supra Theor. II. de circumferentia circuli similia sumus imaginati. In illo enim Schemate II. sit circulus BG utraque basis Cylindri: et circumferentia BG repraesentet curvam Cylindri superficiem, punctum verò A repraesentet axem Cylindri, aequalem ipsi BG diametro, et extendatur curva superficies Cylindri in planum, sitque BC, quae repraesentet rectangulum, cuius longitudo BC, latitudo BG; et connectatur axis Cylindri AA, cum recta CC, ipsi parallela, rectangulo AACC: ut sit Prisma AABBCC, aequale corpori Cylindri. Erunt enim omnium Cylindri Prismatum minimorum bases rectangulae minimae (hoc est lineae) juxta invicem ordinatae in superficie rectangula BC, et Prismata in Cylindro recta, fient hic scalena, omnium tamen acies pertingent ad communis altitudinis BA terminum AA, erunt igitur aequealta et invicem et cum rectis Prismatibus ipsius cylindri. Ducto igitur rectangulo BBCC in altitudinem BA, creabitur Parallelepipedum, cujus corpus est duplum corporis prismatis AABBCC, duplum igitur corporis cylindri. At supra etiam ducebatur circulus aequalis rectangulo BBCC superficiei curvae cylindri (sc. quadruplus circuli maximi, per VI) in altitudinem aequalem ipsi BA semidiametro, et creabatur triplum coni, aequalis Sphaerae. Idem ergo est triplum sphaerae et duplum cylindri: Ergo ut supra, Cylindri ad sphaeram proportio est sesquialtera.

THEOREMA XII

Cubi corpus ad corpus Sphaerae quam stringit, est duplum paulo minus, nimirum ut 21. ad 11. proximè.

Nam Cubus STVX, in figura sequenti, est ad Cylindrum suum KLN quem stringit, ut 14 ad 11 proximè, per III. praemissum, id est ut 42. ad 33. At Cylinder KLN est ad sphaeram PGOB, quam communiter cum cubo stringit, ut 3. ad 2. per XI. praemissum, id est ut 33. ad 22. Ergo cubus ad sphaeram est ut 42. ad 22. id est, ut 21. ad 11.



Schema IX

THEOREMA XIII

Corpus Coni, cujus altitudo est aequalis diametro Sphaerae, basis Sphaerae maximus circulus, est dimidium corporis sphaerae.

Cylinder enim KLN eadem basi et altitudine, est triplum Coni sui

NGY, vel ut 3. ad 1. Idem verò [1] Cylinder est ad Sphaeram suam, ut 3. c 3
ad 2, per XI. praemissum: Ergo Conus ad Sphaeram est ut 1. ad 2.

Summa praemissorum.

	Conus NGY Cylindri KLYN	Sphaera PGOB Cylindri KLYN	Cylinder KLYN	Cubus STVX Cylindrum stringens in KN, CM, LY, et DE. Sphaeram vero in G. O. B. P. Q. R.
Est ut	11	22	33	42
Vel ut	1	2	3	4 minus

Corollarium

Porrò indidem etiam patet, Conum priorem in Hemisphaerio (ut Theor. V. Conum BDC) esse ad Cylindrum qui sphaeram stringit, ut Octaedron in sphaera ad Cubum circa sphaeram, sextam scilicet partem Cylindri, quartam sphaerae, et sic dimidium Hemisphaerij sui, dimidiumque coni Theor. XIII. descripti, quippe cujus basin habet integram, altitudinis verò saltem dimidium.

Ille verò conus major EFG, in quo est Hemisphaerium (Theor. V.) corpus habet irrationale seu ineffabile. Similes enim Coni, ut EFG, et BDC sunt in tripla proportione altitudinum AG, et AD. Est autem proportio AG ad AD semidupla: ergo proportio conorum est triplex semidupla, hoc est, sesquidupla. At sesquiduplae termino uno pronunciato (quod scilicet conus BDC dimidium Hemisphaerij BCD dicitur) terminus alter fit ineffabilis, nisi de propinquo.

Episagma I

Eadem est etiam proportio corporis ab Ellipsi generati, quod Sphaeroides dicitur, ad conum aequealtum. Arch. Sphaeroid. prop. XXIX. XXX. †

Episagma II

Sicut sphaeroides est coni sui duplum: sic Conoides Parabolicum est coni sui sesquialterum. Vide in eodem libro prop. XXIII. XXIV. †

Conoides verò Hyperbolicum (qualis est ferè figura hulceris, montis, aut acervi frugum ordinati) sesquialteram proportionem magis ad aequalitatem adducit. Nam ad lineas sesquialteram proportionem continentes (quae habent duplum et triplum eius quae inter verticem et centrum figurae) addit utrinque axem.

1) NGI

THEOREMA XIV

Segmento sphaerae aequalis est conus super eadem basi, habens altitudinem tanto majorem, ut sit ejus excessus ad semidiametrum Globi, sicut est altitudo ipsa segmenti ad residuum diametri.[1]

C3 v Sit sphaera CLB, ejusque segmenta duo HKD et HKL, eorumque axes DI, IL, partes diametri per A centrum ductae, quae continuentur à D versus O. P. Quaeritur conus aequalis segmento minori HKD. cuius axis DI, residuumque diametri IL. Fac ergò ut IL ad LA, sic ID ad DO: erit IO altitudo, et HK basis coni, cujus corpus est aequale corpori segmenti HKD minoris. Sit deinde segmentum HKL, ejus axis LI, residuumque diametri ID. Fac iterum ut ID ad DA, sic IL ad LP: erit IP altitudo, et HK basis coni, qui aequalis est segmento HKL maiori.

† Demonstratio non est popularis, ideò petat illam, qui vult, ex secunda secundi libri Archimedis de sphaera et cylindro: non est enim mihi consilium, totum Archimedem hic transcribere. Veritas autem ejus circa Hemisphaerium sic patet; sit Hemisphaerium BCD, cujus axis AD, residuum diametri AL. Quod si facio ut residuum diametri AL ad semidiametrum LA, sic AD axem, ad DQ, facio igitur DQ aequalem ipsi DA, et altitudo AQ erit dupla ad altitudinem segmenti AD. Conum igitur qui habet basin BC, altitudinem diametri DL, pono esse aequalem Hemisphaerio. Id autem verum esse, priori Theoremate vidisti, ubi conus iste erat dimidium sphaerae.

Archimedes etiam comparat proportionem segmentorum solidorum, cum proportione segmentorum superficiei, demonstrans solidorum proportionem esse minorem dupla proportione superficierum, maiorem sesquialterâ. Constituitur autem proportio dupla in numeris, ducto utroque proportionis termino in seipsum; sesquialtera verò, ducta eiusdem termini radice in terminum ipsum. Vt si superficies essent inter se segmentorum, ut 4. ad 9. quadrati numeri; corpora sub illis superficiebus tecta, essent inter se propiora quam 16. et 81. ducto utroque quadrato in seipsum; remotiora quàm 8. à 27. (ductis quadratorum radicibus 2. et 3. in ipsos quadratos) vel 16. à 54. Itaque si minus segmentum ponderaret 16: Majus esset inter 54 et 81 pondo.

Corollarium

Proportio binorum globi segmentorum inter se, causa corpulentiae, in una qualibet sectione, est expressa in altitudinibus conorum, scilicet in IO, IP; sicut prius proportio superficierum segmentorum erat ex-

6) continuetur   20) BL *statt* BC

pressa in ID, IL. Sed discrimen magnum est, quod globi totius corpus in una qualibet sectione repraesentatur à peculiari linea OP: at superficies tota globi semper ab eadem diametro DL repraesentatur.

Episagma I

Multa hic sunt communia globo et sphaeroidi atque conoidibus. Nam ut sectio globi facta plano semper est circulus; sic sectio sphaeroidis non omnis, sed quae fit plano axi parallelo, est Ellipsis, sphaeroidi similis: Ellipses verò diversarum et dissimilium specierum, aut circuli fiunt, quoties vel sphaeroides utcumque, vel conoides per utrumque oppositorum laterum secatur. ARCH. Sphaer. XII. XIII. XIIII. XV.[1] †

Episagma II C4

Segmentorum sphaeroidis ratio eadem est, quae segmentorum globi, si recta fit sectio ad axem: sin obliqua, tunc usurpatur non dimidium axis, sed dimidium eius quae vertices portionum factarum (id est puncta earum super sectionem altissima) conjungit. Nam in Ellipsi quae gignit sphaeroidem, axis quidem est inter diametros, diametrorum verò multae sunt diversae longitudinis, quaelibet binos oppositos vertices conjungens.

THEOREMA XV. PROBLEMA

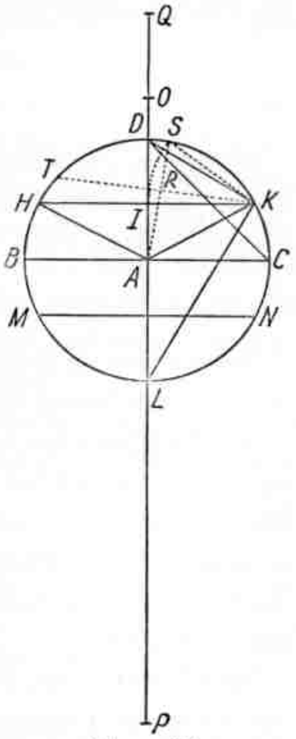
Quemadmodum superficiebus curvis segmentorum theorema VII. fecit aequales circulos planos, Theorema vero VIII, aequivalentes lineas rectas ostendit, comparabiles inter se diversarum sectionum: sic etiam *soliditati segmentorum assignare* possumus non tantum Conos aequales ut Th. XIV, sed etiam *plana aequivalentia, seu proportionis ejusdem, et comparabilia inter se diversarum sectionum:* quam demonstrationem, licet difficilioris captus, addo, quia à Geometris prioribus tentata non est.

Quaeruntur tria plana quae habeant inter se proportionem eam quam duo segmenta Globi inter se et ad totum.

Sint segmenta HKD, HLK. Ergo centro H vel K, termino segmenti in plano circuli HDK, distantia HI vel KI, scribatur arcus circuli IS, secans HDK in S, et ab S, per A, ducatur diameter, eamque ad rectos secet recta ex K, quae sit KT, sectio R. Hoc facto fiant rectangula tria, primum sub AD semidiametro et DL altitudine seu diametro globi totius, quod repraesentet soliditatem totius globi: secundum sub AD semidiametro et DI altitudine segmenti, quod repraesentabit soliditatem sectoris sphaerae HAKD: tertium ex AI (altitudine coni HKA) in RS, quod

2) peculari 13) sit *statt* fit 16) sphaeroides 17) quilibet 20) aequevalentes
28) HLD *statt* HLK 30) eumque

dico repraesentare in eadem proportione conum HIKA solidum: itaque sicut conus HIKA ablatus à sectore HAKD, relinquit segmentum HIKD; sic etiam tertium rectangulum ablatum à secundo, relinquet planum aequevalens in eadem proportione segmento sphaerae HIKD.



Schema VI

Quod si segmentum sit maius Hemisphaerio sc. HKL; pro DI, sumenda est IL in secundi rectanguli formatione, et ad id est addendum rectangulum sub AI, RS, constitueturque planum aequevalens segmento HIKL maiori.

Demonstratio. Primùm inter lineas DI, IL, et DL, est proportio segmentorum superficiei et totius, per VIII. Ergo etiam inter rectangula, | C4v ductis his lineis in eandem semidiametrum AD, erit eadem proportio: sed sectorum HAKD, HAKL, et globi totius est eadem inter se mutuò proportio, quae superficierum HDK, KLH, et totius. Ergo et inter facta rectangula est proportio sectorum HAKD, et HAKL. Deinde AD altitudo ducta in basin circularem, aequalem superficiei segmenti HDK, cuius semidiameter KD (per VII.) creat Cylindrum, triplum coni aequalis sectori HDKA; et AI altitudo ducta in basin HK circularem, cuius semidiameter KI, creat itidem triplum coni HIKA. At ut circulus radio KD, ad circulum radio KI vel KS; sic etiam quadratum KD ad quadratum KS: ut verò quadratum KD ad quadratum KS, sic DI recta ad SR, per VII. Ergo proportio basium circularium, per KD et KS descriptarum, est etiam proportio linearum DI, SR. Sed proportio conorum est composita ex proportione altitudinum et proportione basium; ut habet ARCHIMEDES, XI. Sphaeroideon. Ergo proportio HDKA sectoris, et HIKA coni in eo, est composita ex proportione AD ad AI, et DI ad SR. Est autem etiam rectangulorum proportio composita ex proportione laterum correspondentium. Quare proportio HDKA sectoris, et HIKA coni in eo, est eadem, quae rectangulorum sub AD, DI, et sub AI, SR. Ac proinde ipsa sunt ad mutuam eorum differentiam, ut sector HDKA et conus in eo HIKA, ad mutuam eorum differentiam, scilicet ad HIKD segmentum. Haec methodus concernit potissimùm conum HIKA, qui est communis differentia, qua segmenta differunt à suis sectoribus, quem † conum interdum operae precium est notum habere.

23) HDKC 27) RS *statt* KS 36) HIKA *statt* HIKD

Episagma comparativum

Sic segmenta Conoidis parabolici sunt inter se in proportione, quae est inter quadrata axium. Arch. Sphaeroid. XXVI. †

Corollarium I

Segmenta segmentorum Sphaerae easdem habent leges quod corpora attinet, quae supra fuerunt ejusdem generis segmentorum superficiei, in corollario ad VII.

Corollarium II

Zona sphaerae et sphaeroidis, seu corpus annulare, contentum parte superficiei sphaerae vel sphaeroidis mediâ, quae Zona dicitur, et superficie cylindrica intus, haec inquam sic investigatur. A sphaera vel sphaeroide auferuntur bina segmenta aequalia, et Cylinder Zonae aequealtus, basibus ijsdem cum segmentis ablatis; remanetque corpus Zonae. Quod si Zona non sit media globi vel sphaeroidis, sed inclinata ad polum seu verticem, auferuntur segmenta inaequalia, et truncus coni, ut remaneat talis Zona.

Intelligitur autem Zona, cui circumcirca sit aequabilis latitudo, et sub qua sit tectus Truncus conicus parallelarum basium, cujus dimensiones jam in proximo theoremate sequentur.[1]

THEOREMA XVI D

Conus secatur variè: aut enim per verticem et basin, et id vel plano, vel superficie alia coni minoris, habentis eundem verticem.

In utroque casu segmenta Coni aequealta, sunt ut eorum Bases inter se. †

Nam Conus est hîc veluti circulus corporatus; idem igitur à sectione patitur, quod circulus suae baseos.

Aut secatur Conus plano parallelo lateris, cuius circumductu Conus est creatus; aut neque parallelo, sed supra verticem extra figuram concursuro cum latere: utroque casu fiunt portiones indefinitae, de quarum soliditate nulladum disquisitio facta fuit à Geometris, usu quippe non exigente.

Aut secatur Conus plano per latus utrumque; fiuntque partes duae, Verticalis superior, et Truncus inferior. Verticalem, plano ad axem obliquo, Archimedes portionem Coni maluit appellare; agnoscens Conos non alios quam aequicrurios: Apollonius vero Conos faciens alios

34) aequicruros

aequicrurios, alios scalenos (cujus exemplum in Schemate IV.) talem portionem, quantumvis axe per obliquum secto, dummodò sectio sit circulus, pro Cono et ipsam agnoscit.

Quod attinet segmentum verticale, ejus sectio fit Ellipsis, quae habet centrum suum extra axem, versus latus Coni longius. In Schemate IX. Coni GYN axis est GAB, cujus segmentum verticale GNA, basin habet Ellipsin, quae repraesentatur per lineam NZ, cujus centrum seu medium, ubi latissima, est infra A, sectionem ejus cum axe, versus N.

Atque hoc est semper majus segmento recto illo, in quo planum ad basin NY parallelum per terminum axis, ab Ellipsi secti transit, sc. per A. Nam planum secans, in A fixum, et ad axem GA inclinatum, plus de corpore Coni acquirit parte AN, quàm amittit parte AZ.

An autem huic segmento GNA aequalis sit Conus ille, cujus basis basi NY parallela, per centrum Ellipsis infra A transit; id consideratione dignum est: mihi nondum liquet, nec jam vacat. Vide de hoc infra Th. sequenti aliqua.

Interim in genere de omni segmento verticali verum est Th. XI. † Sphaeroid. ARCHIMEDIS; secundum quod *Coni, segmentive Verticalis, ad Conum proportio, componitur ex proportionibus Basium inter se, et Altitudinum inter se.*

Ergo area Ellipsis NA, ad aream circuli NY est proportionis solidorum GNA, ad GNY pars una. Inest autem harum arearum proportio (per Epis. III. ad Th. II.) in rectangulo diametrorum Ellipsis et quadrato NY, tanquam notioribus. Pars altera proportionis corporum est inter GZ altitudinem segmenti GNA super plano NAZ, et GB altitudinem coni NGY super plano NY. Multiplicatis igitur in se mutuò terminis proportionum ZG in GB, et rectangulo diametrorum Ellipsis NA, in † quadratum NY; ut posterior factus ad priorem, sic est corpus coni NGY D v ad corpus | segmenti GNA. Potest etiam quodque seorsim computari; ut GNA, ducta altitudine GZ in planum Ellipsis NA, prodit triplum corporis GNA.

In specie, si planum secans parallelum fuerit basi NY: proportio corporum, segmenti et totius, erit triplicata altitudinum vel radiorum in basibus circularibus, vel sescuplicata planorum.

Nimirum quia hoc pacto segmentum verticale, et conus totus fiunt solida similia. Multiplicatis igitur cubice singulis seorsim vel altitudinibus vel radijs basium, erit ut numerus cubicus major ad minorem, sic Conus totus ad segmentum. Aut si sola plana baseon nota essent, quaeruntur illorum radices, multiplicanturque in illa.

1) aequicruros   24) Epis. II.

Quod Truncos attinet, facilis est ex dictis, illos inquirendi Methodus. Ex uno enim modorum praemissorum computatur et conus veluti totus, et segmentum verticale deficiens, ex data vel altitudine vel basis radio. Quod si nescitur ejus, ut deficientis, altitudo, si quidem eâ fuerit opus, quaeritur ex comparatione basium Trunci cum altitudine; ut enim differentia Radiorum in basibus, ad altitudinem (si Truncus sub planis perpendicularibus fuerit) sic radius basis minoris ad altitudinem segmenti deficientis; ablato igitur corpore segmenti deficientis à Cono toto, relinquitur corpus Trunci quaesitum.

In his verò Truncis, qui sub parallelis basibus continentur, rursum est brevior methodus ut prius. Nam quia bases talium Truncorum ignorari non possunt, earum diametri (quaelibet in seipsam) multiplicantur cubicè, et ablato cubo minori à majori; erit ut maximus ad differentiam, ita Conus totus ad Truncum.

Clavius alium docet modum, ingeniosiorem quidem, sed et diffi- †
ciliorem, ut mihi videtur. Non minus enim quàm suprà, computanda est area basis utriusque; et jam hoc insuper accedit, quod quaerenda est area medio loco proportionalis inter planum utriusque basis. Id autem fit vel multiplicatione et extractione numerorum prolixorum; vel duabus extractionibus radicum, earumque multiplicatione: tunc addenda omnia tria plana, et summa in trientem altitudinis Trunci multiplicanda. Atqui ex radijs circulorum, qui requiruntur ad investigationem arearum, multò faciliori negocio potest haberi, quicquid quaeritur.

Cùm autem Truncorum Conicorum, qui fiunt plano ad axem recto, multiplex sit usus, et praesenti materiae cumprimis necessarius ob doliorum figuram; subjungam hic pulcherrimum Theorema, et compendium exoptatissimum; etsi demonstrationem cognationis causâ differo deorsum in Supplementum Archimedeae Stereometriae, et Th. XXII. Dividitur autem Truncus in medium Cylindrum et circumjectam ei conicam veluti Tunicam, quae segmentum est Coni dissimile superiorum, sc. superficie Cylindricâ factum: Ergo *si tres Diametri, duae basis minoris, una majoris, extendantur in unam rectam: erit ut rectangulum sub tota et sub differentia basium, ad triplum quadrati basis majoris vel minoris, ita corpus Tunicae ad corpus Cylindri vel majoris vel minoris.*[1]

Ergo duplum minoris adde maiori, summam duc in differentiam D 2
maioris et minoris, pro Tunica: deinde minorem quadra, quadrati triplum sume pro Cylindro inscripto; summam et huius et illius pro toto Trunco.

Vt si sint basium diametri 3. 5. differentia 2. ad bis 3. adde 5. fiunt 11, quae duc in 2, fiunt 22 pro tunica. Et quadratum de 3. est 9, cujus

30) qui

triplum 27. est pro Cylindro: Ergo 49 pro Trunco, in quacunque proportione altitudinis. Sed haec per sequens Theorema, ejusque Corollarium fient adhuc compendiosiora.

THEOREMA XVII

Segmenta Cylindri recta, parallelis axi superficiebus rescissa, sunt inter se, ut segmenta basis.

Nam Cylinder est hic veluti circulus aut Ellipsis corporata; quare hic idem illi accidit, quod figuris hisce in basi, in sectione eadem. In Schemate VIII. planum EFQX est parallelum axi DH. Ergo ut portio circuli EFI vel XQC, ad portionem EFA vel XQB: sic portio Cylindri EFICX ad portionem EFABX. Vide Coroll. Th. II.

Segmenta vero, plano per axem transeunte, dummodo non secet alteram basium, sunt ut segmenta axis inter se.

Nam Cylinder rectus, sectus plano ad axem recto, est veluti linea corporata, et quidem cylindrico corpore praedita: quare accidit illi idem quod lineae. Alia verò segmenta per axem, aequalia sunt Cylindris eâdem axis longitudine. Nam quantum ex uno latere Cylindri deficit segmento, quo minus sit rectum; tantum ei accedit ab altera parte; quod in sectione coni non fit, ob inaequalem eius crassitiem. In Schemate VIII. plana PST rectum, LSV obliquum ad axem GB, secant illum communiter in R: ut igitur GR ad RB, sic non tantum portiones rectae KT ad TN, sed etiam obliquae LVK ad VNL. Quantum enim ipsi LVK deficit à partibus L, scilicet LRT, tantum ei superest ex partibus V, scilicet VRP, simile ipsi LRT.

Segmentum segmenti Cylindracei, quale cernitur in Schemate XIV. secuturo, literis GST, contentum scilicet tribus superficiebus, semicirculo GT, semiellipsi GS planis, et curva Cylindricâ VTS; sic, ut sectionis planorum linea perpendiculariter incidat in G punctum axis HF; hoc inquam segmentum habet se ad totum Cylindrum TY aequealtum, ut 7. ad 33. vel 14. ad 66. ferè, ad segmentum verò HGS residuum ad semicylindrum HGTS, (plano scilicet per axem HG ducto rescissum) ut 14. ad 19. Nam infra in supplemento Archimedeo demonstrabitur hoc de una specie Cylindri, quando scil. eius altitudo aequat circumferentiam basis, Theor. XIX. XX. XXI. At cùm non tantum totus glo-
† bus sit aequalis toti semicylindro, et totum strictum toti segmento
D 2 v Cylindri, ubi vertices ellipsis sectricis tangunt bases: sed etiam | partes

11) EFIXV *statt* EFICX 19) crassiitiem 32) Archimedaeo

globi et stricti aequales, secundum aliquotam circumferentiae partem quibus sunt proportionales, sint aequales partibus segmentorum semicylindri et Cylindri dictorum, secundum eandem quotam altitudinis, vi ejusdem explicationis corporum rotundorum in rectum; sequitur ut et segmenta ista segmenti, quorum basis est semicirculus, sint altitudinibus suis proportionalia, et sic inter se in omni altitudine retineant proportionem eandem ad Cylindri segmentum aequealtum, quae est totius vel primi segmenti ad totum aequealtum Cylindrum, sc. 7 ad 33. Idem enim locum habet etiam in segmentis segmenti, quorum basis est circulus, semper enim segmentum hac basi, sive altum sive humile, est Cylindri sui aequealti dimidium. Quibus verò bases non sunt circulus et semicirculus, sed alia circuli segmenta, illis bases itidem istae singulae singulas conciliant proportiones. Itaque etiam de his cylindraceorum segmentorum segmentis valet axioma, non minus quam de Conis et Pyramidibus quod quae insistant eidem segmento circuli, sint inter se ut altitudines: quae verò eidem lineae segmenti circularis, sint ut segmenta altitudinis respondentia.

Denique Cylindri per aliam superficiem cylindricam eodem axe secti limbus exterior, dividitur à superficie conica, cuius sunt bases, infera circulus amplior, supera angustior, in duo novae speciei segmenta circularia, quorum interius Th. priore Tunicam appellavimus, puta cylindri angustioris.

Horum igitur Limbi segmentorum proportio inter se est, quae duarum medietatum Arithmeticarum, quae constituuntur inter diametrum minorem et diametrum maiorem. †

Diviso enim numero, puta diametri majoris, in partes duas, in diametrum minorem et in excessum, factisque quadratis, tam à minore, quam à majore, majus quidem quadratum continebit partes quatuor, I. quadratum minoris, II. quadratum differentiae, et III. IV. rectangula duo sub minore et differentia. Triplicatis deinde quadratis, existent pro majoris triplo, tria minoris, tria differentiae, et sex rectangula. Et haec tria quadrata differentiae cum sex rectangulis sunt differentia tota quadratorum triplicatorum. Quare ut quadrata ad suos circulos, adque cylindros aequealtos, sic haec differentia ad limbum cylindricum totum. Atqui Th. antecedenti differentiam jussi sumus multiplicare in unam majorem et duas minores, id est, in seipsam et in tres minores, pro parte limbi interiore, quae Tunica fuit indigetata. Ablato igitur quadrato differentiae uno et tribus rectangulis, à quadratis tribus et sex rectangulis, restant quadrata differentiae duo et tria rectangula, pro reliquo limbi. Est autem trium rectangulorum et unius quadrati, ad tria rectangula et duo quadrata proportio eadem, quae trium minorum cum una differentia ad tres minores cum duabus differentijs, eademque quae unius minoris cum parte tertia differentiae ad unam minorem cum duabus tertijs differentiae. At si ad minorem addis primo partem unam, pòst partes duas differentiae, constituis duo media arithmetica inter minorem et majorem. Atque id est quod proposueramus.[1]

D3

Corollarium I et Praxis

† Hinc facile habetur proportio Trunci conici ad Cylindros, Trunco inscriptum et circumscriptum. Inter diametros constitue duo media arithmetica, et multiplica differentiam totam diametrorum in horum minus pro Tunica, quam indue Cylindro minori, hoc est adde quadrato ejus diametri, pro Trunco. Ecce exemplum.

Sint diametri 3. 5. Differentia 2. quae non communicat cum ternario. Ergo substitue triplos 9. 15. Differentia 6. Quia eadem manet proportio.

Ergo diameter minor	Duo media arithmetica		Diameter maior	Cylinder minor	81.
9.	11.	13.	15.	Tunica	66.
9.	Diff. 6.	6.	15.	Truncus	147.
81.	66.	78.	225.	Residuum Limbi	78.
Pro Cylindro inscripto	Pro Tunica	Pro residuo Limbi	Pro Cylindro circumscripto	Cyl. maior	225.

Aliud Exemplum.

Dia	—		metri
5.	7.	9.	11.
5.	6.		

Cyl. 25. Tun. 42.— Truncus 67

Aliud Exemplum

Dia	—		metri
19.	20.	21.	22.
19.	3.		

Cyl. 361. Tun. 60. — Truncus 421

Vel quod eodem recidit: Multiplica diametros inter se, multiplica etiam differentiam in sui partem tertiam, et adde factos; provenit Truncus in ea dimensione, ut cujuslibet diametri quadratum valet suum Cylindrum. En superiora tria Exempla

9	6	9	
15	2	9	
135	12	81	Cyl. minor.
12			
147 Truncus.			

5	6	5	
11	2	5	
55	12	25	Cyl. minor.
12			
67 Truncus.			

19	3	19	
22	1	19	
418	3	361	Cyl. minor.
3			
421 Truncus.			

Corollarium II

Segmenta limbi cylindri maioris circa minorem, superficie conicâ facta, stantia super eâdem basi, non minus quam cylindri ipsi, adeoque et Trunci toti sub ijsdem basibus circularibus parallelis, sunt in proportione suarum altitudinum.

Etsi verò superior basis non fuerit inferiori parallela, nec circulus, sed Ellipsis ad axem obliqua: nihilominus bina limbi segmenta, exterius et interius, sunt in proportione illarum altitudinum, quas habet Ellipseos centrum et diameter minor, eademque diameter cylindricae baseos rectae. Itaque non de nihilo est, quod Th. praecedenti, portionibus conicis, obliquo ad axem plano resectis, quaesivi methodum dimensionis à diametro Ellipsis breviore. Etsi superficies talem limbum inaequabilis altitudinis dispescens, non est Coni recti, cui sit idem axis cum Cylindris, sed coni scaleni.[1]

APOSTROPHE AD PATRONOS D3v

Cum libellus iste manuscriptus per menses sedecim apud librarium Augustanum delituisset, commendatus illi ab eximio illo Germaniae nostrae decore, meique dum viveret, amantissimo MARCO WELSERO; neque tamen typis excuderetur, ut erat mihi facta promissio: vix tandem, WELSERO jam rebus humanis exempto, libellum meum extorsi detentori, postliminioque recepi.

Ex eo tempore consilium cepi, libellum, quamvis in magna operarum penuria, excudendi domi: qua occasione potestas mihi facta fuit, non correctiorem tantum, sed et auctiorem, quam erat initio conscriptus, extrudendi. Nec diffiteor, temporis aliquantum subtractum studijs caeteris, impensumque huic speculationi; nec poenitet jacturae. Nam fieri nequaquam potest, ut immortalitatis fructum metat labor, qui sementem temporis fecit nullam.

Et censuisti Tu quidem, Ill^{ris} et G^{se} L. B. IÖRGERE; quae de figuris ab AR|CHIMEDE non tactis, ad rationes tamen doliorum propriissimè perti- D4
nentibus, affecta tantum audiebas, uti nequaquam omitterentur, quin potius operi subjungerentur, appendicis loco.

Ego verò et perfeci potissimam eorum partem; ut quod demonstrationes attinet, parum, quod usum, nihil ad perfectionem supersit: et tractatum in ipsum libellum hic inserui suo loco, cumque partibus caeteris ita connexui, ut non appendix cauda, sed caput aut cor speculationis totius, ut est quidem, videri possit: quod et Te, L. B. IÖRGERE, et multò maximè Te, Illustrissime Domine DE LIECHTENSTEIN (cujus in hac Philosophiae parte exercitationes assiduas, facultatemque comparatam egregiam judicandi, ex quo Te primùm in praefatione libri sum allocutus, multò nunc rectiùs et copiosiùs habeo cognitam et perspectam) ubi tempus ad isthaec cognoscenda vacaverit, ipsos censituros existimo. Valete et fruimini. Id. Iulijs Anno 1615.[1]

DE STEREOMETRIA FIGVRARVM CONOIDIBVS ET SPHAEROIDIBVS PROXIME SVCCEDENTIVM

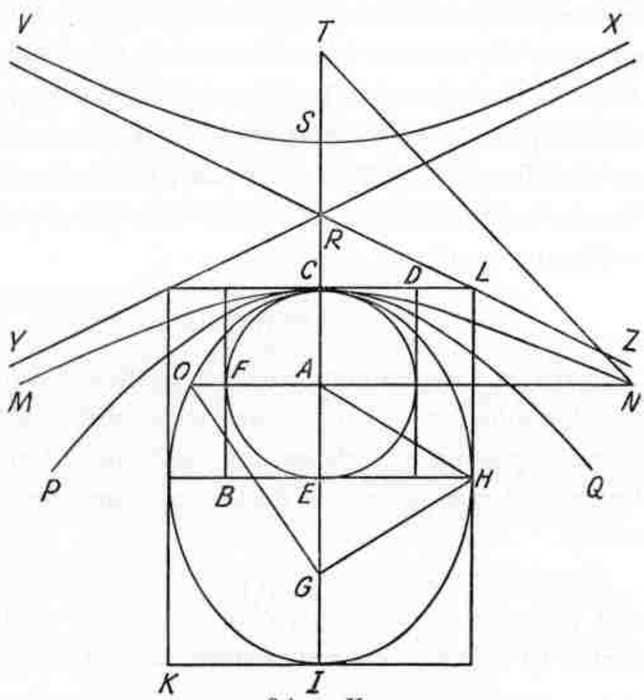
Huc usque ARCHIMEDES et Geometrae veteres progressi sunt, inquirentes Naturam et Dimensiones figurarum ordinatarum rectilinearum et curvilinearum, quaeque ab ijs solida proximo gradu gignuntur.

Caeterùm quia figura Dolij longius à Regularibus excurrit, operae precium me facturum putavi, si genesin illius et cognatarum, gradusque cognationis earum cum Regularibus, eâdem quasi Tabella comprehensas ob oculos exhiberem, cùm ut demonstrationes secuturae plus lucis haberent: tum verò etiam, ut industriam Geometrarum hujus aetatis excitarem, portisque spaciosissimi agri Geometrici pansis, quae adhuc in eo excolenda, quae indaganda restent, praeconio meo promulgarem.

De sectionibus coni, solidorum genitricibus

† Sectiones Conicae curvae superficiei, quae varia solida progignunt, hac vice consideranda, quatuor sunt curvilineae; quas hic in Schemate exhibeo inter se comparatas. Nam omnis hujusmodi sectio aut Circulus est CFE, aut Parabole PCQ, aut Hyperbole MCN, aut Ellipsis CHI.

Harum figurarum causa simplicitatis hic est ordo, ut primus sit circulus, sequatur Ellipsis, inde Parabole, ultimo loco sit Hyperbole. Inter has duae primae in seipsas redeunt, Circulus et Ellipsis: duae verò posteriores figurae, Pa-



Schema X

rabole et Hyperbole sic sunt comparatae, ut in infinitum, si continues, excurrant, semper quidem ad rectitudinem magis atque magis accedentes; nunquàm verò eam penitus assequentes; et id hoc discrimine, quòd brachia Paraboles CP, CQ, uni rectae CI, adeòque inter se ipsa etiam, magis atque magis fiant parallela, quamvis interim infinito intervallo ab invicem discedant: brachia verò Hyperboles CM, CN sequantur ductum duarum Rectarum RY, RZ, concurrentium in R, eoque versus Y. Z in infinitum ab invicem discedentium;[1] quae brachijs Hyperboles semper approximant magis magisque, nunquam tamen cum ijs concurrunt; à qua proprietate, Rectae RY, RZ dicuntur Asymptoti.

Rursum ex utraque biga est una, quae sola suam implet speciem, ex finitis quidem circulus, ex infinitis Parabole: Ellipsium verò illinc tot sunt formae, quot possunt esse formae rectangulorum parallelogrammorum LK: Hyperbolarum hinc formae tot, quot angulorum YRZ, à binis rectis RY, RZ formatorum. Sanè quia, ut circulus CE se habet ad circumscriptum quadratum uniforme DB, et ut Parabole PCQ, ad Axem seu rectam CI unicam, sic Ellipses CI, se habent ad Rectangulorum LK, Hyperbolae MCN ad concurrentium rectarum YR, ZR, species infinitas, quaelibet ad suam.

Et nota propter descriptionem figurarum, quod sicut in circulo omnia intervalla AC, AF, AE, inter se sunt aequalia, sic in Ellipsi bina semper intervalla AO, OG, non à centro E, sed à duobus Focis A, G, aestimata, binis quibuscunque AH, HG, vel AC, CG, vel AI, IG, sunt aequalia. In Parabola, cuius focus A, ducta quacunque KI in eodem plano, rectâ ad axem CI, rursum binae lineae AC, CI, binis quibuscunque alijs ut AO, OK aequales sunt. In Hyperbola, cuius focus unus A intus, alter T exterius, et circa eum figura similis VSX, intervalla bina cuiusque puncti, ut N, et focorum A, T, semper unam et eandem habent differentiam CS, lineam inter vertices C, et S, etc. Vide plura paulò infra de figurarum solidarum numero.

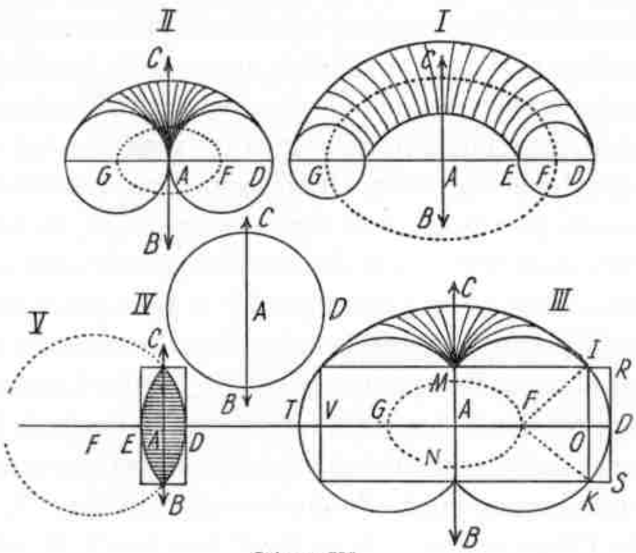
De modis Geneseos

Porro ex circumductu circulari quatuor harum planarum figurarum (de alijs enim formis hac vice non loquimur) creantur infinitae solidorum formae, quarum superficies non, ut Coni et Cylindri, altrinsecus rectilineae, sed quaquaversum curvilineae sunt, secundum magis tamen et minus.

Circumactûs autem species generaliter sunt quinque, sed quae minutius postea subdividuntur, cùm ad figuras magis compositas ventum fuerit. In adjecto Schemate expressae sunt hae species utcunque. Nam

5) fiunt   22) AC *statt* AO

I. Axis CB, circa quem figura est circumagenda, vel longius stat à centro F figurae ED circumducendae, quàm ut concurrat cum figura. Tunc figura DE directè circumacta in circulum FCG, cum latitudine E v sua erecta,[1] creat Annulum, in quo spacium est intermedium, cuius centrum A. II. Vel tangit axis iste geneseos, ut CB, figuram FD circumagendam tangat in A, et manente puncto circumferentiae A, totus circulus circa CB circumagatur: tunc figurae gignuntur, quas possis Annulos strictos appellare. III. Vel secat axis geneseos figuram circumagendam extra medium, ut si maius circuli segmentum MDN circa sectionem MN sit circumagendum, ita ut centrum F per G transeat, gignitur autem figura in duobus locis oppositis cava, scilicet circa M et N, quae Mali fructus arborei forma est. IV. Vel transit axis geneseos per ipsum centrum figurae, ut si semicirculus CDB circa manentem diametrum CAB sit circumagendus; et tunc gignitur Sphaera seu globus perfectus. V. Vel denique secat axis geneseos figuram circumagendam intra medium, ut si residuum seu minus segmentum CDB de circulo MDN sit circumagendum circa sectionem suam CAB: et tunc gignitur figura, in locis duobus oppositis acuta, quam à Citrij mali figura possis denominare.



Schema XI

De figurarum numero et differentiis

Quod si tres figurae reliquae, sectione Coni ortae, tam essent simplices, quàm circulus, de quo hactenus: figurae solidae his V. modis procreatae essent in universum Viginti, à qualibet earum, ut hactenus à circulo, quinque, pro quinque modis Creationis circularis. Sed propter mixtam reliquarum figurarum Naturam, Vicenarius iste solidorum numerus ad Nonaginta et duo extenditur.

Cùm enim figurae tres propriè dictae Conicae, non sint undique similes: fit ut quae respectu circuli unica est linea, pro axe geneseos

11) AB   12/13) circumagendam; Tangat   27) CDE   28) CAD   36) et duo *fehlt*

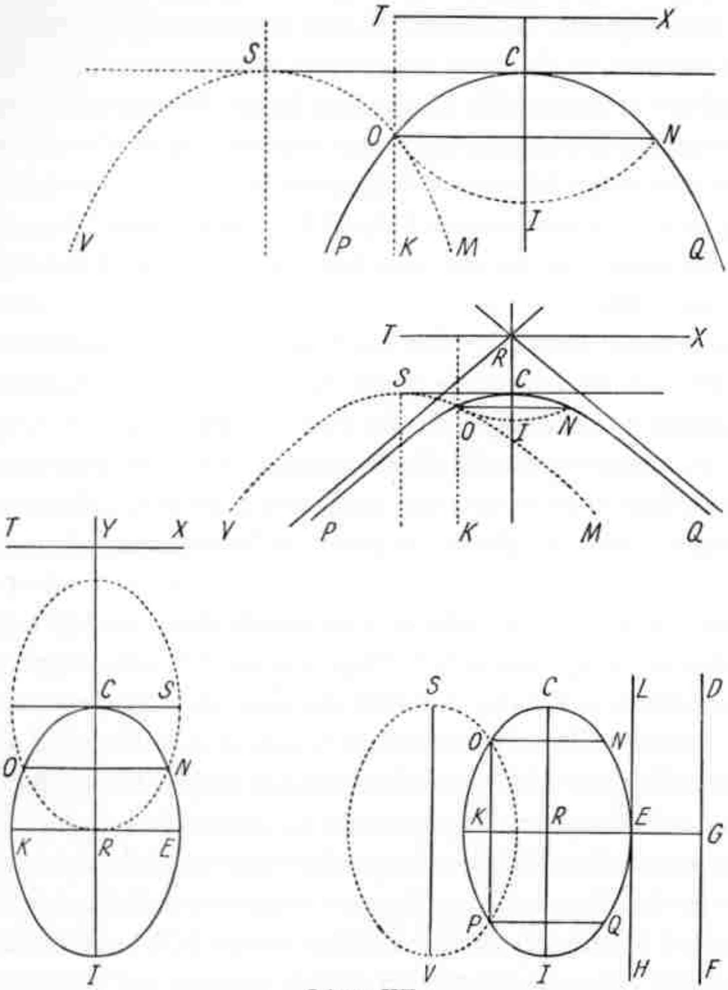
assumpta, respectu harum figurarum fiant diversae, punctum in Circulo unicum, diversa puncta sint in caeteris. In circulo Vertex uno et eodem modo dicitur, et omne circumferentiae punctum pro vertice sumi potest: In caeteris Vertex primarius est, non nisi extremitas alicuius certae lineae, scilicet eius quae axis dicitur, quae est in figuris duabus sequentibus CI, cuius vertices à C repraesentantur: contrà Vertices, latiore sensu, totidem sunt, quot lineae in figura pro axe geneseos, vel ei parallelis, eliguntur; quos lubet Vertices positionis appellare, quia lineâ tali ad perpendiculum erecta, punctum totius figurae altissimum, fit vertex eius. Vt sequenti Schemate XIII. electa diametro OS pro axe geneseos, A fit vertex positionis: contrà electa contingente EF in axem geneseos, Vertex vel nullus est, in Hyperbolis scilicet obtusangulis, et certa earum positione, vel certè longe alius, quàm A, puta circa O. In circulo Centrum idem est cum Foco, scilicet A in Schemate X. praemisso. In Parabola Focus unus A, centrum verò nullum est; nisi concipias, centrum eius infinito intervallo, focumque alterum, intervallo duplo maiori, in linea CI, à Vertice C, recessisse: In Ellipsi et Centrum est E, et foci duo A. G. omnia intra figuram: In Hyperbola itidem Centrum et duo foci; sed centrum extra figuram in R; focorum alter intra, in A, alter extra in T, qui est respectu VSX sectionis oppositae, intra illam. In circulo diametri omnes pro axe sunt, in caeteris saepe aliud axis, aliud diameter, ut aliud est species, aliud genus.[1]

Et in Parabola quidem (ut redeamus ad Schema XIII. sequens) E 2
diametri omnes aequidistant, ut CI, OS. in Hyperbola verò atque Ellipsi omnes per centrum figurae R traducuntur, quod est in Hyperbola extra, in Ellipsi intus in medio. In circulo aequales sunt omnes diametri; in Ellipsi differunt longitudine, ut CI, OS; in Parabola et Hyperbola non est earum finita longitudo. In circulo et Ellipsi omnis lineam tangens habet aequidistantem sibi diametrum; in Parabola et Hyperbola, quae tangenti cuicunque aequidistat, ut LK ipsi FE, diameter figurae esse non potest. Secundum horum igitur punctorum linearumque differentiam figurae planae circumactae, varias etiam, et re quidem semper, plerunque verò etiam ad oculum differentes species solidorum procreant: quas sigillatim recensere non pigebit, non tamen repetitis quinque speciebus ex circulari Coni sectione ortis, quae singulae familias singulas ducunt jam sequentium, quasdam interim communes habent clientelas.

Incipiamus ab ijs in quibus desijt ARCHIMEDES, et sit in Schemate adjecto, axis figurae CI; circa quem figura PCQ circumagatur, sic ut manente CI, punctum N per punctum O transeat, Q per P. Creantur

24) OS, HA. in 30) PK *statt* LK 34) repititis

igitur solida duo Conoidea, Parabolicum et Hyperbolicum, et Sphaeroides longum, seu figura Ovi: cuius vertices C, I; circulus amplissimus 1.2.3.



Schema XII

ERK; de quibus Archimedes libro de Conoidibus et Sphaeroidibus. Modus geneseos est è Numero IV, idem qui globi. Species sunt 3. numero linearum.

Sit jam axis geneseos non ipse axis figurae CI, sed ei parallelus. Erit igitur vel extra figuram, ut in DF, vel contingens eam, ut LH contingens in E: quae duo in sola Ellipsi locum habent. Nam in caeteris, omnis linea parallela axi in eodem plano, secat figuram continuatam. In Ellipsi igitur, manente DF, et totâ figura NOPQ in distantia centri RG circumlata, gignitur annuli species, quem arduum dixeris: similis est serto puel- 4.
larum rusticarum, quippe spacium habet in medio. Sic manente LH et puncto contactus E, tota itidem figura NOPQ circumlata, fit solidum ejusdem nominis, sed sine spacio in medio, hoc est annulus strictus. 5.

Vtrumque imaginare tibi in Schemate XI. ad Numeros I. II. sed pro
circulis sectionem intellige Ellipses erectas.[1]

Vel erit intra figuram axis circumductionis; sit OK, et consistat vel E 2 v
citra CI axem figurae, sic ut axis CI cum portione figurae majore OCQ
circa OK agatur, et manente O, vertex C per S transeat, et Q per V:
tunc Parabole et Hyperbole, magis ista, figuras faciunt QCOSV, montis
6. 7. Aetnae similes, propter cavitatem ejus in vertice, quam Graeci vocabulo
Craterum celebrant: Ellipsis verò figuram hoc pacto creat similem Mali
8. Cotonei, quam imaginaberis in Sche. XI. praeced. apud Numerum III:
sed pro consertis circulis sectionis intellige consertas Ellipses erectas,
ut in Schem. XII.

Consistat etiam dicta OK ultra axem figurae CI sibi parallelum, sic ut
PO minor pars figurae, quae axem non habet, circa manentem OK
circumagenda sit: tunc à Parabola atque Hyperbola species quaedam
9. 10. nascuntur Cornuum rectorum MOP, quorum alia sunt acuta alia obtusa,
ut in pecudibus quando primùm coniscant cornibus. Ellipsis verò dat
11. OQ figuram Olivae vel Pruni, similem illi Numero V. Schematis praemissi XI.

Jam omisso axe CI, succedat ejus perpendicularis in eodem plano, et
sit primùm extra figuram ut TX. Ergo circum TX actae figurae, solida
12. 13. creant annularia ordinata, Parabole quidem et Hyperbole extrorsum
infinita, brachijs CP, CQ extrorsum versis et hiantibus, in circulum
circumlatis. Ellipsis verò circa talem axis CR perpendicularem TX exteriorem, intervallo centri RY, manente Y, circumducta, creat annulum
14. supinum seu sessilem, similem fulmento presso bajulantium situlas, capitibus suppositis. Rursum hanc figuram imaginare in Schemate XI. praeced. Numero I: sed pro circulis sectionum sint Ellipses jacentes, verticibus invicem obversae. Contingat exinde figuram in C vertice perpendicularis ista axis, sitque CS; et figuris circa eam circumactis, tres gig-
15. 16. 17. nentur species Annulorum strictorum ordinatorum, duo infiniti extrorsum, ut prius, unus finitus ab Ellipsi CI, manente puncto C, estque supinus vel sessilis vel pressus, ut prius; imaginandus in Schemate XI. praeced. apud numerum II, si pro circulis sectionum essent Ellipses verticibus sese contingentes. Secet denique figuram ista perpendicularis axi, sitque ON: secabit figurae planitiem in partes duas; in Parabola et Hyperbola semper inaequales, cum altera pars PONQ infinita sit, ONC finita, ita ut lineae conicae fiant tria segmenta, duo infinita, unum finitum; in Ellipsi verò, licet utraque finita sit, altera tamen plerunque major est, NIO, altera minor, OCN. Igitur sex hisce figurarum segmentis circa
18. 19. ON circumactis, totidem existent novae species, duae circa medium

1) Vtranque 2) sectionum 15) MNP

utrinque (sc. in O et N) excavatae, exterius circumcirca infinitae, quippe
à partibus infinitis PONQ, circa ON circumactis, una quae est ab Ellip- 20.
seos segmento maiori, lenticularis, supra et infra umbilici forma. Pro-
venit tali forma genus quoddam Melonis sessilis minuti, qui totus editur:
proveniunt tali forma superius etiam boleti aliqui. Hanc in Schemate XI.
praecedenti, Numero III. apud figuram Mali imaginare, sed pro con-
sertis circulis sectionis intellige consertas Ellipses eodem axe, ut in
Schemate praesenti XII. Denique minoribus figurarum partibus ONC,
tres reliquae figurae solidae fiunt, aspectu similes inter se, reipsa diver-
sae; Ellipticam quidem OCNR à Pruno crasso, Parabolicam verò et 21. 22.
Hyperbolicam OCNI à Fusis distinctionis causâ non ineptè denomina- 23.
E 3 veris. Atque hae duae, praesertim | illa, quae est ab Hyperbola multùm
obtusangula, praecipuè sunt notabiles: Fiunt enim figurae verticosae,
cum ventre circulari, rotunditatis conspicuae, reliquo corpore versus
vertices utrinque magis ad Conorum rectitudinem accedente. In his erit
nobis quaerenda genuina figura dolij, praesectis verticibus O. N.

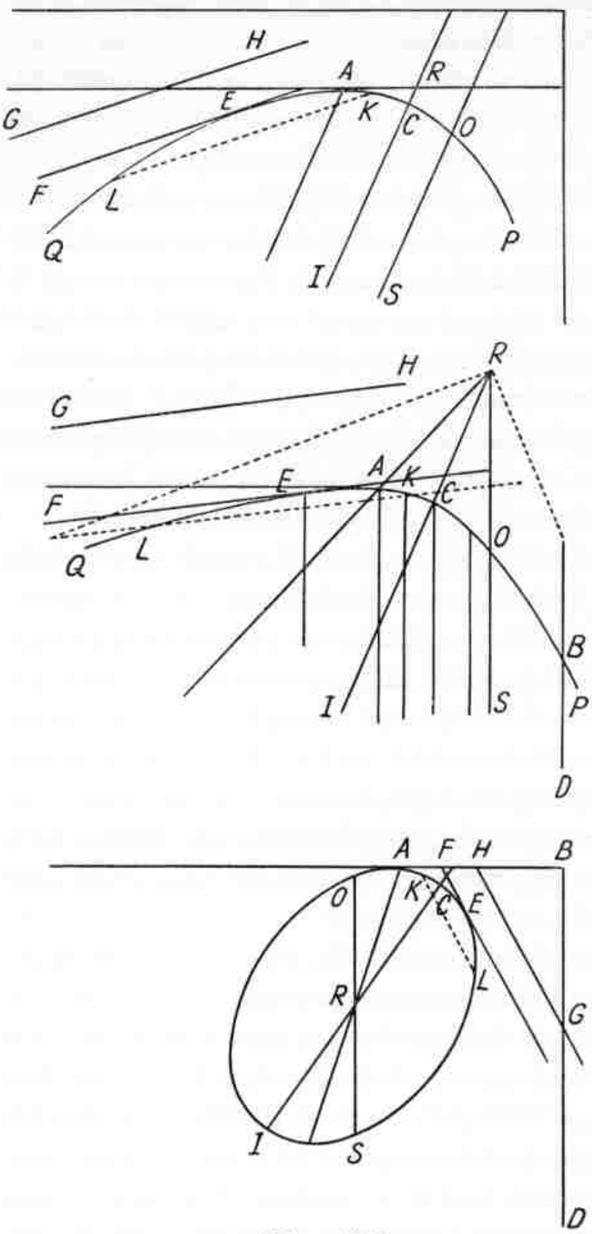
Dictum est, in hac forma sectionis, segmenta Ellipseos non semper
esse inaequalia. Cùm ergò haec axi perpendicularis per centrum figurae
R transit, quam axem vel diametrum rectam vel breviorem appellant,
tunc figurae dimidium, circa hanc ERK circumactum, sic ut manente E
vertex C per I traducatur, creat alteram speciem Sphaeroidis lati, cujus 24.
vertices in E, K, circulus amplissimus CRI, de quo itidem Archimedes.

Hucusque recensere et distinguere figuras solidas suffecisset ad Dolia
vinaria. At cum praedixerim, me in hac speculatione paulò longius ultra
libelli hujus metas prospicere; adjungam cognationis causa etiam reli-
quas solidorum species.

Succedat igitur in praesenti Schemate XIII. pro axe CI alia quae-
cunque diameter OS, et in ea statuatur axis geneseos. Hîc Ellipsis qui-
dem secatur per centrum R, in duas medietates similes, quarum utra-
libet circumducta circa OR manentem, creat formam Pyri, quae iure 25.
cognationis postulat adiungi Malis et Cotoneis et Prunis, ut constet his
bellariis sua integritas. At reliquae duae figurae secantur in partes dissi-
miles inter se, utrasque infinitas, sed in Hyperbola obtusangula casus
duo sunt: Nam aut secatur angulus obtusus ab electa diametro in duas
partes acutas, aut una sola pars est acuta, altera obtusa vel recta. Partes
igitur figurarum, excepto casu ultimo, circumductae creant figuras, quae 26. 27.
ad oculum nihil differunt à Crateribus et Ceratoidibus, Numeris 6. 7. 28. 29.
9. 10. insignitis; etsi reipsa diversae sunt, ob axis CI circumvolutionem,
hic conicam illic cylindricam, totiusque hic partis generantis obliqui-
tatem.

10) OCNL   19) rectam et breviorem

In obtusa verò sectione anguli obtusi Hyperboles, pars maior figurae circa talem diametrum circumducta addit unam speciem, veriùs non speciem. Nam et deorsum et extrorsum infinita est (nisi, ut in omnibus talibus, superficie conica vel cylindrica, quae oritur ductu rectae, finem ei statuas) caretque Vertice, sed eius loco est in medio in umbilicum depressa, circà ascendit sursum leniter, idque sine termino.



Schema XIII

Pro diametro OS sumatur ei parallela BD, quae in Ellipsi non habet separatam considerationem à parallela lineae contingentis, quippe omni diametro respondet sua parallela contingens figuram. Restat ut illam parallelam applicemus reliquis duabus figuris; sit igitur vel extra figuram vel[1] intra. Extra E 3 v esse in Parabola et Hyperbola non potest, cum omnes diametri parallelae figuram continuatam intrent. Ducatur igitur aliqua diametro OS parallela, intra figuras has duas. Rursum autem in Parabola linea quae est diametro parallela, ipsa quoque est diameter, nihil hinc gignitur novi. In Hyperbola sola casus iste locum et considerationem separatam habet: quam cum diameter OS in duas dissimiles secuerit partes, jam haec Parallela ipsi OS vel in minori eius parte ducitur, vel in maiori. Ducatur in minori et sit BD, secat igitur et ipsa figuram in partes

4) extorsum

magis adhuc dissimiles, quarum maior creat aliquid Craterum Numero 7. 31.
simile, aut infiniti Numero 30. minor simile Ceratoidum, Numero 10. 32. 33.
Ducatur jam in maiori parte OQ, aliqua ipsi OS diametro parallela; quod
in Hyperbolis acutangulis habet casus quinque. Nam aut inter diametrum
dividentem et verticem primarium ducitur, ut inter C.O. aut per ipsum
verticem primarium C, aut inter vertices duos, primarium C, et posi-
tionis A, aut ultra verticem positionis A. Sed in obtusangulis Hyperbolis
vertex positionis non datur. In uno quolibet casu secatur figura in duas
dissimiles partes. Species igitur nascuntur tredecim, quarum quatuor 34. 35. 36. 37.
sunt similes Craterum Numero 7. tres similes figurae cavae Numero 30. 38. 39. 40.
quatuor similes Ceratoidum Numero 10. quippe acutae: duae residuae 41. 42. 43. 44.
sunt rotundatae in vertice, similes Conoidi Hyperbolico, numero 2. una 45. 46.
quidem, quae est à parte maiore Hyperboles vel acutangulae, vel si
obtusangula, convenienti diametro divisae, ut dictum (debet enim illa
secare angulum Hyperboles obtusum in duas partes acutas) similis est
obtusangulo, quae verò à parte minore, similis acutangulo Conoidi.

Vltima linea sit Contingens sectionem, extra tamen verticem pri-
marium C, ut EF. circa quam si circumagantur figurae Parabole et
Hyperbole, duas gignunt species infinitas, similes ijs quae sunt numero 47. 48.
15. 16. minus tamen ordinatas, infinitas enim se extendit in transversum.
Ellipsis verò circa hanc EF circumducta gignit annulum strictum 49.
conniventem, cognatum illi Numero 17. quem imaginaberis in Sche-
mate XI. quinque modorum circumactus, apud numerum II. sed pro
circulis sectionum concipe Ellipses ad mutuum contactum aequaliter
inclinatas. Contingentibus accenseri posset Asymptotos, est enim quasi
contingens sectionem in puncto infinitùm distanti: et hic consideratur
nova species, quasi media inter annulares laxas et strictas. 50.

Sit pro contingenti, eius parallela, et sit primum extra figuram, et
circa hanc velut axem circumagantur figurae; quatuor fiunt solidorum
annulorum species, ex Parabola et Hyperbola infiniti in transversum,
quorum dorsum in Parabolico semper circulariter eminet, in Hyper- 51.
bolico quidam eminens dorsum habent, alii extrorsum fiunt altiores, 52. 53.
quam quo loco sunt angustissimi, non multum absimiles figurae
numero 13. Ex Ellipsi verò circa GH circumactâ fit annulus finitus 54.
connivens, ex altera parte amplior, in forma ferè Tiarae seu Globi
Turcici, si dempseris ei apicem. Hanc etiam imaginare apud primam
formam circumactus, ut tamen pro circulis sectionum concipias Ellipses
ad se mutuò aequaliter inclinatas.[1]

E 4 Parallela Contingenti si fuerit intra figuram, ut LK, secans eam in
partes duas, multae fiunt species, quia etiam casus multi. Vel enim LK
non secat axem intra figuram, vel eum secat. Et si secat, tum vel transit

verticem primarium C, vel eum intercipit, excludens verticem positionis
circa O, qui ad erectionem figurae secundum EF sequitur; si tamen
aliquis datur; nam in Hyperbola obtusangula, si LK vel FE cum
Asymptoto contraria RB fecerit obtusum angulum versus figuram,
Vertex nullus est: Vel per hunc positionis verticem transit: vel etiam
hunc in parte resecta includit. Casus recensui quinque et omnes in
omnibus tribus figuris locum habent; sectiones ergo quindecim, et bina
in singulis figuris segmenta. Sed in Hyperbola tria majora trium
primorum casuum duplicia, respectu effectus; aut enim deorsum ex-
currit infinitas ibi, ut in Parabola, aut sursum. Solidorum ergo species
hinc sunt triginta tres, quarum tredecim infinitae in transversum, et ex
55. 56. 57. his novem utrinque in umbilicum excavatae (quarum 6. cum eminenti
58. 59. 60. labro circulari, ut Crateres Numero 7, sed in hoc diversi, quod aequi-
61. 62. 63. parantur monti etiam subtus excavato; 3. verò sine eminenti labro,
quarum non est finita altitudo, similes figurae Numero 19.) duae
64. 65. acuminatae, Ceratoides, ut Numero 10. et duae bene rotundato vertice,
66. 67. Conoides, ut Numero 2; quando scilicet linea, circa quam est circum-
agenda figura, per verticem transit positionis, ubi is datur. Harum
tredecim quinque sunt Parabolicae, octo Hyperbolicae, reliquae viginti
68. 69. 70. sunt finitae, et altera parte crassiores, reliqua tenuiores. Ex ijs enim
71. 72. 73. quindecim (quinae ex figuris singulis) species sunt in acumen desinentes,
74. 75. 76. novem quidem utrinque, ternae ex figuris singulis, quos Nucleos
77. 78. 79. appellemus: tres verò, singulae ex figuris singulis, à parte crassiori benè
rotundatae, affines ideò Sphaeroidi lato; quas Fragis aut Nuci Pineae
80. 81. 82. comparare possumus: tres denique, singulae rursum ex figuris singulis,
à parte crassiori cavae, à tenuiori acutae, in modum folliculi Vesicariae,
quam Germani Cerasa Judaica dictitant, occultè signantes glandem penis
83. 84. 85. cum praeputio. Quinque verò ultimae sunt Pyrorum species, à parte
86. 87. majori Ellipseos, quinque dictis casibus sectionis hujus, generatae, cavae
omnes, tres utraque parte, duae alterâ solum, parte verò reliqua tenui
una rotundata, et Sphaeroidi similis; una acuta, ferè concidens cum
Vesicaria, ex Ellipseos parte minori nata. Summa octuaginta septem,
quibus additae figurae quinque ex circulo, veluti capita familiarum,
efficiunt formas nonaginta et duas. †

Tot igitur sunt genera figurarum Solidarum à sectionibus conicis in circulum actis resultantium; ut jam segmenta singularum, aut composita à segmentis, seorsim non numerentur. Verbi causa, patina stannea constat plerunque tribus superficiebus, in fundo segmento Sphaerae, circùm cratere Parabolico, limbus verò est ex superficie coni valde obtusi, aut etiam Zona Globi obliqua. Etsi verò complurium

8) figurae

dimensiones artificiosae in idem recidunt; non sunt tamen ignoranda Geometrae discrimina generationis tam multiplicia, ne incautus, circa nonnullarum specialium generalem considerationem, pertrahatur in insidias inexplicabiles. Circa has igitur singulas exerceant se Geometrae, exemplo Archimedis; qui ex hisce quatuor solas, et quintam, Globum E 4 v ipsum, considera|vit: non quòd utilissimae aut communissimae essent, quid enim hic habet Conoides parabolicum prae Annulo, Malo, Pyro, Pruno, Nucleo? sed quod simplicissimae et proximae globo, ingenio se praeberent. Nos in praesens illas tantum contemplabimur, per quas accessus patet ad Fusa Hyperbolica, quorum Trunci sunt nostratia dolia: subijciam igitur de ijs theoremata sequentia.

THEOREMA XVIII

† *Omnis Annulus sectionis circularis vel ellipticae, est aequalis Cylindro, cuius altitudo aequat longitudinem circumferentiae, quam centrum figurae circumductae descripsit, basis vero eadem est cum sectione Annuli.*

Intelligo sectionem, quae fit plano traducto per centrum spacij annularis, ad superficiem annularem recto. Huius Theorematis demonstratio patet partim ex Th. XVI, et ijsdem elementis institui potest, quibus Archimedes Stereometriae principia tradidit.

Annulo enim (in Schemate XI.) GCD, sed integro, ex centro spacij A, secto in orbiculos infinitos ED, eosque minimos, quilibet eorum tantò erit tenuior versus centrum A, quantò pars eius, ut E, fuerit propior centro A, quàm est F, et recta per F ipsi ED perpendicularis in plano secante; tantò etiam crassior versus exteriora D: extremis verò dictis, scilicet D, E, simul sumptis, duplum sumitur eius crassitiei, quae est in orbiculorum medio.

Haec ratio locum non haberet, si orbiculorum ED partes cis et ultra circumferentiam FG, lineasque per F, G, perpendiculares, non aequales aequaliterque sitae essent.

Corollarium

Haec ratio dimensionis valet tam in circulari forma annuli, quam in elliptica ardua, sessili, connivente, tam in laxis annulis, quàm in strictis: quin imò in omni annulo, quaecunque eius, pro circulo ED, existat figura ex sectione eius rectâ: dummodò in plano per AD ad annulum recto, sectionis partes cis et ultra F, fuerint aequales aequaliterque sitae

8) globo, et ingenio   21) eoque   25) D, S,   27) E, D,   30) Corollarium I.   33) omnibus annulis

hinc et inde: Quod explorabimus in figura sectionis quadrata. Sit annulus corpore quadrato, et intelligatur sub ED quadratum. Hic annulus habet rationem dimensionis etiam aliam. Nam est pars exterior Cylindri, cuius basis est circulus semidiametro AD, altitudo DE: huic Cylindro ex Th. XVI. adimenda est medulla, seu Cylinder, cuius basis est circulus semidiametro AE, altitudo ED. Quare quod fit ducta ED in circulum AD, minus circulo AE, aequat corpus annuli plano quadrato creati. Et si duceretur ED in quadratum AD, minus quadrato AE, proportio corporis facti, esset ad corpus quartae partis annuli, ut est quadratum ad circulum, scilicet 14. ad 11. Sit AE 2. Ergo AD 4. cuius quadratum 16. sed quadratum AE est 4. Ergo differentia quadratorum est 12. quod duc in altitudinem 2. existit corpus | 24. cuius quadruplum 96. ut verò 14. F
ad 11. sic 96. ad 75. cum tribus septimis, Annuli quadrati corpus. Haec secundum rationem Th. XVI. At secundum modum praesentem, cùm sit AF 3. FG 6. ut verò 7. ad 22. sic 6. ad 19. minus una septima: erit ergo haec longitudo circumferentiae FG, pro altitudine Cylindri: Et cum ED sit 2, et quadratum eius 4, pro basi Cylindri, duc igitur 4. in 19 minus una septima, prodeunt 76 minus quatuor septimis. Ecce verum etiam sic theorema.

THEOREMA XIX ET ANALOGIA

Annulus strictus est aequalis Cylindro, qui habet basin circulum sectionis Annuli, altitudinem aequalem eius circuli longitudini.

Valet enim modus iste in omni omninò proportione ipsius AE ad AF, valetque adhuc in Annulo stricto, ubi circuli EC circumacti centrum F, describit circulum FG, aequalem ipsi DA circumacto. Nam secatur tale strictum ex A, in orbiculos, qui in A habent crassitiem nullam, in D duplam ipsius crassitiei in F, sicut circulus per D. duplus est ad circulum per F.

Corollarium

Corpus Cylindraceum, quod fit (in Schemate XI.) circumacto quadrilatero mixtilineo MIKN, vi ejusdem demonstrationis aequale est columnae, quae hoc quadrilaterum habet pro basi, et longitudinem circuli per FG pro altitudine. Limbus verò exterior IKD, cylindraceum exterius ambiens, ut circulus ligneus dolium, planè nihil attinet ad hoc theorema, sed alijs principijs est indagandus.

10) AE 1.

Analogia

Rursus autem valet iste modus per omnia corpora seu segmenta Mali (ut et Cotonei) cylindracea, magis magisque tenuia, donec tandem IK et MN coincidant, quod fit in genesi globi, numero IV. ubi pro duabus MN et IK, est unica BC, quare in illo corpore primùm cessat in solidum, huius theorematis demonstratio et usus.

Corollarium

Globus est ad annulum strictum, eodem circulo creatum, ut 7. ad 33. Nam tertia pars semidiametri, ducta in quadruplum circuli maximi, vel duae tertiae diametri in aream circuli maximi, creant cylindrum aequalem cubo. At Cylinder aequalis stricto, habet basin quidem eandem; altitudinem verò circumferentiam. Ergo ut circumferentia ad bessem diametri, 33. ad 7. ita strictum ad Globum.[1]

F v

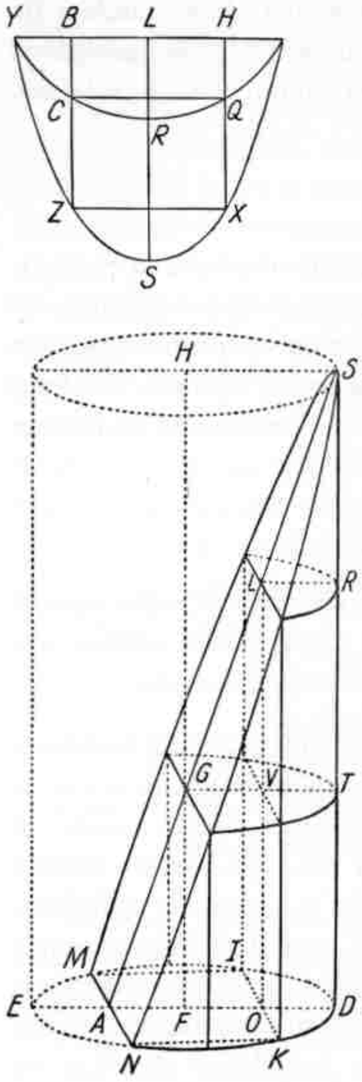
THEOREMA XX

† *Zona Mali componitur ex Zona globi, et segmento recto cylindri, cuius segmenti basis est segmentum, quod deficit in figura, quae gignit Malum, altitudo vero aequalis circulo, quem centrum segmenti maioris describit.*

Demonstratio. Explicetur corpus Mali ijsdem legibus in Cylindricum segmentum, quibus Archimedes Theor. II. explicavit circuli aream in triangulum rectangulum; et sit AD semidiameter circuli maximi in corpore Mali, ex cuius puncto D, erigatur DS, ejus circuli maximi longitudo in rectam extensa, quae concipiatur in superficie cylindrica. Nam linea MN est veluti communis acies, ad quam terminantur omnia segmenta solida circularia. Extensâ verò maximi circuli circumferentia in rectam DS, segmenta illa solida circularia simul extenduntur, et fiunt Elliptica MSN, praeterquàm primum MDN. Sed clarius elucescet vis huius transformationis in sequentibus. Secetur area MDN lineis parallelis ipsi MN in aliquot segmenta aequelata minima, quasi linearia, et connectantur A. S puncta, et in lineam AS, ex AD diametri punctis, per sectiones areae factis, ducantur perpendiculares FG, OL. sit autem F centrum, et quae ex F perpendicularis, secet AS in G, et per G ducatur ipsi FD parallela GT. Sit denique O punctum medium sectionis IK, et ex illo perpendicularis OL, secans AS in L, et per L ducatur ipsi OD parallela LR. Cùm igitur figura circa MN circumagitur, nihil ferè creat areola MN, quia minimùm movetur; at eius parallela per F, jam movetur in circulum, longitudine FG, linea per O, in circulum longitudine OL, et sic

5) MN est IK   8) circulum *statt* annulum   22) rectum   25) rectum

omnes: et partes corporis cylindracei, per FG, OL signatae, sunt aequales cylindraceis illis veluti tunicis in Malo, quas gignunt lineae in circumactu figurae MDN circa MN: per XVI. Theor. Tota igitur figura, scilicet Cylindri prisma MNDS, constans ex omnium tunicarum corporibus in rectum extensis, aequalis est toti corpori Mali, ex tunicis constanti.



Schema XIV

Amplius, cylindraceum corpus super basi IMNK usque in L, cylindro secto per planitiem, in qua sunt OL et KI lineae, erit aequale cylindraceo Mali, cui dempta est zona exterior. Et igitur particula cylindri, resecta per hoc planum, scilicet LSDO, erit aequalis Zonae Mali.[1]

Cum autem GT sit aequalis ipsi FD, et F 2
sit semidiameter illius globi, cuius maximus circulus est MIKN, et TS sit longitudo illius circuli maximi (quia ut AD ad DS, sic GT ad TS) Prisma cylindri supra GT usque in S, erit aequale Globo: Et pars GVL similiter erit aequalis cylindraceo corpori globi FD, per circumactum lineae IK ad FO rectae descripto. Et igitur particula cylindri LSTV reliqua, erit aequalis zonae globi huius, cuius sectio est segmentum KDI.

Sed ODSL componitur ex VTSL et ex ODTV, segmento cylindraceo, cuius basis IKD segmentum, et FG altitudo, aequalis circulo, quem F centrum segmenti maioris MIKN describit, si figura circa MN circumagatur. Ergo etiam horum aequalia sic sunt; scilicet, ut zona Mali componatur ex Zona Globi ab eodem segmento descripta, et ex dicto segmento cylindraceo.

Corollarium et Praxis stereometrica

Malum mensuri, sic agemus. Datam esse oportet longitudinem MN deficientis segmenti apud A, in proportione ad diametrum circuli seu semidiametrum FD. ex qua datur sector MFN ac IFK, per Coroll. ad

2) Globo *statt* Malo 23) descripti 38) ad *statt* ac

Th. II. Nam si dimidia MN, hoc est IO, explicetur numero, qualium FD est 100000, MN erit sinus rectus arcus DI; quo dato, datur et OF sinus complementi, et OD altitudo segmenti deficientis, seu sagitta aut sinus versus in tabula sinuum. Multiplicato igitur FO in IO, prodit area trianguli IFK, qua ablata à sectore IFK, relinquitur segmentum IKD, quod duc in circumferentiam semidiametri AF, per Th. praesens, et creabis segmentum cylindri, super basi segmento circuli, et altitudine FG; quae est pars una Mali, pars scilicet Zonae Mali: aufer autem duplum segmenti circuli ab area circuli, restabit segmentum circuli inter IK et MN; quod duc in eandem circumferentiam circuli per AF descripti: et creabis cylindraceum Mali; quae est pars altera.

Et quia scitur IK, scitur igitur et IM. Quaero ergò segmentum globi, cuius baseos diameter IM, per Th. XIV; eandem verò basin duc in altitudinem MN, creabisque cylindrum sub hoc globi segmento, per Th. III. cui adde duo segmenta globi inventa, conflabisque cylindraceum globi, inter IK, MN; id aufer à corpore globi noto, per Th. XIII, restabitque zona globi, cuius sectio IKD; quae est pars tertia Mali, pars scilicet altera zonae Mali; tribus vero partibus compositis, totum repraesentatur corpus Mali.

Corollarium II

Sic zona Cotonei et zona Cucurbitae sessilis, componuntur ex zonis, illa Sphaeroidis longi, haec sphaeroidis lati, et ex cylindri pressi seu Elliptici segmentis, illa ex planiori, haec ex dorsuali: quorum segmentorum bases sunt Ellipseos segmenta, deficientia in figuris, quae cotoneum et sessilem cucurbitam creaverant: altitudines verò aequales circumferentijs in longum extensis, quas centra figurarum in circumactu describunt.[1]

F 2 v

THEOREMA XXI

Corpus Citrij est differentia inter Zonam Globi et dictum segmentum Cylindri.

Demonstratio. Nam eodem modo, ut prius, cum figura (superius in Schemate XI, Numero V. CDB circa CAB) hic verò in Schemate XIV. IDK circa IOK circumagitur: segmentum areolae in ipsam IOK terminans, ferè nihil creat, quia penè nihil movetur: at partes remotiores, iam moventur per longitudinem circumferentiarum suarum, donec ultima D, vel ei respondens R moveatur in longitudinem RS, quanta est circumferentia circuli amplissimi per corpus Citrij: ex quibus elementis

10) AB *statt* AF 12) globi KIM, 32) X *statt* XI

conficitur, ut corpus Citrij (CDBE, in Schemate XI.) sit hic in Schemate XIV. aequale segmento cylindri LRS. At cùm AO dupla sit ipsius FO, id est GV, erit et OL dupla ipsius GF. Corpus igitur ODRL rectum, duplum ipsius VTRL; pars igitur ODTV, aequalis parti VTRL. Sed RLS est differentia inter LSTV et LRTV, quorum illud aequale Zonae Globi, hoc aequale segmento Cylindri ODTV. Patet igitur propositum.

Corollarium et Praxis

Oportet esse datam longitudinem axis Citrij, et diametri circuli maximi per corpus medium. Multiplicato igitur axe in seipsum, et facto diviso per diametrum huius circuli maximi in corpore Citrij, prodit aliquid adijciendum diametro Citrij: ut hoc aggregatum est ad diametrum circuli 200000, sic axis ad sinum segmenti quod creat citrium: Sic et diameter Citrij ad sinum versum. Ex eo similis, sed tamen brevior, est calculus una operatione, quàm prius. Non indigemus enim cylindraceo Mali: sed invento primum segmento VTDO, deinde Zonâ Globi LSTV, aufertur illud ab hac, et restat LSR corpus Citrij.

Corollarium II

Sic corpus Olivae vel Pruni Elliptici, est differentia inter Zonam † Sphaeroidis illic longi, hic lati, et inter dictum segmentum Cylindri Elliptici.

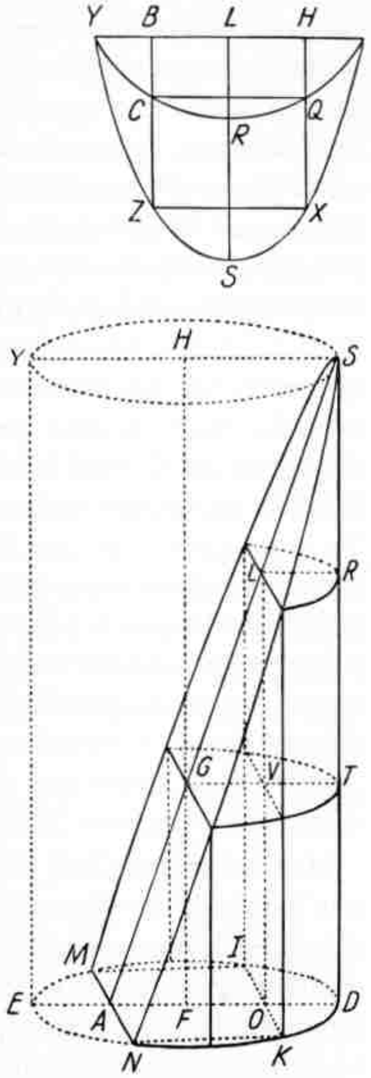
THEOREMA XXII

Zona Citrij truncati utrinque aequalibus circulis, componitur ex corpore minoris † Citrij, quod creatur ab eodem circuli segmento, quo et Zona proposita creata est, et ex segmento Cylindri, cuius basis est idem minus segmentum circuli, altitudo aequalis circumferentiae circuli truncantis.[1]

Repetatur enim Schema XIV. Et sit in eo segmentum LSR Cylin- F 3 draceum, aequale Citrio maiori. Explicetur autem hoc segmentum seorsim, ut basis eius in conspectum veniat, est autem basis ista, segmentum plani Circularis, quod creavit Citrium maius, seu truncandum. Intelligatur segmentum hoc circuli sub recta YBLH, et sub arcu YCRQ. Sit autem Citrium hoc utrinque truncatum (quale, schemate sequenti XVIII. cernitur literis EAHFSQCG) sic ut intelligamus creatum esse non integro segmento circuli, sed parte eius interiori BCQH, arcu CRQ circa BH axem circumacto. Repraesentabunt igitur rectae BC, HQ, semidiametros circulorum Truncantium: et Basis ista secabitur in partes quatuor.

3) GZ *statt* GF 5) LSTR *statt* LSTV 6) VDTV 15) VTKO *statt* VTDO 26) ISR

1. BCY, ad latus unum, triangularis mixtilinea. 2. Altera ultra HQ ad latus alterum, priori similis. 3. Parallelogrammum rectangulum BHQC, in medio. 4. Segmentum circuli minus, à tergo, rectâ CQ et arcu CRQ contentum.



Schema XIV

Cum autem ponatur solidum aequale Citrio maiori toti, erit RS altitudo solidi, aequalis circumferentiae circuli per medium huius Citrij corpus. Et quia planum YSH idem est, in quod incidunt hypotenusae rectorum angulorum BCZ et LRS: quare ut LR ad RS, sic BC ad CZ. Sed LR est ad RS, ut radius circuli ad circumferentiam suam: ergo et BC ad CZ sic est. Itaque cum BC sit semidiameter truncantis; erit CZ circumferentia truncantis.

Quatuor ergo dictis baseos partibus, totidem solidae superstant;

1. Super BCY, stat BYCZ Pyramidalis, mixtis et superficiebus et lineis contenta.

2. Similis ei ultra HQX. Et hae duae sunt aequales duobus Verticibus solidis, de Citrio resectis. (In Schemate XVIII. sequenti, vertices hi spectandi sunt literis GEI et FNH.)

3. Super BHQC stat Prisma seu Pentahedron BCZXHQ, quippe quod continetur tribus quadrilateris BCQH, CQXZ, XZBH, et duobus triangulis CZB, QXH; eius altitudo est CZ, inter QC, XZ parallelos. Hoc solidum est aequale Cylindro medio, in corpore truncati Citrij, bases habenti circulos truncantes. (Hic Cylinder in Schemate XVIII. sequenti adumbratur literis EHFG, totusque latet intra zonam FCG, HAE.)

4. Denique super segmento parvulo CQR, stat solidum SRQCZSX, simile illi, in quod zona Mali explicabatur. Cum autem tota figura solida HYSR, aequet totum Citrij corpus, et tres recensitae partes, totidem partes Citrij aequent: residua etiam ista Cylindracei segmenti, residuam Citrij partem aequent, necesse est. Est autem zona ambiens Cylindrum jam modo dictum, in corpore Citrij truncati.

39) ductum

Atqui ut similis est ista pars solida priori, quae Zonam aequabat Mali; sic etiam duas, ut illa partes habet, manifestis signis ab invicem discretas: una est segmentum cylindri rectum, contentum superficiebus quatuor, | plano parallelogrammo CQXZ, superficie cylindrica XZCRQ, F 3 v et duobus segmentis parvis circuli; quorum unum apparet, literis QCR, alterum ad XZ non apparet. Et huius segmenti altitudo CZ, ut jam est demonstratum, aequat circumferentiam circuli Truncantis. Altera huius zonae pars est Prisma ZXS, super eodem segmento parvo stans ad ZX. Cùm autem LR dixerimus sic se habere ad RS, ut semidiameter est ad circulum; et sit etiam BC sic ad CZ; erit etiam sic differentia LR et BC, ad differentiam RS et CZ: quae est altitudo huius secundae partis de Zona supra ZX. Sed differentia LR et BC est latitudo, vel sinus versus segmenti CQR (in Schemate XVIII. AP, quae est semidiameter Citrij minoris, arcu HAE circa axem HE descripti). Ergo etiam differentia RS et CZ, hoc est, altitudo huius Prismatis Cylindracei, est aequalis circumferentiae circuli, per medium corpus Citrij minoris. Per ea igitur, quae Th. antecedenti sunt dicta Prisma, hoc Cylindraceum ZXS, est aequale Citrio minori, segmento parvo CQR descripti (quod est in Schem. XVIII. seq. HAE). Et ecce in zona Citrij truncati duas partes, quales in Theoremate descripsimus. Vt ita constet corpus Citrij truncati ex tribus omninò Elementis, ex corpore Citrij minoris, ex Cylindro, et ex segmento cylindri recto.

Corollarium et Praxis

Mensuri corpus Citrij utrinque truncati, sic agemus. Datam oportet esse longitudinem diametrorum tam circuli maximi in corpore medio, quam circulorum truncantium: datum sit etiam intervallum inter circulos truncantes, omnia in eadem mensura. Tunc aufer diametrum truncantium à diametro maximi; quod remanet, dividat quadratum intervalli inter truncantes; quotienti adde divisorem. Vt ergo compositum hoc ad divisorem, sic 200000, mensura diametri usitata in Canone sinuum, ad sinum versum segmenti, quod creat, I. Citrium minus, II. Zonam Citrij maioris, III. Zonam Globi, IV. Zonam Mali, quod creatur † eiusdem cum Citrio minori circuli segmento maiori: sic etiam idem numerus 200000 est ad diametros intervallumque Truncantium in eadem mensura.

Iam igitur per Corollarium ad XXI, quaere corpus Citrij parvi, per Zonam Mali et per Zonam Sphaerae; hoc corpus est pars una Citrij Truncati. Deinde per numerum diametri truncantis, iam inventum, quaere longitudinem eius circumferentiae in eadem mensura, eamque

15) CL

multiplica in segmentum circuli inventum; prodibit Citrij truncati pars altera, et iunctae hae duae partes, constituent eius Zonam. Tertiò multiplica planum circuli truncantis in numerum intervalli truncantium, iam inventum, prodibit pars tertia Citrij truncati. Omnibus in unam summam coniectis, componetur totum corpus Citrij truncati.

Corollarium II

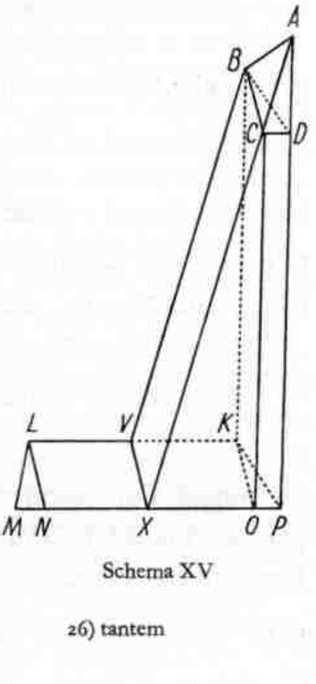
Zona Olivae aut Pruni Elliptici truncati componitur similiter ex corpore Olivae aut Pruni minoris, quod eodem Ellipseos segmento F 4 creatur; | et ex segmento Cylindri pressi, quod eidem Ellipseos segmento superstat, altitudinem habens aequalem circumferentiae circuli truncantis Olivam aut Prunum.

Episagma

Huc distuli demonstrationem Theorematis XVII. de Zona seu Tunica Trunci conici circa Cylindrum: propterea quod cognata est demonstrationi Theorematis praesentis.

Sit KLMP Trunci Conici recti sectio per axem VX, diameter circularis basis PM, diameter circuli Truncantis KL, cui perpendiculares sint KO, LN, ut sint aequales KL et ON, et KOP figura similis figurae LNM, et KVXO quadrilatera similis LVXN. Explicetur autem trunci soliditas in rectum, ijsdem legibus, quibus hactenus omnis generis figuras, superficiebus in omnes plagas curvis terminatas, explicavimus. Cum igitur linea PK conicae superficiei sit recta, explicata igitur superficies erit plana, scilicet ABKP, et PA erit aequalis circumferentiae baseos PM: KB verò aequalis circumferentiae circuli KL truncantis, cui aequalis erit OC: fiat tandem eidem aequalis et PD, et puncta D, C, B connectantur; quae formabunt triangulum aequale et simile triangulo POK, et latera unius, lateribus alterius parallela, ut et planum plano.

Duo igitur Pentaedra seu Prismata, BCVXOK et KOPDBC sunt aequealta, quippe sub parallelis planis. Sed discrimen est inter illa, quod parallelepipedum basi KOXV, altitudine OC, est duplum prismatis CBVXOK, at Prisma basi PKO, altitudine eadem, est ipsum sui totius mensura: est tamen et ipsum triplum Pyramidis aequealtae POKD.



Schema XV

19) quadrilaterae 22) superficiei sit in has plagas PK, recta, 26) tantem

Denique super DCB basi stat Pyramis DCBA, habens altitudinem DA, differentiam circumferentiarum KL, PM, cum basis DCB sit aequalis basi Pyramidis POKD. Cùm autem Pyramides super aequalibus basibus, sint inter se, ut earum altitudines; Pyramis ergo tertia, basi POK, altitudine PA, compositâ ex PD, DA, (haec autem aequat circumferentiam PM) erit aequalis Pyramidi utrique, POKD et DCBA. Et Prisma basi et altitudine ijsdem, erit illius triplum; altitudine verò, tertia parte ipsius PA, erit his 2 Pyramidibus aequale: Quod verò de Prismate humiliore KOPDBC reliquum est, puta DOKBC, duas tertias retinet Prismatis. Ergo huius reliqui corpus creatur, ductis duabus tertijs altitudinis CO (seu circumferentiae circuli KL vel ON) in basin POK. Hae sunt igitur partes corporis de Trunco, quod Zonam seu Tunicam appellamus. Reliqua pars, Cylinder sc. intermedius, aequat Prisma CBVXOK, quod est veluti triangulum COX corporatum, crassitie OK, XV, CB, ubique aequali; fit igitur ut cum triangulis, ut basis KOXV, ducta in dimidiam altitudinem CO (semicircumferentiam ipsius KL vel ON) creet corpus huius Cylindri. Haec de genesi: reliqua quibus compendium nostrum innititur, brevitatis et lucis causa, per Synopsin tradam.[1]

Per demonstrata hactenus, F4v †

Pro Tunica	Pro Cylindro
Ducitur KOP Per aequipollentiam dimidia PO vel ipsa PO	Ducitur KOXV vel OX, vel ejus dupla ON
In trientem PA, et bessem OC Per aequipollentiam, in trientem PM et bessem ON Per aequipollentiam, in totam PM, et duas ON	In semissem OC In semissem ON, hoc est, in OX In ON, NX, tres scilicet OX

Ducitur ergo permutatis terminis

PO, vel ejus duplum PO, NM hoc est differentia diametrorum KL, PM	ON, NX, vel ejus duplum, quod est triplum ipsius ON diametri minoris
In totam PM et duas ON	In ON diametrum minorem: quod erat demonstrandum.

Compendium quod ex hac demonstratione resultat opportunissimum, pete ex Th. XVI. XVII. et huic supplemento imputa, cuius est ornamentum singulare.

18) initiur

Exemplum praecedentium aliquot Praeceptorum

† Sit, in Schemate XVIII. sequenti, corpus Citrij Truncati HAEGCF, et diameter circuli maximi in eo AC, sit 22, Truncantium EG, HF, 19, longitudo interjecta HE vel MK vel FG, sit 27. Ergò etiam dimidia harum linearum LA, KE, KL sunt inter se in eadem proportione, sc. ut 22. 19. 27. Differentia igitur inter AL, LP (aequalem ipsi EK) est 3. Quaerendum est primò, arcus HAE quota pars sit sui circuli. Cum igitur AP sit portio de diametro hujus circuli, et EP in illam perpendicularis, ut igitur AP ad PE, sic PE ad residuum de diametro supra AP. Cùm ergo PE sit 27, quadratum ejus 729, divide hoc per AP 3, provenit residuum diametri 243, cui addita AP 3 constituit diametrum 246, semidiametrum 123. Vt verò canone sinuum uti possimus, lineae omnes debent nancisci numeros, in illo Canone usitatos: quod si 123 fit 1 00000, ergo AP pro 3 fiet 2439, et hic est sinus versus arcûs AE quaesiti. Quare secundum doctrinam de usu Canonis sinuum, ablatus à radio 1 00000, relinquit 97561, sinum complementi hujus arcus, sc. G. 77. M. 19. S. 9. Ergo arcus AE est G. 12. M. 40. S. 51, ejusque sinus PE ex Canone est 21951. Idem ex regula, si fiat ut 123 ad 1 00000, sic 27, quanta fuit PE in prima dimensione, ad numerum hujus dimensionis, prodit etiam 21951. Itaque totus arcus EAH est G. 25. M. 21. S. 42.

Et quia, per Th. XXII, opus nobis est cognitione areae in segmento EHA, inquiremus illam per Corollarium II. ad Th. II. in hunc modum. Totius Circuli area valet talium particularum 3 14159 26536, qualium sunt in Quadrato diametri 40000 00000: intellige particulas quadratas, longas et latas unam talem unitatem, qualium sunt in diametro 2 00000 longae. Pars igitur areae circuli, contenta sub EH arcu et lineis, quae E, H, terminos cum centro connectunt, sector scilicet arcus EH (qui semper est proportionalis suo arcui) valet 22132 22936. Ab hac area sectoris auferendum est triangulum, cujus vertex in centro, basis recta EH. Cum autem ab A in centrum sint 1 00000, sed ab A in P, 2439: Ergo à P in centrum, hoc est, perpendiculum Trianguli, erit, ut prius, 97561. Duc hoc perpendiculum in PE, dimidiam basin, quae inventa est 21951: fiet 21415 61511, area Trianguli, qua deducta de sectore, restabit 71661425, area segmenti EHA.

Ex hac area segmenti nobis innotescit segmentum rectum Cylindri, cujus basis est haec area segmenti circuli, nimirum pars minor de Zona illius Mali, quod describitur à segmento circuli, post ablatum EAH, residuo et majore, circa axem HE circumacto. Nam per Th. XX. ducenda est haec area in circulum, quem centrum | hujus segmenti majoris describit. Hujus igitur circumferentiae longitudo inquiritur sic. Perpendiculum Trianguli est distantia centri ab axis EH puncto P medio, sc. 97561: et hic est quaesiti circuli radius: cùm autem circulorum ad suos radios una sit eademque proportio, per Th. I. Vt igitur 1 00000 radius, ad 628318 semis, circumferentiam circuli EAH, sic 97561 radius, ad sui circuli circumferentiam 612994, quae ducta in aream segmenti, efficit 4392 80235 56450.

Igitur qualium cubus, in quem globus, ex circulo EAH factus inscribitur, habet 8 00000 00000 00000 partes cubicas, unam centies millesimam semidiametri longas, latas et altas, quarum 4 18879 02047 86301 sunt in corpore Globi; talium cubicorum summa expressa est in prodeunte summa, et tot omnino existunt

6) LQ *statt* LP 7) AC 22) particularem 46) cubiscorum

in parte illa Zonae Mali, quam aequat segmentum Cylindri rectum, Th. XX. descriptum.

Pars altera huius Zonae Mali, est Zona globi EAH, per idem segmentum EPHA, circa reliquum corpus globi, descriptum, per Th. XX. Ergo quaerenda est Zona globi, cujus maximus circulus sit EAH. Respiciatur igitur Schema VI. in quo sit KCN arcus idem, de quo hactenus egimus. Ergo globi CDBL Zona, quae per KCN et HBM transit, est inquirenda. Ergo per Th. XV. Coroll. II. quaeratur corpus segmenti globi KHD. Cùm ergo sit NK G. 25. M. 21. S. 42. et CK G. 12. M. 40. S. 51. erit igitur KD G. 77. M. 19. S. 9. cujus sinus KI est 97561. At circulus per KIH, est Basis segmenti HKD, sic ut KI sit ejus semidiameter. Non potest igitur ignorari area. Nam ut quadratum CA radij 1 00000 00000, ad aream circuli sui, sic etiam quadratum KI, quod est 95181 48721, ad aream circuli KIH, 2 99021 46098. Haec si ducatur in tertiam partem ipsius IO, ut altitudinis Coni, creat corpus segmenti HKD. Invenienda est igitur IO, ex praescripto Theor. XIV. Cùm enim KC sit nota, et IA, ejus sinus, supra fuerit 21951: quare ID est 78049, et IL 1 21951. Vt autem IL ad LA, sic ID ad DO. Divisâ ID 78049 (auctâ quinque cyphris) per IL 1 21951, prodit DO 64000. Tota igitur IO 1 42049, et pars ejus tertia 47350: quae ducta in basin KIH, creat 1 41586 66177 40300, corpus segmenti HKD, cui est aequale segmentum inferius MNL: cùm totius Globi corpus per Th. XII. sit 4 18879 02047 86301. Ablato utroque segmento, restat in Trunco HKNM 1 35705 69693 05791. Posses hucusque pervenire etiam sine cognitione areae in basi, per XIV. Corollarium. Nam IL est altitudo majoris segmenti de sphaera, et ID ejus residuum ad Diametrum. Vt ergo ID ad DA semidiametrum, sic IL altitudo majoris segmenti, ad LP: unde habetur tota IP, pro segmento majori, et erat IO pro segmento minori, sic ut composita OP aequipararetur Sphaerae toti: Prodit enim eadem segmenti HKD quantitas, quae antea.

Porrò de Trunco HKNM adhuc reiciendus est cylinder medius, cujus basis eadem quae segmenti, sc. HIK, altitudo verò KN, vel duplum ipsius IA. Erat autem IA 21951, tota igitur altitudo est 43902, quae ducta in aream circuli HIK, creat 1 31276 40179 94396 Cylindrum, Zonâ quaesitâ amictum, quo ablato de Trunco HKNM, restat Zona KCN, HBM 4429 29513 11395.

Vt autem redeamus ad Schema XVIII. hujus ultimi cylindri altitudo in illo repraesentatur per EH, et Zona globi habet idem segmentum EHA, quod erat in priori segmento cylindri recto. Ex his ergo duabus partibus, ex illo segmento cylindri recto, et ex hac Zona globi, composita est Zona Mali.

Hinc verò, per Th. XXI. facile habetur corpus Citrij, quod eodem segmento EHA describitur, subducto illo segmento cylindri 4392 etc. ab hac Zona globi 4429 etc. Nam restat 36 49277 54945, corpus parvi Citrij, per segmentum EAH circa axem EH circumactum, descripti: cujus usus jam fiet necessarius.

Iam tandem ad Citrium majus IANC, ejusque Truncum medium HAEGCF. Constat enim et hic Truncus, cylindro FGEH, et Zonâ cylindrum vestiente, quae describitur segmento HAEPH, circa axem MLK circumacto, sic ut H per F transeat, A per C, P per O, et E per G.

Cylinder igitur FGEH sic investigabitur: qualium AL est 22, talium PL vel HM dabatur 19, et AP 3. Sed pro usu canonis sinuum, ex AP 3, facta est

19) KH *statt* KIH 21) 4 18879 02047 86391 29) KM *statt* KN

2439, qualium scilicet totius circuli EAH radius est 1 00000. Vt igitur 3 ad 2439, vel ut 123 ad 1 00000 (ut prius) sic 19 ad 15447. Tanta est jam semi-
G v diameter HM circuli HF, | cujus area est inquirenda. Vt autem quadratum radij 1 00000, quod est 1 00000 00000, ad aream circuli 3 14159 26536: sic etiam est radij 15447 quadratum 238 60 9809, ad aream sui circuli 7496 14823. Haec est area HF vel EG, basis cylindri. Sed et altitudo ejus ex antecedentibus constat: est enim (ut prius in Cylindro Globi) 43902. Ducta igitur haec altitudo in aream Basis modò inventam, creat corpus cylindri FHEG 32909 58995 9346. Restat Zona Citrij majoris. Per Th. XXII. verò, Zona haec Citrij majoris NAIC, vel Trunci HAEGCF, componitur ex corpore invento Citrij minoris, per HAE descripti, et ex segmento cylindri, stante super EHA, et habente altitudinem aequalem circumferentiae circuli HF truncantis. Rursum igitur ut radius 1 00000 ad circumferentiam 6 28318 semis, sic radius HM, ad circumferentiam HF 97056, quam duc in segmentum circuli EPHA initio investigati 716 etc: et creatur segmentum cylindri rectum 695 51712 64800, pars Zonae in Citrio Truncato. Cui adde corpus Citrij minoris supra inventum 36 etc: prodit Zona tota circa truncatum Citrium 732 00990 19745. Adde ultimò et Cylindri corpus intra Zonam abditi 3290 etc: conflabisque totum corpus Citrij truncati 4022 96889 79091, cujus pars major quintâ, minor sextâ, infarcta est in Zonam.

Lubet comparationis causa computare etiam corpus, non Citrij, sed compositum ex duobus truncis Conicis ACFH et ACGE, sic ut AH, AE, CF, CG sint rectae: computandum igitur est corpus Coni GBE, et Coni CBA, ex Th. XVII. Sit ergò conus GBE, cujus basis, area circuli GE, jam in superioribus fuit inventa 7496 etc. Altitudo verò KB sic habetur. Nam ut AP 3, ad PE 27, hoc est ut 1. ad 9, sic EK 15447. ad KB. Cùm autem pro Coni corpore tertia solum pars altitudinis sit multiplicanda in basin, per Th. IV. ergò triplum EK, 46341 ductum in basin, creat 3473 79005 12643. corpus Coni GBE. Iam ad Conum alterum, cujus basis AC, area nondum est nota, sed facile investigatur ex area circuli EG. Nam EK vel PL est ad LA, ut 19. ad 22. Ergo quadrata sunt ad invicem ut 361 ad 484. Vt verò quadrata ad invicem, sic sunt etiam areae circulorum. Est igitur area circuli AC, qui basis est Coni ABC, 10050 23661. Rursumque ut AP 3 ad PE 27, hoc est 1. ad 9; sic AL 17886 (composita ex AP, et PL vel HM supra inventis) ad LB altitudinem Coni. Quare etiam hujus noncupli partem tertiam, hoc est, triplum ipsius AL 53658 duc in aream inventam, creabisque corpus Coni ABC 5392 75596 01938. Hinc aufer conum GBE, restat truncus unus ACGE, 1918 96590 89295, cui aequalis est alter ACFH. Totum igitur corpus ex truncis conicis compositum, erit 3837 93181 78590. Ecce ut minus habeamus quam antea, per 145 03708 00501, scilicet tantum est infarctum in duas Zonas obliquas, arcubus HA, AE, et rectis HA, AE, adumbratas: puta partem paulo minus vicesimam octavam trunci duplicis. Quod si altera breviori methodo usus, ut in Conis similibus, feceris, ut 10648: cubum de 22, vel 6859, cubum de 19, ad eorum differentiam 3789, sic Conum majorem 5392 etc: (vel etiam minorem, si prior daretur) ad quartum: prodibit truncus idem, ut prius.

At secundum Th. XVII. ejusque demonstrationem in proximo Episagmate praemissam; cùm sit inventus Cylinder FHEG 3290 etc. quare dimidium ejus 1645 47949 79673: sciatur verò AC 22 (in sua propria mensura) et PO, vel HF

10) NAEGCF 23) hujus 45) FHCG

19, cujus duplum 38, et additâ AC 22. summa fiat 60, et differentia diametrorum sit 3, ductis ergo 3 in 60, creatur rectangulum 180, repraesentans Tunicam: quadratum verò minoris diametri HF, id est quadratum de 19, est 361, cujus triplum 1083 repraesentat Cylindrum Trunco inscriptum. Vt ergo 1083 ad 180 sic Cylinder 1645 etc: ad Tunicam. Vel brevius, secundum compendium corollarij ad XVII. sic agemus.

Diametri	19. 20. 21. 22.	Vel sic	19. 3
	19. 3.		22. 3
	361. 60.		418. 9
	421.		3
			421.

Vt igitur 361 ad 421, sic Cylinder inventus 1645 etc: ad 273 4868971691: supra verò, Cylindro ablato à trunco, erat hoc corpus 273 48641 09622: differentiam minutulam faciunt sinus quibus non penitus exactis usi sumus. |

De Fusis

G 2

Hactenus Cylinder et Globus, aut ejus loco Sphaeroides, in segmentum cylindri sui transformata, nobis subsidio venerunt ad prodendas mensuras Malorum, Citriorum, Cotoneorum, Melonum sessilium, Olivarum, et Prunorum Ellipticorum. Cùm enim corporum totorum leges in ipsis figuris non inveniremus, partium corporis mensuras in Cylindrorum partibus invenimus. At cum partes quaedam Cylindri definitionem quidem habeant certam, scientiam verò seu leges corpulentiae in seipsis vel nullas, vel nondum in lucem prolatas; Globus et Sphaeroides successerunt, quae cum dimensionem corpulentiae habeant antea, transformata in talem Cylindri partem, easdem leges corpulentiae in illum intulerunt. Restat nunc difficilior de Fusis Parabolicis et Hyperbolicis contemplatio, in qua nos demonstrationis methodus hactenus adhibita rursum deficit. Nam etsi Fusum eodem modo quo Citrium et Olivam et Prunum, transformes in columnae prisma, quod curvaturam lineae conicae (in Schemate X.) sectionum OCH, PCQ vel MCN, toto dorso erecto retineat; hujus tamen figurae corpus nihilo magis demonstrari potest, quam Fusi ipsius. Primùm enim hic totum nullum est, ad quod prisma possit comparari; quippe columna, ut sectio ipsa, ad latus MN vel PQ infinita erit: deinde non congruit globus suo circulo maximo, non Sphaeroides, in talem columnam conicam: aut enim tangit circulus conicam intus in puncto unico, si fuerit ex foco figurae A, per ejus verticem C descriptus: aut si paulò amplior circulus per C fuerit descriptus, tangit quidem figuras exteriùs in C, secat verò easdem statim binis punctis ipsi C proximis, de reliquo penitus dissidet à sectione.

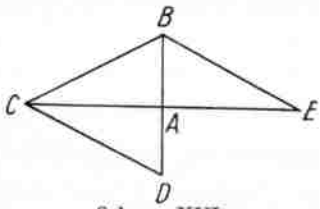
3) verò 19 minoris   5) 1545

Restat igitur, ut sicut in corporibus, à Circuli segmento creatis, ad globum confugimus, in Ellipticis ad Sphaeroides; sic in ijs quae à Parabola et Hyperbola, confugiamus ad Conoidea congenera: quod nisi succedat ex asse conatus, de reliquo Geometras in subsidium vocabimus.

THEOREMA XXIII

Coni duo, creati à rectangulo scaleno, alter minori, alter majori latere eorum, quae circa rectum, pro axe constitutis, sunt in proportione laterum, quae bases ipsis Conis describunt.

Sit Rectangulum ABC, cujus laterum circa rectum angulum, minus BA, fiat axis, et figurâ circumactâ, subtensa BC creet superficiem Conicam CBE, cujus vertex B, basis CE. Rursum fiat majus latus AC axis; et figura circa AC manentem circumacta creet Conum BCD, vertice C, basi BD circulo. Dico ut est BA ad AC, sic esse corpus, quod circulo CE, et superficie conica CEB, continetur, ad corpus Coni BDC.[1]



Schema XVI

G 2 v Demonstratio. Nam per allegata Theor. XVII. proportio Coni EBC, ad Conum BCD, est composita ex proportione Circuli EC ad circulum BD, et ex proportione altitudinis AB, ad altitudinem AC, sed circuli EC ad circulum BD proportio, dupla est proportionis AC semidiametri ad AB semidiametrum. Ergò Conorum, EBC ad BCD, proportio est composita ex proportione AC ad AB, et iterum ex eadem AC ad AB, et tertiò ex AB ad AC. Sed proportio AC ad AB, composita cum proportione AB ad AC, conflat proportionem aequalitatis, quae est proportionum minima, hoc est terminus, et aequalitas, quae addita vel ablata à proportionibus reliquis, nihil mutat. Igitur ex tribus elementis proportionis Conorum, quorum duo ultima se mutuò tollunt, solum primum restat, et Conus EBC, ad Conum BCD, est ut AC, semidiameter circuli EC, ad AB, semidiametrum circuli BD.

THEOREMA XXIV

† *Sphaeroides longum inscriptum sphaeroidi lato, sic ut easdem habeant diametros, sed axes in iis permutatos, est ad Sphaeroides latum, ut diameter brevior ad longiorem.*

Sit in Schemate XII. Sphaeroides longum CEI ad dextram, cuius vertices C, I, latum KCE ad sinistram, verticibus K, E, et sit illius axis CI, aequalis huius diametro CI, illius verò diameter KE, aequalis axi huius KE, dico Ellipsin longam, seu Ovum ad dextram, esse ad latam seu

Lentem ad sinistram, ut KE brevior diameter ad CI longiorem. Describantur enim Coni, in dimidio Ovo KCE, cuius vertex C, basis KE circulus; in dimidia verò Lente CKI, cuius vertex K, basis CI circulus, per praemissam igitur, ut KR semidiameter circuli EK, ad RC semidiametrum circuli CI, sic Conus KCE ad Conum IKC. Sed dimidium Sphaeroides semper est duplum Coni sibi inscripti ad eundem axem, et † super eadem basi circulari: Ergo etiam Sphaeroidum dimidia, et sic Sphaeroidea tota, sunt in proportione, ut KR ad RC, hoc est, ut eorum dupla KD ad CI.

THEOREMA XXV

Segmentum Globi ad Citrium, eodem segmento circuli descriptum, videtur eam † *habere proportionem, quam habet semidiameter basis segmenti ad axem seu altitudinem segmenti.*

Demonstrationem legitimam quaerant alij: Ego quod non possum apodicticè, comprobabo dicticè; quatuor usus documentis. Primum est ab Analogia. Quod enim in dimidio globo, velut in maximo segmento, quod est principium segmentorum, verum est, ut et in dimidio Sphaeroide; quod item in minimo segmento, et veluti in ultimo omnium segmentorum | termino, id videtur etiam in segmentis intermedijs locum G 3 habere. At in dimidio globo res ita se habet: quemadmodum enim latera circa rectum angulum quadrantis, habent inter se proportionem aequalitatis, sic etiam quod creatur, quadrante circa perpendiculum voluto, aequale est ei, quod creatur, eodem quadrante circa basin voluto. In minimis verò similiter locum habet ista proportio: quia quo minus globi segmentum, et Citrium in eo, hoc minus ab hisce differunt Coni, figuris ipsis inscripti: Conorum verò istorum, ut habet Theor. XXIII. est dicta proportio: quare et circumscriptorum solidorum. Etsi fateor, ab eo quod est absolutè minimum, ad id quod minimo proximum, non ubique tutam esse collectionem.

Secundò, Proportio dicta locum habet in Sphaeroide dimidio, etiamsi ibi non regnet aequalitatis proportio inter diametros, ut in globo, et quidem in infinitis Sphaeroidibus, et infinitis diametrorum per illa proportionibus: ut est in Th. antecedenti. At sicut Sphaeroides longum inscribitur Sphaeroidi lato, sic etiam Citrium totum, segmento duplicato Hemisphaerij inscriptum est, et generatio utrinque similis intelligitur. Ergo cum dicta proportio obtineat inter Sphaeroides longum et latum, obtinebit etiam, ut videtur, inter Citrium totum et segmentum duplicatum semiglobi. Tertiò, vicem demonstrationis plenariae sustinet hoc,

20) ita habet

quod, in Sch. XVIII. seq. segmentum Circuli obliquum, contentum sub AE recta et AE arcu, quod creat excessum tam segmenti, quam dimidij Citrij, supra suos Conos, supra apud A, et infra apud E aequalis est latitudinis: itaque quae est proportio PE ad PA, ejusdem proportionis motum faciunt partes E circa PA circumactae, ad motum partium A circa PE circumactarum. Corpus igitur obliquarum Zonarum in eâdem proportione accumulatur ad Conos inscriptos, in qua sunt ipsi Coni inter se. Quartò his accedit calculus et testimonium numerorum: qui licet operosissimè tractentur et subtilissimè, per divisionem diametri in particulas 100000, tandem tamen inepti fiunt ad refutandam hanc proportionem.

† In superiori exemplo erat PE noncuplum ipsius PA, sit ergo etiam segmentum Globi HEA noncuplum dimidij Citrij, ab AEP circa PE immobilem descripti. Quaeratur segmentum HEA. Erat AL 22, LK vel PE 27. Quadrata ergo sunt 484. et 729. Cum autem areae circulorum sint ut radiorum quadrata ad se invicem, et AC circulus supra habuerit 1005023661: venient in aream HPE, quae basis est segmenti propositi, partes 1513764977.

Et cum PA fuerit 3 et residuum ad diametrum 243, semidiameter 123. Vt ergò 243 ad 123, vel huius loco ad 100000, sic 3 ad 1234 semis, augmentum altitudinis segmenti, pro altitudine Coni aequalis, idque in dimensione usitata Canonis: cum sit altitudo segmenti PA in hac dimensione 2439, ergo altitudo Coni aequalis 3673 semis, cuius pars tertia 1224 semis, ducta in aream basis supra inventam, creat corpus segmenti 185284833 1848, cuius pars nona est 20587203 6872. Atqui supra corpus Citrij totius erat 36 etc, dimidium ergò 18246387 7472, quod est quidem minus nona parte de segmento, minus etiam decimâ ejus, sed in hac infida, circa minima, numerorum tractatione. Nam agitur de quantitate corporis, quod minus est quàm vicies millesima Globi. Et oritur quidem differentia hujus corpusculi (multò majoris eo de quo controvertimus) ex unica centies millesima particula semidiametri: quia sinus arcus AE, hoc est PE fuit assumptus 21951, qui paulo erat major, minor tamen quam 21952. Quod si assumseris 21952, et cum hoc repetieris processum, corpus Citrij prodibit 42473206 2579, cujus dimidium 21 etc, jam est majus nonâ parte segmenti hic inventi, nimirum quia etiam 21952 est major justo.
G 3 v Per hos igitur | numeros nihil depromi potest contra expressam in Theoremate proportionem dimidij Citrij ad suum globi segmentum.

THEOREMA XXVI

Si recta quaedam sectionem conicam, et genitum ab illa segmentum Sphaeroidis, aut Conoidis, contigerit in circumferentia baseos, concurrens cum axe; et circumductae lineae circa diametrum baseos immobilem creaverint solida: contingens quidem Conum, sectiones vero Conicae Prunum, Olivam vel Fusum, quaelibet suum congenere; eadem vero contingens, circumducta circa axem immobilem,

12) PB *statt* PA   28) major   38) Conoides

creaverit Conum alium: proportio dimidij Pruni vel Olivae ad Segmentum Sphaeroidis, Fusi vero ad suum Conoidis, proxime erit aequalis proportioni prioris Coni, ad Conum posteriorem. †

In Schemate XII. sit sectio Conica OCN, superius Parabole, in medio Hyperbole, infra Ellipsis, cuius axis CI, et sectionis OCN dimidio CN, circa ON immobilem circumacto, sic ut punctum sectionis N maneat, C verò per I transeat, creatum intelligatur Pruni, Olivae vel Fusi OCNI, corpus dimidium CIN. Eodem sectionis dimidio CN, circa CI immobilem circumacto, sic, ut C manente, N per O transeat, creatum intelligatur segmentum Sphaeroidis, aut Conoidis OCN, vertice C, basi circulo ON. Dico, si qua linea tangat sectionem vel solidum in N vel O terminis, illa lineâ Conos duos proxime tales creari, circumactibus ijsdem, qui jam sunt dicti, ut in ijs conis insit proportio dimidij corporis Pruni, Olivae, vel Fusi CIN, ad segmentum Sphaeroidis, aut Conoidis OCN. Hactenus ad declarationem Theorematis opus nobis fuit Schemate XII. Nunc reliqua ex Schemate XVIII. petentur.

Est enim Theorema de segmento Sphaeroidis, deque binis Conoidibus, Parabolico et Hyperbolico; habetque potestate in se partes tres, prima et secunda sunt certae, quod ista proportio sit minor illâ Theorematis praemissi; et secunda, quod aliqua proportio demonstratur major; tertia nondum est certissima, quod praecisè sit ista proportio, quae in Theoremate hoc exprimitur. Cum autem evidentiora sint omnia in Hyperbolico, sit ergo in Schemate XVIII. sectio Conica quae Hyperbola dicitur, FCG, linea punctis signata; est autem et arcus circuli per FCG descriptus; illum igitur Hyperbola secat in F; unde circulus quidem versus S, Hyperbola verò versus R pergit, semper interior circulo, donec in C vertice tangat circulum interius; ut demonstratum est in IV. Conicorum Apoll. Pr. XXV. XXVI. Fiat autem ex FCG Conoides, cujus vertex C, axis VCO, basis FG circulus, ejusque semidiameter FO: et sit V centrum figurae, et VX, VZ asymptoti, quarum sectiones cum FG continuata, sint X. Z. contingat autem figuram in F, circumferentiâ basis, recta FY, quae cum axe concurret inter V cen|trum et C verticem, G 4 concurrat in Y. Inscribatur autem figurae super eadem basi FG, triangulum FCG. Itaque cùm antea dimidij Citrij corpus, descriptum arcu circuli FSC, circa FO immobilem, ad segmenti sphaerici FCG corpus, descriptum eodem arcu FSC, sed circa CO immobilem circumacto, proportionem eam habuerit, quae est ipsius CO ad OF: jam hoc theorema de Fuso dimidio, quod describitur Hyperboles dimidio FRC, circa FO immobilem, deque Conoide, quod eâdem FRC, sed circa CO immobilem

2) Conoides 10) Conoides OCN, verice 14) Conoides 32) EY

describitur, affirmat proportionem aliam, scilicet eam, quae est YO ad OF; haec enim est proportio Coni, ab FY contingente, circa FO descripti, ad Conum ab eadem FY, sed circa YO, descriptum. Manifestum autem est YO proportionem minorem esse ad OF, hoc est, aequalitati viciniorem, quam CO ad OF, cumque concurrant VX et YF versus partes X, rursum igitur et ipsius VO ad OX minor est proportio, quàm ipsius YO ad OF.

Quemadmodum igitur YO ad OF est quantitate media inter CO ad OF, et inter VO ad OX, ita demonstrari potest, et Fusi dimidij corpus ad Conoidis corpus, esse quantitate mediam proportionem inter CO ad OF et inter VO ad OX.

Probetur primùm de CO ad OF, valebit autem demonstratio etiam de Parabolico Conoide. Igitur manifestum est, Fusum lineae FRC, minus esse Citrio arcus FSC: sic etiam Conoides FRCG, minus esse Segmento Sphaerico FSCG. Cùm autem figura plana, contenta inter arcum circuli FSC et Hyperbolam FRC, ad partes F et C, sit inaequalis latitudinis, circa F enim latior est, ubi lineae se mutuò secant, circa C angustior, ubi se mutuò tangunt: tunica igitur, quam segmentum globi circumiecit Conoidi, crassior est versus basin FG, tenuior versus verticem C. Contra, tunica quam Citrium circumiecit Fuso, tenuior est versus basin ad C, quam versus verticem F. Non amittunt igitur proportionalia, Conoides et Fusum, sed plus Conoides, minus Fusum. Etsi enim circa verticem vicissim minus amittit Conoides, quam Fusum circa verticem F: non fit tamen omnimoda compensatio, quia partium ad verticem motus brevi spacio finitur, partium circa basin motus, in ampliorem diffunditur ambitum. Fusum igitur propius est Conoidi, quam Citrium Segmento Sphaerae, vel CO (per Th. praecedens) ipsi OF: quemadmodum etiam YO propior est ipsi OF, quàm CO ipsi OF.

Hic sumus usi Theoremate antecedenti, quod nondum habet demonstrationem legitimam. Sed valet eadem methodus etiam tunc, si pro segmento FSCG, et Citrio, Conos FCG substituamus. Conus enim à linea CF circa FO factus, ad Conum à linea eadem FC, circa CO factum, proportionem habet eam, quam CO ad OF. Iam verò figura plana, quae continetur Hyperbola FRC et recta FC, creans excessum Conoidis et Fusi, supra illorum Conos, latior est versus C, quia ibi Hyperbola est curvior; angustior versus F, ubi Hyperbola paulatim degenerat in rectam. Rursum igitur Conis hisce non adijciuntur proportionalia; plus enim accedit Cono Fusi, ut fiat Fusum in sua proportione, quam Cono Conoidis, ut fiat Conoides: majus igitur est corpus Fusi, respectu Conoidis, quam

20) tenuius 36) rectum

CO respectu OF, id est, minor et aequalitati propior est minoris (Fusi) ad majus (Conoides) proportio.[1]

Iam etiam de VO ad OX demonstrandum, quod haec proportio minor G 4 v sit proportione Fusi dimidij ad Conoides. Est autem demonstratio propria Hyperboles, cùm Parabola careat Asymptotis. Rursum igitur ut prius, figura contenta tribus rectis FX, XV, VC, et Hyperbolâ CRF, latior est versus V, quàm versus X: corpus igitur seu matrix, in qua latet Conoides, crassior est in vertice V, quàm ad basin XZ; vicissim matrix, in qua latet Fusum, est tenuior ad verticem FX, quam ad basin circa VC: plus igitur accedit Cono, cujus axis XO, in sua proportione, quàm Cono, cujus axis VO, in sua. Major igitur ille Conus est, respectu hujus, quàm Fusum respectu OX, minor igitur proportio VO ad OX, et aequalitati propior, quàm dimidij Fusi ad Conoides.

Cùm autem inter proportiones, CO ad OF, et VO ad OX, infinitae aliae sint proportiones intermediae, non una sola quae est YO ad OF: non igitur necessaria, sed verisimilis saltem est collectio in tertia figura argumentationis, affirmatoria ex puris particularibus.

Analogia

Cogita num in Globi quidem segmentis semper valeat proportio † Conorum inscriptorum: in Sphaeroidis verò, jam Coni illi, qui genuinam habent proportionem solidorum (puta hîc Pruni ad Sphaeroidis lati, aut Olivae ad longi segmentum) alter verticem alter baseos extremum supra verticem Ellipsis proferant, intra contingentem tamen; in Parabolico Conoide, haec ipsa contingens creet Conos proportionis quaesitae, sic ut altitudo Coni unius, sit praecisè dupla altitudinis segmenti Conoidis; in Conoide denique Hyperbolico, Vertex et Basis Conorum horum, excurrant supra contingentem, versus figurae centrum. Magna quidem et prope demonstrativa vis est huius Analogiae.

Neque tamen sufficit hoc habere demonstratum, oportet etiam ipsissima puncta indicare, inter contingentes et Verticem Ellipsis, aut Centrum Hyperboles.

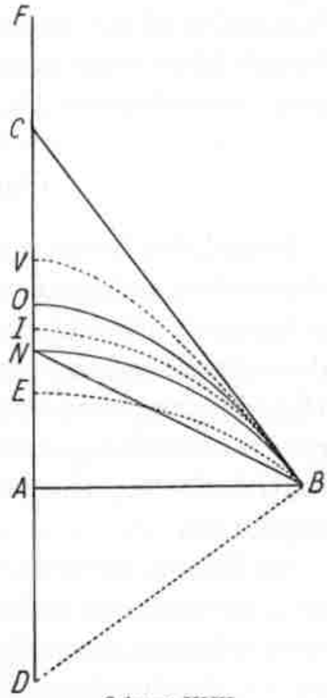
THEOREMA XXVII

Si cuiuslibet Trianguli latus alterum circa rectum angulum, secetur et in duo aequalia, et in proportione laterum reliquorum: in angulo vero opposito concurrant sectiones Conicae variae, communiter seipsas, et latus recto angulo oppositum, tangentes, Vertices primarios in latere secto habentes: quae sunt à summo ad medietatem, omnes erunt Hyperbolae: quae in ipsam bisectionem incidit, Parabole; quae hinc usque ad sectionem proportionalem, omnis generis Ellipses rectae;

10) XV   14) CX *statt* OX

H *quae in ipsam propor|tionalem incidit, circulus; quae denique hinc usque ad rectum angulum, omnis generis Ellipses transversae erunt, in quibus vertex improprie dicitur, pro extremo axis brevioris.*

Sit Rectangulum BAC, cuius latus AC sectum sit in aequalia in O, bisecetur etiam angulus CBA, lineâ BN, ut sicut est AB ad BC, sic sit AN ad NC. Erit propterea AN brevior ipsa AO. Tunc inter C.O sit punctum V; inter O.N punctum I; inter N.A punctum E: tangant autem se invicem, et rectam BC, in puncto B, variae sectiones Conicae, quarum vertices sint hoc ordine, V. O. I. N. E: dico BV esse Hyperbolas, BO Parabolen, BI Ellipses rectas, BN circulum, BE Ellipses transversas.



Schema XVII

Primò de BO. Cùm igitur sectionem Conicam BO, cuius axis seu diameter CA, vertex O, tangat recta BC in B, conveniens cum diametro extra sectionem in C, sitque à tactu B, ad diametrum ordinatim applicata BA, quippe perpendicularis axi CA; et cùm sit CO, aequalis ipsi OA: quare BO erit Para-
† bole, per 37. I^{mi} Apoll. conversam.

Secundò de BV. Manentibus caeteris, cùm sit V vertex, et CV minor dimidio ipsius CA, dupla igitur ipsius CV auferatur à CA; et fiat ut residuum hoc ad CV, sic CV ad CF in partes exteriores. Cùm igitur, quod ex CF et residuo dicto, aequet quadratum ipsius CV: addantur utrique communia, quadratum à CF, et bina rectangula VCF: ut ex una parte confletur rectangulum CFA; ex altera parte quadratum ab FV: quae cùm sint aequalia; quare per 37. I. Apollon. conversam, sectio BV erit Hyperbole, cuius centrum F.

Tertiò de BI, BN, et BE. Manentibus superioribus, cum sint I. N. E. vertices, et IA, NA, EA minores quàm dimidium ipsius CA: duplae igitur ipsarum IA, etc: auferantur à CA; fiantque ut residua haec ad IA etc: sic haec ad AD, in partes interiores: de reliquo demonstrabitur eadem methodo, ut priùs, quadrata ab DI etc. aequalia esse rectangulis CDA. ac proinde per eandem Apollonii conversam, sectiones Conicae BI, BN, BE erunt finitae, quarum centra D, intra figuras, eoque Ellipses, aut circulus.

18) amplicata 36) FI

Quartò de BN, praesuppositis quae iam tertio loco de ea sunt demonstrata; cùm insuper AN sit ad NC, ut AB ad BC, quae est proportio unica in uno quolibet triangulo, cùm Hyperbolae et Ellipses varias habeant proportiones, Parabole unicam quidem, sed proportionem aequalitatis: non poterit igitur BN esse ulla alia sectionum conicarum, praeterquam circulus. Et sanè ita fit in circulo. Sit enim BN circulus, eiusque centrum D, quod con|nectatur cum puncto B contactus; erit H v
ergo CBD rectus, sed et CAB rectus erat; ergo ut DC ad DB, sic DB, hoc est DN ad DA. Atqui DN est ad DA, ut CB ad BA, et ut CN ad NA. Circuli igitur arcus secat latus, in quo continuato centrum habet, in proportione laterum AB, BC.

Corollarium et Analogia

Hyperbolae igitur in hoc triangulo possunt esse infinitae, quarum †
obtusissima, ut loquar analogicè, est BC, cuius vertex V, et centrum F, in ipsum C, angulum Asymptotôn coincidunt; ipsaque sectio planè in duas rectas degenerat (cono sc. per verticem secto) acutissima verò Hyperbolarum in hoc triangulo, est analogicè ipsa Parabola, cuius vertex in O bisectione, centrum F in infinita distantia. Quod si CV sit pars tertia de CA, aequales fient CF, CV; si CV minor, superat CV, sin maior, superat CF.

Sic Ellipses rectae BI, inter O. N transeunt infinitae, quarum acutissima in vertice, est analogicè ipsa Parabola BO, cuius O vertex, D centrum in infinito intervallo, obtusissima verò harum Ellipseon in vertice, est BN circulus, à quo incipiunt Ellipses transversae rursum infinitae, quarum acutissima circa verticem (impropriè dictum, cum sit venter) est circulus ipse BN, ex eo obtusiores BE semper, donec tandem evanescant in meram rectam BA, verticem inproprium E, et centrum D, in ipso A puncto, verticem verò propriè dictum in B habentem, et obtusissimam circa A, quippe merè rectam. Quod si AE sit pars tertia de CA, aequales fient EA, AD; si verò EA minor, superat ipsam AD, sin major, superatur ab illa.

Corollarium II

Hinc, nimirum ex contingentibus, facile fit judicium de specie Truncati. Nam si duae truncatum contingentes in punctis circumferentiarum truncantium, in Schemate XVIII. in G. F. rectae FY, GY; mutuam sectionem Y fecerint talem, ut YC sit aequa ipsi CO dimidiae differentiae diametrorum circulorum, medij et truncantis: erit Fusi Parabolici truncus,

7) F *statt* D 8) CA *statt* DC 22) Parabole 26) ON *statt* BN 36/37) differentiae circulorum

sin CY minor, Truncus erit ex Hyperbolico Fuso, sin major, ex Prunorum primò, dein ex Citriorum (si fuerit YF ad FO, sic ut YC ad CO) denique ex Olivarum Ellipticarum genere: ut si sit CY dupla ipsius CO.

THEOREMA XXVIII

Si quatuor species sectionum Conicarum, Circulus, Ellipses, Parabola, Hyperbolae, sese in communi vertice contingunt, praetereaque in duobus alijs punctis, aequaliter à vertice remotis, concurrunt; omnes in ijs duobus [1] punctis secantur ab omnibus, et circumferentia circuli intra sectiones est exterius, continetque Ellipticas, hae Parabolicam; intimae sunt Hyperbolicae, et ex ijs interiores, quae obtusiores, eaedemque suis Asymptotis propiores.

Cùm enim ponantur sectiones diversae speciei, et dissimiles etiam unius speciei, non poterunt igitur habere partes easdem; sed aut contingent se mutuò in unico puncto, aut secabunt sese mutuò, arcus verò inter puncta interjecti distabunt ab invicem toti à totis, per XXIV. quarti Apollonii. Et cùm ponatur, omnes sese mutuò contingere in Coni vertice, concurrere verò etiam ad alia duo puncta: nulla igitur earum cum ulla reliquarum in alijs pluribus punctis concurret, etiamsi Parabola et Hyperbolae in infinitum continuentur, per XXVI. quarti Ap. Cùmque ponantur concurrere in tribus punctis: non igitur sese contingent in eorum punctorum duobus. Nam si in duobus sese contingerent, in tertio non concurrerent, per XXVII. quarti Ap. Sequitur ergò, ut concursus duo reliqui sint sectiones; omnis enim concursus aut contactus est, aut sectio. In sectionibus autem permutatur ordo.

Et cùm ponantur puncta tria in circumferentia circuli, circulus igitur per illa transibit unicus, per demonstrata lib. III. Evclidis. Similiter et Parabola erit unica. Pone enim diversas esse; et cùm positum sit, contingere sese in Coni vertice, si diversae sunt et sese secant, diversas etiam contingentes habebunt in communi sectione: quare eadem demonstrationis methodo, qua utitur XXVIII. quarti Ap. probans, duas parabolas sese non contingere in pluribus uno punctis, res ad impossibile recidet, et totum fiet aequale parti. Non sunt ergò diversae Parabolae, sed unica, quae per tria puncta transit.

Cùmque Hyperbolae, quo obtusiores, hoc magis exteriùs procurrant ultra sectiones, ut est per se manifestum; ergo intra sectiones necesse est esse tanto interiores: Et quia ex similibus Hyperbolis, sc. eodem angulo Asymptotôn factis, illa maior censetur, quae maioribus lateribus formatur: Obtusae igitur hic sunt minores in sua specie, quam acutiores

1) erit Hyperbolico

in sua: duobus igitur nominibus, interior habet Asymptotos viciniores, et quia minor in sua specie, et quia respectu sociae obtusior: obtusiores enim, ut praecedenti Theor. dictum, magis magisque appropinquant suis Asymptotis, tandemque cum iis coincidunt. Quin etiam hoc demonstratum est Theoremate praecedenti, centrum in obtusiorum aliquâ serie propius esse contingenti, quam haec est vertici, in reliqua acutiorum remotius. Et verò contingens interiori est ipsa etiam interior. Potest hoc etiam absolutè demonstrari per 37. I. Apoll. Sic cum Hyperbolae exterius complectantur Parabolam: intra sectiones igitur, Parabola vicissim complectetur illas; eâdem de causa, cùm Parabola extra sectiones complectatur Ellipses, intra igitur sectiones, Ellipses vicissim includent Parabolam. Denique cùm circulus Ellipses tangens in vertice, ponatur eas secare duobus locis: Lunulae igitur Ellipticae resecabuntur à circulo, et consistent extra circulum: ante sectiones igitur, arcus Ellipseon erunt intra arcum circuli.[1]

THEOREMA XXIX H 2 v

Si Citrium, Pruna, Fusum Parabolicum, Fusa Hyperbolica, et Conus duplicatus, omnia truncata, habuerint eosdem circulos, tam truncantes, quam medium corporum: Citrium erit maximum, reliqua eodem ordine magnitudinis corporum, quo hic sunt recensita. †

Demonstratur facile ex antecedenti. Nam Citrium creatur segmento circuli, Pruna ex segmentis verticalibus Ellipseon, Fusa ex segmentis verticalibus Paraboles et Hyperbolarum, Conus duplicatus ex Triangulo isoscele. Cùm autem corpora statuantur habere eosdem circulos truncantes: arcus igitur omnium linearum creatricum sese mutuò secabunt in punctis duobus, per quae circuli truncantes transeunt. Et cùm idem omnibus corporibus tribuatur circulus maximus corporis medius: ergò lineae creatrices omnes sese mutuò tangunt in communi vertice, qui ex circumductu figurae cujusque creat illum circulum totius corporis medium. Cùm autem sectiones Conicae sese mutuò amplectantur ordine hic attributo: segmenta etiam sese mutuò excedent eodem ordine. Conus igitur duplicatus et truncatus (in Schemate XVIII. rectis lineis HAE GCF contentus) erit minimus: Ei primùm Hyperbolae singulae singulas tunicas circumducent, ut fiant Fusa Hyperbolica truncata; superinducet et Parabola unam, ut fiat Fusum Parabolicum: tum Ellipses singulae rursus addent singulas, ut fiant Pruna Elliptica truncata. Tandem circulus, arcu FSQCG ultimam induet ei tunicam, facietque Citrium truncatum.

35) Parabole

THEOREMA XXX. PROBLEMA GEOMETRIS PROPOSITVM

† *Proportionem indagare segmentorum Citrij, Olivae, Pruni aut Fusi, factorum plano axi parallelo.*

Vsus eius non potest esse obscurus, scientia deest. In extensione verò soliditatis Citrij in rectum, sc. in Prismatis cylindrici portionem, respondet tali segmento Citrij, segmentum portionis illius cylindricae, factum superficie, quae similis est cylindraceae, seu potius parti involutae chartae quodammodo: nam in unam plagam est recta, et rectae in basi portionis Cylindraceae parallela; sursum verò est curva, non tamen curvitate neque circuli, quod certum est, neque sectionis conicae, quantum mihi constat: etsi inter conicas Ellipticae fit similior, quia superius magis flectitur. Et si de huius curvitatis lineâ constaret; nondum tamen ex ea, per hactenus quidem constituta, daretur soliditas talis portionis.

Conclusio huius Supplementi

Age nunc, SNELLI, Geometrarum nostri saeculi decus, legitimam huius Problematis caeterorumque, quae hic desiderantur demonstrationem nobis expedi: reservatur, ni fallor, haec inventio Tibi, ut existat Maecenatum aliquis, qui tuae fortunae splendorem reputans, et verecundiâ instigatus, dignum aliquid hac sollertia, quo scilicet notabilis aliqua tuae rei fiat accessio, remuneretur, proque Citrio numerico, Malum aureum rependat. |

II. PARS

H 3

STEREOMETRIA DOLII AVSTRIACI IN SPECIE

AD QVOD GENVS FIGVRARVM PRAEMISSARVM PERTINEAT FIGVRA DOLII

Praemissis igitur generalibus, quae de stereometria regularium tam ex ARCHIMEDE quam ex proprijs inventionibus, ad demonstrationes intelligendas utilia videbantur, jam propius ad propositum venio, multaque ab ARCHIMEDE itidem non tacta, de corporibus in eadem Sphaera Parallelepipedis, eorumque Cylindris et Conis, sed quae dolij Austriaci naturam unicè attinere videbantur, sub titulo Stereometriae Dolij Austriaci infero, et praemisso ARCHIMEDIS supplemento adjungo. Dolij namque figura est Cylinder ventricosus; seu accuratiùs loquendo, dolium intelligitur diremptum in duos veluti Truncos duorum Conorum, quibus vertices in contraria vergentes, intelliguntur praesecti ligneis dolij Orbibus, Basis verò communis, divisionem Conorum faciens, est circulus per dolij ventrem amplissimus.

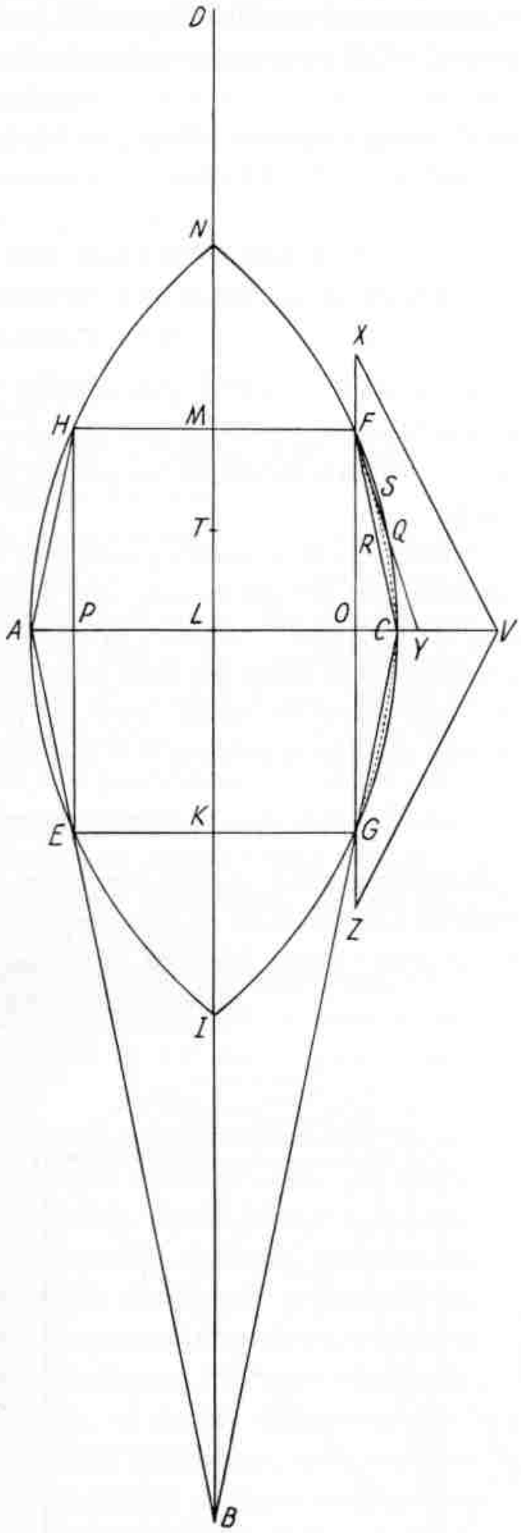
In Schemate XVIII. hic subjuncto, Cylinder intelligitur HEGF, Conus ABC, et alter huic aequalis ab AC versus ND: vertices praesecti EBG, et aequalis illi alter ab HF, versus ND. Trunci AEGC, AHFC, communis basis AC.

Quae igitur de Cylindris et de Conorum truncis vera sunt, eadem etiam ad figuram dolij possunt applicari, quippe quae parum à Cylindro, minusque à trunco conico abit, dum asserum conniventia, hic per rectam CRF intellecta, extrorsum versus, in buccositatem nonnullam flectitur.

Accuratissimè, omnis dolij figura, est medius truncus, vel Citrij ex circuli segmento, vel Pruni ex verticali parte Ellipsis, vel Fusi Parabolici, plerumque verò Hyperbolici, praesectis utrinque verticibus aequalibus. Ratio cur Fusum Hyperbolicum dicam, est haec; quia dolia buccositatem plerumque recipiunt in ventrem medium: versus extrema et orbes utrinque ligneos, magis ad rectitudinem conicam accedunt, ut circuli lignei facilius trudi adstringique adigendo possint. Hoc verò facit et Hyperbola, et nata ab illa, Conoides et Fusum, ut brachia eius à medio flexu sensim degenerent in rectitudinem Asymptotôn. Facit idem ex parte et Fusum Parabolicum et Prunum Ellipticum, sed evidentissimè Hyperbolicum Fusum: Prunum verò Ellipticum minus minusque nec omne, sed gracile tantum, et quod à segmento verticali Ellipsis est,

cuius axis post truncationem ad Focum usque non pertingat: quae cautio etiam in Parabolico Fuso locum habet. Oliva verò, ex Ellipsis segmento inter vertices medio creata, contrarium facit, nam versus extrema magis flectitur, quàm in medio, quod abhorret à dolij figura. Etsi non negaverim, propter insensibilem differentiam istarum figurarum, esse dolio quandoque etiam ex Olivae trunco figuram; at non studio artificis, sed aberratione manus constitutam. Nunquam vero
H 3 v ullum do|lium constitutum puto ex ventre Sphaeroidis Archimedei; quam, ut verae proximam (nondum notis alijs, quarum genesin supra docui)
† CLAVIVS subiecit: *paratus tamen interim* (verba CLAVII), *si quis accuratiorem invenerit, eam libenti animo et grato acceptare.* Nam Sphaeroidis longi, quod in medio justam et dolijs aptam habeat buccositatem, flexura versus truncatos vertices nimia est, nec ulla vincula in ea possent diu haerere. Sin autem sumseris medium ventrem sphaeroidis valde gracilis; minues quidem hoc incommodum flexurae nimiae in extremitatibus dolij, at vicissim ventrem dolio nullum permittis, ac si ex puro puto Cylindro illud construeres.

In hac igitur figura, duo arcus HAE, FCG circuli, cuius



Schema XVIII

diameter aequalis ipsi BT, describunt truncatum Citrium, cuius vertices truncati sunt HNF, EIG. Linea verò punctis notata, inter rectam FRC et arcum FSC, Fusum denotat Hyperbolicum, cuius Hyperboles vertex C, centrum V, Asymptoti VX. VZ. quarum rectitudinem Hyperbola CF, versus F magis magisque affectat, et hîc à contingente sua FQY, secante arcum FSC in Q, difficulter distinguitur.

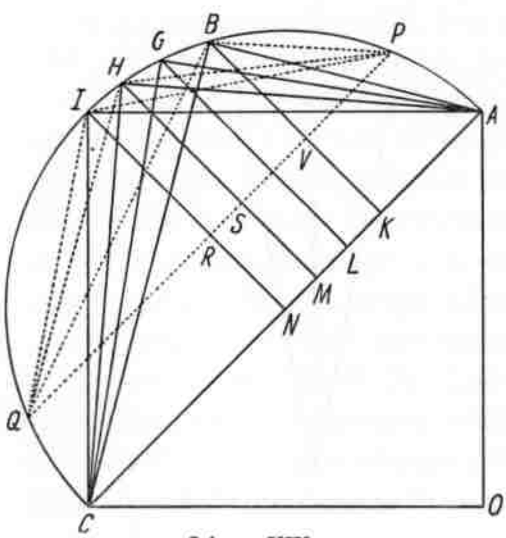
QVA RATIONE QVIS VIRGAM MENSORIAM FALSITATIS ARGVERE POSSIT; ET QVOMODO FIDES EIVS ASSERATVR

Igitur ut ad exordium disquisitionis huius revertar, Elenchus meus Virgae Mensoriae primum erat hic, quod eadem eius longitudo AF dissimilibus figuris doliorum competeret, quarum tamen non essent aequa spacia.

Vt hanc rem in plano demonstrarem: visum est, pro Cylindri corpore assumere Parallelogrammum, quo Cylinder[1] per axem secatur. Nam H 4
quae de Cylindro vera sunt, ea etiam Trunco conico AHFC, eiusque Trapezio, quod illum per axem secat, sc. de plano AHFC, in quod etiam AF virga mensoria incidit, applicari possunt. Nam planum hoc cum cylindri corpore et crescere et minui videbatur. Sit igitur hac de re

THEOREMA I

Cylindrorum rectorum sectiones per Axem, quae diagonios habent aequales, nisi proportio Diametri basis ad altitudinem fuerit eadem aut permutata, inaequales habent areas: estque inter has illius area maxima, quae secat Cylindrum aequealtum diametro suae basis.



Schema XIX

Esto Baseos Cylindraceae diameter CI, altitudo cylindri IA, aequalis Diametro Basis, repraesentans jam dimidium Dolij Vinarij; sectio Cylindri sit AICO Rectangulum, quod hic est quadratum, linea diagonios AC, repraesentans Virgam mensoriam ab infusorio Orificio A, ad orbis lignei IC calcem C, transversim descendens. Et quia cylinder praesupponitur Rectus, erit CIA angulus rectus. Bisecetur AC in N, et centro N, spacio NA scribatur semicirculus AIC, qui per I transibit, quia AIC rectus. Et quia AI, IC aequales, erunt igitur arcus AI, IC quadrantes circuli; et connexis punctis N, I, anguli INA, INC erunt recti, et IN perpendicularis in AC.

Eligantur jam puncta quaecunque unius quadrantis: et sint verbi gratia H, B, connectanturque cum terminis diametri A. C. lineis HA, HC, BA, BC: sic, ut manente eadem diagonio AC, quadratum AICO, vel eius pars dimidia, sc. triangulum AIC, mutetur in alias figuras AHC, ABC, angulo I manente recto, etiam apud H et B, quippe omnibus in semicirculo eodem constitutis; ut ita AHC, ABC, sint iterum rectorum Cylindrorum sectiones dimidiatae, sintque jam diametri Basium CH, CB, altitudines Cylindrorum HA, BA.

Dico aream AIC esse maximam, AHC minorem, ABC (puncto B remotiori ab I quadrantis termino) iterum minorem.

Demittantur enim à punctis H. B. perpendiculares in diametrum AC, quae sint HM, BK. Igitur per demonstrata EVCLIDIS, area cuiusque trianguli aequat Rectangulum sub dimidia basi AC, et altitudine triangulorum, sc. NI, MH, KB. Quare ut IN ad HM et BK, sic AIC area ad ' H4v AHC, et ABC areas. At in quadrante AI omnes Rectae, parallelae semidiametro IN, ut sunt HM, BK, sunt minores ipsa semidiametro IN, et minor BK, remotior ab illa, quam HM propinquior illi. Minor igitur est area AHC, quam AIC, iterumque minor ABC, quam AHC. Rectangula igitur horum triangulorum dupla, sunt eodem ordine maiora.

Dico etiam Cylindris, qui proportionem altitudinum ad diametros Basium habent permutatam, esse sectiones aequales.

Esto enim AB diameter Basis, et BC altitudo Cylindri: patet, triangulum ABC, quod est dimidia sectio Cylindri per axem, manere idem quod antea, cum BC esset diameter Basis, et AB altitudo, eoque proportio harum linearum permutata.

Porrò non celandus est error in quem me conjecit primo die supina Theorematis huius consideratio. Nam haec commemoratio admonebit lectorem, ut à similibus sibi caveat etiam alibi. Sic enim sum ratiocinatus perperam: Cùm arearum similium proportio sit dupla proportionis laterum, Corporum verò similium tripla: fore etiam in dissimilibus, eâdem tamen diagonio AC utentibus, corporum proportionem proportionibus arearum linearumque semper analogam. Hoc verò falsum est: et ego si vietoribus id consilij dedissem, ut semper diametrum orbis lignei constituerent subduplam longitudinis Tabularum; quod securitas areae metiendae requirit, ac si etiam securitati corporis metiendi sic prospectum esset: plurimum ipsorum arti nocuissem, longiusque illos

35/36) proportionis

à scopo abduxissem. Non enim ubi maxima est area plani, secantis cylindrum, ibi est et maximum cylindri corpus. Sed id postea apparebit; nunc quae de cylindro recto sunt dicta, accommodabo etiam ad Truncum Conicum.

THEOREMA II

In Truncis Conicis reliqua omnia manent, nisi quod inter truncos proximos ab illo, qui latus diametro basis minoris habuerit aequale, plus variatur arearum suarum proportio, quàm si Cylindri pro Truncis Conicis essent, inter truncos remotiores minus.

Cùm enim angulus comprehensus à latere Trunci et à diametro basis minoris, sit maior Recto, competet non in semicirculum, sed in arcum semicirculo minorem. Ducatur igitur ipsi AC parallela PQ, secans semicirculum in punctis P, Q, et perpendiculares IN, HM, BK, in punctis R. S. V. et connectantur puncta I. H. B. cùm punctis P. Q. Repraesentat igitur jam PQ Virgam mensoriam, QI, QH, QB diametrum basis detruncati Coni; IP, HP, BP, latus trunci, dimidia longitudo Tabularum in dolijs: et anguli QIP, QHP, QBP obtusi et aequales inter se, quippe in eodem segmento PQI stantes, causam praebent aequalem per has omnes figuras variationis eius, quam hic explicandam sumpsi.

Rursum igitur area PIQ, est ad aream PHQ et PBQ, ut IR ad HS et BV: cùm igitur ab inaequalibus IN, HM, ablata sint aequalia RN et SM: | residua IR et HS erunt in proportione maiori: magis igitur est sensibilis differentia arearum PIQ, PHQ, quam arearum AIC, AHC. Contra decrementa perpendicularium sunt maxima apud A: minora igitur erunt apud P. Et apud P evanescunt perpendiculares Truncorum, apud A verò evanescunt perpendiculares Cylindrorum: minori igitur proportione decrescunt areae PBQ, propiores fini P: quàm areae ABC, propiores fini A. At prius propiores initio I, maiori proportione decrescebant PHQ, quam AHC. Hoc theorema praecipuè notabile est propter hallucinationem aliam diuturniorem, circa comparationem Truncorum conicorum inter se, cuius infra fiet mentio.

Porrò elenchum hallucinationis dictae continet sequens

THEOREMA III

Cylindrorum Rectorum, quorum sectiones habent eandem Diagonium, Corpora non habent inter se proportiones analogas proportionibus Arearum, quibus secantur per Axem: nec cujus est maxima sectrix area, ejusdem et corpus maximum est.

In Schemate priori, cum AIC sit dimidium areae IO, secantis Cylindrum IO per axem, IC Diameter Basis: ductâ igitur AICO area in IC

7) minoris *fehlt* 23) AGC *statt* AHC 38) Diametrum

Diametrum Basis, creatur Parallelepipedum rectangulum, quod Cylindrum stringit. Vt igitur 14 ad 11, sic hoc parallelepipedum ad cylindri sui corpus, per III. praemissae stereometriae Regularium. Ergo in qua figura, ex ijs, quae habent eandem diagonion AC, maximum est hoc parallelepipedum, ibi et Cylinder est maximus. At in figura cuius AIC est dimidia sectio, non est maximum hoc parallelepipedum, quantumvis area sectrix AICO sit maxima: quod sic demonstro.

Sit in quadrante IA punctum H, proximum puncto I, quippe ad finem Quadrantis. Cùm ergo AHC sit alia figura quam AIC, et habeat eandem cum illa diagonion AC, sint vero AIC, AHC areae ad se invicem, ut perpendiculares earum IN, HM: erunt in fine quadrantis inter se in minima proportione, et proximè aequales, quia etiam lineae IN, HM intervallo certo inter se remotae, in minima ad invicem sunt proportione; quae proportio inter easdem semper evadit maior, quo propius illae ad A initium quadrantis, eodem inter ipsas intervallo manente, accesserint.

Atqui, ut corpus creetur, lineae CI, CH ducendae sunt in areas AIC, AHC, et per aequipollentiam, ut Rectangulum sub NI, IC, ad Rectangulum sub MH, HC, sic corpus Parallelepipedi AICI, ad corpus AHCH; atqui maior est proportio HC ad CI, quam IN ad HM. Nam CI subtendit quadrantem, CH paulò plus, et ipsarum dimidia sunt perpendiculares dimidij quadrantis et paulò plus: illae verò non sunt in minima inter se proportione, quippe quae in medio quadrantis maior est quàm in fine, eodem utrinque perpendicularium intervallo supposito. Ergò existente eodem perpendicularium intervallo, quod sit dimidium arcus HI, perpendiculares circa finem quadrantis I sunt in minore proportione, quam dimidiae CI, CH circa medium quadrantis, distantes etiam dimidio arcus HI. Et cum dimidiarum CI, CH differentia sit maior, quàm perpen-
I v dicularium ad I, quae dimidio arcus HI distant, | totarum igitur CI, CH differentia, prioris duplex, erit maior quàm perpendicularium IN, HM, toto arcu HI distantium. Ita conficitur, maiorem esse differentiam inter IC et CH, quam inter HM et IN. Itaque etsi HM secundae figurae est paulo minor quam IN primae: vicissim tamen CH secundae figurae est multo maior quàm CI primae. Maius est igitur Rectangulum MHC quàm NIC, et sic maior Cylinder, eiusque parallelepipedum AHCH, quàm AICI cùm è contrario ipsius Cylindri AHCH, area sectrix AHC, minor antea fuerit, quam AIC. Non est igitur proportio Corporum AICI, AHCH analoga proportioni arearum AIC, AHC. Et AIC quidem est maxima arearum super eadem diagonio, corpus verò AICI non est maximum, sed AHCH est eo maius.

3) stereometricae   21) quadrantem CH, paulò

Praxis et per eam successus

Cùm corpora ex I adhuc crescant versus H, inquisivi logisticè, ubi esset corpus maximum; non enim crescit corpus continuè usque in A, sed in vicinia ipsius A rursum attenuatur, et unâ cum area ABC, tandem in A in nihilum redigitur, quando altitudo Cylindri, analogicè loquendo, punctum est, sc. A, diameter verò Basis AC, coincidens cum diagonio.

Processus hic fuit: sinum arcus AH, AB, multiplicavi in sinum † dimidij arcus HC, BC, per omnes quadrantis gradus ordine.

Cùm autem sit taediosa multiplicatio sinuum, accipe processum breviorem: sit diagonios 20, quadratum 400, sit altitudo AG 1, quadratum 1, hoc ablato à 400, restat quadratum ipsius GC 399: quod duc in altitudinem, venit 399, pro corpore huius columnae, † in comparatione cum caeteris.

Sed in priori processu attendi, ubi primùm consisterent quotientum, seu corporum, incrementa; ab eoque termino iterum decrescerent; illos igitur sinus notavi. Quos cùm interpositâ una nocte repeterem sub aspectum; apparuit, G punctum circumferentiae, apud quod maximum corpus terminabatur, connexum cum AC, praebereGA, latus cubi in Sphaeram AIC inscripti, et GC diagonium plani cubici, seu latus Tetraedri in eadem. Id igitur sequentibus Theorematibus demonstrabitur. Et nota quod hisce Theorematibus tradatur

Hoc pacto si fuerit

Altitudo	Basis diameter	Erit corpus columnae
1	20 —	399
2	20 —	792
3	20 —	1173
4	20 —	1536
5	19 +	1875
6	19 +	2184
7	19 —	2457
8	18 +	2688
9	18 —	2871
10	17 +	3000
11	17 —	3069
Subsemi-	dupla	3080
12	16.	3072
13	15 +	3003
14	14 +	2856
Aequa-	les	2828
15	13 +	2625
16	12	2304
17	11 —	1887
18	8 +	1368
19	6 +	741
20	o.	o

6) cioncidens 19) 794 23) apparavit 35) 2364

RATIO PROPORTIONIS VSITATAE IN FABRICA DOLII AVSTRIACI

THEOREMA IV

1 2 *Omnium Parallelepipedorum*[1] *seu columnarum inscriptarum sphaerae eidem, quae binis ex opposito quadratis Basibus constant, Cubus est maximo corpore.*

Theorema est hactenus desideratum: etsi habet dixin evidentem ex Analogia. Circulus est omnium planorum, aequalibus perimetris con-
† tentorum, capacissimum, ut demonstravit PAPPVS, libro V. Sed et planorum aequali laterum numero contentorum, et aequali perimetro, quae sunt circuli similiora, capaciora sunt.

Rursum et segmentorum ex diversis circulis, quorum circumferentiae sunt aequales, capacissimum est, semicirculus.

Ad eundem modum et Cubus est solidorum omnium, quae aequalibus cum illo superficiebus continentur, capacissimus. Et Polyedrorum Isoperimetrorum, quo fuerit quodlibet Sphaerae similius, ordine et numero laterum: hoc capacius est: Icosaedron quidem capacissimum, quia plurimis Basibus contentum, ut circulus infinitis quasi Basibus. Haec omnia PAPPVS habet libro V.

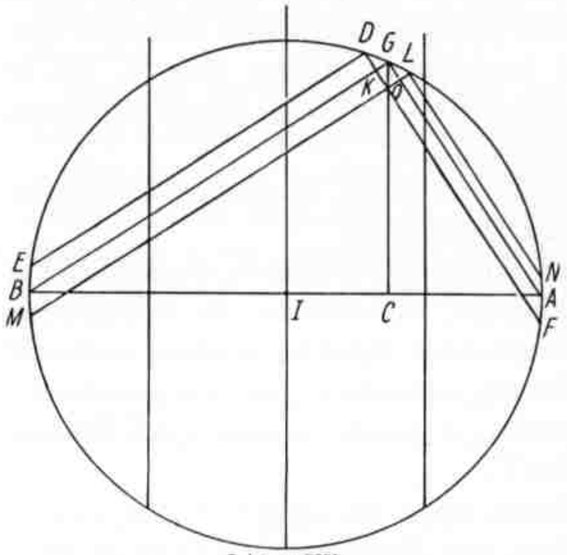
Sed et de segmentis diversorum globorum isoperimetris demonstravit ARCHIMEDES, capacissimum esse Hemisphaerium omnium globi segmentorum, quae aequali superficie contineantur.

Haec quidem praestat figuris caeteris circuli et globi natura, cùm sunt Isoperimetrae. Quando verò remittitur ijs aequalitas superficiei, vicissimque datur Polyedris eadem sphaera circumscripta: contrarium contingit nonnullis, ut Dodecaedron sit maius Icosaedro, quod demonstrarunt APOLLONIVS et HYPSICLES ad EVCLIDEM: at hoc propter eandem globi naturam accidit, et propter similitudinem figurae cum globo, quae hic regnat. Prius enim cum aequales essent superficies, similitudo cum globo consistebat in multitudine superficierum. Hic cum angulorum in varijs figuris ponatur orbis aequalis, et dispositio per illum ordinata: similitudo cum globo consistit in multitudine angulorum, quae maior est in Dodecaedro, quàm in Icosaedro.

Cùm haec sic habeant, facile apparet, etiam inter corpora, quae planorum aequali numero continentur, id esse capacius in globo, quod est globi similius: Vbi similitudo consistit in aequalitate et similitudine superficierum et ordine angulorum. Haec igitur Cubo adsunt, prae reliquis globi Parallelepipedis. Quare Cubus erit capacior. Haec quidem dixis est ex Analogia. Nunc plenam subijcio demonstrationem, quae sanè difficultatem aliquam habet ex eo, quod solidi sectiones minutae concipiendae sunt in Schemate plano.

33) esset

In Schemate proximè subjecto sit Sphaerae circulus maximus AGB, diameter huius, idemque et axis sphaerae AB, et sit Latus Cubi in Sphaera AG, diagonios unius quadrati Cubici GB. Columnae igitur binis quadratis Basibus, quae sphaerae eidem inscribuntur, aut sunt altiores Cubo, Basesque quadratas Cubicis minores habent, aut sunt humiliores Cubo, Basibus quadratis laxioribus.[1]



Schema XX

Sit primò Columna al- 12 v
tior Cubo. Ducatur igitur ipsi GA altitudini Cubi, parallela longior in circulo quae sit DF, secans GB in K: Similiter et ipsi GB, diagonio quadrati Cubici, ducatur parallela ex puncto D, fine altitudinis columnae, quae sit DE, diagonios quadrati Columnaris: dico columnae FDE corpus, esse minus corpore cubi AGB. Est enim DK ad BK, ut GK ad KF; et vicissim ut FK ad KB, sic GK ad KD: sed AG est minor quam FK, et GB est maior quam KB. Maior est igitur proportio AG ad GB, quam FK ad KB. Maior igitur est earundem AG ad GB proportio, quam GK ad KD: sed AG ad GB est proportio subsemidupla. Minor igitur est proportio GK ad KD, quam subsemidupla, et GK vel plus potest dimidio ipsius KD, vel aequat KD, vel ea etiam longior est. †

Facta verò est appositio ad corporis cubici altitudinem per ductum duorum quadratorum columnarium utrinque, in particulam altitudinis KD. E contrario facta est diminutio à corporis cubici crassitie, per ductum quatuor Quadratorum, columnaribus aequalium, circa corpus columnae, in particulam decrementi, qua semilatus quadrati cubici differt à semilatere quadrati columnaris: quod decrementum est ad GK decrementum semidiagonij, ut AG ad GB, nimirum ejus subsemiduplum. Neque tamen hic expressa est omnis diminutio, quia quatuor hosce laterculos speciei quadratae minoris, quam est quadratum cubicum, circumjacent adhuc duodecim columellae, quae itidem de crassitie cubi sunt diminutae. Quod si laterculi quatuor circa columnam, diminuti de corpore cubi, maiores sunt laterculis duobus supra et infra adjectis ad corpus cubi; multò magis tota diminutio de corpore cubi, superabit adjectionem altitudini factam. Atqui maiores sunt quatuor laterculi laterales duobus laterculis altitudinis, quod sic probo. Est enim unusquilibet laterculorum lateralium ad laterculum altitudinis, ut decrementum lateris cubici, ad incrementum altitudinis, sc. cuius dimidium est KD. Sed decrementum lateris cubici, ad incrementum altitudinis, habet proportionem compositam ex proportione AG ad GB, et GK ad KD. Nam ut decrementum semilateris ad decrementum semidiagonij GK, sic AG ad GB, quae est pars proportionis una: altera est ipsa proportio GK ad KD. Atqui proportiones hae duae junctae constituunt aliquid minus subdupla. Est enim AG ad GB subsemidupla, et GK ad KD minor quàm subsemidupla. Semis autem et minus quàm semis composita, faciunt minus quam totum. Si ergo unus laterculus lateralis ad unum altitudinis, habet proportionem minorem subduplâ: unus ergo altitudinis, non est | planè duplum unius lateralis, et unus altitudinis, non planè aequat duos laterales, sed minor est: et per consequens duo altitudinis sunt minores quatuor lateralibus: Et igitur adjectio facta altitudini minor est diminutione factâ de lateribus cubi. Columna igitur Sphaerae, altior cubo, est minor corpore cubi.

Sit secundò columna Cubo humilior, et ducatur ipsi GA altitudini Cubi parallela in circulo minor LN, pro altitudine columnae, et ipsi GB diagonio plani cubici, ducatur ex L parallela LM, pro diagonio quadrati columnaris cubico maioris, secans GA in O.

† Rursum igitur, ut prius, est ut MO ad OA, sic GO decrementum altitudinis ex una parte ad OL incrementum semidiagonij. Sed BG est minor quam MO, et GA est maior quam OA. Ergo proportio BG ad GA, quae est in Cubo semidupla, minor est quàm GO ad OL. Maior est igitur proportio GO ad OL, quàm semidupla.

Sed proportio inter incrementum semidiagonij OL, et incrementum semilateris quadrati, est semidupla. Ergo compositis semiduplâ et plus quàm semiduplâ in unam, erit proportio GO decrementi dimidiae altitudinis ad incrementum semilateris, maior duplâ. Sed per ductum duorum quadratorum cubicorum in GO, creantur laterculi duo diminuti de altitudine corporis cubici. Contrà per ductum quatuor quadratorum cubicorum in incrementum semilateris, creantur laterculi quatuor, qui sunt maiores ea adjectione et circumpositione, quae facta est circa corpus Cubi. Nam etsi appositis his quatuor laterculis, adhuc hiat columna, deficientibus quatuor columellis, apud quatuor erecta columnae latera; tamen vicissim excedunt hi laterculi altitudinem columnae, octo alijs columellis aequealtis cum illis deficientibus, crassioribus tamen quàm illae. Harum enim crassities est GO, illarum crassities est ad OL, ut AG ad GB, minor sc. quàm OL, multo igitur minor quam GO. Tribus igitur nominibus octo crassae columellae excedentes, sunt maiores quatuor exilibus deficientibus. Quatuor igitur laterculi dicti, sunt maiores appositione, facta ad corpus cubi. Quod si igitur incrementum semilateris esset praecisè dimidium ipsius GO: quod creatur à GO, ductâ in duo quadrata, aequale esset ei, quod creatur ab incremento semilateris, ducto in quadrata quatuor. At minus est incrementum semilateris, dimidio ipsius GO, ut demonstratum. Quare et quatuor laterculi quadrati minores sunt duobus laterculis altitudinis. Multo igitur minor est adjectio, facta ad latera cubi, quàm diminutio, facta de altitudine. Columna igitur Sphaerae, humilior cubo Sphaerae, minor est corpore Cubi in eadem Sphaera. At prius etiam altior Cubo, minor erat illo: nulla igitur Columna sphaerae, quadratarum basium et rectangulorum laterum, assequitur corpus Cubi in eadem Sphaera: quod erat demonstrandum.

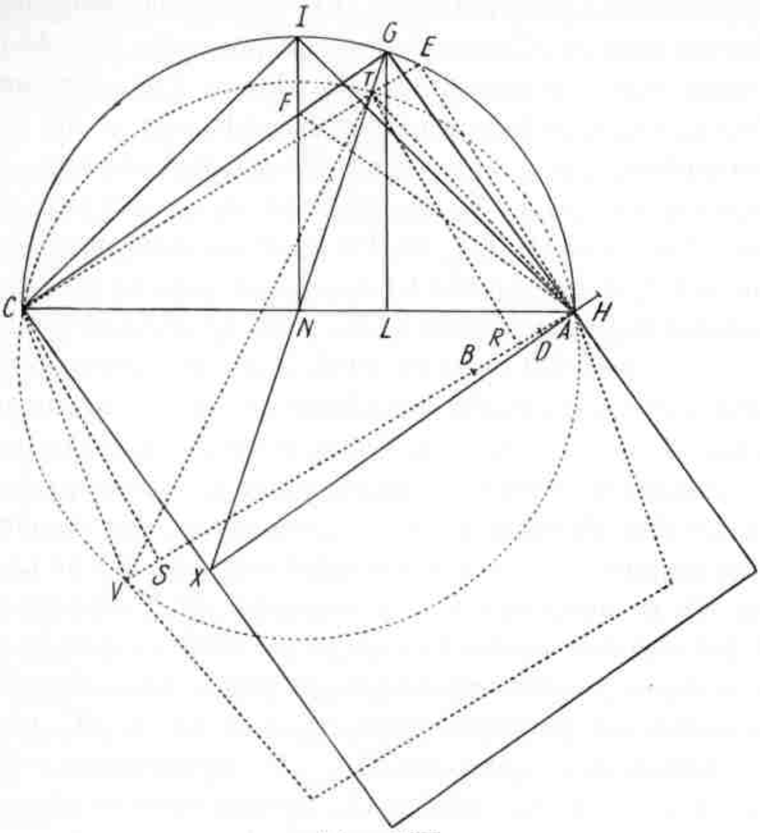
THEOREMA V

Omnium Cylindrorum, diagonium eandem habentium, maximus et capacissimus est is, cujus diameter Basis est ad altitudinem in proportione semidupla, seu | ut 13 v
latus Tetraedri aut diagonios quadrati cubici ad latus cubi in eadem sphaera.

Repetatur Schema Theorematis primi, et sit AC linea diagonios Rectanguli, quo Cylinder secatur per axem, repraesentans virgam mensoriam, et super AC constituatur semicirculus AGC, dividatur verò AC in partes tres aequales, et sit AL pars una, LC duae, et ex L erigatur perpendicularis LG, secans circulum in G, et connectatur G cum A et C. Quia igitur CL ipsius LA est dupla, erit CA ipsius LA tripla. Vt verò CA ad AG, sic AG ad LA. Tribus autem existentibus proportionalibus continuè, ut prima est ad tertiam, sic quadratum primae est ad secundae quadratum, quia ergo CA prima, est triplum tertiae LA, quadratum etiam ipsius CA diametri erit triplum quadrati AG, secundae. Et quia quadratum AC aequat quadrata AG, GC juncta, quorum AG est tertia pars, erit GC duae tertiae ipsius AC, et sic quadratum GC duplum erit quadrati AG. Igitur AG est latus Cubi inscripti sphaerae AGC, et GC est diagonios quadrati Cubici, vel latus Tetraedri inscripti eidem sphaerae. Dico Cylindrum, cuius diameter baseos est GC, altitudo GA, esse omnium Cylindrorum, quibus est haec diagonios AC, capacissimum, seu maximo corpore. Nam quia G, C puncta sunt in superficie sphaerae, et linea GC est diameter basis unius: tota igitur circumferentia illius basis stabit in circumferentia sphaerae; sic et basis opposita, cuius unum punctum A. At si AG latus est Cubi, et GC diagonios lateris Cubici, necessario in circulo GC, et sic in Sphaera, inscriptum erit quadratum

19) conus *statt* Cylinder 30) AC *statt* GC 31) Tedraedri

cubicum, cuius oppositi duo anguli G, C, sic et in circulo basis oppositae per A traductae. Itaque Cylindrus jam definitus, habebit inscriptum



Schema XXI

Cubum eiusdem secum altitudinis, cuius omnes anguli stant in superficie sphaerae.

Eodem modo etiam in alio quocunque sphaerae circulo, cuius verbi gratia IC diameter, intelligitur inscriptum quadratum columnae, cuius |
14 altitudo IA, et quadrati unius anguli duo I. C oppositi, quadrati alterius anguli A, X: itaque Cylindro AIC columna aequealta inscripta est.

Atqui omnium Columnarum ad Cylindros aequealtos, quibus inscribuntur, eadem est proportio; Cubus verò omnium in sphaera Columnarum est maximus, Cylinder igitur AGC, cubo sphaerae circumscriptus, omnium aliorum Cylindrorum in sphaera, ut AIC, maximus est.

Eadem demonstratio potest etiam per Schema XIX. in hunc modum institui. Cylindri tres terminentur in H, G, B, punctis, eandem habentes diagonion CA, bases CH, CG, CB, altitudines HA, GA, BA. Sit autem quadratum CG duplum quadrati GA, et CH brevior, CB longior ipsâ CG. Descendant perpendiculares in CA, quae sint HM, GL, BK. Cùm igitur sit CGA rectus, erit ut quadratum CG ad quadratum GA, sic recta CL ad rectam LA, dupla scilicet eius; et ut quadratum CH ad quadratum HA, sic CM ad MA, et ut quadratum CB ad quadratum BA, sic CK ad KA. Vt verò quadrata CH, CG, CB inter se, sic sunt etiam bases Cylindrorum circulares inter se. Quare ut CM, CL, CK inter se, sic etiam sunt bases cylindrorum inter se. Componitur autem proportio Cylindrorum ex proportione basium et proportione altitudinum. Ergo rectangula tria, sub CM, CL, CK, quae habent proportionem basium, et sub HA, GA, BA altitudinibus, habent inter se proportionem Cylindrorum.

Permutatim autem, ut AM, AL, AK inter se, sic sunt inter se etiam quadrata altitudinum AH, AG, AB. Est igitur quantitas eadem LM, quae adijcitur ad LA, et aufertur ab LC; et vicissim quantitas est eadem LK, quae aufertur ab LA, et adijcitur ad LC. Cùm autem CL sit dupla ipsius LA, proportio igitur CM brevioris, ad CL longiorem, est maior dimidia proportione eversa ipsius MA tanto longioris, ad LA breviorem. Vt si † CL sit 20, LA 10, deinde CM 19, MA 11, proportio 20 ad 19 maior est dimidia proportione ipsius 11 ad 10, hoc est 22 ad 20. Nam proportio 22 ad 20 habet duo elementa, 22 ad 21, et 21 ad 20, quorum utrumque minus est proportione 20 ad 19. Est igitur proportio MA ad LA, et sic quadrati HA ad quadratum GA, minor quàm dupla proportionis CL ad CM. Sed rectarum ipsarum HA ad GA proportio est dimidia quadratorum, et duplae proportionis dimidia est simpla. Ergo altitudinis HA ad altitudinem GA proportio minor est, quàm LC ad MC, proportio basium. Rectangulum igitur sub HA, CM, repraesentans cylindrum CHA, minus est rectangulo sub GA, CL, repraesentante cylindrum CGA, quia CM est brevior in sua proportione, HA longior in suâ.

Idem demonstratur versis argumentis etiam de cylindro CBA. Nam proportio CK longioris ad CL breviorem, est minor quàm dimidia proportionis eversae AK brevioris ad AL longiorem. Vt si CL sit 20, LA 10, deinde CK 21, KA 9. Proportio 20 ad 21 minor est quam dimidia ipsius 9 ad 10, vel 18 ad 20. Nam proportionis 18 ad 20 elementa duo, 18 ad 19, et 19 ad 20, sunt singula maiora proportione 20 ad 21. Proportio igitur LA ad AK, hoc est quadrati GA ad quadratum AB, maior est quam dupla KC ad CL: et sic linearum GA ad AB proportio maior est, quàm KC ad CL; nec quanto BA brevior est ipsa GA in proportione sua, tanto vicissim longior est CK quàm | CL in sua; et rectangulum sub 14 v
BA, CK minus est rectangulo sub GA, CL, cylinder igitur CBA minor cylindro CGA: solus igitur CGA omnium maximus.

Corollarium I

Dolia Cylindracea sine Ventre, sive longioris fuerint figurae quàm Austriaca sive curtioris, minus sunt capacia Austriacis.

21) BA *statt* GA

Corollarium II

Patet hinc bono quodam et Geometrico genio esse factum, quod Austriaci Vietores Regulam hanc observent construendi dolij; ut tertia parte de longitudine Tabulae utantur pro semidiametro Orbis lignei. Nam hac ratione fit, ut Cylinder inter duos orbes ligneos mente adumbratus, quàm proximè habeat duas medietates, ad Regulam Theorematis V. quadrantes, et figurae capacissimae participes, etsi à perfectione Regulae nonnihil recedant. Nam figurae aliae, terminatae ad puncta ipsi G proxima cis et ultra, minimum variant capacitatem; quia capacitas figurae AGC maxima est: circa maximam verò utrinque circumstantes decrementa habent initio insensilia.

In Schemate sequenti CG ad GA habeat rationem semiduplam, eam nempe quam 100000 ad 70711: duplicata AG ex hac regula debebat habere 141421; at vietores pro hoc sumunt longitudinem 150000. sesquialteram basis, pro duplicata longitudine tabulae GA, quod paulò plus est, quam 141421. Et hoc ipsum facit ad figurae capacissimae imitationem accuratiorem. Nam tabulae et curvantur et marginibus utrinque extant et procurrunt super crenas, quibus capiunt et stringunt orbes ligneos. Quod igitur nimium est in hac tabularum longitudine, quae est ad diametrum basis in proportione sesquialtera, id his marginibus imputatur, qui in examinatione figurae ad regulam Theorematis V. non censebantur.

Quis neget Naturam instinctu solo, sine etiam ratiocinatione docere Geometriam? cùm Vietores nostri, solis oculis et speciei pulchritudine ducti, capacissimam in dimidiato dolio figuram exprimere didicerint? Prodeat Geometra, doceatque faciliorem Methodum construendi dolij, quod dimidiâ sui parte ad capacissimum Cylindrum propius accedat, quàm est haec ipsa, quam Vietores Austriaci ex antiquo tenent, proportionis sesquialterae: doceat idem Geometra figuram ad compendiosè mensurandum aptiorem, quàm est illa quam struit Austria.

Credere poteram, extitisse olim praestantissimum aliquem in Austria Geometram, qui Vietores ista docuerit; nisi me hoc retinuisset, quod pulcherrimae demonstrationis vestigia nuspiam extant in libris Geo-
† metrarum: quodque ratio haec construendi dolij, quod equidem sciam, ad Rhenum caeteraque loca vitifera, usitata non est; ferè enim longiora dolia factitant. Quod igitur publicè receptum non est, quî possit esse verisimile, ex libris aut institutione Geometrarum, ab una sola natione petitum esse?[1]

15) pro longitudine tabulae GX

Admonitio K

Quis tam est ingenio perspicaci et circumspecto, qui eluctatus ex hallucinatione ista, qua Cylindrorum eandem diagonion habentium illis maximum corpus tribuerat, quibus est area maxima sectionis per axem; postquam didicit, ijs Cylindris esse maximum corpus, in quibus diameter basis est semidupla altitudinis, per Th. hoc V. ijs verò, qui lineas has habeant aequales, aream sectionis esse maximam, per Th. I. huius partis: et verò eandem esse circa areas et Truncorum Conicorum rationem, per Th. II. huius: qui inquam his perspectis, non statim etiam de corpore Trunci conici praesumat idem, quod de corpore Cylindri: quòd scilicet etiam Trunci conici illius corpus sit maximum, in quo diameter basis minoris, sit semidupla lateris acclivis? Atque id ego et credidi per hunc sesquiannum, et secutus sum: jamque in hoc eram, ut hoc nixus fundamento, dolia Rhenensia promiscuè omnia, sine discrimine ventrium, Austriacis postponerem in capacitatis censura: quod nullâ quidem illorum cum iniuria fecissem, sed tamen iure non aequali. Itaque commoditati Typographiae praesentis acceptum fero, quod aurem hic vulsit Geometria editionem curanti, sequentiaque Theoremata, velut augendo supplemento ad ARCHIMEDEM, mihi suppeditavit; quibus simul altera, multoque priore mirabilior proprietas dolij Austriaci traditur.

Definitio

Cylinder et Trunci Conici coniugati dicantur, quando sectionibus utrorumque per axem fuerit eadem, vel aequales diagonij, et ut diameter basis cylindri ad eius altitudinem; sic diametri minoris basis Truncorum, ad eorum latera acclivia. †

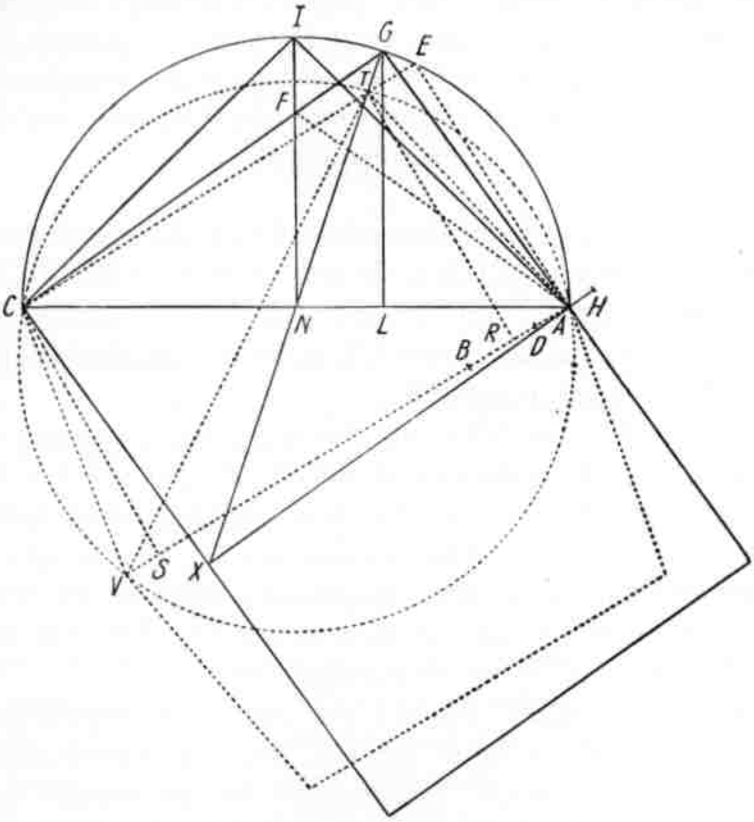
THEOREMA VI. PROBLEMA

Dato Cylindro et Trunci conjugati latere, vel basis minoris diametro, invenire trunci conjugati lineas reliquas. Oportet autem proportionem lateris vel basis in Cylindro ad datum latus vel basin Trunci, esse minorem proportione diametri et altitudinis Cylindri junctarum, ad diagonium.

Datus esto Cylinder AGCX, basis diametro CG, altitudine GA, diagonio AC: et Trunci data esto diameter basis CT; et proportio CG ad CT sit minor proportione CG, GA junctarum ad CA. Oportet

12) dupla *statt* semidupla

invenire latus trunci et diametrum basis maioris. Fiat ut CG ad GA, sic CT ad aliquam, puta AT: et super CA struatur triangulum ex CT, AT. Nam quia proportio CG, GA ad CA est maior, quàm proportio CG ad CT, erit etiam maior quàm GA ad AT, et junctis terminis, maior erit



Schema XXI

proportio CG, GA ad CA, quàm earundem CG, GA ad CT, TA. Ac proinde CT, TA junctae maiores erunt, quàm CA, poterit igitur fieri triangulum ex CT, TA super CA. Scribatur autem circulus circa C, T, A, K v puncta; et ex C, ipsi | TA aequalis extensa, applicetur circulo in V, et connectantur A, V, dico TA, CV esse Trunci coniugati latera acclivia, AV diametrum basis maioris.

Connexis enim T, V punctis: cùm TA sit ipsi CV aequalis, communi arcu TC apposito ad arcus TA et CV, erunt arcus AC, TV aequales, proinde et subtensae AC, TV aequales, et angulus ATC, angulo VCT, aequalis; quadrilaterum igitur ATCV, erit ordinatum et circulo inscriptum, eadem diagonio AC vel TV cum parallelogrammo AGCX, et eadem proportione CT ad TA, quae est CG ad GA; Truncus igitur,

16) qua

cuius sectio per axem ATCV, et cylinder, cuius sectio AGCX, conjugati erunt.

THEOREMA VII

Si fuerint Cylinder et Truncus Conicus coniugati, et differentia diametrorum in basibus trunci secetur in proportione, quam habent inter se quadrata diametri Basis et altitudinis Cylindri; erit hoc diametri quadratum, aequale rectangulo, sub minore diametro Trunci, et sub composita ex hac et segmento, quod diametro Cylindri respondet.

Sit AGCX cylindri sectio, diagonios AC: dividat autem hanc perpendicularis à G in partes CL, LA, sic ut CL respondeat ipsi CG. Formetur etiam sectio Trunci ATCV, super eadem AC diagonio, per VI. praemissam, cuius diametri, minor CT, maior AV, et ablatâ ab AV, ipsi CT aequali VB, residuum esto BA.

Cùm igitur ATCV quadrilaterum stet in circulo, quadratum ab AC, erit aequale rectangulis duobus, et sub TC, AV, et sub TA, CV, id est [1] quadrato de TA vel CV, junctis. Ablato igitur quadrato ipsius AT, K 2
à quadrato ipsius AC, restabit rectangulum sub TC, AV, hoc est sub BV, VA. Atqui etiam quadrato ipsius AG, maioris, quàm est AT, ablato ab eodem quadrato AC, relinquitur rectangulum GC, AX, hoc est quadratum GC, quod ideò minus est rectangulo BVA.

Erit igitur rectangulum aliquod minus quam BVA, aequale quadrato GC; sit BVD, residuum igitur sub DA, BV, erit excessus rectanguli BVA, super quadratum GC. Sed excessus hic est aequalis excessui quadrati GA, super quadratum AT. Et quia rectangulum BVD, positum fuit aequale quadrato GC, et rectangulum DBV, est excessus rectanguli BVD, super quadratum BV vel TC; est igitur DBV etiam excessus quadrati GC super quadratum TC. Componendo igitur, cùm sit quadratum AG ad quadratum GC, ut quadratum AT ad quadratum TC; erit etiam, ut quadratum AG ad quadratum CG, hoc est, ut AL ad LC, sic excessus quadrati AG super quadratum AT, hoc est, rectangulum sub DA, BV, ad excessum quadrati GC super quadratum TC, hoc est ad rectangulum DBV. Vt igitur AL ad LC, sic rectangulum sub AD, BV, ad rectangulum DBV; quare cùm rectangula habeant eandem longitudinem BV, erunt etiam ut AL ad LC, sic latitudines AD ad DB. Quare reflectendo si fuerit divisa AB in D sic, ut sit BD ad DA, sicut est CL ad LA, hoc est, ut quadratum CG ad quadratum GA; rectangulum BVD, aequabit quadratum GC, quod erat demonstrandum.

36) DBV

Corollarium I et Praxis

Si dantur quadrata altitudinis et basis Cylindri, cum diametro basis minoris in Trunco, divide quadratum basis per diametrum basis trunci datam, à quotiente aufer divisorem, quod restat, multiplica in summam † quadratorum, factum divide per quadratum altitudinis cylindri, provenit differentia diametrorum, adijcienda ad minorem datam, ut componatur diameter Trunci maior.

Exemplum

Sit quadratum AG 20000. quadratum GC etiam	20000	167⁻Quotiens	
Et sit TC	120	120 Divisor	
	BD	47 Differentia	

Summa quadratorum 40000

Factus	1866664	93 + Quotiens AB
quadratum AG	20000	120 TC
		213 + composita, AV.

Corollarium II

Si verò econtrà datur solùm proportio quadrati altitudinis ad quadratum basis diametri, et diameter utraque basium Trunci; Diameter † Basis Cylindri sic invenitur. Adde numeros, quibus expressa est quadratorum proportio, et multiplicatâ differentiâ diametrorum trunci in numerum quadrati maioris, factum divide per summam utriusque Numeri, quotientem multiplica in minorem Trunci diametrum, proveniet quadratum diametri in basi Cylindri.[1]

K 2 v Sit CG ad GA ut 3. ad 2.
quadrata ut 9. ad 4.
Sit CT 130, VA 156, differentia 26.
Factus 234.
Summa 13. | 18. Quotiens
130. CT
Factus 2340. quadratum CG.

Vel quod idem est, numerum quadrati maioris multiplica in diametrum minorem, et fac, ut summam quadratorum ad differentiam diametrorum trunci, sic factum ad quartum, qui erit quadratum CG.

11) AD 13) 1866667 23) base

Corollarium III

Si quadratum AG, ad quadratum GC, est ut 1. ad 2. DV est duarum † medietatum arithmeticarum inter TC, AV maior; hinc Praxis brevior.

Dia- 19. 20. 21. 22. metri
19.
399. quadratum GC.

Corollarium IV

Sicut se habet basis minor Trunci, ad basin Cylindri, aut quadratum lateris acclivis Trunci, ad quadratum altitudinis Cylindri, sic se habet diameter minoris basis, ad compositam DV.

THEOREMA VIII

In Cylindro et Trunco conico conjugatis, altitudinum proportio componitur ex proportione Diametrorum in Basibus, minori Conici trunci, et utraque Cylindri, et ex proportione perpendiculi ad latus acclive Trunci.

In Schemate XXI. sint figurae conjugatae CGAX et CTAV, in quibus diametri baseon, Cylindri CG, XA, Trunci minor CT, maior VA, sitque perpendiculum Trunci TR, latus acclive TA. Dico proportionem altitudinum Cylindri GA, ad Trunci TR, componi ex proportione GC ad CT, et ex proportione AT ad TR. Theorematis ipsius facilis est demonstratio, nec minus tamen separatim fuit tradenda, ob Corollaria et Analogiam notabilem. Cùm enim sit CG ad GA, sicut CT ad TA, permutatim igitur, erit GC ad CT, ut GA ad AT: Sed proportio GA ad TR, composita est ex proportione GA ad AT, et ex proportione AT ad TR: ergo etiam ex GC ad CT, et ex AT ad TR.

Corollarium et Praxis quaerendae altitudinis

Datis CT, et VA, per praemissam, datur etiam quadratum ipsius CG; data verò proportione huius quadrati CG, ad quadratum GA, datur etiam [1] quadratum GA, et quadratum TA. Sed et differentia ipsarum CT, K 3
VA, nota est, sc. BA: et quadratum TA maius est quadrato TR, parte quarta quadrati BA, in omni conjugatione. Anguli enim ad C et T aequales sunt, et CT, VB aequales, ex Hypothesi, atque etiam parallelae: connexis igitur B, T, erit BT aequalis ipsi CV: sed haec est aequalis ipsi TA, ex hypothesi: Ergo BTA isosceles est cuius TR perpendiculum: itaque BR

2) AC *statt* GC   16) VCT *statt* CT   29) TA, minus est

est aequalis ipsi RA, eòque quadratum BA, quadruplum ipsius RA. Ablata igitur parte quarta quadrati BA à quadrato TA, restat quadratum TR, altitudinis Trunci, quod comparatum cum quadrato GA, constituit quaesitam proportionem.

Exempla

Sit TC 19. AV 22. Quod si quadratum GC fuerit ad GA duplum: erit quadratum GC ut prius 399. Erit igitur quadratum GA 399 semisses, vel 798 quadrantes: proinde cùm quadratum de 19 sit 361, erit etiam quadratum TA 361 semisses vel 722 quadrantes. Denique cum differentia CT et VA, sc. 19 et 22, sit 3, quadratum 9, pars quarta 9 quadrantes: aufer hos à 722, restant 713 quadrantes pro quadrato TR. Ita constituitur proportio quadrati GA ad quadratum TR, quae 798 ad 713.

Sit verò alia conjugatio, quadrata sc. AG, GC aequalia, et sic etiam quadrata AT, TC: et maneat CT 19. VA 22. Erit quadratum TA 1444 quadrantes, eoque quadratum TR 1435 quadrantes: Et proportio quadrati GA ad quadratum TR, quae 1596 ad 1435, vel in minimis, quae 228 ad 205.

Aliud Exemplum. Sit TC 19. AV 20. seu quod idem est 57, et 60. ut communicent cum ternario, propter usus secuturos. Deinde sit quadratum GC ad quadratum GA, non duplum, ut 2. ad 1. vel ut 8. ad 4. sed minor, ut 7. ad 4. Cùm ergò per praemissam differentia, quae hic est 3, sit dividenda in proportione 7 et 4, tota igitur est ut 11. eòque alij termini sunt assumendi, communicantes cum 11, scilicet 627. et 660. ut sit differentia 33. de qua pars respondens quadrato GC est 21. Composita igitur VD est 648. quam duc in minorem diametrum 627, provenit 406296, quadratum GC, quod est ad quadratum GA, ex hypothesi, ut 7. ad 4. Ergo quadratum GA 232169 cum septimâ, seu 928677 – quadrantes. Est autem quadratum minoris TC 393129, et ut 7 ad 4, sic quadratum TC ad quadratum TA, quod erit ideò 224645 et 1 septima, seu 898581 – quadrantes. Differentia diametrorum est 33, cuius quadratum 1089, et eius quarta pars totidem quadrantes. Aufer hoc à quadrato TA, relinquuntur 897492 –. Hic ergò est proportio quadrati GA ad quadratum TR, quae 928677 ad 897492 vel 3714708 ad 3589968; in minimis, ut 464338 ad 448746.

Sit autem proportio quadratorum non ut 7. ad 4, sed ut 9. ad 4. ipsarum sc. linearum GC ad CT, quae 3. ad 2. et sit TC 19. AV 20. Oportet ergò differentiam 1 dividere in proportione 9. ad 4. Tota ergo secanda est in particulas 13, et propter communionem cum ternario, in 39. Fient autem termini VA 780, TC 741, quadratum 549081. Vt autem 9 ad 4, sic quadratum hoc ad quadratum TA 244036, de quo aufer quartam de quadrato 39, sc. 1521 quadrantes, restant 974623 quadrantes, pro TR. Iam pars differentiae, respondens quadrato GC, est 27: composita igitur est 768, qua ducta in diametrum 741, provenit quadratum GC 569088, ut verò 9 ad 4, sic hoc ad 252928 seu 1011712 quartas. Ergo proportio quadrati GA, ad quadratum TR, est illa, quae 1011712 ad 974623.

8) etiam TA 28) diemetrorum 29) reliquuntur 31) 464377 *statt* 464338 33) VC *statt* TC

Corollarium II et Analogia

In conjugatione aequalitatis pulchra existit series proportionum inter quadrata altitudinum: talis nempe.[1]

K 3 v

Si fuerit TC ad AV	Erit quadr. GA ad qdm. TR	In conjugatione dupla talis					Increm:	
		TC	AV	quadr. GA	diff.	quadr. TR	1^{ma}	2^{da}
ut 1 ad 2	ut 1 ad 2	1	2	ut 3	7	ad 10	22	
2 3	3 4	2	3	21	11	32	34	12
3 4	5 6	3	4	51	15	66	46	12
4 5	7 8	4	5	93	19	112	58	12
5 6	9 10	5	6	147	23	170	70	12
6 7	11 12	6	7	213	27	240	82	12
7 8	13 14	7	8	291	31	322	94	12
8 9	15 16	8	9	381	35	416	106	12
9 10	17 18	9	10	483	39	522		
Quia puncta D, R hîc coëunt.		Tale quid occurrit in unaqualibet Conjugatione.						

THEOREMA IX

Si differentia diametrorum Trunci secetur in proportione quadratorum laterum Cylindri conjugati, et addatur pars respondens diametro Basis Cylindri ad minorem, fiantque rectangula, I. sub minore et maiore, II. sub minore et modo composita: Proportio rectanguli primi, aucti tertia parte quadrati à differentia diametrorum, ad rectangulum secundum, et proportio altitudinis Cylindri ad altitudinem Trunci, in unum compositae, constituunt proportionem corporis Trunci ad corpus Cylindri conjugati.

In Schemate XXI. manentibus caeteris, ut praecedenti Theoremate, sit BA differentia divisa in D sic, ut sicut quadratum AG ad quadratum GC, sic sit AD ad DB. Dico proportionem rectanguli sub CT, AV, unâ cum tertia parte quadrati à BA, ad rectangulum CT, VD, et proportionem GA ad TR, in unum compositas, constituere proportionem corporis Trunci ad Cylindri conjugati corpus. Nam per XVII primae partis, est ut rectangulum CT, VA, junctâ tertiâ parte quadrati de BA, ad quadratum CT, sic corpus Trunci CTAV, ad corpus Cylindri aequealti et inscripti, super basi eadem CT. Vt verò quadratum CT ad quadratum

2) cnnjugatione 13) 13 ad 13 19) quadratorum *fehlt*

CG, ita corpus Cylindri super CT basi, ad corpus Cylindri aequealti, super basi CG, per dicta ad III. et XVI. p. primae. Vt ergo rectangulum CT, VA, junctâ tertiâ parte quadrati de BA, ad quadratum CG, hoc est, per VI. praemissam, ad rectangulum CT, VD, aequale quadrato GC: ita corpus Trunci, basibus CT, AV, ad corpus Cylindri aequealti. Si ergo Truncus haberet altitudinem Cylindri conjugati, sc. GA; valeret haec jam dicta proportio sola. Iam verò ut GA, altitudo Cylindri conjugati, ad TR, altitudinem minorem, sic Cylinder conjugatus, ad Cylindrum altitudine Trunci, basibus ijsdem, per Th. XVII. p. primae; et sic etiam Truncus altitudine GA, ad Truncum conjugatum, altitudine TR. Haec igitur est proportionis pars altera.[1]

K 4

Corollarium I et Praxis

Data proportione Trunci ad Cylindrum aequealtum, basi CG, per praemissas: data etiam proportione quadrati GA, altitudinis Cylindri, ad quadratum TR, altitudinis Trunci conjugati, quia quadratorum proportionalium radices etiam proportionales sunt, sed proportionis dimidiae: quadrabimus igitur numerum, quo effertur corpus Trunci, et faciemus, ut quadratum GA ad quadratum TR, sic quadratum numeri Trunci, altitudine GA, ad quadratum numeri justi Trunci, hoc est conjugati, altitudine TR: Radix ex hoc quadrato numero prodit numerum corporis Trunci, in proportione, ut quadratum GC valet Cylindri conjugati corpus.

Sit CA quadratum ad quadratum GA ut 7. ad 4. et sint CT. 19. AV. 20, vel ut in exemplo Th. VII. 627. 660. differentia 33. Minore ergò medietate Arithmeticâ 638 in 627 ductâ, addito quadrato de 627, vel totâ 660 in eandem 627 ductâ, addito rectangulo ex 11 in 33, conflabitur 414183 pro corpore Trunci. Supra verò quadrati altitudinis cylindri conjugati, ad quadratum altitudinis Trunci proportio erat quae 464338 ad 448746. Si feceris ergò, ut illum ad hunc, sic quadratum numeri Trunci hic inventi ad quartum, proveniet 165773240994, cuius radix 407153 pro Trunco: cùm quadratum GC, diametri cylindri, repraesentans eius corpus, esset 406296. En Truncum maiorem cylindro, plus quàm parte quingentesima, cum in eadem proportione diametrorum, sed conjugatione proportionis duplae, in hoc Theoremate proposita, Truncus esset minor cylindro, minus quam parte termillesima.

Age verò etiam conjugationem tentemus proportionis dupla maioris. Sit TC 19. AV. 20. et quadratum GC ad quadratum GA, ut 9 ad 4. Erant supra Th. VIII. termini TC 741, AV 780. Et quadratum GC 569088. Et quadratum GA ad quadratum TR, ut 1011712 ad 974623.

Ducto autem 741 in 780, et differentiâ 39 in partem tertiam 13, factisque additis, conflatur numerus Trunci 578487. Denique huius quadrato multiplicato in 974623, et facto diviso per 1011712, prodit 322399007006. Et hinc radix

28) 464377 *statt* 464338 30) GC, diametri *fehlt* 37) TC 641 . . . GC 869088.

567802 est argumentum Trunci conjugati, cùm 569088 sit argumentum cylindri. Truncus igitur hic minor est plus quam parte sexcentesima. Minor autem erat in conjugatione proportionis duplae, minus quam parte termillesimâ.

Corollarium II

In conjugatione duplae proportionis duarum medietatum arithmeticarum utraque servit calculo, minor pro Tunicae corpore, maior pro quadrato GC, et corpore cylindri conjugati.

Exempla.

Differentia.	Dia	- -	- -	metri,
3	19.	20.	21.	22.
3	19.	Diff. 3.	19.	
9	361.	60.	399.	
4	4.	361.	4.	
	1444.	421.	† 1596.	
	9.	421.	in minimis per 7.	
	*1435.	177241.	† 228.	*205.

Multiplicato 177241 per 205, facto diviso per 228, provenit 158362 cuius radix 398 + denique arguit corpus Trunci in ea proportione, ut Cylinder conjugatus valet 399.

In hac ergo conjugatione et †

Proportione Diametrorum	reperitur Cylinder,	Truncus
1. 2.	15.	11 +
2. 3.	48.	46 +
3. 4.	99.	97 s.
4. 5.	168.	167 —
5. 6.	255.	254 —
6. 7.	360.	359 —
7. 8.	483.	482 —
8. 9.	624.	623 +
9. 10.	783.	782 +
etc.		
19. 20.	3363.	3362 + 1

Corollarium III

K 4 v

In figuratione proportionis aequalitatis, seu cum altitudo aequat diametrum basis, utiles sunt, primò duarum medietatum arithmeticarum minor pro Tunica, deinde unica medietas arithmetica pro diametro GC.

	Dia-	Media	Vnum	duo	-metri
Diff.					
3	19.	20.		21.	22.
vel 6	38.	40.	41.	42.	44.
6	38.	6.	38.		
36	1444.	240.	1558.		
4	9.	1444.	—		
9	1435.	1684.	—		
In minimis	35.	- - - - -	38. per commun. divisorem 41.		

Tunica est 240. inscriptus Cylinder 1444. Truncus ergo 1684, cuius numeri quadratum 2835856 multiplicatum in 35, et factus divisus per 38. prodit 2611972, et hinc radix 1616 + pro corpore Trunci, qualium corpus Cylindri conjugati est 1558.

Exemplum.

Hoc pacto reperitur

in proport.	Cylinder:	Truncus
1. 2.	54.	60
2. 3.	180.	197 +
3. 4.	378.	405 +
4. 5.	648.	685 —
5. 6.	990.	1036 —
6. 7.	1404.	1456 +
7. 8.	1890.	1946 —
8. 9.	2448.	2521
9. 10.	3078.	3160 +
etc.		
Deniq.		
19. 20.	13328.	13468 +

pars minor centesimâ secundâ in excessu est.

36) 1846 *statt* 1946

Consideratio Analogiae

Hactenus fuerunt Theoremata aliquot, quibus utitur Calculus inquirendae proportionis inter Conicum Truncum et suum Cylindrum conjugatum. Ex hoc verò calculo multa desumuntur consideratione dignissima. Nam primùm per Corollaria II. et III. praxesque varias inter se comparatas, apparet, non semper eandem esse proportionem Trunci ad Cylindrum, in una aliqua conjugatione, sed variari cum variata proportione Diametrorum Trunci. Et in Corollario quidem II. inventus est † decrescere Truncus manente Cylindro: in Corollario verò III. crevit Truncus, rursum manente Cylindro. Nam in infima linea excessit Cylindrum parte minus centesima, superius parte minus tricesima octava, inde tricesima tertia, et sic semper maiori, usque ad summam lineam, ubi erat pars omninò decima in excessu. Necesse autem est, si continuetur calculus ulteriùs, Truncum tandem fieri iterum minorem Cylindro, in eadem conjugatione. Quaeritur ergo quis Truncus in qualibet conjugatione sit maximus, quis item Cylindro conjugato aequalis. Secundò apparuit ex tribus Corollarijs et calculo adjuncto, vicissitudinem hîc aliquam esse inter conjugationes proportionis dupla maioris et inter conjugationes minoris. Nam in qua conjugatione regnat proportio dupla, in ea primùm omnium, Truncus omnis videtur minor existere Cylindro, licet insensibiliter, sic, ut Cylinder ipse, veluti Truncorum omnium primus, et proportio diametrorum eius, quae est proportio aequalitatis, sit Truncorum omnium maximus et sibi ipse aequalis: in qua verò conjugatione regnat proportio maior | duplâ, Trunci omnes, etiam proximi ipsi Cylindro, sensibiliter minores fiunt Cylindro conjugato: an ergò vicissim, in qua proportio regnat minor duplâ, Trunci primùm cylindro evadant maiores, usque ad certam metam; inde rursum decrescant, fiantque tandem cylindro suo aequales, deinde minores; donec tandem Trunci penitus evanescant, manente cylindro conjugationis? Tertiò, cum omnium conjugationum caeterarum cylindri sint minores cylindro conjugationis duplâ proportione usae: crescant verò Trunci aliquarum conjugationum supra suos cylindros conjugatos: quaeritur num hic excessus tantus sit, ut aequet vel superet cylindrum per conjugationes omnes maximum, et si hoc, quae sint ergo diametrorum proportiones, in quibus Truncus fiat cylindro maximo aequalis? Haec igitur sequentibus aliquot Theorematis nobis sunt expedienda, quantum quidem eius per meam scientiam fieri poterit: sunt enim ad aestimationem et comparationem doliorum cumprimis necessaria.

THEOREMA X

In omni conjugatione, Trunci per augmentum proportionis diametrorum tandem fiunt minores quacunque data quantitate solida.

Sit coniugatio quaecunque, cuius proportio CG ad GA: dico dari truncum, ut CTA, eiusdem coniugationis, scilicet in quo sit CT ad TA, ut CG ad GA, minorem quacunque proposita quantitate solida. Hoc verò demonstratu est facile. Nam minui possunt latera figurae CT, TA, semper manente inter ea proportione, quae est inter CG ad GA, eòusque, dum CT, TA aequent junctae diagonion CA, quando tria latera VC, CT, TA juncta, aequant quartum VA, quae est proportio diametrorum CT, ad VA, quanta potest esse in hac coniugatione, maxima: quo casu truncus omnis in basin seu in planitiem circuli VA subsidit. Superficies verò quantacunque, minor est omni quantitate solida.

THEOREMA XI

Cylinder aequalis Trunco aequealto, basin habet compositam ex duarum basium Trunci et earum medij proportionalis Trientibus singulis.

Nam rectangulum sub diametris Trunci, est aequale quadrato mediae proportionalis inter diametros, per 17. VI. Eucl. et duo talia rectangula, unâ cum quadrato differentiae, constituunt duo quadrata duarum diametrorum, sub quibus rectangula continentur per 7. II. Eucl. Tria ergo rectangula, una cum quadrato differentiae, sunt aequalia tribus quadratis, et duarum diametrorum in basibus, et mediae proportionalis. Rectangulum igitur unum, cum triente quadrati differentiae, aequat tertiam partem summae quadratorum proportionalium, et sic iunctos singulos singulorum Trientes. Vt vero rectangulum cum triente dicto, ad quadrata basium trunci, sic corpus trunci ad corpora Cylindrorum aequealtorum, super trunci basibus, per XVII. p. primae. Quare

3. 5.	15. bis 30.
3. 5.	Diff. 2. 2. 4.
9. 25.–34.	34.

etiam ut tres dicti trientes ad quadrata basium, sic | corpus trunci (et sic Lv
etiam cylindri trunco aequalis) ad corpora Cylindrorum super trunci basibus aequealtorum. Cùm autem talium bases ipsae sint ut corpora; etiam sic erit basis cylindri, trunco aequalis, ad bases duas trunci: itaque constabit ex earum et mediae proportionalis trientibus singulis.

Clavius lib. V. Geometriae Practicae, cap. III. utitur hoc theoremate nonnihil transformato, quod et supra tetigi: sed principia demonstrationis adhibet difficiliora, nec evidenter cum meis connexa; lucis ergo causa meis principijs uti malui.

Exemplum. Sint diametri 19. 22. duc utramque in seipsam, et in se mutuò: erunt quadrata 361. et 484 et medium proportionale 418. Summa omnium 1263, cuius pars tertia 421 pro corpore Trunci, ut 361 est corpus Cylindri minoris.

THEOREMA XII

Cylindri habentis altitudinem eandem cum Trunco recto, et diagonion eandem, diameter basis est medium arithmeticum inter diametros basium Trunci.

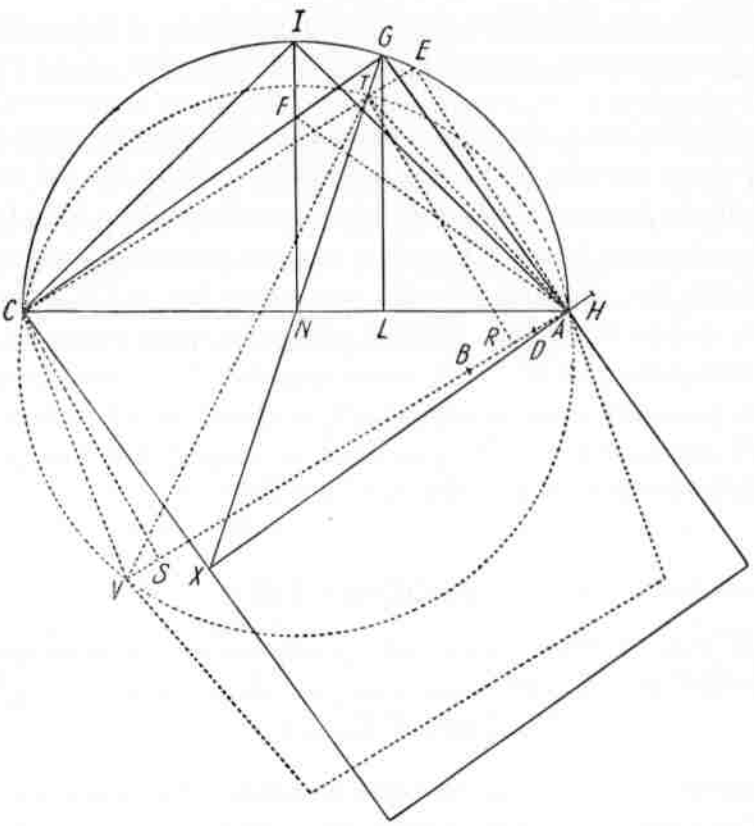
Sit cylinder CEAS, diagonium habens CA, et super ea truncus rectus CTAV, cuius altitudo TR aequalis altitudini cylindri EA vel CS. Dico basis cylindri diametrum CE, medium esse arithmeticum inter CT, AV, diametros basium trunci. Cùm enim truncus ponatur rectus, et latera acclivia CV, TA, aequalia, aequales vero etiam EA, et CS, et anguli S, E, recti, quippe in sectione cylindri per axem: quare etiam VS et TE, latera triangulorum VSC, TEA, erunt aequalia. Est autem aequalis CE ipsi SA: quantum igitur CE excedit CT, sc. quantitate TE; tantum etiam ipsa AV excedit AS vel CE, quantitate sc. aequali VS. Est igitur CE medium arithmeticum inter CT, VA, q. e. d.

THEOREMA XIII

Excessus trunci, habentis eandem cum Cylindro altitudinem, eandemque diagonion, proportionem ad illum habet, quam pars duodecima quadrati differentiae ad quadratum de diametro Cylindri.

Concipiatur cylinder, basi CT, altitudine eadem TR, quam habet truncus CTAV: erit huius cylindri proportio ad cylindrum, basi CE, altitudine eadem, quae quadrati CT ad quadratum CE: et ut haec quadrata ad communem differentiam, sic cylindri CT, CE ad limbum, quem maior cylinder CE minori CT circumponit. Sed differentia quadratorum constat rectangulis duobus sub CT, TE, et quadrato TE, quae est dimidia differentia CT, AV, dimidia scilicet AB, hoc est AR. Vicissim cylindro basi CT, circumjecta est tunica trunci CTAV, cuius Tunicae proportio ad inscriptum Cylindrum CT est eadem, quae rectanguli sub AB, BV (vel CT) cum Triente quadrati de AB, ad quadratum CT. Rectangulum verò sub AB, CT est aequale duobus rectangulis sub ET, TC; quia AB est dupla ipsius ET. Ablatis igitur his utrinque aequalibus; illic quidem quadratum CE maioris superaddit quadrato CT quadratum[1] AR, hoc est, quartam partem quadrati AB: Hic vero superadditur eiusdem quadrati AD Triens. Sed Triens quadrantem superat Vnciâ: unâ igitur Vnciâ de quadrato AB plus additur hic, quàm illic. Tanto igitur maior est Tunica Trunci, limbo cylindri super basi CE. Quare communi utrinque cylindro super basi CT addito, truncus CTAV cylindro CEAS maior erit, parte dicta.

Exemplum. Truncus habeat diametros CT 19, AV 22. Erit, ex praedictis, cylinder CTRS Trunco inscriptus, ut 361, quadratum de 19. Truncus verò



Schema XXI

CTAV addet ei Tunicam TRA, CSV, 60. ductâ scilicet differentiâ AB 3. et in CT 19, et in partem sui tertiam 1. hoc est in 20: fietque corpus Trunci CTAV 421. Medium verò arithmeticum inter 19 et 22 est 20 semis, et habet quadratum 420 cum quadrante, pro corpore cylindri CE. Nam differentiae AB 3 dimidium TE sesqui, multiplicatum in minorem TC 19 bis, creat 57: idem TE sesqui, in seipsum, creat duo cum quadrante. Summa limbi TE circa TC 59 et quadrans: quem adde cylindro CT 361. prodit, ut dictum, 420 cum quadrante. Cylinder igitur CEAS, minor est Trunco CTAV, tribus quadrantibus unius, qui sunt pars duodecima de quadrato 9, totius differentiae AB 3.

Corollarium et Analogia

Auctâ differentia diametrorum Trunci, manente altitudine et cylindro aequealto super eadem diagonio, augetur etiam hic excessus trunci. Atqui potest augeri differentia AB, usque dum fiat aequalis medio arith- †

metico inter diametros, quando scilicet CT in punctum vanescit, VA verò fit duplum diametri CE, in basi cylindri dicti: tunc enim venitur ad terminum truncorum omnium, scilicet ad Conum, qui diagonion eandem habet cum latere, creante superficiem Coni.

Talis verò Conus, altitudine eâdem cum cylindro CE, basi verò, cuius diameter sit dupla, uti dictum, ad diametrum cylindri CE, est ad illum suum cylindrum in proportione sesquitertia. Cùm enim diametrorum sit proportio dupla, circulorum erit quadrupla, quare et Cylindrorum aequealtorum super ijs basibus, si cylinder staret super basi Coni. Per Th. III. et XVII. p. primae. At coni corpus, per IV. illius, est subtriplum Cylindri huius quadrupli, basi sc. et altitudine ijsdem. |

L2v Hic igitur terminus est, quem nullus Truncus assequitur. Nullus inquam truncus Cylindro aequealto, medium arithmeticum habenti in diametro basis, adjicit partem corporis tertiam.

THEOREMA XIV

Cylinder aequalis Trunco et aequealtus, maiorem illo diagonion habet.

Nam per praemissam, Cylinder eandem habens cum illo diagonion aut aequalem, minor est Trunco, si aequealtus; maior igitur aliquis, Trunco scilicet aequealto aequalis, maiorem etiam habet diagonion.

THEOREMA XV

Omnes proportiones diametrorum Trunci, locum habentes in coniugatione pro-
† *portionis certae, locum etiam habent in coniugatione proportionis maioris.*

Nam quia CT, TA in qualibet conjugatione minui possunt, ab aequalitate, usque dum junctae fiant aequales ipsi CA; AV verò vicissim augeri, usque dum aequet AC, CV, vel AT, TC, CV: quibus ergò conjugationibus maior est proportio AT, ad TC, maior scilicet AT, respectu TC: illis etiam plus variari potest diametrorum CT, AV proportio. Omnis igitur mutatio proportionis, quae valet, ubi AT est parva, valet etiam, ubi AT est maior; sed ibi ubi AT est maior, plures valent.

Propter hunc igitur concursum Conjugationum variarum, in ijsdem proportionibus diametrorum, locum habet sequens comparatio.

11) quadranti 18) diagonion *fehlt* 27) minor est proportio

THEOREMA XVI

Omnis Cylinder, altior maximo, super eadem diagonio, habet ex Cylindris maximo humilioribus, socium sibi aequalem, quem subcontrarium dicemus.

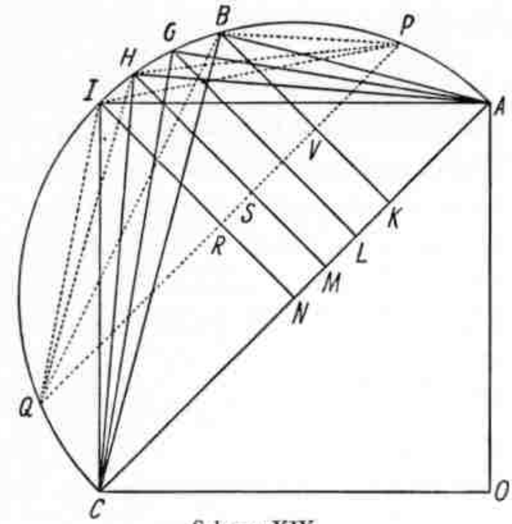
Nam cum proportio basium permutata est proportionis altitudinum; Cylindri aequales existunt. Respiciatur igitur Schema XIX, in quo sit CGA Cylinder maximus, basi CG, altitudine GA. Sumatur altior illo CHA, dico inveniri humiliorem, ut CBA, cuius BA altitudo sit ad HA altitudinem prioris, ut est basis vel quadratum CH, ad quadratum CB. Nam ubi maius datur et minus, ibi datur et aequale. Sed CH quadratum crescit à quantitate nulla continuè, cum lineis CQ, CI, CH, CG, CB, CP, usque ad quadratum diametri CA faciens proportiones omnis generis. Vicissim altitudo, initio sumpto à longitudine diametri AC, decrescit cum lineis AQ, AI, AH, AG, AB, AP, per omnes itidem proportiones, sic ut fiat proportio quacumque data proportione maior, donec altitudo absu|matur in punctum A. Ergò ubi decrementa altitudinum AB, prae- L 3 cipitantur per omnes proportiones, in infinitum crescentibus proportionum augmentis, ibi incrementa quadratorum CB, magis magisque minuuntur, et incrementa proportionum decrescunt. Et cum detur Cylinder humilior, quàm CHA, idemque maior eo, ut est CGA, eoque minori proportione HA ad GA, quam quadrati CG ad CH: descendendo igitur versus B, transitus erit per aliquod punctum, ubi proportio HA ad BA, quae prius erat minor (quippe plus crescens), fiat aequalis proportioni quadrati BC ad quadratum HC, quippe minus crescens, cùm prius esset † maior. Exempla sunt in calculo ad Th. IV. et V. Cylindrorum aequalium.

THEOREMA XVII

In unaqualibet coniugatione, quae quadratum diametri habet minus, quam duplum quadrati altitudinis, omnes Trunci ab ipso Cylindro proximi, paulatim fiunt Cylindro coniugato maiores, non obstante quod minuitur eorum altitudo, postea decrescunt iterum, semper adhuc maiores Cylindro coniugato, quoad altitudinem habuerint maiorem, quam Cylinder coniugati subcontrarius.

In Schemate XIX. sit coniugatio, in qua quadratum diametri HC minus est duplo quadrati HA, et Cylinder huius coniugationis CHA; illi verò sit socius, hoc est aequalis corpore, ex alia coniugatione, Cylinder CBA, basi CB, altitudine BA. Dico primùm; omnes Truncos coniugationis CHA, quibus altitudo fuerit inter HA et BA, maiores esse Cylindris CHA vel CBA. Nam inter socios CHA, CBA aequales, interest Cylinder

10/11) nulla, continuè cum . . . diametri CA, faciens 17) magis magis 21) BA ad HA maximus CGA, in quo quadratum CG est duplum quadrati GA. Omnes igitur Cylindri CGA, inter CHA et CBA, sunt maiores extremis ad H et B terminatis, per Th. V. huius: Et habent ij altitudines medias inter HA et BA, quemadmodum et Trunci. Per XIII. verò huius, Trunci aequealti Cylindris super eadem diagonio CA, sunt ijs maiores. Quare multò maiores sunt extremis minori- † bus ad H. B. terminatis.[1]



Schema XIX

L 3 v

THEOREMA XVIII

In conjugatione proportionis semidupla minoris, Truncus aequalis Cylindro conjugato habet altitudinem minorem altitudine Cylindri, qui conjugati socius, eidemque aequalis est, conjugationis tamen diversae.

Nam truncus aequealtus tali socio cylindro, qui conjugato sit aequalis, maior est illo, per XIII. Maior igitur est etiam conjugato suo cylindro. Qui igitur conjugato suo est aequalis corpore, non erit eiusdem cum illo altitudinis. Aut igitur altior aut humilior. Non verò altior, per XVII. praemissam: Ergo humilior. Ex eo verò Trunci, per X. huius, fiunt minores cylindro conjugato, donec tandem evanescant.

Corollarium

Posito quod dolia constent puro Trunco conico duplicato: dolia oblonga, ventribus modicis, capaciora sunt cylindricis eâdem figurae longitudine, ventre carentibus: nunquam verò fit, ut habeant ventres adeò immanes et prodigos, per quos rursum fiant minus capacia dolijs cylindricis eâdem figurae longitudine.

THEOREMA XIX

In omnibus conjugationibus Truncorum et Cylindri, quibus diameter basis minoris est minor semidupla lateris acclivis, datur bis aliqua proportio diametro-

16) dupla *statt* semidupla

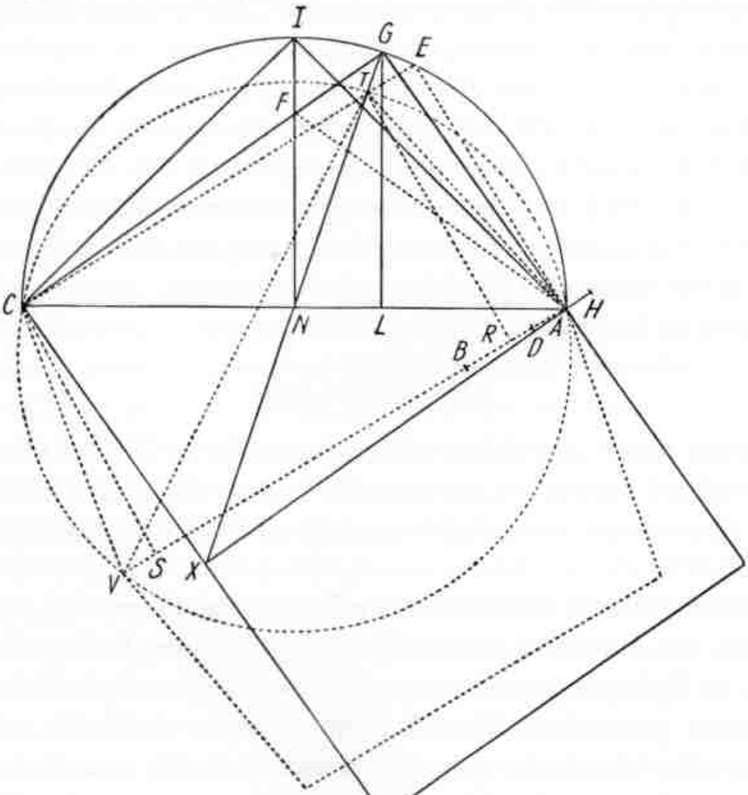
rum Trunci, per quam Truncus fiat aequalis Cylindro ex omnibus conjugationibus maximo.

Sit GC diameter basis Cylindri, ad GA altitudinem (in hoc quidem † Theoremate) minor quàm semidupla. Dico in hac conjugatione duas occurrere proportiones diametrorum CT, AV, quibus possit fieri Truncus aequalis cylindro maximo, cuius diameter basis est dupla ad altitudinem. Nam si GC minor est semiduplâ ipsius GA, maior est itaque GA, quàm subsemitripla ipsius CA: potest itaque sumi aliqua minor ipsâ AG, quae sit AT, et ad AT comparari TC, in ea proportione, in qua est AG ad GC; sic ut perpendiculum ex T, hoc est TR, sit subsemitripla ipsius CA: Et truncus ATCV fiet aequealtus cylindro maximo, cuius diameter ad altitudinem semidupla. Erit itaque talis truncus adhûc maior hoc cylindro maximo, per Th. XIII. huius partis. Et quia, per XIV. huius, cylinder aequandus, si fuerit Trunco aequealtus, diagonium habet maiorem: diagonium igitur habens minorem, scilicet eandem cum Trunco aequali futuro, debet habere altitudinem Trunco maiorem, ut quod amisit abbreviatione | diagonij, recuperet incremento altitudinis: L 4 Id est, Truncus illi futurus aequalis, debet fieri minor eo, qui est aequealtus cylindro maximo, super eadem diagonio constructo. Id autem fieri potest duobus modis. Etenim, cum Cylinder in unaqualibet conjugatione sit Truncorum omnium principium; sit verò in conjugationibus hic propositis cylinder minor cylindro maximo, erunt etiam Trunci, à cylindro suo conjugato proximi, eòque altiores, cylindro maximo minores. Inde verò per augmentum AB differentiae diametrorum CT, AV crescunt, usque dum fiant majores cylindro maximo, ut jam est demonstratum. In hoc igitur incremento ipsius AB, quoad TR minor fuerit altitudine GA, cylindri sui conjugati, maior verò altitudine cylindri maximi; contingit semel, Truncum aequalem fieri cylindro maximo. At non crescunt in infinitum trunci ejusdem conjugationis, crescente AB, sed per X. et XVIII. huius, iterum decrescunt: qua in variatione contingit secundò, Truncum fieri aequalem cylindro maximo. Et quia, qui aequealtus erat maximo (cuius TR subsemitripla ipsius AC) maior erat illo maximo: minoris igitur factus altitudinis quàm cylinder maximus, fiet illi aliquando iterum aequalis. Adhuc igitur est minuenda TA amplius. Minutâ verò TA, et cum ea TC proportionaliter, minuitur quadratum TA: manet verò quadratum CA: augetur igitur rectangulum TC, AV residuum: sed eius latitudo TC minuitur, ut dictum: vicissim igitur, et duobus quidem nominibus, augetur longitudo rectanguli AV: qua ratione constituitur proportio certa TC ad AV, qua usus Truncus, fit aequalis cylindro maximo secundò. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XX

Trunci variarum coniugationum, eandem habentes inter se diametrorum proportionem, quo propius assecuti fuerint altitudine Cylindrum super eadem diagonio maximum, hoc erunt maiores; quo altiores illo, hoc minores.

† Inopinabile et hoc est. Quis non dixerit maiorem esse Truncum, cuius altitudo sit IA, trunco alio, cuius altitudo GA: si eadem utrique diagonios CA, eademque proportio basium minorum ad maiores? Atqui diversum est verum. Sit enim Cylinder maximus, cuius CG diameter basis, ad GA altitudinem, per Th. V. semidupla: et sit truncus, cuius diameter minor in CG lineâ, maior in AX (continuatâ) sitque earum proportio quaecunque, mediumque inter illas arithmeticum GC, per Th. XII. Cùm igitur basium binarum inter se per diversos Truncos eadem ponatur esse proportio: erit etiam differentiae earum ad medium arithmeticum proportio per omnes eadem. Ac cum omnis talis Truncus superet cylindrum aequealtum in proportione Vnciae de quadrato differentiae dia-



Schema XXI

metrorum trunci, ad quadratum medij eorum arithmetici, per Th. XIII. huius; maior igitur erit hic excessus trunci, ubi maior cylinder. Sed cy-
L4v linder CGA est omnium[1] super eâdem diagonio maximus: ergo excessus

Trunci huius seu Vncia dicta, erit omnium reliquarum per reliquos truncos, eandem diametrorum proportionem habentes, maxima. Ac proinde, quamvis maior sit altitudo trunci quam GA: quia tamen minor cylinder huius altitudinis; minor etiam erit truncus.

Verbi causa, sumatur proportio diametrorum trunci omnium maxima, hoc est, infinita, sumatur inquam Conus pro Trunco, finis omnium truncorum. Sit Coni altitudo IA, cuius quadratum est semissis quadrati AC. Sitque basis cylindri CIA aequealti linea CI, aequalis altitudini AI. Et quia CI est medium arithmeticum inter diametros trunci, earum verò altera est o. erit igitur reliqua, sc. diameter basis Coni, dupla ipsius CI. Hîc igitur pro corpore huius coni ducenda est pars tertia de AI in quadratum duplae CI, quod est quadruplum quadrati CI: duplum ergo quadrati CA.

At Conus alius (rursum pro trunco eiusdem proportionis diametrorum) altitudinem habens GA, cuius quadratum est triens de quadrato CA, similiter duplam ipsius GC habebit diametrum basis, quadratum ergò quadruplum. Est autem quadratum GC bes quadrati AC; quatuor ergo besses, sunt octo tertiae, quae duplum seu sex tertias prioris coni superant duabus tertijs, cum è contra illius quadratum altitudinis, semissem habens quadrati CA, huius altitudinis quadratum, quod est triens quadrati CA, superet tantum unâ sexta quadrati CA. Nec hoc tamen detrimentum omne est censendum: quia non quadrata, sed altitudines ipsae ducuntur in bases; imò nec altitudines ipsae, sed trientes tantùm. Maius igitur lucrum est Coni in basi CG longiori, quam damnum in GA altitudine breviori.

THEOREMA XXI

Ex omnibus truncis conjugationis eiusdem, maximus est ille, qui habet altitudinem Cylindri maximi,[1] *subsemitriplam scilicet Diagonii: Ab hoc vero* M
fastigio caeteri omnes, tam qui altiores, quam qui humiliores, iterum decrescunt. †

Demonstrationem legitimam aut refutationem, si opus est, expediant SNELLIVS, aut ADRIANVS ROMANVS, Apollonij Belgae. Parergon quidem est hîc, et Episagma, quod scopum attinet libelli; cognationis tamen causa cum praecedenti hîc adscriptum: cuius similitudo cum hoc primam mihi fidem fecit: etsi trunci praecedentis Th. non sic coniugati sunt, ut nos hactenus hanc vocem usurpavimus; super eadem tamen et ipsi diagonio sunt descripti, et habent eandem inter se proportionem basium: quemadmodum caeteri coniugati habent eandem inter se proportionem diametri basis minoris ad latus acclive.

9) diametrum

Altera dixis est ex proprietate coniugationis cylindri maximi, et quod in praecedentibus demonstravi, esse aliquam altitudinem trunci coniugati, maiorem altitudine cylindri maximi, aliquam illâ minorem; quarum utrarumque trunci sint aequales cylindro maximo: illum ipsum verò, qui est aequealtus maximo truncus cylindro, corpus habere maius: et utrinque tam versus cylindrum coniugatum, quam versus truncos humilimos, decrescere truncos. Causa igitur nulla apparet, cur alibi in vicinia consistat meta corporis incrementorum, quam in hac ipsa.

Adde indicium calculi. Sit coniugatio, in qua diameter CI aequet altitudinem IA, et sit huius coniugationis truncus aequealtus cylindro CGA, hic maximo, sc. cuius diameter CG semidupla ad GA altitudinem. Ergo minor trunci diameter erit in CG, est autem aequalis lateri acclivi, quippe ponitur ad id esse, ut CI ad IA. Est igitur CF diameter minor, secans IN, perpendicularem ex centro N, in puncto F, et FA latus acclive. Vt igitur CL ad CG sic CN ad CF. Sed CL est bes de CA, et quadratum CL quatuor nonae de quadrato CA; et quadratum CN est quarta pars de quadrato CA, denique quadratum CG est bes de quadrato CA. Vt autem CL, quatuor nonae, ad bessem CG, sic pars quarta CN ad CF tres octavas. Ergo quadratum CF erunt tres octavae quadrati CA: tantum verò est etiam quadratum acclivis lateris FA. Ablatae igitur tres octavae de quadrato CA, relinquunt quinque octavas, rectangulo sub CF diametro minore et opposita diametro maiore, quae cum AX coincidit, excurrens ultra X. Cùm ergo quadratum CF, et rectangulum diametrorum CF et maioris, habeant latitudinem eandem CF; longitudines earum erunt ut plana ipsa, scilicet ut tria ad quinque. Haec est igitur proportio diametrorum trunci, qui ex hac coniugatione est aequealtus cylindro maximo. Quare, per XIII. huius, ut quadratum 16, medii eorum arithmetici 4, sc. ipsius CG, ad Vnciam quadrati 4, differentiae diametrorum 2, (uncia verò de 4 est triens) sic corpus cylindri CGA maximi ad excessum CFA trunci aequealti: truncus ergò excedit cylindrum maximum triente unius sedecimae, seu parte quadragesima octavâ corporis cylindri CGA. Quaeratur igitur proportio cylindri maximi CGA ad cylindrum coniugatum CIA. Est quadratum basis CI semis quadrati CA; sed quadratum CG est bes quadrati CA: quare proportio basium CI ad CG ut 3 ad 4. Vicissim quadratum altitudinis IA est semis, | quadratum altitudinis GA est triens quadrati CA: proportio igitur quadratorum, IA ad GA est ea quae 3. ad 2. vel quae 9 ad 6: ipsarum igitur linearum IA ad GA proportio est dimidia, sc. quae 30000 ad 24495, vel huius ad 20000. Componitur autem proportio corporum ex proportione basis et proportione altitudinum. Ductis igitur in se mutuò terminis analogis,

33) semissis 35) semissis

proportio cylindri CIA ad cylindrum CGA, provenit eadem, quae 9000 ad 9798. Supra Theor. III. Columnarum ex his conjugationibus, proportio erat quae 2828 ad 3080. Quòd si hunc numerum cylindri CGA, commuto in 16, seu in 48 trientes, numerum priorem, erit in hac proportione numerus cylindri CIA 44. Est ergo cylinder CIA, ad truncum CFA conjugatum, ut 44 ad 49, et truncus maior parte paulò plus nonâ. Id verò consonum est huic Theoremati et Corollario III. Th. IX. huius partis; ibi enim cum esset proportio diametrorum, quae 2 ad 3, hoc est quae 20. ad 30, truncus excedebat parte paulò plus undecimâ, crescens: crevit igitur usque dum esset proportio quae 3. ad 5, id est, quae 18 ad 30, tunc maximè truncus excessit parte plus nonâ; ut hic probatum. Vlterius, quando fuit proportio, quae 1. ad 2. hoc est quae 15 ad 30, truncus iterum decrevit, ut excederet parte tantum nonâ. Quod igitur in una conjugatione fit, ut truncus aequealtus cylindro maximo plurimum excrescat super cylindrum conjugatum, id in omnibus fieri consentaneum est.

THEOREMA XXII

In conjugationibus, quae quadratum diametri cylindri habent duplum quadrati altitudinis aut maius, trunci omnes sunt minores cylindro maximo, conjugato scilicet suo: et hoc tanto plus, quanto recesserimus à proportione dupla.

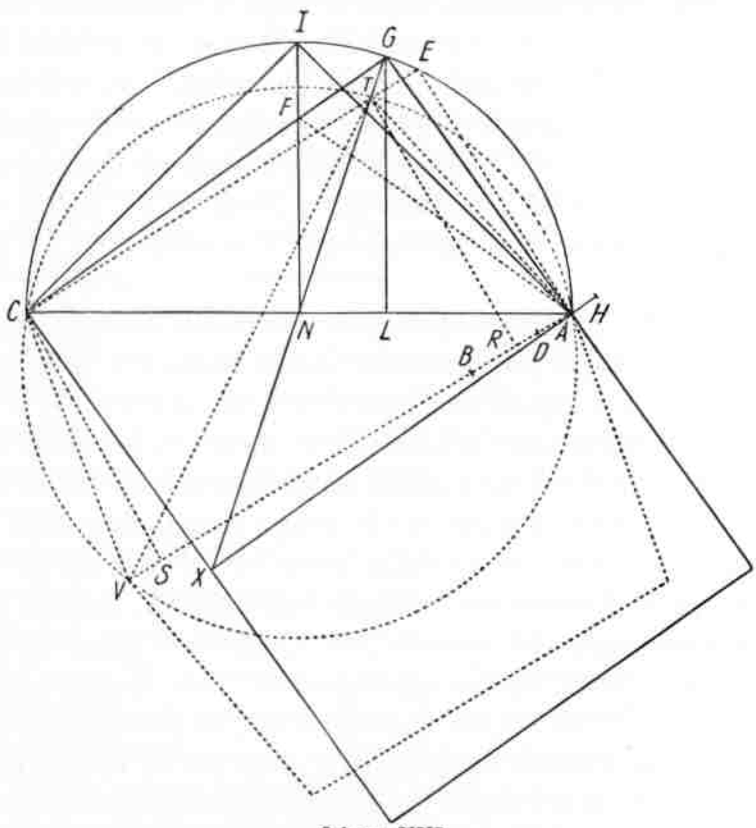
In Schemate XIX. sit CGA conjugatio proportionis duplae quadrati CG ad quadratum GA, et sit CHA proportionis minoris, et subcontrarij cylindri ad H et B: sunt igitur omnes cylindri inter H et B, et proinde etiam trunci illis aequealti, maiores cylindro ad H vel B terminato, et paulo infra B usque in A, omnes trunci minores cylindris H et B, per XV. et XVI. praemissas.

Quo propius verò fuerit H ipsi G, hoc etiam propius erit B ipsi G, et hoc minor arcus HB, in quo trunci maiores: tandem ergò cylinder CGA est idem ipse et suus subcontrarius, vicem et H et B sustinens. Quemadmodum igitur omnes cylindri post B, minores sunt ipso H, et trunci omnes paulò infra B, sic etiam hic omnes cylindri post G, et cum ijs trunci aequealti, erunt minores ipso CGA conjugato. Quod enim illic trunci non in B, sed paulo infra B incipiunt evadere minores; causa est, quia in ipso B datur cylindro truncus aequealtus, conjugationis CGA. At hic in ipso G, non datur truncus cylindro aequealtus ex conjugatione CGA; primi igitur à cylindro CGA trunci, statim sunt humiliores lineâ GA, plus amittentes per altitudinem, quam acquirant per adjectionem trientis.

18) cylindri *fehlt* 30) I *statt* H 34) CIA

Eadem analogia apparet etiam sic. Nam trunci conjugationis hujus, omnes ab ipso Cylindro, sunt illo humiliores, quippe conjugationis suae capite. Qui cum sit ipse Cylindrorum maximus, omnes igitur ei conjugati Trunci sunt eo ordine minores, per Th. XXI. quo ordine absunt ab altitudine illius: maximus igitur inter illos Cylinder ipse: quippe seipsum solus inter illos aequans altitudine.[1]

M 2 Haec est demonstratio inconvincibilis per analogiam, sed quia Geometrae minus assuefecerunt se ad analogias, age operosiorem et planè Geometricam tentemus demonstrationem, revocato Schemate XXI: In quo sit truncus CTAV, conjugationis CGA: et continuetur CT, donec secet circulum in E: connectanturque puncta E, A, cylinder ergo CEA minor est cylindro CGA, per Th. V. Ei verò aequealtus est Truncus



Schema XXI

CTAV, ex constructione, quia EA, TR, aequales. Maior est igitur truncus cylindro CEA, triente quadrati de AR, per XIII. praemissam. Probandum est, proportionem GA ad AE maiorem esse, quam proportionem quadrati CE cum triente quadrati AR vel ET, ad quadratum CG; sic ut cylinder CEA plus amiserit per humilitatem EA, quam lucratus est per trientem quadrati ET.

10) conjugationi   15) esset *statt* esse

Primùm itaque quadratum TR vel AE minus est quadrato TA, ipso quadrato toto AR. Sed et quadratum CE minus est quadrato CE cum triente quadrati AR, ipso hoc triente quadrati AR. Differentiam igitur illic inter terminos, facit aliqua quantitas, quae est tripla quantitatis, quae hic terminos differre facit. Et sunt praeterea hi termini maiores duplis illorum terminorum. Nam cùm quadratum CG sit duplum quadrati AG, hic quadratum CE, maius est quadrato CG, et quadratum AE, minus quadrato GA. Cùm autem inter aliquos terminos ut 25. 26. differentiam facit aliqua quantitas, ut 1, eius vero quantitatis triplum, ut 3, differentiam facit inter terminos minores dimidijs, vel saltem posteriorem posterioris dimidium, ut inter 10. 13. proportio minorum terminorum est maior sextuplâ proportionis maiorum; ut 10 ad 13, vel 20 ad 26, proportionem habet maiorem, quàm sextuplam proportionis 25 ad 26: et multo esset maior, si etiam posterior terminus 13 minor fuisset dimidio posterioris 26. Manente enim aequali differentia, quo minores fiunt termini, hoc magis augetur proportio. Est ergo proportio quadrati TA ad quadratum TR vel EA, maior sextuplâ proportionis quadratorum CE et trientis de AR ad CE. Ipsa|rum igitur linearum TA ad TR vel EA, M 2 v proportio est maior tripla quadratorum CE et trientis de AR ad quadratum CE.

Eodem modo demonstrabimus etiam, quadratum de CE ad quadratum CG minorem habere proportionem, quam rectas GA ad AT. Nam quadratum CG est aequale rectangulo BVD, divisa BA in D, ut sit AD dimidium ipsius DB, sicut quadratum AG dimidium est ipsius GC, per Th. VII. huius. Sed CE est medium arithmeticum inter VB et VA, per Th. XII. huius. Ergo quadratum CE aequat rectangulum BVA totum, et insuper quadratum AR, dimidiae ipsius AB: si ergo ad BV vel CT adijciatur parallelogrammum, aequale quadrato AR, accedet ad VA, latitudo parallelogrammi, quae sit AH. Quadratum igitur CE aequale erit rectangulo BVH. Sed et quadratum CG erat aequale rectangulo BVD. Ergo ut HV ad VD, sic quadratum EC, ad quadratum CG. Dico HV ad VD proportionem esse minorem, quam DV ad VB. Est enim BD dupla ipsius DA, et BA dupla ipsius AR: ergo etiam AD dupla ipsius DR; quod si AH aequalis esset ipsi AD, eoque aequalis HD ipsi DB: tamen minor esset HV ad VD, quam DV ad VB: Iam verò AH est minor quàm AD, adeoque etiam minor quàm DR. Nam quadratum CT vel VB semper maius est duplo ipsius BA, per Th. X. huius. Nam si esset duplum, altitudo trunci esset nulla, corpus nullum: semper igitur quadratum VB est maius octuplo ipsius quadrati AR. Cùm igitur sint continuè proportionales, VB, AR, AH, erit etiam ipsa recta VB semper maior octuplo ipsius AH, ac proinde AR medium proportionale inter

AH 1, et BV 8+. Qualium igitur est AR radix de 8+, talium AH est 1. Sed radix de 8 est inter 2 et 3. in altitudine trunci nulla, corpore nullo, et cito fit, vel in minima altitudine trunci, ut ex 8 fiat 9, quando radix eius est 3, et in altitudinibus maioribus semper maior. Ergo AH ubi maxima, inter dimidiam et tertiam partem ipsius AR consistit, fitque, per augmentum altitudinis truncorum conjugatorum, quacunque parte ipsius AR minor, sic ut tandem cum ipsa AB evanescente (trunco in merum cylindrum transeunte) fiat infinitae parvitatis portio de AR. Atqui si absque AH esset, proportio AV ad VD esset minor dimidia ipsius DV ad VB, quia AD est dimidium ipsius DB: et cùm proportio DV ad VB sit dupla ipsarum GC ad CT, vel GA ad AT: ergo si absque AH esset proportio AV ad VD, et sic etiam quadratum EC ad quadratum CG, semper esset in minori proportione, quam rectae GA ad AT.

Cùm autem inter AR et AH, per diversos truncos, sint omnis generis proportiones: fit alicubi, sc. in truncis proximè aequealtis cylindro, ut AH non tantum adijciat, ut proportio HV ad VA aequet proportionem GA ad AT, et tunc res est certa, duo enim elementa sunt proportionis GA ad AE, alterum AT ad EA vel TR, alterum GA ad AT, duobus elementis proportionis, quadrati CE cum triente quadrati AR, ad quadratum GC, singula singulis maiora.

In truncis igitur proximis à cylindro conjugato decrevit altitudo maiori proportione, quam qua crevit basis cylindri, aequantis truncum: atque hoc solum demonstrandum fuit, dato enim initio truncorum cylindro minorum, deinceps trunci continuè minuuntur, donec evanes- M 3 cant. Sequen|tes tamen casus pertinent ad demonstrationis maiorem evidentiam.

Vel aequatur proportio HV ad VD proportioni GA ad AT, in truncis humilioribus; et sic proportionum dictarum elementa posteriora sunt aequalia, sed priora adhûc inaequalia, et plus triplo maior excessus rectae AT super TR, in comparatione cum TR, quam triens quadrati AR, in comparatione cum quadrato CE, et id sine compensatione; tota igitur altitudinum proportio, adhûc maior est proportione altitudinis basium.

Vel denique superat proportio HV ad VB, proportionem GA ad AT, sed in truncis adhuc humilioribus, quando CE longa efficitur, TR brevis: ubi quadratum AR magis magisque aequatur quadrato TR, idque tandem superat, magnam efficiens proportionem inter TR et TA; quae quidem statim initio, et semper, est maior triplo proportionis inter quadratum CE cum triente quadrati AR, et inter solitarium quadratum CE: cum econtra triens quadrati RA, non in eodem proportionis incremento, augeat quadratum CE, quippe hoc ipsum per se crescens. Et cùm citò

19) GE *statt* CE   31) GE

fiat, ut elementum proportionis altitudinum, quod est proportio AT ad TR, fiat maius tertia parte proportionis GA ad AT: ex eo deinceps semper fit, ut excessus elementi huius in proportione altitudinum, non tantum compenset, sed etiam superet magis magisque excessum elementi illius in proportione basium: Hic enim totus as crescens quadrati AR, auget proportionem terminorum minorum et decrescentium; illic triens saltem, aequaliter crescens, auget proportionem terminorum maiorum et crescentium. Plus igitur hic potest proportionis augmenti pars tertia, quam illic totum proportionis augmentum.

Haec igitur de illa conjugatione fuerunt demonstranda, in qua quadratum CG duplum est quadrati GA. Quod si quadratum CG fuerit maius duplo illius; multo ista omnia magis obtinent. Nam quod analogiam attinet, Truncorum talium cylindri aequealti (in Sch. XIX. CBA.) sunt aequalium sed altiorum cylindrorum CHA subcontrarij, de quibus Th. XVIII. demonstratum, quod trunci ab illis incipiant fieri minores, etiam ij, qui cylindros altos CHA conjugatos habent: quanto magis illi, qui sunt cum his illorum subcontrarijs CBA conjugationis eiusdem, et qui hic demum oriuntur, primo ortu facti humiliores conjugato cylindro CBA.

Iam verò quod reliquam demonstrationem concernit: cùm in Schemate XXI. cylindri ipsi, conjugationum capita, ponantur humiliores esse cylindro CGA: crescit igitur in ijs CG, sed incrementis decrescentibus, minuitur GA, sed decrementis crescentibus. Diminutâ verò GA et secundum eam et TA, etiam AB differentia diametrorum, licet crescentium, crescit, sed incrementis decrescentibus, per Th. X. huius. Fit igitur diminutio corporis cylindri conjugati, per curtationem ipsius TR, magna, quippe et secundum basin CG magnam, et secundum differentiam ipsarum TR et AG multo maiorem: appositio verò ad corpus cylindri conjugati, secundum Trientem quadrati AR, et augmentum quadrati CE per BA, fit parva et minoris aestimationis. Retexat, qui vult, omnia demonstrationis praemissae elementa ad hunc modum; inveniet non minus lucis, quam supra Th. IX. huius, ex calculo emicuit, super huius partis veritate.[1]

Corollarium M 3 v

Posito, quod dolia Vinaria constent truncis conicis puris, in ijs quidem, quae curta sunt, venter omnis diminuit aestimationem capacitatis; in Austriacis verò perinde ferè est, sive ventrem habeant, sive cylindricam figuram propius imitentur: quia nunquam usu venit, ut

20) domonstrationem 22) GA *statt* CGA 28) ipsium TR

venter in tantam excrescat amplitudinem, ut habeat profunditatem duplam diametri orbis lignei: quo casu sanè, per Corollaria ad Th. IX. amitteret plus quàm quartam partem. Sed nec unquàm profunditas fit sesquialtera diametri orbis lignei, quo casu venter amitteret partem circiter tricesimam. At si sesquitertia, quod valde insolens, jam attenuatum est damnum ventris ad partem septuagesimam.

Atque haec est altera illa, et nobilissima quidem proprietas dolij Austriaci. Sicut enim Th. V. nihil magnum potuit ei nocere variata nonnihil figura per errorem artificis, propterea, quod Lege et More ducibus, ad figuram omnium capacissimam aspiravit artifex, incidens in figuras capacissimae proximas, in quibus, ut proximis, defectus ex legibus circuli non est observabilis inter initia: sic nunc etiam nihil ferè in hoc dolio variat venter amplus an strictus, res cumprimis grata opifici; quia non ita facile est, ut proportionem tabularum ad orbes, sic ventris amplitudinem pro lubitu exprimere: nec ad amussim praevidet, quantus dolij venter sit evasurus, redigereturque in angustum, si lex amplitudinem certam ventrium praescriberet. Quòd igitur lege tali tam molestâ non est opus, id commoditati proportionis Tabularum ad Orbes, quam observat Austria, acceptum est ferendum.

THEOREMA XXIII. PROBLEMA GEOMETRIS PROPOSITVM

† *Data proportione diametrorum Trunci, coniugationem invenire, in qua talis truncus aequet Cylindrum coniugationis maximae.*

Primùm in ipsa conjugatione Cylindri maximi, jam truncus omnis, et sic etiam truncus datam habens proportionem diametrorum, est minor cylindro maximo, per Th. XXI. huius. Ergo conjugatio quaesita est supra G, conjugationem cylindri maximi, versus conjugationem trunci maximo aequealti, datam diametrorum proportionem habentis. Vt si truncus aequealtus cylindro maximo CGA, fuerit CFA, et conjugatus ei cylinder CIA, fuerit verò etiam in conjugatione CGA truncus CTA, et fuerit ut CF ad diametrum oppositam parallelam per AX, sic etiam CT ad AV: corpus trunci CTA, conjugationis G, minus erit cylindro maximo CGA. Conjugatio ergo quaesita cadet supra conjugationem G, versus I. Quare quaesitus truncus habebit altitudinem maiorem quam GA. Et M 4 cylindri aeque|alti diameter basis, quae medium est arithmeticum inter diametros trunci quaesiti, longitudinem habebit minorem quam CG. Dico conjugationem quaesitam esse etiam ultra I, et altitudinem trunci quaesiti maiorem quàm AI, quod mirum videatur. Nam quia datur proportio diametrorum trunci, semper etiam datur earum proportio ad medium suum arithmeticum. Vt igitur CF ad CG, sic erit etiam quaesiti trunci diameter minor, ad sui aequealti cylindri diametrum. Atqui minor haec est, quàm CG, et remotior ab A: minor igitur etiam illa, quàm CF, et remotior ab A: minor ergo proportio CF ad FA, vel CI ad IA, quam diametri trunci puaesiti ad latus suum acclive, hoc est, diametri cylindri conjugati ad suam altitudinem. Maior ergo quaesitae conjugationis altitudo, quàm AI, minor diameter, quàm IC. Hactenus demonstratio: reliquum huius Problematis Adriano Romano, et si quis alius est, cui Geber placet, expediendum transmitto.

Cùm enim truncus omnis sit maior cylindro suo aequealto, in proportione Vnciae de quadrato differentiae diametrorum, ad quadratum diametri cylindri aequealti: Quare quadratum CA sic jubemur dividere, ut pars una, aucta proportione per differentiam diametrorum datâ, et ducta in latus partis alterius, aequet quadratum CG, ductùm in rectam GA. Consultus hac de re Geber respondit ex Cossa sua, inveniendam altitudinem tantam, ut, tribus post illam continuè proportionalibus existentibus, in proportione, ut est ipsa ad CA, primae aliqua certa multitudo, aequet datum numerum absolutum, cum aliqua certa multitudine tertiarum: huiusmodi verò aequationes in Geometria adhuc quaerunt cossistae, nec, me iudice, invenient unquam.

THEOREMA XXIV. PROBLEMA GEOMETRIS PROPOSITVM

Data coniugatione, in qua quadratum diametri in basi Cylindri minus est duplo quadrati altitudinis, invenire proportiones duas diametrorum, quae Truncos coniugationis eiusdem efficiant aequales Cylindro maximo.

Data sit coniugatio CIA, in qua quadratum CI minus sit duplo quadrati IA, oportet invenire truncorum coniugatorum diametros, aequantium cylindrum CGA maximum. Erit igitur altitudo trunci unius maior quàm GA altitudo cylindri maximi, alterius minor, per XXI. huius. Per consequens igitur, illius proportio diametrorum erit minor proportione diametrorum aequealti cylindro CAG maximo, huius maior: uterque suum habebit cylindrum aequealtum: qui non erunt subcontrarii ipsi, sed subcontrariis proximi: quia si essent subcontrarii, essent aequales, per XVI. huius. At cùm illorum trunci sint proportionis inaequalis diametrorum, quippe in eadem coniugatione diversas habentes altitudines; inaequales igitur adjicerent uncias quadratorum differentiis suis, per XIII. huius: itaque trunci ipsi fierent inaequales. At requirimus aequales, utrumque quippe uni CGA aequalem.[1]

Hactenus demonstratio: reliquum Cossistae conficiant. Data enim M 4 v
esto CF, quae quaeritur: datur igitur et FA ex conjugatione, et qua-

12) portione *statt* proportione 23) efficiat

dratum eius: quare et rectangulum diametrorum, et hoc diviso per datam CF diametrum minorem, etiam diameter maior: quare nota erit et differentia maioris et minoris, et eius quadrati uncia, et quadrans; quo subtracto à quadrato AF, restabit quadratum altitudinis; quod cum quadrato GA comparatum, ostendet corporum proportionis partem unam. Sic data utraque diametro, datur cylindri, qui habet trunci CFA altitudinem, diameter basis, eius sc. quadratum, per XII. huius: cui adjecta Vncia prius inventa, facit compositum, quod cum quadrato CG comparatum, ostendet corporum proportionis partem alteram: Oportet verò partes istas proportionis corporum esse subcontrariè aequales, ut in unum conflatae constituant proportionem aequalitatis.

† Tollite Cossistae, quam fixi, crucem ingenij, et me sequimini: invenietis, nisi me aversa respexit Minerva, continuè proportionalium primas, secundas et quintas, aequari numero absoluto cum proportionalium tertijs et quartis, certo quibusque numero sumptis. Nec igitur Geometrica est aequatio, sed stochastica Nic. Raimari Vrsi, aut mechanica Ivsti Byrgii: nec problema, qualia Pappvs ex more antiquorum, Plana appellavit, id est, absolutè Geometrica et scientifica; sed solidum, et cum conditione Geometricum, datis sc. duabus medijs, continuè proportionalibus, quod explicatum scientificum habet nullum. Et praeterea non una est resolutio huius aequationis: demonstratum enim est, Truncos huiusmodi esse duos.

THEOREMA XXV

Si diversarum conjugationum Trunci habuerint eandem inter se proportionem diametrorum, constituti super eadem diagonio: proportio corporum erit composita ex tribus elementis, ex proportione Cylindrorum conjugationis, et ex proportionibus Cylindri cuiusque ad suum Truncum conjugatum, prioris quidem Cylindri eversa, posterioris vero directa.

Sit truncus CFA, conjugationis CIA, truncus verò CTA, conjugationis CGA, super eadem diagonio CA; et habeat se CF ad diametrum maiorem per AX prolongatam, sicut se habet CT ad AV: dico corporis CFA proportionem ad corpus CTA trunci, compositam esse ex proportionibus tribus, 1. CIA ad CGA, 2. CFA ad CIA, 3. CGA ad CTA. Simplex est subsumptio ad axioma tritissimum, quod quatuor quantitatibus ordine collocatis, proportio primae ad quartam, sit composita ex proportionibus interjectis: tantum in collocatione cautio est adhibenda: quia enim de proportione satagimus truncorum inter se, oportet truncorum alterum collocare loco quarto, alterum loco primo, cylindros in medio, cuique suum conjugatum proximum. Nam per Coroll. ad Th. III.

columnarum, et | sic etiam cylindrorum datur proportio, sc. CIA ad CGA. Sed per Th. IX. datur proportio eversa CIA ad CFA, scilicet CFA ad CIA, et proportio directa CGA ad CTA: datae verò proportionis corporibus deinceps collocatis, resultat dicta series. N

Corollarium et Praxis

Ritè collocatis terminis, quibus exprimuntur proportiones tres, multiplica tres antecedentes, duos inter se et factum in tertium; sic etiam age cum tribus consequentibus, et comprehendent, qui prodeunt, proportionem quaesitam.

Sit CIA conjugatio aequalitatis, CGA conjugatio proportionis semiduplae linearum, duplae quadratorum. Est igitur in Corollario Th. III. proportio CIA ad CGA ut 2828 ad 3080. vel 101 ad 110. In Corollario verò III. ad Th. IX. cum est proportio diametrorum, quae 1 ad 2: Truncus est ad cylindrorum priorem CIA ut 60 ad 54, hoc est ut 10 ad 9. In Corollario altero, cum est eadem proportio diametrorum, quae 1 ad 2, cylinder posterior CFA est ad Truncum ut 15 ad 11 +, ergò

Trunc. Cylindri Trunc.	Term. antec. 10. 101. 15. factus 15150 Trunc. CFA.
10 — 9 | 15 — 11 +	conseq. 9. 110. 11 + factus 10890 + Trunc. CTA.
101 — 110	In minimis, ut 505 ad 363 + sic Trunc. CFA ad Tr. CTA.

Corollarium II

In conjugationibus aequalitatis et duplae quadratorum vel semiduplae linearum proportionis, ratio corporum per diversas diametrorum proportiones est ista. †

In Proportione diametrorum	Truncus aequalitatis
1. 2	superat plus triente
2. 3	superat nonadecimâ
3. 4	aequalis est Trunco alteri
4. 5	deficit parte $42^{da.}$
5. 6	deficit parte $26^{ta.}$
6. 7	deficit parte $23^{tia.}$
7. 8	deficit parte $20^{ma.}$
8. 9	deficit parte $18^{va.}$
9. 10	deficit parte $17^{ma.}$

Exinde continuè plus deficit, usque dum cylinder, conorum omnium principium, deficiat parte undecima.

In proportionibus verò diametrorum maioribus: praevertitur truncus conjugationis duplae, evanescendo.

12) I. *statt* III.

Corollarium III

Posito, dolia esse ex puris truncis Conicis duplicatis, si eandem habuerint proportionem diametrorum, capacius plerumque est, quod Austriacam figuram, proportionis sc. semiduplae diametri orbis lignei ad dimidiam tabularum longitudinem; quàm Rhenense, quod aequalem habet diametrum dimidiae tabularum longitudini. Rarissimè verò et
N v forte nunquam | fit, ut aequentur capacitate; quia vix unquam profunditates ventrium ad diametrum orbis lignei attingunt proportionem sesquitertiam.

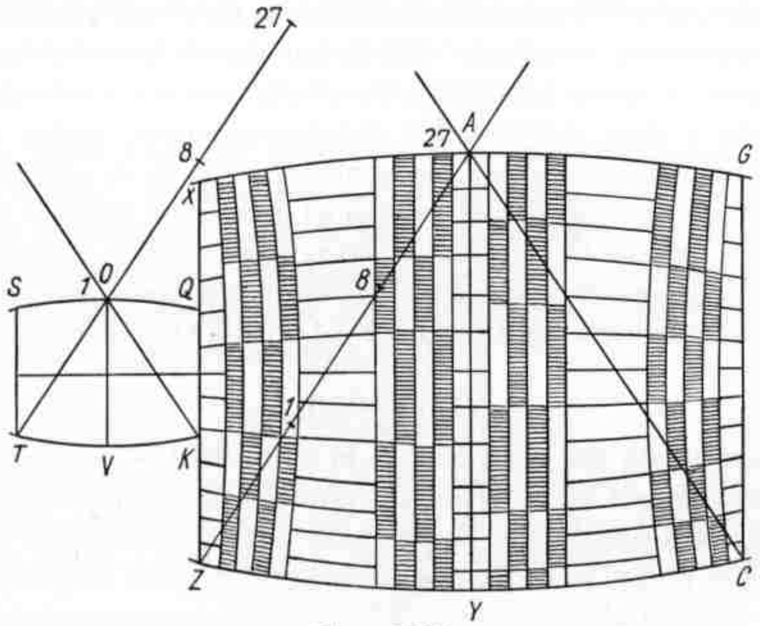
Hactenus de figura Dolij Austriaci, sequitur

De virga cubicâ eiusque certitudine

THEOREMA XXVI

In dolijs, quae sunt inter se figurae similis: proportio capacitatum est tripla ad proportionem illarum longitudinum, quae sunt ab orificio summo ad imum calcem alterutrius Orbis lignei.

Sint dolia diversae magnitudinis, specie eadem SQKT, XGCZ, quorum orificia O, A, diametri orbium ligneorum QK, ST et GC, XZ, eorumque ima T, K et Z, C longitudines OK, OT aequales, sic et AC,



Schema XXII

AZ. Dico, capacitates doliorum esse in tripla proportione longitudinis OK, AC. Agantur enim per O, A, plana OV, AY, parallela orbibus ligneis, et sint duo trunci Conici SV et VQ, sic XY et YG inter se similes. Quae igitur de proportione dimidiorum doliorum sunt vera, illa etiam de duplicatis erunt vera. Sint igitur propositae figurae OVKQ, AYCG, conici trunci, sintque latera figurarum OQ, VK, et AG, YC. Diametri Basium minorum QK, GC, diametri basium maiorum OV, AY; et OQKV, AGCY sectiones quadrilaterae figurarum per suos axes, similes inter se, earumque diagonij OK, AC.

Ergò cum figurae similes sint ad se invicem in tripla proportione analogorum laterum, erit proportionis AG lateris ad OQ latus, aut GC diametri, ad QK diametrum tripla, proportio GY corporis ad QV corpus. At in figuris planis trilateris AGC et OQK similibus, ut GC ad analogum QK, vel ut AG ad analogum OQ, sic etiam diagonios AC ad analogon [1] diagonion OK. Quare etiam proportionis AC longitudinis N 2
ad OK longitudinem, tripla est proportio GY corporis ad QV corpus: et sic etiam totius GZ dolij ad totum QT dolium.

Corollarium I et structura virgae

Manifestum hinc est, si virga mensoria dividatur in partes aequales tantas, ut prima et infima illarum sit longitudo OK dolioli, quod capit Amphoram unam: ad singulas verò partium aequalium adijciantur numeri, qui sunt inter se in triplicata proportione numerorum divisionis aequabilis, nimirum ad finem primae partis Vnitas, ad finem partium 2, numerus 8, ad 3, Numerus 27, ad 4, Numerus 64, ad 5, Numerus 125. et sic consequenter, et numeri reliqui, qui cadunt inter hos cubicos, ordinentur in spacia intermedia; sic ut pars secunda subdividatur in particulas 7 alias, non aequales, sed proportionales, quibus apponi possint numeri 2. 3. 4. 5. 6. 7, medij inter 1. et 8. et sic de caeteris: quod Virga in dolium rite immissâ, numeri ad quos usque pertingit interior tabulae superficies O, A, principio virgae in K, C vel T, Z stante, sint indices Amphorarum, quas capit dolium, proportionis nimirum eius, quam habet dolium, verbi causa, GZ ad dolium QT Amphorae unius.

Corollarium II

Eodem recidit res, quod quidam in triangulo AGC, pro latere AC metiuntur laterum AG, GC summam, pro virga circumgestantes limbum ex pergamena convolutum, amphorarum numeris eadem lege inscriptum, cuius evoluti principium apud calcem C affigunt, longitudinem à C in G et porrò ad A extendunt, de nota eius quae tetigerit punctum A, pronunciantes numerum amphorarum. Nam marginis apud G procurrentem longitudinem, et circulorum ligneorum, viminibus revinc-

13) OX *statt* OK 34) numeros

torum, tabularumque et orbis lignei GC crassitiem, quam amplectuntur circumductu limbi, praesupponunt per omnia dolia similem.

THEOREMA XXVII

Etiamsi binae medietates dolij Austriaci non plane fuerint similes, sed orbium ligneorum alter paulo minor et angustior reliquo, dummodo longitudo in mensoria sit eadem, insensibilis erit capacitatum in utraque medietate differentia.

Dictum enim est in Corollario ad Theor. V. secundae partis, dolium Austriacum versari circa figurationem capacissimam, à qua figurationes omnes ad latus utrumque, hoc est, dolia tam longiora quàm breviora N2v Austriaco, omnia sint minus capacia, quàm Austriacum. | In ijs verò articulis, in quibus à minori ad maximum iterumque ad minus fit mutatio, lege aliqua circuli, semper est aliquousque insensibilis illa differentia. Quod igitur verum est de dolijs integris, eandem habentibus diagonion: id etiam verum erit de binis unius dolij truncis, ut de AYX, AYG; ut etsi orbium alter, puta GC, fuerit minor reliquo XZ; dummodò AC, AZ aequales, capacitas tamen sit utrinque ad omnem sensibilitatem aequalis.

THEOREMA XXVIII

At si longitudo virgae per utrumque dolij truncum non sit aequalis, quod usu venit: medium proportionale inter utramque virgae longitudinem, id est medius numerus inter duos ab una et ab altera medietate notatos, sine errore pro indice capacitatis usurpatur.

Nam minor longitudo inscriptum habet capacitatis, quae est sui trunci, duplum; maior itidem sui trunci duplum habet inscriptum. Vtraque ergo longitudo, junctis numeris, inscriptum habent duplum † capacitatis totius dolij. Medium igitur arithmeticum inter numeros utriusque longitudinis, quod aequivalet medio proportionali inter lineas, arguit simplum totius dolij.

THEOREMA XXIX

Curvatura Tabularum, seu buccositas inter orificium medium et orbem utrumque ligneum, in dolio Austriaco nihil derogat indicio Virgae, in Oblongis dolijs auget capacitatem à virga indicatam (per se quidem, caeteris paribus), in Curtis minuit.

Nam etsi, per XXIX. partis primae, dolium figura Citrij, Pruni, Olivae, Fusi Parabolici aut Hyperbolici, truncatorum, superat capacitate

27) aequevalet

dolium Cylindraceum, vel meri trunci duplicati figuram habens, his gradibus, quo hic ordine figurae sunt recensitae; illud tamen et per se est perparvum, uti apparet ex Th. XXII p. primae; et quicquid eius sensibile est, jam in virgae numeros ingestum est. Nam primum dolium, cuius capacitas pro unius Amphorae indicio virgae fuit inscripta, similiter ut caetera omnia, suam habuit buccositatem: arguit igitur Virga dolia omnia buccositatis similis; quae etsi non omnibus Austriacis est similis, omnibus tamen est aliqua, eoque minor error circa illam. At cum dolia fuerint longiora Austriacis, longior etiam in ijs flexus est tabularum ab orificio ad orbes, itaque maioris capacitatis, etiamsi similis utrinque ponatur flexura; quemadmodum etiam, si breviora fuerint Austriacis, flexus iste est brevior. Atqui virga flexum longitudinis mediocris arguit, qualis est in dolio Austriaco: non assequitur igitur virga (caeteris paribus) longitudinem flexus in dolio oblongo; superat in dolio brevi.[1]

3) perparum

N 3

III. PARS

VSVS TOTIVS LIBRI CIRCA DOLIA

I. Comparatio doliorum per virgam transversalem exploratorum

Si dolium sit proportionis Austriacae, fidito virgae sine respectu vel ventris inter orbem utrumque, vel buccositatis sive curvaturae inter Orificium infusorium et orbem utrumlibet ligneum; et tale dolium alijs omnibus praefer, excepto illo Rhenensi, quod habet profunditatem ventris maiorem sesquitertia diametri orbis lignei, si tamen ullum habet. Ex caeteris igitur elige Oblonga cum multo ventre, qualia sunt aliqua Rhenensia: compensat enim nonnihil gracilitatem et prolixitatem corporis amplitudo ventris medij, et longitudo buccarum. In contemptis habeto dolia oblonga et cylindracea sine ventre: post haec Curta tibi censenda, cuiusmodi aliqua veniunt ex Vngaria, parum aut nihil à cylindro puro puto differentia. At curta ventricosa fugito modis omnibus; tres enim notas paupertatis habent, unam ex Th. V. magnitudinem proportionis Orbium ad dimidiam longitudinem Tabularum; secundam ex Th. XXII. ventris magnitudinem, tertiam ex Th. XXIX. buccarum brevitatem.

II. Consideratio methodi mensurandi per virgam transversalem cubicam

Colligitur igitur ex his omnibus, simul consideratis, nullam inter rationes mensurandi dolia compendiosiorem simul atque circumspectiorem esse, usu virgae transversalis cum divisionibus cubicis, in dolijs Austriacis. Omnes enim cautelas mensorum in se continet. Primùm virga introrsum immissa eliminat crassitiem tabularum, circulorum, qui vincula sunt, viminumque, quibus circuli lignei stringuntur. Eliminat et excessum Marginum, quorum in crenis haerent orbes seu Bases ligneae. Hoc autem ratio alia mensurandi, unâ et eadem opera praestare nulla potest; quae non rationes mensurae apud orificium A exigit, ubi intima superficies tabularum in aperto est. Itaque Mensores aliqui regulas hic nonnullas memoriae mandant et sequuntur, aestimandi caecam hanc tabularum Orbiumque crassitiem: quarum incertitudine circa incon-

14) censentor *statt* censenda

stantia exempla omnis reliqua in mensurando scrupulositas eluditur. Secundò modus iste cavet de inaequalitate basium lignearum seu orbium, idque citra taediosam multiplicationem, citraque repetitionem explorationis, unâ et eadem opera, ut Theor. XXVI. huius dictum. At reliqui mensores in hoc multi sunt, ut doliorum orbes inter se aequent, mediumque eorum proportionale, denique inter capacitates medium conicum inveniant; usum virgae pla|nimetrae conjungentes cum calculo N 3 v molestissimo. Vide recentissimum, JOANNIS HARTMANNI BAYERI Medici † Francofurtensis librum de Stereometria Inanium.

Tertiò, neque dissimilitudo Cadorum (quantula quidem in Austriaca dolia cadit, dum doliorum Opifices Regula sua crassè utuntur, aut dolia vetera praecisis marginibus sarciunt) multum derogat fidei huius mensurationis, ut dictum Corollario I. ad Th. V. et Th. XXII. huius. Quartò, non negligitur hic, sed ipsa methodo adsciscitur amplitudo ventris, seu circulus maximus AY: ab illius enim summo A, instituitur mensuratio ad alterius imum C. Eius rei fundamentum pendet ex Th. XXII. huius partis.

Quintò nec buccositas Trunci Conoidis hic quicquam nocet, per Theor. XXIX. Est enim et per se exigua, et per omnes omnium doliorum medietates, fere similis conniventia Tabularum, ad structurae rationes pertinens, quae nec meram Conicam rectitudinem, nec insignem aliquam ventricositatem, magis tamen illam, quam hanc requirit. At de hac buccositate plerique mensores valde sunt solliciti: adeo ut CLAVIVS, † ut supra dictum, ad Ellipses et Conoidea confugiat: neque tamen quisquam illorum adhuc genuinas doliorum figuras calculando secutus est, quas ego nunc primùm et cognoscendas dedi demonstrationibus spinosissimis, et in numeros conieci operosissimo calculo; sed quod Austriaca nostra dolia attinet, ingeniosa magis quàm utili vel necessaria machinatione, tantum ut ex comparatione calculi cum usu virgae Austriacae, et commoditas huius dimensionis tantò magis elucesceret, et caeteri scrupulosi computatores sese respicerent, perpendentes, quàm hactenus frustra cerebrum fregerint computationibus laboriosissimis, culicem excolantes fractionum minutissimarum, sed camelum errorum deglutientes: sola hac altera re, pariter ipsis ignoratâ foelices, quod nullius ferè momenti sunt pleraeque tam scrupulositates, quam errores circa illas.

Plurimum igitur ad privatorum securitatem fraudesque eliminandas refert; ut lex illa dolij construendi, quae tertia parte longitudinis tabularum jubet describere circulum orbium ligneorum, Magistratuum authoritate diligentiâque conservetur, poenisque et proscriptione vasorum,

16) et *statt* ex 28) altinet 35) plaeraeque

quae hanc figuram non habent, vindicetur: aut certè, ut virgae mensoriae in enormibus illis dolijs dimetiendis, fides publico decreto abrogetur.

III. Quòd usus virgae transversalis, inscriptas habentis divisiones Cubicas, sit Austriae proprius

Patet hinc etiam, cur virgae transversalis usus multò sit Austriae familiarior, quàm nationibus caeteris: Nimirum quia hanc dolij figuram receperunt, ad quam collineantes Vietores, minimum nocent capacitati manuum aberratione. At penes nationes caeteras aliae etiam doliorum figurae in usu sunt; in quibus ventrium amplitudo tabularumque longitudo mutata, statim sensibile quid nocet. Quare etsi verum est, usum
N 4 virgae transversalis universalem esse, in omnibus dolijs [1] inter se similibus, secundum Th. XXVI. huius partis: at nulla lex, nulla institutio sufficit Opificibus, ut semper teneant eandem praecisè proportionem tabularum, multoque minus profunditatis ventris ad Orbes: ut in qua conformandâ casus plurimum valet, consilium opificis minimum. Cùm itaque figurae institutae proprietas non subveniat aberrationi manuum, ut in Austria, sic ut figurae dissimiles aequipolleant similibus: dissimilibus igitur figuris quotidie provenientibus doliorum, nec capacitatis similis, non potest Virgae transversalis cubicae solitariae penes nationes caeteras tam latus esse usus, sine erroris aleâ.

IV. Ratio metiendi quodvis dolium circularium Orbium, sine Virga divisionis Cubicae

Sed cum generalem hoc libro speculationem proposuerim, praxis etiam ad omnes alias doliorum figuras extendenda videtur, cùm ut fructum aliquem Stereometriae huius percipiant etiam nationes caeterae: tum etiam ut Austriaci nostri circa dolia peregrina (quae identidem vel secundo vel adverso Danubio invehuntur in Austriam, aut vino exotico plena, aut exportatura vinum Austriacum) tanto magis juventur: neve usu virgae suae damnum vel inferant alijs, vel ipsi accipiant. Etenim Iustitiae simulachrum pingitur cum bilance, mensurarum omnium exactarum symbolo; pertinetque cura haec circa mensurarum fidem, ad huius virtutis, suum cuique tribuentis, cultum; ut, quae et salvas praestat Respublicas, et ornat, ipsa quovis Sole pulchrior; ab eius amico et sereno vultu, omnes nubeculae errorum quàm longissimè dimoveantur, discutianturque.

Virga igitur in parato sit, divisa in partes aequales minutissimas; cum illa in orificium dolij immissâ metire primo profunditatem ventris medij,

7) collimantes 37) imissâ

deinde transversas longitudines, ab infusorij medio, ad imos calces utriusque orbis lignei; tertio virgam extractam siste foris ad calces orbium ligneorum, acie etiam in crenas impressâ, si potest, metiens utriusque orbis lignei diametrum in altitudinem porrectam seorsim; cui aequales ponuntur esse omnes aliae diametri unius orbis lignei, propter structurae rationes, et quia hîc non de lagenis agimus. Si tamen aliqua notabilis diversitas esset in diametris unius et eiusdem orbis lignei, orta vel ex aberratione artificis, vel ex natura ligni, quae cum venarum longitudinem praestet invariabilem, latitudinem tamen tabularum habet aurae mutationibus obnoxiam; tunc etiam transversas orbium ligneorum diametros metire.

Et quia fit interdùm, ut ipsa etiam ventris medij amplitudo non ordinetur in perfectum circulum: tentet igitur accuratus mensor, (cui ad omnem curiositatem instrumenta modosque possibiles suppeditare animus est) viam aliam discendae areae, qua dolium in medio sectum esse intelligitur. Ea possit esse talis.

Limbo ex pergameno, aut alia materia flexili, non tamen, ut fila, ductili, circumdato medium ventrem dolij, metiarisque, quot partes virgae contineat limbus talis. Posito igitur, quod dolium in medio foris exactè | sit circulare, ex numero partium harum facile per Th. I. disces, N4v quanta diameter debeat esse huius circuli: Vt si partes in ambitu invenisses 6283 cum una quinta, diameter deberet habere partes 2000. Atqui jam exploratam habes diametrum interiorem seu profunditatem ventris: aufer igitur à computata crassitiem ligni, quam potes metiri in infusorio, et pro altera tabula in dolij imo aufer tantundem; quod si diameter profunditatis invenitur aequalis huic computatae, ex ambitu exteriore, et diminutae: dolij venter exactè circularis credi potest; quia si deflectit à circulo, causa nulla est, cur potius obliquae diametri (quod tamen etiam fieri potest) quam erecta et transversa sint inaequales. Sed omnem certitudinem huius rei (si fortè sit materia metienda preciosior auro, quantitatis eiusdem) disces lignis parallelis, intervallo, quantum requirit dolium, firmiter inter se coassatis, quibus omnes circumcirca diametros, si trabes binae dolium sustineant, explorare poteris. Quod si igitur deprehendantur inaequales diametri, erecta et transversa, vel alia quaecunque; tunc figura est Ellipsis: quare per Epis. ad Th. I. p. primae diameter computata medium erit arithmeticum inter erectam et transversam. Itaque quantò computata et diminuta longior est diametro profunditatis, tantò vicissim haec erit longior diametro transversâ.

Ex cognita igitur diametro vel diametris cuiusque circuli vel Ellipsis, sic elicies aream, tam orbis lignei, quàm sectionis imaginariae per me-

4) prorrectam 30) precisior

dium ventrem, per Th. II. et Episagma III. partis primae. Multiplica diametrum erectam in transversam, sive fuerint aequales, sive inaequales: eritque factus ad summam parvulorum quadratorum, quae sunt unam virgae divisionum aequalium longa et lata, contentorum in area talis orbis lignei, sic ut 14 ad 11 ferè. Accuratius, (quod dicto Theoremate omissum hinc supple) ut numerus post quaternarium ordinatas habens Cyphras sedecim, ad dimidium numeri, quo effertur circuli circumferentia Th. I. Nam ut obiter hoc dicam à nemine adhuc demonstratum, † nescio an à quoquam observatum: In omnibus figuris regularibus, circulo circumscriptis, et sic etiam in ipso circulo, quasi in figura infinitangula, usu venit, ut ipsarum perimetri, quando diameter habere ponitur partes 2, numero contineantur, qui duplus est numeri, quo continetur area figurae.

Proxima tibi cognitio necessaria, est longitudinis dolij, quam non ita facile foris, vel intus metiri datur virgulâ, quia curvantur tabulae, procurruntque ultra crenas orbesque ligneos, quorum etiam crassities ignoratur. Veram igitur longitudinem sic disces; quadra longitudinem transversalem, ab hoc quadrato aufer factum ex diametro orbis lignei et diametro ventris (sumpto medio arithmetico, si non fuerint omnes unius figurae diametri aequales) residuum serva, deinde orbis lignei diametrum aufer à diametro ventris, residuum quadra, quadrati partem quartam aufer à residuo prius asservato: radix eius quod remanet, est longitudo medietatis illius, cuius orbem ligneum adhibuisti; technicè dicitur altitudo trunci. Quod si dolium est regulare, duplum erit huius, longitudo totius dolij; sed tutius ages, repetendo processum eundem cum altera longitudine transversali, alteroque orbe ligneo: quo patefiet alterius medietatis longitudo, hoc est alterius Trunci altitudo.[1]

Exemplum. Sit inventa in Sch. XXII. transversalis AZ longitudo partium aequalium virgae 24 semis et paulò plus: ut sit eius quadratum 602 s. Sint etiam inventae diametri AY 22, XZ 19 partium earundem. Hae in se mutuò multiplicatae faciunt 418, quem aufer à 602 s. restat 184 s. Differunt diametri per 3, cuius quadratum est 9, et hinc pars quarta, 2 cum quartâ: quam aufer ab 184 s. restat 182 cum quartâ, cuius radix 13 s. dimidij dolij longitudo interna, ut tota GX sit 27 longa. Et cum quadratum de 22 sit 484, de 19 sit 361: Vt igitur 40000 ad 31416, sic 484 et 361 ad 380 + et 283 s. areas circulorum AY, et XZ.

Inventis areis circulorum, et longitudine medietatis utriusque, trivium occurrit; aut enim pro Truncis Conicis habentur binae dolij cuiusque medietates, aut pro Truncis Citrij, aut pro figuris intermedijs, pro Pruno, Oliva, Fuso Parabolico, vel Hyperbolico, truncatis: hoc est, curvaturae tabularum tribuitur vel mera rectitudo ab infusorio ad marginem, vel merus circulus inter utrumque marginem et infusorium, vel figura ex utroque mixta.

Illa viâ semper paulò minus iusto colliges, istâ promiscuè vel plus iusto, vel iustum attingitur; hac semper iustum attingeretur, si tam facile per hanc incederetur, quàm per illas.

I. Prima viâ dividitur Truncus quilibet in cylindrum regularem, quasi stantem super basi, orbe ligneo, et in circumjectum illi segmentum Limbi Cylindracei Conicum, quod Tunicam appellavimus. Ergò Cylindri corpus, per Th. III. partis primae, computatur, ducta altitudine dimidii dolii, in basin orbis lignei supra inventam: nam numerus inde factus, summam continebit parvulorum Cubiscorum, qui sunt in proposito cylindro, quorum quilibet unam virgae particulam divisionis aequalis longus, latus et profundus sit. Trunci verò, seu dimidii dolii proportio ad Cylindrum super basi, orbe ligneo, habetur per Corollarium ad Th. XVII. partis primae, ducta diametro orbis lignei, et in se, et in diametrum seu profunditatem ventris; ducta etiam differentia harum diametrorum in sui partem tertiam: et numero Cubiscorum in cylindro prius invento, multiplicato in summam factorum posteriorum, factoque diviso per quadratum diametri orbis lignei: prodit enim summa Cubiscorum in dolio. Eodem verò modo agendum etiam cum altera dolii medietate, si fuerit dissimilis, aut inaequalis.

Quot autem huiusmodi Cubiscorum faciant unam mensuram, non aliter disces, quàm si ex lamina ferrea vasculum oblongum, Cylindraceum exactè, et aequaliter rotundum struxeris, cum fundo optimè complanato, deinde infuso liquore unius mensurae in vas siccum, virga tua mensus fueris altitudinem quam signaverat liquor ante immissionem virgae in vasculum; mensus etiam fueris amplitudinem circuli in summo, debet enim aequalis esse imo. Nam ex amplitudine disces aream circuli, modo supradicto, ex hac et altitudine, corpus seu numerum Cubiscorum in una mensura: quo numero si diviseris numerum Cubiscorum cuiuscunque solidi, habebis in quotiente numerum talium mensurarum, quas capit locus solidus, seu dolij seu Cupae. Atque haec est prima methodus, qua dixi colligi minus iusto. Exemplum habes post Th. XXII. partis primae.

Sed continuabimus hic etiam prius inceptum. Duc igitur 13 semis in 283 s. basin minorem, orbis scilicet lignei XZ, fiet Cylinder 3685 s. In hac verò proportione diametrorum est cylinder ad Truncum, ut 361 ad 421. Ergò si 361 fit 3685 s. quid 421? sequitur 4298, tot cubiscos valet dimidium dolium: totum ergo 9596. Quod si 30 huiusmodi cubiscorum implerent unam mensuram, diviso 9596 per 30, prodiret 320 fere, tot mensuras caperet dolium totum. |

8) apellavimus

O v II. Altera methodus, qua dolium consideratur, ut Citrium utrinque truncatum, quaeque frequenter justum pronunciat, sed aequè frequenter plus justo; jam supra in Exemplo ad Th. XXII. et XXV. p. primae prolixè et scrupulosissimè fuit tradita: nec alia repetitione est opus, nisi ut moneam, dolium illic appellari Citrium Truncatum, dolij ventrem illic esse circulum maximum per medium corpus Citrij; Orbes verò ligneos illic appellari circulos Truncantes. Deinde et hoc est addendum, si orbes lignei non fuerint aequales, operandum esse bis, semel per minorem orbem, ac si uterque tantus esset, iterum per maiorem, ac si uterque maior; quodque posterior calculus differens prodet à priori, eius parte dimidia hinc detracta vel inde adjecta, justum (ut in perfecta Citrij figura) constitutum iri.

III. Quod si tibi scrupulositates istae nondum sufficiunt, eo quod curvatura tabularum non semper habeat figuram Circularem exactè, et si, ut est Geometricorum ingeniorum natura, non ex aliena et conficta, sed ex genuina et propria cuiusque dolij figura lubet argumentari et calculare: age, prius inquirito, qualis omninò figura sit huius curvitatis Tabularum?

Quasdam igitur visu simplici dignosces, quibusdam indagandis opus tibi erit instrumento et dexteritate manuum, circaque hoc exercitium, subtilitate curiosissimâ: quasdam denique et plerasque quidem, nullo ingenio discernes à perfecto circulo, propter rudem tabularum coassationem, impedimenta circulorum ligneorum et viminum, inaequalem tabularum crassitiem, et ipsarum figurarum affinitatem inter se.

Quod si in oculos incurrat curvaturae tabularum in medio ventre dissimilitudo à curvatura versus extremos margines, dolium erit Truncus Fusi Hyperbolici, et quo angustius haec curvatura ventrem circumsteterit, hoc maior Hyperboles pars erit, hoc propius etiam capacitas dolij ad capacitatem Trunci Conici accedet.

Reliqua hoc instrumento expedies. Cape regulam ex ferro vel orichalco, quadratam, benè politam, longitudine dolij, non flexilem suo pondere; in illa sint stili ferrei graciles et acuti ut clavi, trusatiles per longitudinem regulae, sic ut in quacunque eius parte haereant firmi non vacillantes; possint autem cochleis à regula extrudi reducique ad illam: sint numero, cùm minimum, quinque; melius si septem; quorum medium sufficit fixum adhaerere Regulae mediae, longitudine, quae superet crassitiem omnis circuli lignei in dolijs. Statuto igitur stilo fixo in una commissurarum, qua duae tabulae coeunt in medio dolij ventre, reliquos stilos trusatiles, binos et binos, vel si adsunt, ternos, ordina versus dolij mar-

2) quaeque frequentur 5) apellari 28) proprius

gines, intervallo illis indulto modico et utrinque aequali; cochleisque extrude, ut omnes tangant commissuram eandem, extimi aequaliter à medio remoti, in marginibus extremis; caeteri in punctis vicinis, insinuantes se inter binos circulos ligneos, quâ datur eorum tantulum intervallum. Ita comprehensa stilorum extremitatibus quina vel septena figurae puncta, cum Regula transfer in planiciem tabulae bene complanatae, factis in ea punctis totidem; ut si sint in Schemate XVIII. puncta extrema F, G, medium C, interjecta Q, S, et respondentia in parte alterà. Et ne quis scrupulus supersit, metire etiam crassitiem tabularum, tam in orificio infusorio quàm in marginibus; ea quanta fuerit, tanto intervallo versus interiora et centrum veluti curvaturae, facito puncta alia, deletis prio|ribus, ut interiorem curvitatem dolij, quinis vel septenis punctis in O 2
plano habeas propositam.

Primùm igitur connecte puncta F, G, per rectam FG; deinde cùm CG, CF ex processus descriptione sint aequales; ex C perpendicularem duc in FG, quae sit CO, continueturque extrorsum aliquousque. Tertiò per bina puncta extima, ut F, S, et respondentia ex altero latere, duc rectas, et continua illas, usque in perpendicularem CO continuatam. Quod si reliqua puncta non fuerint intra complexum harum linearum inventa omnia, vel saltem exteriora in hac ipsa linea; aut si duae hae lineae concurrerint alibi, quàm in ipsa perpendiculari CO continuatâ, ut in Y; tunc operam lusisti, certumque habes, vel dolij figuram, vel instrumentum, vel manus tuas, ad hanc subtilitatem esse ineptas. Possumus autem his duabus lineis, etsi, accuratè loquendo, secant Hyperbolen in punctis singulae binis, uti loco contingentium; utique in dolijs, quae mihi videre contigit. Quare per Th. XXVII. partis primae, diligenter metire, quae sit proportio CO (dimidiae differentiae diametrorum, ventris et orbis lignei) ad CY. Secto enim angulo OGY in aequalia, si secans transiverit per punctum C, figura ex circulo erit, pertinebitque ad methodum secundam propriè. Sed quod maximè facit ad comparationem cum caeteris, quaeritur tunc segmentum Globi FGC, deinde per Th. XXV. p. primae, fit ut GO ad OC, sic numerus segmenti globi ad numerum, qui exprimet dimidium corpus Citrij parvi: cuius proportio ad Zonam circa cylindrum HFGE docetur in Exemplo ad Th. XXII.

Si verò fuerint aequales OC, CY, figura est ex Parabola: quare per Th. XIII. Epis. II. quaeritur Parabolicum Conoides ex cono aequealto: Nam area circuli cuius diameter FG, ducta in partem tertiam OC, creat numerum corporis Coni, at Conoides est sesquialterum Coni: ergo corpus Conoidis habetur, ducta area FG in semissem CO. Tunc ex Conoide

10) infusorio 35) NC *statt* OC

quaeritur Fusum parvum in Conoide, per Analogiam Th. XXVII. partis primae: scilicet ut GO ad YO, duplum ipsius CO, sic Conoides inventum ad Fusi eius corpus dimidium. Invento corpore Fusi parvi, processus reliquus idem est, qui cum Trunco Citrij; Zona enim circa Fusum habet partes duas, altera est Fusum parvum, jam inventum, reliqua et maior quidem pars creatur ducta circumferentia circuli orbis lignei in figuram planam FGC, quae parabola dicitur; cuius area habetur ex Epis. II. ad Th. II. Ductâ enim parte dimidia, id est tribus sextis de CO, in rectam FG, creatur area trianguli FCG, cuius sesquitertia cum sit area Paraboles, creatur igitur ductis quatuor sextis, hoc est besse ipsius CO, in rectam FG.

Quòd si fuerit CO maior quàm CY, figura erit ex Hyperbola, proximèque accedet dolium ad conum duplicatum: idque tanto magis, quanto maior fuerit CO quam CY. Eritque Conoidis Hyperbolici proportio ad corpus dimidij Fusi inscripti, paulò minor quàm GO ad OY, maior tamen quam GO ad OV, si V centrum sit figurae. Hoc solum lucramur ex hac scrupulositate circa Hyperbolam: de caetero, cùm nondum determinata sit recta inter OY et OV, quadrans ad proportionem convenientem; non etiam animum adieci hactenus ad quadraturam Hyperboles, cuius cognitione insuper opus esset, ad Zonam Fusi Hyperbolici ex arte † computandam. Opitulamini Apollonij.[1]

O2v Rursum si CO minor quidem fuerit, quàm CY, maior tamen ad CY quam OG ad GY (quod quis qua diligentia discernet?) figura erit ex Ellipsi recta; cuius segmenta ad circuli segmenta facta per rectam axi parallelam, semper habent proportionem eam, quam brevior eius dia- † meter ad longiorem, per ea quae ARCHIMEDES adhibet ad demonstrandum Episagma III. ad Th. II. perque dicta à me in commentarijs de motu Martis, quod ad dictum Th. II. primae partis erat etiam superinducendum. At cum linea proportionis segmenti Sphaeroidis recti ad Prunum Ellipticum, inter C. Y. nondum sit determinata, ut et prius in hyperbola, nullum hic ingeniosis, et omninò Apollonijs, exitum monstrare possum, quàm quem ipsi sibi sollertissimi ingenij acie, superius Th. XXVI. provocati, exciderint et patefecerint: mediocribus ingenijs nullus hic thesaurus utilitatis aut compendij latet absconditus. Idem denique teneto, cùm CO minor ad CY fuerit, quam OG ad GY: figura enim erit ex Ellipsi transversa, et Sphaeroidis segmenti proportio ad Olivam maior erit, quàm GO ad OC, sed genuina linea nondum est nota: quod tanto minoris momenti impedimentum censeri debet, quanto minus verisimile est, dolia Sphaeroidis, quàm Hyperboles aut circuli figuram imitari.

V. Qua ratione quis artificiosè metiri possit proportionem partis vacuatae ad residuum liquoris, strato dolio, erectisque ad perpendiculum diametris Ventris et Orbium ligneorum

Desiderata hactenus, quantum ego scio, doctrinae huius pars: utilis tamen patribus familias ad arguenda et cavenda furta: si tamen Bacchus à Thetidis ditione suas opes procul collocaverit, eique suis finibus interdixerit: solet enim haec dea sic tegere sui vernae maleficia, ut cùm partem ille subduxerit, ista refundendo corrumpat reliquum. Coigneti † aliorumque modus, qua certus est, angusti est usus: ut verò ad omnis generis dolia extenditur, sine errore et absurditate, quod facile fatebuntur authores, exerceri non potest. Incipiamus tamen ab illo: Nimirum si dolium sit figura cylindri, aut insensibiliter ab ea deflectat, superficies plana liquoris, secat orbes ligneos, ventrisque amplitudinem, in bina segmenta circuli; quare, per Th. XVII. p. primae, segmenta duo totius Cylindracei dolij, vacuum et plenum, sunt in proportione segmentorum planorum in basibus.

Sed quia dolium est compositum ex duobus veluti Truncis Conicis, quorum reputatur altitudo technica, quantum est longitudinis inter circulum ventris et orbem ligneum: Truncus verò quilibet constat ex cylindro medio, super basi Trunci minori, et circumiecta Tunica (sic enim appello in dolio dimidiam ventris protuberantiam supra molem intimi cylindri: si totum dolium eiusque genuinam figuram consideres, tota ventris protuberantia, constans ex duabus talibus veluti tunicis adversis, in superioribus mihi dicta fuit Zona). Animadverte igitur, quod Tunicae vel Zonae huius margo primùm subsidit, priusquàm ab intimo cylindro, qui est inter orbes ligneos, quid defiat: postea quàm cylinder incipit minui, semper unâ [1] minuitur etiam Tunica: ad extremum toto O 3 cylindro exhausto, restat in faecibus adhuc margo Tunicae vel Zonae. Quis in hac irregularitate speret ab arte subsidium?

Atqui non plus unico Theoremate nobis opus fuerit, ut de vacuatione Dolij, cum figura Trunci conici duplicati, demonstrativam planè praescribamus Methodum. Dictum est supra Th. XVI. partis primae, nondum esse factam à Geometris disquisitionem de soliditate segmentorum quorundam Coni: quae inter sunt etiam ista segmenta Truncorum Conicorum, seu dolij, quae determinantur per planam superficiem liquoris defluentis, parallelam axi Truncorum conicorum, rectam ad communem basem Truncorum, seu circulum medium Ventris.

De his itaque segmentis Coni, lubet aliqua disserere etiam hoc loco, ad provocandos Geometras; ut qui hactenus non satagendum putarunt

5) Bachus 10) absurdis 23) protubernantia

de his segmentis, usu, quod supra dicebam, non exigente; ij jam tandem, postquàm manifestum vident usum eorum, e somno evigilent, demonstrationemque soliditatis eorum quaerant. Primùm itaque consideravi, si fortè tale coni segmentum, quod fit plano ad axem parallelo, eoque Hyperbolico, proportionem ad Conum totum habeat compositam ex proportione segmenti suae basis ad basim Coni, et ex proportione suae altitudinis ad Coni altitudinem. Haec opinio vero quidem est proxima, sed tamen falsa. Nam portio haec est segmenti Coni scaleni humilioris, scilicet per verticem secti, ad conum propositum altiorem: atqui tale segmentum Coni scaleni per verticem secti, est minus segmento Coni altioris, super eadem basi stanti; exit enim in mucronem; cùm hoc exeat sursum in quandam aciem latam Hyperbolicam; illud continetur superficie Coni minoris et plano triangulari; hoc portione superficiei Coni maioris, et plano Hyperbolico.

Secundò consideravi, num segmentum Coni propositum sit aequale segmento consimili cylindrici segmenti, habenti eandem basin et altitudinem: de quibus segmentis secundis egimus Th. XVII. p. prioris; quorsum spectat etiam Th. XXII. ex parte: et an non tam Cylindraceum quam Conicum segmentum, stantia super eodem segmento circuli, et terminata segmentis planis, illud Elliptico, hoc Hyperbolico, quodlibet aequet partem tertiam segmenti cylindrici recti, per planum axi parallelum facti, super basi eâdem. Sed nec hoc ipsissima veritate nititur, utcunque prope accedat. Nam si verum hoc esset de uno, non posset esse falsum de semicylindro, quem determinat planum per axem, transiens etiam per inscripti Coni axem et verticem. Nam diviso hoc semicylindro in partes 33, semiconus eodem plano per axem determinatus, est talium partium 11, per Th. IV. p. primae: at segmentum cylindrici segmenti est † talium partium 14, per Th. XVII. Quod igitur interest corpusculum geminatum, terminatum intus Conica superficie, foris planâ et portiunculis Cylindraceae, est partium tantùm 8. Etsi verò hic conus dimidius est praecisè triens semicylindri, tamen hoc in alijs segmentis non obtinet, eo ipso, quod tunc Conus non amplius per Verticem secatur; segmentum igitur Coni propositum maius est triente segmenti cylindrici recti aequealti: et videntur ista successivè magis magisque fieri aequalia, vicissimque corpuscula interposita magis magisque attenuari, quo minus sit segmentum ipsum rectum Cylindricum, cuius ista sunt partes.[1]

O 3 v Tertiò igitur videtur inquirenda quadratura Hyperboles, quae segmentum coni determinat, qua inventa facile est, cuilibet Hyperbolae triangulum super eadem basi assignare, cuius area sit aequalis areae Hyperboles. Nam proportio segmentorum Coni ad Conum totum, videtur esse

8) hac 27) 1 *statt* 11 36) fit

composita ex proportione baseon planarum, et proportione altitudinum triangulorum istorum, hyperbolas aequantium. Interim dum hanc praedam venatu referant Apollonij; nos fidem reliqui Theorematis, etiam non demonstrati, secuti, id eligemus, quod ad veritatem aspirat; et segmenta circulorum quae sunt bases Conicorum propositorum, ducemus non in altitudines eorum, qua ratione minora justo constitueremus; sed in lineas longiores, scilicet in continuatas has altitudines, usque ad arcum circuli, per vertices conorum continuatorum, perque orificium dolij traducti, ut si in Sch. XVIII. circulus maximus traduceretur per B, C et oppositum verticem ultra D, ut sit CL sagitta, et LB sinus arcus, determinantis nostras lineas: cui circulo expedit peculiare nomen esse; dicatur Metator. Manifestum enim est, talem arcum non tangere dolium in G, orbe ligneo, ac proinde altitudinem OG technicam segmenti conici COG, continuatam in hunc arcum, fore longiorem, veluti si OZ esset. Segmentum igitur CA ventris, cuius altitudo CO, ducemus in trientem linearum OZ, pro soliditate segmenti Conici. Si quis metuit, ne OZ nimis sit longa, is cogitet segmenta nobis hic proposita non esse merè conica, sed his maiora ex Citrio et Fuso.

Nascetur igitur processus iste. Ante omnia notam esse oportet, ex superioribus praeceptis, amplitudinem ventris CA, et diametrum orbis lignei GE, cum dimidia differentia CO, et per transversalem CE, ipsam etiam altitudinem technicam Trunci OG. Est autem CO ad OG, ut CL ad LB altitudinem Coni continuati. Igitur scientur areae circulorum CA et GE, ex superioribus, in mensura una; quae areae ducendae sunt in suarum altitudinum LB et KB partes tertias, et auferendus conus GEB, deficiens à Cono CAB continuato, ut restet truncus CAEG, in numeris aptis praesenti negocio. Iam pro inveniendis lineis OZ opus est diametro Metatoris: quadratum igitur ipsius LB, divide per CL, et prodibit in quotiente residuum diametri. Adde igitur CL ad hoc residuum, compositus erit diameter Metatoris. Igitur si proposita sit altitudo vacui CO, per eam inquirenda sunt, segmentum circuli ventris, per praecepta superiora, et linea ex O perpendiculariter per superficiem liquoris defluentis exiens in Metatorem. Aufer igitur CO à diametro Metatoris, ablatam multiplica in residuum, facti radix est linea quaesita; in cuius partem tertiam multiplicanda est area segmenti circuli Ventris, pro soliditate segmenti Conici. Quod si altitudo vacui CO non superat dimidiam differentiam diametrorum CA, GE, sufficit hoc laboris. At si superat, labor geminatur. Segmentum enim Coni tunc excurrit ultra Truncum CGE, in Conum GBE deficientem: quare pars eius deficiens inquirenda, et à segmento toto auferenda erit. Aufer igitur dimidiam

6) ratio 9) XXI *statt* XVIII

differentiam diametrorum ab altitudine liquoris; cum residuo tanquam sinu verso, quaeratur area segmenti orbis lignei, quod extat supra superficiem liquoris; nanciscatur autem eandem dimensionem cum area segmenti plani ventris. Tunc quae est proportio altitudinis liquoris ad excessum suum supra dimidiam diametrorum differentiam; in eadem
O 4 proportione adme¹tire huic minori segmento orbis lignei, portionem de linea OZ, cuius tertiam partem duc in segmentum lignei orbis, pro soliditate partis de Conico segmento deficientis: qua ablata à toto segmento Conico, relinquitur segmentum Trunci inanitum.

Denique si tibi cognitus est numerus mensurarum, quas capit dolium totum, eum multiplica in segmentum Trunci, vel una vel duabus operationibus inventum: factum divide per soliditatem Trunci totius, prodibit in quotiente numerus mensurarum, quae defluxerunt.

Cùm autem et hîc et supra saepius usuveniat, ut quaerenda sint segmenta circulorum, per sinus versos dimidiorum arcuum, quae res molestias magnas creat; ut hac te molestia ex parte liberarem, tabellam hic confeci, quae singulis centesimis partibus sinus versi seu sagittae, à summo versus centrum, assignat quantitatem areae segmenti in ea proportione, ut circuli illius totius area valet partes 15710: nec enim aptior numerus mihi exivit, utenti facili et expedita via computationis; nec nunc vacat, hunc numerum cum rotundo aliquo permutare.

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0.	0	294	818	1478	2237	3072	3964	4900	5868	6856	7855
1.	10	339	879	1550	2318	3159	4056	4996	5966	6956	
2.	27	386	941	1623	2399	3246	4148	5092	6065	7056	
3.	49	434	1004	1697	2481	3334	4241	5188	6163	7155	
4.	76	484	1069	1772	2563	3423	4334	5284	6262	7255	
5.	105	536	1134	1847	2646	3512	4428	5381	6360	7355	
6.	138	589	1201	1923	2730	3601	4521	5478	6459	7455	
7.	173	644	1269	2001	2815	3691	4616	5575	6558	7555	
8.	211	701	1337	2079	2900	3782	4710	5673	6658	7655	
9.	252	759	1407	2158	2985	3873	4805	5770	6757	7755	

Vsus tabellae: segmenti sagittam seu sinum versum, seu quod est loco eius (ut in Ventre altitudinem vacui, in orbe ligneo altitudinem extantis partis supra liquorem) duabus Cyphris auctum, divide per semidiametrum circuli, cuius est segmentum: quod prodit, eius denarios quaere in fronte, digitos in margine, et area communis exhibebit aream segmenti, qualium area totius illius circuli valet 15710; quae si valeret minus aut plus, reductionealiqua opus esset ad communem dimensionem.

Exemplum huius processus. Sit venter dolij CA altus 22, diameter orbis † lignei GE 19, dimidia ergo differentia CO sesqui: Et OG 13 s. Vt autem CO sesqui ad OG 13 s. vel ut 3 ad 27; 1 ad 9. sic CL 11 ad LB 99, ergo KB est 85 s. Ponemus autem, aream circuli CA valere numerum Tabellae, sc. 15710. Erit ergo ut quadratum 484 de CA 22. ad quadratum 361 de GE 19, sic area circuli CA 15710, ad aream circuli GE 11718. Duc 15710 in trientem de 99, prodit 518430, pro corpore CBA: duc 11718 in trientem de 85 s. prodit 333963, pro corpore GBE, quod aufer à CBA, restat 184467, pro Trunco CGEA. Iam pro diametro Metatoris: ipsius LB 99, quadratum 9801, divide per CL 11, quotiens erit 891; cui adde 11, erit Metatoris diameter 902.

Sit primò altitudo vacui minor quam CO, sc. 1. Vt igitur possis excerpere eius segmentum ex tabella, dic, CL 11 fit 100, quid 1? prodit 9 cum undecimâ: haec immissa in tabellam, refert segmentum Ventris 256 ferè. Aufer deinde 1 à 902 diametro metatoris, restat 901 quod duc in 1. fit 901. cuius radix 30 +. Duc igitur eius | tertiam 10 in 256. prodit soliditas segmenti 2560. Quia ergo O 4 v altitudo vacui minor est, quàm CO: valet tota haec soliditas. Et ut 184467 ad numerum mensurarum dolij, sic 2560 ad numerum mensurarum quae defluxerunt. Sed nota, si operareris per simplicem segmenti altitudinem, quae esset 11, tunc non multo plus tertia parte huius colligeres, quod est certò minus iusto.

Sit secundò altitudo vacui maior quam CO, sc. 6. Vt autem 11. ad 100, sic 6 ad 54 cum 6 undecimis. Ergo in tabella quaesiti, 50 in fronte, et 4 cum appendice in margine, exhibent segmentum 3468. Aufer deinde 6 à 902 restat 896, quod duc in 6, fit 5376, cuius radix 74, minus sexta parte: duc huius tertiam partem in segmentum, prodit soliditas segmenti Conici 85351, sed ultra truncum conicum excurrentis, quia 6 superat CO. Ergo aufer CO sesqui à 6, restant 4 s. cum hoc quaerendum segmentum orbis lignei. Si semidiameter eius 9 s. fit 100, tunc 4 s. fit 47 cum triente ferè: cum quo ex tabella eruitur segmentum 2843, qualium area orbis lignei, quae minor est areâ ventris, habet 15710. Duc igitur 2843 in 361, quadratum de 19; factum divide per 484, quadratum de 22, prodit 2120 s. Et quia segmento toti, cuius erat numerus 6, tribuebatur 74, eius parti, cuius est numerus 4 s. tribuendum erit pro altitudine 55 s. cuius tertiam duc in 2120 s. fiet 39229 s. soliditas apicis de segmento excurrentis in conum deficientem. Aufer hanc à segmento toto, restat segmentum Trunci conici 46121 vacuum. Rursum igitur, ut 184467 ad numerum mensurarum totius dolij, sic 46121, ad numerum exhaustarum mensurarum. Si per simplicem altitudinem segmenti operareris, ea fuisset non 74, sed 66, segmenti soliditas 76312, deficientis verò apicis 36400, soliditas ergò segmenti de Trunco 39912, certò minor iusto. Nos igitur quod hic maius invenimus, pro vero amplectimur.

At enim excipient Apollonij ne sic quidem, hac soliditate segmentorum conicorum concessâ, satisfactum diversitati in dolijs; quippe haec soliditas, cum ex unius formae metatore computetur, non plus quàm uni figurae doliorum quadrabit? Scio equidem; quare ut et illis satisfaciam, ad Th. XXX. partis primae illos ablego; illic invenient

33) 3922 *statt* 39229 35) 81429 s. *statt* 46121 36) 81429 38) 3640 *statt* 36400 39) 72672

(Apollonij inquam, quaerentes, invenient) unde suppleant, quod scientificae demonstrationi huius artificij adhuc deest.

Conclusio libri

Constitueram errores aliorum, cum circa doliorum integrorum, tum etiam circa partis vacuae dimensiones, detegere, fundamentaque Elenchorum monstrare in Theorematibus huius libri. At cùm una veritas sufficiat vel tacens, contra omnes errorum strepitus; et jam anteà liber, vix decem initio Theorematum, praeter opinionem excreverit: habeant igitur sibi suos errores, quicunque ijs delectantur; fruamur nos nostris commodis; et ut fruendi materia, salvis corporis animique bonis, affatim suppetat, precabimur.

Et cùm pocula mille mensi erimus,
Conturbabimus illa, ne sciamus.

FINIS.

MESSEKVNST ARCHIMEDIS

Außzug auß der Uralten

Messe Kunst Archimedis

Vnd deroselben newlich in Latein außgangener Ergentzung / betreffend

Rechnung der Cörperlichen Figuren / holen Gefessen vnd Weinfässer / sonderlich deß Oesterreichischen / so vnder allen anderen den artigisten Schick hat.

Erklärung vnnd bestättigung der

Oesterreichischen Weinvisier Ruthen / vnd deroselben sonderbaren gantz leichten vnd behenden Gebrauchs an den Landfässern: Erweitterung dessen auff die außländische / so auch auff das Geschütz vnnd Kugeln.

Sampt einem sehr nutzlichen

Anhang

Von vergleichung deß Landtgebräuchigen Gewichts / Elen / Klaffter / Schuch / Wein- vnd Traid Maaß / vnder einander / vnd mit andern außländischen / auch Alt Römischen.

Allen vnnd jeden Obrigkeiten / Beampteten / Kriegs Obristen / Handelsleuten / Büren- Müntz- Baw- vnd Rechen Meistern / Wein Visierern / Haußwürthen / vnd meniglichen in vnd ausser Lands / fast dienstlich: sonderlich aber dem Kunst- vnnd Antiquitetliebenden Lesern annämlich.

Gestelt durch

Johann Kepplern / der Röm. Kays. Mt. vnd Dero getrewer Löbl. Landschafft deß Ertzhörtzogthumbs Oesterreich Ob der Enß Mathematicum.

Prov. XVI.

Rechte Waag vnd Gewicht ist vom Herren / vnd alle pfunde im Sack sind seine Wercke

Vom Authore verlegt / vnnd gedruckt zu Lintz durch Hansen Blancken.

ANNO

M. DC. XVI.

Denen Edlen / Vesten / auch Ehrnvesten / Ersamen / Fürnemen / Fürsichtigen vnd Wolweisen /

Herrn Burgermeistern / Richtern vnd Rähten /

der Löblichen Stätte deß Ertzhörzogthumbs Oesterreich Vnder vnnd Ob der Enß:

Meinen Groß- vnnd Günstigen Herren

Edle / Veste / auch Ehrnveste / Ehrsame / Fürneme / Fürsichtige / Wolweise / Groß- vnd Günstige Herren. Das Vralte Mütterlein aller vnd jeder Obrigkeiten / Gemainden / guter Würte / vernünfftiger Kauffleute / Freykünstler vnd Handwercker / namens Geometria, mein gebiettende Fraw / lesset E. V. E. F. W. vnd G. als einem grossen vnd sehr lieben thail jhrer Kinder vnd Angehörigen / jhren mütterlichen Gruß / vnnd nebens soviel vermelden: wann es der Löb. Obrigkeit in jhrer Regierung / vnd jedem nachgesetzten inn seinem Handel vnd Wandel wol ergehe / vnd er sich also / wie Sie jhne gelehrt / ehrlich vnd reichlich mit den seinigen nehre vnd hinaußbringe / solches jhr ein sonderliche Frewde sey zu vernemen. Ferners vnnd demnach sie von mir verstanden / das Ich / als jhr geschworner Diener / mich kurtzer Jahren im Land Oesterreich Ob der Enß / vnd dessen Hauptstatt Lintz / vermittelst Kayserlicher / vnd von derselben Löbl. Landschafft habender Bestallung / nidergerichtet / in Hoffnung / alda die von Ir mir auffgetragne Raittungen / betreffend alle theil jres Gebiets inn der Obern vnd Nidern Welt / mit mehrer ruhe / vermittelst Göttliches willens zuvolführen vnnd zuschliessen: Als hat sie jhr baides / diese einer gantzen Löblichen Landtschafft gutwilligkeit vnd ehrerbietung gegen Ir / so auch mein resolution vnd entliches verfahren wol gefallen lassen: mit vermeldung / daß sie das gantze Land Oesterreich / sonderlich von deß edlen Rebensaffts wegen / vor andern Ländern lieb habe / vnd zu auffzucht eines von Leibsgstalt vnd guten Sitten wol proportionirten Volcks / grossen fleiß angewendet / auch jr eigene Herberg in dem Oesterreichischen Weinfaß habe / alda sie ordentlich pflege einzukehren. Derohalben vnd obwol Sie alt / vnd nunmehr vnvermüglich / alß die jhr Haab vnd Gut maisten theils jhren Kindern vbergeben / dem Tischler das Winckelmaaß / dem Binder den Circkel vnnd Hemstab / dem Wagner die Teichsel vnd das Rad / dem Schiffman das Ruder / dem Mahler die perspectiv vnd Sonnenvhr / dem Kauffman die Waag vnd Arithmetic, dem Büxenmeister den Maaßstab / dem Bawmeister die [1]Mechanicam, vnnd so fort an: Jedoch zu müglicher belohnung für die empfangene Ehr / vnd damit Sie jr noch mütterliches Hertz gegen jhren Kindern auch einmal mit einem geringen erzeigete: hat sie hiermit noch einen alten Beutpfenning auß jhrem Schatz herfür gesucht / den sie einsmals / als sie in besagter jrer Herberg mit einer Visierruthen vmbgestüret / ohn gefehr gefunden: solchen mir auff ein Teutsche Manier fleissig außzupoliren / vnd E. V. vnd G. samptlich / mit gebürender Ehrerbiettung / von Jhr vnnd Mein selbstwegen / zuverehren gestattet vnd befohlen: freundtlich ansinnend / solchen von Jhrentwegen auffzubehalten / inn fürfallenden Gelegenheiten / zu befürderung alles Handels vnd Wandels zugebrauchen / vnd Jhr als einer wolverdienten getreuen Mutter darbey danckbarlich zugedencken: dessen fernern erbiettens / jren lieben Kindern auch fürders / wo Sie etwa anstehen wurden / mit Raht vnd angreiffung jhres vbrigen Schatzes (der gleichwol noch nicht erschöpffet) notdurfftiglich beyzuspringen: Vnnd versihet sich hingegen / E. V. auch E. F. W. vnd G. werden eintheils / im Land ob der Enß / nach der Röm. Keys. Mt. vnsers Allergnädigsten Herrens wolgefallen / mit vnd neben andern fürnemen Glidern deß Landes / in angefangner günstiger beschutz- vnd befürderung jhrer der Geometriae getreuer Diener / vnd denen obligender anderer / obwol nicht gemeiner / doch zur Ehr Gottes reichender verrichtungen continuiren: andern theils aber / im Land Vnder der Enß / disem rühmlichen Exempel nachvolgen / weil jhnen Gott hierzu viel bessere Mittel bescheret / vnd sie mit vberfluß Traids vnd sonderlich deß köstlichen Oest. Weins so reichlich gesegnet.

Welches ich hiemit / empfangnen Befelch nach / verrichten / vnnd besagten Beutpfenning E. V. auch E. F. W. vnnd G. inn nachfolgendem Teutschen Außzug mit vieler mühe vnnd vnkosten außpoliret / vnnd mit seinem Anhang gefasset vnd vermehret / zu einem Glückseligen Frewdenreichen Newen Jahr vnderdienstlich praesentiren wöllen / hochfleissig bittend / Die wollen mit meinem auff die polierung gewendten fleiß / wie er gerahten / großgünstig für lieb nemen / Denen mich zu Gunsten befehlend. Datum Lintz 1. Januarij Anno M. DC. XVI.

E. V. auch E. F. W. vnd Gunsten

Vnderdienstbeflissener

Johann Keppler

Mathematicus.

1 ## 1. Von Notwendigkeit der Viſierruthen.

Auß der dedication im Lateiniſchen.

Am Reinſtrom vnnd ſonſten hin vnnd wider in Teutſchen Landen / wa es groſſen Weinwachs hat / führet man die newe läre Fäſſer zu der Eych / an die Brunnenkäſten auff offnen Marck: da iſt ein geſchworner / der hat ſein gewiſſe Statt- oder Landtmas / mit deren füllet er das Faß / vnd zehlet / wievil in allem darein gehe; was ſich nun findet / das brennet er drauff mit einem kennlichen Brandzeichen / deſſen ein jedes ort ſich gebrauchet. Wirdt alſo die Rechnung vnd der Kauff gemacht nach diſer Eych / vnd diß haiſſen dann Geeychte Fäſſer. Diß iſt der gewiſſeſte vnnd ſicherſte weg / wann man nur allemal denſelben brauchen vnd gehen kan.

Es taugt aber diſe weiſe maiſten theils nur für die / welche innerhalb einer Statt oder eines Landes mit einander handeln / vnd es begeben ſich ſehr vil fälle / da man darmit nicht vergnüget ſein kan.

Dann erſtlich kan geſchehen / das etliche Fröſche abgeſtoſſen werden; wil dann der Binder das Faß nicht gar zu hauffen ſchlahen / ſo muß er ein andere Saag ſtreichen / vnd den Boden weiter hinein ſetzen / vnd alsdann helt das Faß ſein auffgeſtämpffte Eych nicht mehr.

Zum andern / ſo werden etliche Fäſſer ſo groß vnnd in die gewölbte Keller hinein gebawet / das ſie nimmer ans tagliecht kommen: zu geſchweigen / das man ein ſolches groſſes gebew ſolte an einen Brunnen führen / allda anfüllen / da offt ein gantzer Röhrkaſten nicht ſovil Waſſers in ſich helt / ja inn etlichen vilen ſtunden oder tägen nicht Waſſers gnug zuerinnen möchte.

Fürs dritte / vnd wann dann ein Faß nicht geeychet / oder die Eych nit mehr helt / oder wann das zeichen auff einem Marck / dahin man das Faß verführet / nicht erkennet oder paſſirt wirt / ſolte man alsdann müſſen den Wein außlähren / mit Waſſer eychen / oder warten / biß der Wein außgetruncken / vnnd hernach allererſt rechnung machen / oder nach dem Geſicht handlen? Was were diß in einem vnd anderem für eine vnleidenliche verwirrung vnd ſchädliche hinderung?

Zu abhelffung dieſer Inconvenientien, vnnd zu befürderung deß Handels vnnd Wandels hat man die Viſierruthen erdacht / vnd es ſeind bey allen wolgeordneten Stetten geſchworne Weinviſierer beſtelt / die ihr genants darvon haben / vnd mit ihrer Viſierruthen / die ihnen ein jede Statt- oder Land Obrigkeit fürlegt / den Käuffer vnnd Verkäuffern auff erfordern entſchaiden müſſen / was ein Faß in ſich halte.

2. Das inſonderheit bey der Oeſterreichiſchen Viſierruthen oder Hemſtab vor andern örtern ein erwünſchte behendigkeit mit lauffe.

Auß der dedication.

Ob nun wol die Viſierruthen weit vnd breit / an allen orten / da es groſſen Weinwachs hat / gebraucht wirt / ſo hat es doch mit derſelben nicht vberall einerley Art.
2 Dann am Reinſtrom / vnnd wa ein groſſer [1] Weinhandel / da meſſen ſie die breitte

an baiden Böden / vnd die lenge der Taugen oder Taufeln / alſo auch die tieffe zum Spontloch oder Beihel / gerad hinunter: Wann dann jhr Maaß⸗ oder Viſierruthen inn viel kleiner vnnd gleicher theil abgetheilet iſt / dann ſo gibt es viel Multiplicirens, dividirens, quadrirens, cubirens, quadrat vnd Cubic oder Conicwurtzel ſuchens / auch viel neben Regeln vnd erinnerungen von vngleichen Böden vnd Beüchen der Fäſſer / da immer ein Viſierer genawer vnd fürſichtiger ſein wil dann der ander; alſo daß je einer wider den andern ſchreibt / vnd jhm ſein verfählen entdecket. Inmaſſen dann auch in diſem Büchlein für die Lande ſo es bedürfftig / dergleichen verbeſſerte / aber ſehr ſchwere Rechnungen mit eingeführt werden / deren jede an ſeinem orth mit ordnung folgen ſolle. Etliche ſeind auch ſo vnvorſichtig / trawen jhren vngleichen oder Kunſttheilungen an der Viſierruthen allzuviel; vnnd dörffen ſich von jhres langen vndencklichen brauchs willen / gantz freventlich wider einen Kunſtverſtendigen legen / jhme widerſprechen / jhne deß fürwitzes beſchuldigen / gleich als wann ſolche Kunſtmeſſung nur allein inn jhrem Handtwerck zulernen / oder von jhnen ſelber were erfunden worden / ohne empfangnen vnterricht von den rechten Meßkünſtlern. Da doch ſie die notwendige abſätze / die es mit ſolchen kunſtlichen Thailungen hat / nimmermehr begreiffen oder practiciren könden / ſondern begehen offtermahlen mit denſelben groſſe Irrthumbe / weil ſie ſich nicht alſo durchauß ohne vnderſchaid brauchen laſſen.

Hingegen helt man in Oeſterreich diſen gebrauch. Erſtlich hat man ein durch⸗gehende gleiche form einer Viſierruthen von vngleichen Cubiſchen Thailungen / auff die Oeſterreichiſche Maaß / Emmer / oder Eych gerichtet / vnd müſſen die Binder vnd Weinviſierer angeloben / dieſelbige vnd kein andere verfälſchte zugebrauchen / vnd ſich nach deren zurichten.

Nachmalen wann ein Kauff geſchicht / vnd die Fäſſer in die Keller eingeſchoſſen vnnd geöffnet worden / dann kompt der Weinviſierer oder der verkauffer mit einer gerechten / vnnd bey der Statt approbirten Viſierruthen / die ſenckt er oben zum Spontloch vberzwer gegen dem einen Boden hinunter: vnnd ſtüret ſo lang / biß er deß winckels / oder vnderſten theils vom Boden gewar wirdt: dann ſo merckt er / mit welcher ziffer die Ruthe oben an das Beihel raiche; verſucht es auch gegen dem andern Boden / ob etwa die eine zwer lini lenger wer / als die ander. Welche ziffer nun an der Viſierruthen zu baiden malen gezeiget wirdt / oder das mittel zwiſchen baiden (wann die zwerlinien vngleich weren) die gibt jhme die anzahl deren Emmer / ſo im Faß ſeind: vnd nach derſelben ziffer wirt die Kauffſumma / deren man nach dem Emmer eins worden / zuſamen gerechnet.

Diß iſt nun eine gar behende weiſe zu Viſieren / weil ſie gar keiner Rechnung bedarff.

3. Fürnembſter Zweck diſes Büchlins.

Wann mir dann zu gemüth gangen / ob dann diſe weiſe auch alſo gewiß / als man ins gemein darauff bawet vnd handlet / vnd ob nit etwa die Viſierer diſen gebrauch der Viſierruten bey den Obrigkeiten auß vnvorſichtigem verlaſſen auff die künſtliche Cubiſche theilung / allzufrevenlich eingeſchlaifft / commendirt vnd gelobt /

1) lenger

darinnen ſie aber ſich vnd andere auch verführen möchten / als hab ich mich vor anderthalben Jaren hinter den rechten Grund diſer weiſe | zu viſieren / gemacht / vnd dieſelbe / wie ſie in Oeſterreich / vnd an Oeſterreichiſchen Fäſſern geübt wirt / juſt / ſicher / vnnd gewiß befunden / welches ich dem kunſtliebenden Leſer in einem lateiniſchen Tractat mit Geometriſchen Demonstrationibus nach art der kunſt erwiſen / die ſummen aber eines jeden poſtens / vnd was ſonſten nutzliches oder notwendiges darbey zu mercken / dem Teutſchen Leſer zum beſten (auff etlicher der ſachen verſtendiger Herrn vnd Landleute gutachten) in diſem Teutſchen Büchlein / ſo einerley format hat mit dem Lateiniſchen / für Augen geſtelt: damit alſo ein jeder / nach ſeinem verſtand vnd glegenheiten / das Lateiniſche oder das Teutſche Exemplar / oder beyde zuſamen erkauffen vnnd gebrauchen könde: Verhoffend / beydes glehrte vnd Idioten werden mit meinem wolgemeinten fleiß zufriden ſein / vnnd deſſen genieſſen beim Oeſterreichiſchen külen Wein.

Demnach aber von der alten Römiſchen Republica bekandt / das ſie jhre gewichte / Elen vnnd Maaß alſo an einander gehengt vnnd verknüpfft / das eines ohne das ander nicht hat könden verlohren oder verendert werden. Als haben jetzvermelte Kunſt= verſtendige vnnd dem Vatterland gewogne Herren für gut angeſehen / das ich der= gleichen auch an den Oeſterreichiſchen viererley Meßſorten / darauff aller Handel vnd Wandel beruhet / verſuchen ſolle: wie dann hierin I. Das Gewicht / Centner / Pfund / Lot / etc. II. Die Elen / Claffter / Schuch vnd Zoll. III. Die Weinmaaß / Emmer / Achtering vnnd was dem anhengig. IV. Die Traidmaaß / Viertl / Strich / Metzen / Muth / etc. inn kurtzen runden zahlen welche wol zubehalten ſeind / alſo zuſamen gebracht / das eines auß dem andern hergenommen / erkundigt / bewäret vnd ver= beſſert werden / vnnd alſo alle mit einander zu mehrer beſtendigkeit gereichen könden.

4. Von euſſerlicher geſtalt eines jeden Weinfaſſes in gemein / auß dem Erſten Theil deß Büchlins.

Diſer erſte Theil lehret zu eingang von dem furm eines Weinfaſſes / dann wann diſer furm ſich nicht nach dem Circkel artete / ſo kondte man mit der Viſierruthen keine kunſt daran üben. Dann alles was man behend meſſen ſoll / da man auß wenigen bekanten ſachen / viel vnbekandtes errathen ſolle (zum Exempel auß der bloſſen tieffe deß Faſſes / ſein gantze fähigkeit oder ſeinen Halt) das muß ſich eint= weder nach dem Circul oder nach der Geräde arten vnd ein wolgeſchickte gleichheit im vmbkraiſe haben.

Vnd wirt angezeigt daß ein Weinfaß ſich am Boden nach einem Circkel / vnnd am Bauch nach einer runden Seul oder Wellen / das halbe Faß aber vom beihel an / nach einem Kegel arte / welche drey ding / nemlich Circkel / Kegel vnd Wellen / den Künſtlern wol bekandt ſeind / darumb ſie jhre Kunſt auch an den Weinfäſſern brauchen vnd erweiſen könden.

Darneben werden vrſachen angezeigt warumb die Fäſſer ein ſolche vnnd kein andere form haben müſſen / welches vnnot Teutſch zugeben: dann es wol einem gemeinen Binder lächerlich fürkommen ſolte / wann er gefragt wurd / warumb er

4) Leſern 16) Als hat 18) Oeſterreiſchen 25) 3. *statt* 4.

das Faß rund mache vnnd nicht anderſt / ohnzweifel wurde er nichts anders antworten / dann allein diß / weil er nie kein anders geſehen. Das macht / er hat nicht gelebt zu Joſua oder Chriſti zeiten / da man Wein vnnd Waſſer in Schleüchen vber Land geführt vnnd auffgehalten. Er iſt nicht in der Türckey geweßt / da man noch heut zu tag lederne Taſchen braucht / lederne groſſe Lägeln an der Cameln vnd Eſeln ſeiten anhenget / hat villeicht auch nie der ſachen nachgedacht / warumb man die Welſche Wein in breiten vnd nicht runden lägeln zu vns heraußbringe; ſonderlich wirt er nie betrachtet haben was die Alte Römer für Weinfäſſer müſſen gehabt haben / darinnen ſie den Wein offtermals vber die hundert Jahr im Rauch hangen gehabt. Wann heutiges tags ein Buch fürhanden were / darinnen ſolche geſchirr vnd die gantze Manier klärlich beſchriben were / wie ich im lateiniſchen Exemplar vnſere heutiges tags gebräuchige Fäſſer beſchriben / wurde daſſelbig den gelehrten lieb vnd wol befohlen ſein.

5. Von Kunſtlicher Meſſung allerhand runder ſachen.

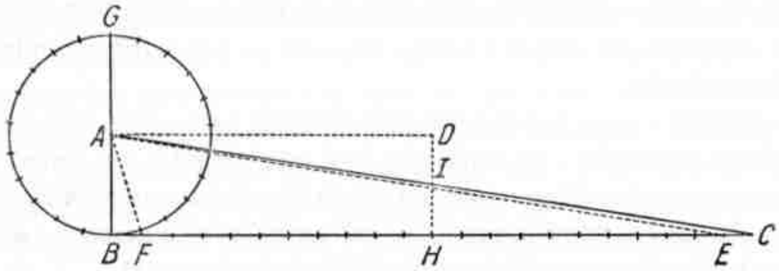
Vnd weil dann die Viſierkunſt auß dem Circkel⸗ Walger⸗ vnd Kegelmeſſen herfleuſſet / vnnd ohne dieſelben nicht mag recht verſtanden werden / ſo folgt nun ferners im erſten Theil ein Außzug / wie man ſolche formen recht verſtehen vnd behend meſſen ſolle.

Dabey dann der einfältige wol mercken ſolle / das alles was hie im erſten Theil / ſo wol auch ein groſſer theil deſſen / was hernach im andern vnnd dritten Theil deß lateiniſchen Exemplars nacheinander folget / vom kunſtlichen Meſſen / nicht allein der Weinfäſſer / ſondern auch anderer dinge: ſolches nicht dahin gemeinet / oder eingeführet werde / als müſte ein jeder / der die Oeſterreichiſche Viſierruthen an Oeſterreichiſchen Fäſſern recht brauchen wil / ſolches alles vnd jedes zuvor verſtehen vnnd üblich practicirn müſſen. Nein es bedarff ſich für gmeine Leuth ſo viel mühe vnd Kopffbrechens gar nicht: ſondern dahin iſt es gerichtet / dieweil ich dem Kunſtliebenden vnnd nachſinnenden Leſer im Lateiniſchen tractätl hab erweiſen wöllen / das die Oeſterreichiſche weiſe / ein Weinfaß zu viſiren / gewiſſen vnnd guten grund habe / vnnd niemand verführe / ſo hab ich müſſen die Oeſterreichiſche weiſe gegen andern weiſen halten / ſo inn den Kunſtbüchern bekandt oder an andern orten üblich ſeind / ſovil deren jhren vnfehlbaren grund haben. Dann ſolte ich diß erwiſen haben nicht durch künſtliche Meſſungen vnnd Rechnungen / ſondern mit dem Werck ſelbſten / vnd mit abeychung vieler vnderſchidlicher Weinfäſſer / deren eins alſo / das ander anderſt geſtaltet / das hette mir viel zeitverderbung / vnkoſten / mühe vnd verdrießligkeit verurſachet / vnnd hette ich manchmal naß von der Tonaw heimkommen müſſen: hette letzlich dannoch nicht gewußt / waran ich were / dann es leichtlich hette ſein könden / das noch ein form eines Faſſes hinter bliben were / dergleichen mir niemalen vnder die Hände kommen / an welchem ich mit meinem fürgeben auß vnwiſſenheit hette verfahren mögen.

Weil dann zu behauptung meines fürhabens in diſem erſten Theil allerhand ſchöner vnnd nutzlicher Kunſtmeſſungen haben müſſen eingeführt werden / die ſonſt einer / der nur ein wenig künſtelt / gern in einer kürtz bey einander hat / als hab ich dem Teutschen kunstliebenden Leser den außzug auß solchen Theorematibus, deren in der anzahl dreissig / inn disem Teutschen tractätl nicht mißgunnen / sondern meisten theils nach ordnung deß Lateinischen tractätlins hie einführen wöllen: guter hoffnung / die andere mehr einfältige Leser / werden sich solche außschweiffe nicht irren lassen / sondern die vberhupffen / biß sie im andern Theil zu der Visierruthen selber kommen.[1]

6. Vom Vmbkrais deß Circkels.

Zu wissen wie weit es vmb ein Rad herumb sey / das ist zwar dem Schmid / Wagner vnnd Fuhrman ein leichte sach. Sie schalten den Wagen fürsich nach der



Auß dem 2. Theor. Die 2. Figur im lateinischen.

geräde / so lang / biß der eine Nagel / der anfangs zu vnderst gestanden / einmal herumb / vnd wider vndersich kompt; der trucket zu baiden malen einerley grüblin in den Boden; so hat man dann die gantze krümme deß Rades zwischen beyden grüblein in die geräde außgestreckt / vnd mag sie dann mit Schuchen oder mit Elen abmessen / wie man wil / oder dessen bedürfftig ist.

Wann aber nicht allwegen dergleichen Mittel fürhanden weren / zum Exempel wann der Binder nicht allwegen mit einem Band vmb das Faß herumb messen kan / sondern es ligt etwa vnten auff / oder im Kaat oder im Wasser: wolan wann ime nur sovil wirdt / daß er die weitte oder breite am Boden messen kan / mitsampt den Fröschen / so kan er darauß auch den vmbkreiß an den eussersten Fröschen wissen durch dise Regel / nimb die breite dreymal / theil sie auch in siben gleicher stuck / setz das ein von disen siben stucken zu den dreyen gantzen / so hastu den vmbkreiß oder die weite deß raiffs / die er dann zumal haben wirdt inwendig / wann er an die Frösche zu eusserst angelegt vnd angetriben sein wirt.

Also hingegen auß dem vmbkreiß zu lernen die breitte oder höhe deß gerechten Circkels: Zum Exempel / wann ein Faß verbeihelt were / vnnd nicht köndte auffgemacht werden / zuwissen / wie tieff es am Bauch seye. So zeuch ein Band vmb die mitte am Bauch herumb / theil solche lenge in 22 gleiche theil / nimb darvon 7 solcher theil / so hastu die höhe deß Fasses mit sampt dem Holtz: wiltu die innerliche höhe deß Weins haben ohne das Holtz / so misse die dicke der Taufeln an Fröschen / (frag aber den Binder zuvor der das Faß gemacht / wievil die Taufeln am Bauch dinner oder dicker seyen dann aussen an Fröschen) zeuch also die dicke beyder Taufeln von der gefundenen höhe deß Fasses ab / so bleibt dir die innerliche höhe.

31) sey *statt* seyen

Behalt dise zahl dann du wirst jrer oft bedürfen / sonderlich jren halben theil 3141592653589793.

Dabey zu wissen daß es nicht nach der scherffe zuverstehen / wann man sagt der umbkreiß halte sich gegen dem diameter oder breitte wie 22 gegen 7. Dann es ist nicht müglich einen einigen gleichen theil von dem diameter zunemen / welcher den umbkreiß gerad außmesse; ja wann man gleich den diameter theilete in zweintzig tausent tausent tausent tausent mal tausent gleicher stücklein / so wirt doch etwas uberbleiben / das weniger ist / dann ein solches kleines stücklein / dann der umbkreiß wirdt alsdann sein 62 831 853 071 795 861 solcher kleiner theil und noch ein wenig drüber / doch nit so vil / das es gar / etc. 862 werden.

7. Vom Umbkreiß einer Cylinien.

Ein Cylini / oder ablänger Circkel hat nicht einerley breitte mit der höhe; deren leng inn die geräde außgestreckt / helt gleich das[1] mittel zwischen beyden gerechten Circkeln / deren der eine oben und unden / der ander zu beyden seitten von jnnen an der Cylini anstreichet.

Zum Exempel / wann das Faß kein runden Boden hette / unnd man solt einen raiff anlegen ungemessen / so müste man doch zum wenigsten am Boden messen könden wo er am breittesten / unnd wo er am schmälesten were: zwischen baiden solchen breittinen das mittel in 7 getheilt / und deren stuck 22 genommen / geben die inwendig weitte von dem raiff / der an ein solchen boden gerecht ist.

8. Wie das Maß zuverstehen.

Merck hiebey das man den diameter oder dessen ein gewisses stuck hie für das Maaß brauchet / abzumessen die Krümme: dann also helt es sich allwegen / das maaß sol uns bekanter sein / dann dasjenige so man misset / und das gerade ist uns allwegen mehr bekant dann das krumme / die lenge mehr bekant dann des Feld / das Feld mehr bekant dann ein volles Corpus oder innerlicher raum. Dann dem Menschen ist ein solche gerade lange Maaß angewachsen / sonderlich der Finger / Spannen / Schuch oder Fuß / und Elenbogen / daher die Elen den namen hat.

Merck fürs ander / das man nicht gleich anfangs ein ding mit Werckschuchen außmisset. Dann es seind solche Werckschuche gar ungleich und underschiedlich / wie auch die Menschen mit jhren schuchen unnd Elenbogen ungleich auffwachsen.

Sondern darinnen bestehet alles kunstliche messen / das ein jede form / die sich nach dem Circkel oder nach der geräde artet / jhr gerades Maaß inn jhr selber hat / ist sie groß so ist auch jhr Maaß groß / ist sie klein auch also. Als zum Exempel der Circkel / er sey klein oder groß / hat seinen diameter zu seinem Maaß / und man fraget anfangs nicht / wie groß der Circkel sey / verstehe gegen einem Werckschuch zu rechnen / sondern / man fragt / wie sich ein jeder umbkreiß gegen seinem diameter oder durchzug (breite) vergleiche.

9. Von den Bögen auß einem Circkel und ihren untergespannenen Sennen.

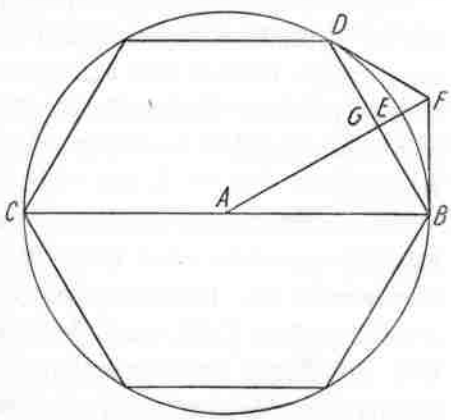
Es ist zu wissen / das ein jedes stuck vom Circkel seine gemessene untergespannene Senne hat: Auß welchen etliche nach der scherpffe mit voller kunst benennet werden /

11) das zum mittel

etliche aber nicht nach der scherpffe / nicht mit völliger Geometrischer kunst / als mit offenen Augen / sondern allein beynahe (wie es sich auch mit dem gantzen Circkel gegen seinem diameter verhelt) vnd durch die Cossa / welche vns den weg weiset / wie einem blinden sein führer / oder zwo enge wände in der finstere / wann ich den Kopff zur lincken anstosse / so weiß ich / das ich mich zur rechten wenden soll / den weg aber sehe ich nicht / kan auch das rechte mittel von mir selber nicht treffen.

Ob nun wol beyder orten es ein schöne übung gibt / für scharpffsinnige Ingenia, daß sie eines jeden bogens Senne von grund auß durch Geometrische scherpffe / oder durch die Cossa / jede nach jhrer art / rechnen mögen: Jedoch weil es gleichwol viel Kopffbrechens gibt / vnnd man nicht nur von lusts wegen an disen Sennen oder
7 subtensis, oder jhren halbtheilen den sinibus behangen [1] kan / sondern man muß auch nach dem gebrauch solcher gerader Circkellinien trachten / vnnd die zeit dahin sparen / als haben vor zeiten Ptolemaeus vnnd die Arabier, hernach vnsere Teutsche Mathematici von anderthalbhundert Jaren her / dise Arbeit einmal für allemal auff sich genommen / damit sie andere deren / so offt es vonnöthen / vberhebeten vnnd ein eygen Büchlein Canonem sinuum geschriben / vnnd denselben nach vnnd nach verbessert: welcher Canon sinuum beynahe in alle Mathematische kunstbücher einverleibet wirdt vnnd zu finden ist / vnnoth denselben hieher zuversetzen. Aller-
† newlichst ist er an Adriani Romani vnnd Bartholomaei Pitisci Trigonometriam gehenckt worden. Etliche haben einen eignen tractat darauß gemacht / welches Rheticus angefangen / Valentinus Otho volführet in einem grossen Folio, sehr weitleuffig / Philippus Lanspergius kürtzer vnnd verstendlicher / aber die zahlen einer jeden lenge / sonderlich der kurtzen / hat er nicht allerdings gnugsamb subtil außgerechnet: der letzte ist geweßt Bartholomaeus Pitiscus, der noch den preiß vor allen behelt: doch wann Jost Bürgi mit dem seinen ans tagliecht kompt / wirdt er die zahlen vil scherpffer geben.

Dise alle nun theilen den Circkel in 360 gleicher grad / einen grad in 60 minuten / eine minuten in 60 secunda: den diameter aber CB, in der folgenden Figur / theilen sie in zweyhundert tausent gleiche theil / bißweillen aber / wann sie scharpff rechnen sollen / setzen sie noch eine zwo oder 3 nullen darzu / darmit der theil 10. 100. oder 1000mal mehr werden: da findet sich nun bey jedem grad vnd Minuten von 0 an biß auff 90 (ist das viertl vom Circkel) wie lang der sinus oder halbe Senne sey zu einem jeden halben bogen. Als zu einer jeden lenge deß bogens EB oder ED, die lenge des sinus oder halben Sennen GB oder GD, gemessen nicht mit deß Circkels BE, sondern mit des halben diameters AB theilen oder vniteten. Da findet man auch / sonderlich bey Pitisco, in schöner ordnung beygestelt / die lini BF Tangentem, oder den Anstreicher / vnnd AF secantem den Durchschneider / wie auch GA den sinum



Die Erst Figur.

complementi deß übrigen Bogens oder rests auff 90. / etc. Weil dann in nachfolgendem Büchlein der Künstler bißweilen zu disen halben Sennen oder sinibus arcuum gewisen wirdt werden (wann er sie mit dem Reiß-Circkel nit scharpff gnug messen kan) hab ich jhne dessen hie an seinem gewidmeten ort erinnern / vnd im übrigen denselben an die benennte Bücher / da solche sinus zu finden / verweisen sollen.

10. Zu rechnen die Sennen / den Boltz / oder den diameter deß Circkels.

Doch seind etliche stuck / dazu man gewonlich die sinus brauchet / welche wann sie runde vnnd kurtze zahlen haben / mit gnugsamer behendigkeit auß jhrem aignen grund gerechnet werden.

Zum Exempel ich wuste die breite oder den diameter eines Circkels / als CB 902 / vnnd den boltz oder die höhe eines schnitzes von demselben / in ainerlei maß / als EG 6. darauß solte ich rechnen wie lang der sinus GB sey. Nim 6 von 902 / bleibt 896 / das Multiplicir in 6 / kompt 5376 / darauß such die wurtzel / kompt 74 weniger † ein 6 theil / da hab ich den sinum GB, vnnd 148 weniger ein 3 theil ist die senne DB.

Hingegen so mir bekandt die höhe EG 3, vnd die leng GB 27, zuwissen den Durchzug oder diameter, so Multiplicir ich 27 mit sich selber / kompt 729 / das dividir ich in EG 3 / so kompt 243: setze EG 3 darzu / so kompt der diameter CB 246, halb 123 nemlich AB.

Item so mir GB bekandt wehre / nemlich 27 / sampt dem halben diameter AB 123, zu wissen den Boltz oder die höch deß schnitzes EG, so multiplicir baide bekante zahlen / jede in sich selbst / so kompt 729 vnnd 15129 / da zeuch ab das kleiner vom grössern / bleibt 14400 / von dem such die wurtzel 120, die zeuch ab von AB 123, bleibt dir EG 3.

11. Ein gemeine Regel vom vnterscheid der quantiteten.

Lateinisch Linea. Teutsch Ein strich Ein riß Ein zug. Wann sie gerad ist Ein strecke Ein geräde. Wann sie zu einem feld oder Corpus gehört Ein schrancken Ein zaun Ein seiten Ein langes Eckh Ein scherpffe Ein reiffen Ein lenge Ein breite Ein höhe Ein tieffe Ein durchzug Ein zwerlini.

Lateinisch Superficies Teutsch / Platz / Feld Feldung. Wenn sie zu einem Corpus gehörig Ein Wand Ein boden Ein lähn. Ist zweyerley / eint-

Bißhero haben wir nur von einerley Maaß oder quantitet gehandelt / nemlich von der blossen leng. Als wann einer nur allein fragte / wie viel Elen / vnbedacht ob die gemessene Leinwat breit oder schmal. Vnnd wie man im sprichwort sagt / von Lintz biß gen Steir seien vier langer Meylen / sein aber nicht breit: vnnd diß ist der erste Verstand auff die wort Elen / Schuch / Spannen / Zoll / Ruthen / Meil / vnd dergleichen.

Die andere sorten der Maaß oder quantitet ist der platz / das feld oder die feldung / Lateinisch superficies vnnd Griechisch ἐπιφάνεια, als das / so ins Gesicht kompt oder kommen kan / sonsten gar deutlich ἐπίπεδον, was auff dem boden ligt wie ein gemähld auff der Tafel / vnnd sich nicht erhebt wie ein geschnitztes oder gegossenes Bild. Dise Sorten der quantitet lesset sich durch das vorige einfache Maaß messen in die leng vnd in die zwerch oder breitte: vnnd solchen verstand haben bey vns Teutschen die Wort / Tagwerck / Jauchart / oder Morgen / verstehe eins Ackers / Weingarten oder Waldes vnnd dergleichen. Item wann man im sprichwort sagt / nicht eines Fuß

24) vom AB   27) namlich   30) *(Randnote)* geräder   38) *(Randnote)* Teutscher

breit / verstehe / nicht sovil Landes als einer mit seinem Fuß bedeckt. Inn disem andern verstand wirdt auch bey den Kunstmessern gebraucht ein jeder Nam der im ersten verstand eine lenge bedeutet. Als zum Exempel / der Schuch bedeutet bißweilen ein viereckt Feld / das eines Schuchs lang vnnd breit ist / vnnd wann der diameter deß Circkels getheilt wirt in 200000 gleicher theil oder Vniteten, so wirdt ein jede solche Vnitet auch geviert verstanden / also das im gevierten Feld / welches von solchen vier diametris vmbschrencket wirdt / 40000000000 solcher kleiner gevierter Vniteten stehen.

weder ein fläche oder ein rundung.

Die dritte Sorten der Maaß oder quantitet, ist das jnnere Corpus, so man nicht sihet (es sey dann durchsichtig) daher es Griechisch στερεόν heisset: sondern das man fühlet oder greiffet / danen mans die Fülle / oder mit den Fleischhackern / den Griff nennen mag / vnsere teutsche Werckleuthe haissens auch den Leib; weil aber die Figur nit allwegen jnnen voll ist / mag man es besser den Raum titulieren. Wann der Zeug inwendig durchauß gleich ist / dann so mag mans auch das Gewicht oder die schwäre heissen. Dann nicht die leng / nicht die eussere Wandt oder Feld / sondern die gantze jnnere fülle oder Leib gibt das Gewicht. Dise Sorten der quantitet lesset sich durch
9 das erste einfache maaß messen / | in die lenge / in die zwehr oder breite vnnd in die höhe oder tieffe / vnnd also in drey wege. Von solcher dreyfachen messung wegen / weil hiemit die Meßsorten ein end haben / wirdt auch die zahl / drey / für volkomen gehalten.

Lateinisch Corpus. Teutsch Der Leib Die fülle Der griff Der Raum Das Gewicht Die schwäre.

Diesen verstand haben bey vns Teutschen die wort Eimer / Achtering / Seydl / Ime / Mut / Metzen / Strich / Viertel etc. vnnd also verstehen auch die Kunstmesser bißweilen einen jeden namen / der im ersten verstand eine lenge / im andern eine breite bedeuttet / als zum exempel der zoll in diesem dritten verstand genomen / bedeutet einen würffel / eines zols lang breit vnnd hoch.

12. Wie fern ein jede quantitet sich in die regel detri schicke / Item mehrers von der lenge eines jeden Bogens oder Circkels.

Wann nun von einerley sorten gehandelt vnnd gefragt wirdt / vnnd es ist nur die theilung oder das Maß zu derselbigen zweierley / so hat die Regel detri statt / nach art der gemeinen Rechen Kunst.

Zum Exempel ein bogen wäre vnderzogen von einer lenge 54 zoll / vnnd ich wuste / das der gantze diameter des Circkels lang wehre 246 solcher zoll / wolt gern wissen den sinum oder halbe Sennen deß bogens / das ist / die zahl mit deren diser vnderzug im Canone sinuum genennet wirt / diß seind lauter solche zahlen / die da bedeutten blosse lengen da mag ich wol sprechen

246 gilt im Canone	200000	was 54?
oder 123 gibt	100000	was 54?
oder 41 gibt	100000	was 18?

so kompt die Senne (subtensa) 43902 / dise halbiert gibt den sinum 21951, der zeigt den halben bogen im Canone, das er sey 12 grad 40 Minuten / 51 secunden, wehre also der gantze bogen 25 grad 21 minuten 42 secunden.

22) Item *statt* Ime

Item der vmbkreiß am Circkel / oder seine 360 gradus seind lang kleiner stücklein / auß der gewonlichen theilung deß diameters (wie bey No. VI) 628318 53072 etc. wievil solcher kleinen stücklein oder theilungen wirt ein bogen halten / der nur einen grad hat / oder auch ein gantzer Circkel / welcher aber 360 mal kleiner ist / dann der vorige? Hie bedeuten abermals beide zahlen nur einerley maß nemlich nur blosse gebogene lengen / folgt derhalben durch detri 17453 29252. Also in einer minuten oder sechzigsten theil eins grads sein solcher theilungen 290 88820 / in einer secunden 484814. Vnd lassen sich diese zahlen lang oder kurtz brauchen / also das ich von einer jeden mag hinweg werffen die eusseriste zur rechten in gleicher anzahl. Als zum exempel / wann der gantze vmbkreiß hat 628318 so hat ein grad 17453 vnd ein minuten hat alßdann 291.

Diß hat auch statt / wann gleich krumb vnnd gerad vndereinander gemenget werden. Alß der diameter 200 hat einen vmbkreiß 628 / was für einen vmbkreiß hat der diameter 100 / folgt 314.

Dann es sein doch beides / diameter vnd vmbkreiß nur blosse lengen.

Hie mag dich das folgende Täfelin viler schwerer rechnungen vberheben / zu=wissen / wievil solcher theil ein jeder bogen habe / deren der diameter hat 200000. Item wann in einem feld oder in einer erhabenen vollen figur mehr dann ein Circkel fürkommen / da alle andere kleinere Circkeln mit solcher thailung zumessen seind / die dem allergrössesten vnder jnen seinen diameter in 200000 theil theilet. Dann neben einem jeden bogen stehet eine zahl die must du dupliren / so hast du deßselben bogens lenge in solcher maß wie der diameter hat 200000. Doch wann der Bogen im ersten fach stehet / so laß die 11 letzte ziffer zur rechten hand nur [1] fahren / stehet *10* der bogen im andern fach so laß die 12 letzte ziffer fahren / im dritten 13 / im vierten / fünfften / sechßten / laß fahren 14. 15. 16. ziffer. Also neben einem jeden halben diameter, welcher inn ein zahl von 1 biß auff 10 / mit zusatz noch 15 Nullen getheilet wirdt / stehet ein zahl die mustu dupliren / so hastu deßselben Circkels leng inn einerley Maaß / wie der halbe diameter. Vnd so viel weniger nullen die thailung hat am halben diameter, soviel ziffer schneid hinten ab von der neben gesetzten zahl.

Nimb hievon zwai Exempla. Zusuchen die lenge des bogens 25 grad / 21 minuten / 42 secunden, verstehe wann des Circkels diameter helt 200000.

Der bogen ist	25.G.	21.M.	42.S.	
Auß der Tafel 25.	12.	0	gibt	219911
Bleibt noch	9.	42		
Auß der Tafel	8.	38	gibt	1256
Bleibt noch	1.	4		
Auß der Tafel	0.	52	gibt	125
Bleibt noch		12		
Auß der Tafel		12	gibt	28
Bleibt nichts.		Summa		22132
		Nims doppelt		44264
		diß ist die lenge des bogens.		

Also zusuchen die lenge deß Circkels / dessen halber diameter ist 21951.

Neben 2 stehet	062832
1	03142
9	2827
5	157
1	03
Summa	68961
doppelt	137922

ist die lenge deß Circkels.

10) 17483 11) 29.

Dann es ist zu wissen / daß ein Circkel / dessen halber diameter helt 21951 / gleich so lang ist als fünff andere Circkel zusamen / deren halbe diametri seind 20000.1000.900.50.1.

Täfelin zu den Circkelbögen / kleinen Circkeln / zum runden Feld an der Kugel / zum Leib der Kugel / auch zun Circkel- vnnd Kugelzänden

	Die gantze Circkelfläche Multiplicirt	Die Bögen in 6 fachen I	II	III	IV	V	VI
mit		Gr.	gr.mi.	g. m. s.	mi.se.	m.se.	sec.
	31 4 etc.	360					
9	28 27433 38823 08137	324	32.24	3.14.24	19.26	1.57	12.
8	25 13274 12287 18344	288	28.48	2.52.48	17.17	1.44	10.
7	21 99114 85751 28551	252	25.12	2.31.12	15. 7	1.31	9.
6	18 84955 59215 38758	216	21.36	2. 9.36	12.58	1.18	8.
5	15 70796 32679 48965	180	18. 0	1.48. 0	10.48	1. 5	6.
q 4	12 56637 06143 59172	144	14.24	1.26.24	8.38	0.52	5.
3	09 42477 79607 69379	108	10.48	1. 4.48	6.29	0.39	4.
* 2	06 28318 53071 79586	72	7.12	0.43.12	4.19	0.26	3.
§ 1	03 14159 26535 89793	36	3.36	0.21.36	2.10	0.13	1.

q Die zahl zur Kugelrundung vnd ihrem Leib tritoppelt.
* Die zahl zum vmbkrais.
§ Die zahl zum Feld deß Circkels.[1]

11 Merck die vrsach warumb die lenge der Bögen im Täfelein nur halb zufinden seye. Dann es seind dise ziffern vnd gar lange zahlen nit fürnemblich auff die lenge der Bögen angesehen / sondern auff das Feld in einem Circkel / vnnd Circkelzaan / theils auch auff die eusserliche rundung an einer Kugel vnd auff derselben vollen Leib / desthalben haben sie auch mit so vilen ziffern erlengert werden müssen / weil der Leib allezeit dreymal vnd das Feld zweymal sovil ziffer brauchet / als der halbe diameter.

Bißhero ist gehandelt worden von solchen zahlen die alle nur lang bedeutten / es verhelt sich aber auch mit der andern sorten oder zweyfaltigem Maaß vnd jhren zahlen also: dann ich kan gleichsfals die Regel detri also brauchen / ein vierung 14 gibt jhres Circkels feld 11 wie folgen wirdt / was gibt die vierung 400 jhrem Circkel / folgt 314 solcher kleiner vnd gleicher Felder.

Also auch mit der dritten Sorten / oder dreyfaltigen maß / wann ein wirffel helt 21 pfunde / so helt die Kugel im wirffel 11 pfund / wann dann ein groß Quaderstuck hielte 8000 pfund / wievil wurde daran bleiben / wann mans zur Kugel hawen solte? folgt durch detri 4190 pfund. Dann das gewicht / wie gesagt / folget her auß der innerlichen fülle / gehört derhalben vnder die dryfache raumliche maß.

Es gilt aber die Regel detri auch weiter in etlichen fällen / da die zahlen so da lang / vnd die so da lang vnd brait / oder lang brait vnd hoch bedeuten / vnder-

37) 4189

einander gemischet werden. Dann es kan ein kleines Corpus so offt in einem grossen / jenem ehnlichen / stecken / als offt sonsten etwa ein lenge in einer andern lenge begriffen ist. Wann ich dann weiß / das ein bekanter Leib sich helt gegen einem andern Leib / wie auß zwoen bekanten linien oder feldern eins gegen dem andern; dann so mag ich wol sprechen durch detri: die eine lini gibt ein solche lini / was gibt das bekante Corpus / folgt im facit das andere Corpus das ich hab rechnen sollen.

Aber hie ist zu wissen / das solche linien nicht seyen baiden Leibern gleichgenennete linien / sondern sie seind für sich selber / oder ob sie schon in baiden raumlichen Leibern stehen / so stehen sie doch nit an gleichen einander ehnlichen orten. Als in zweyen Kugeln / wann die eine lini were der diameter zu der grossen Kugel / so wirt die andere gewißlich nicht der diameter zu der kleinern Kugel gantz sein / sondern eintweder nur ein stuck daran / oder auff einer seiten stehen.

13. Das die Sorten vnder einander vermenget / sich nicht in die Regel detri schicken / ohne sonderliche vortheil.

Wann aber die eine zahl von der Feldung gemeint / die andere vom Zaun darzu / oder die eine von der Wand / die andere vom innerlichen Raum / die eine von der Hautt / die andere vom Gewicht; die eine von der geraden höch oder dicke / die ander von dem Leib oder Fülle / so das ein jede Sorten der einfachen oder zwifachen Maaß gegen seiner dryfachen Maaß in gleicher würden gehalten werde: als zwo Kugeln / vnd von jederen der diameter gantz / item zwen Cubi vnd von einem jeden sein leng oder seiten / dann so gilt nicht die Regel detri, sondern vilmehr einsmals die Regel decinque vnd andern mals die Regel desept, also zu reden; vnderweilen baide vndereinander vermischet.[1]

Der Erste fall / wann eine zahl nur die einfache leng bedeuttet / die ander ein *12* Feldung / so gilt regula quinque, dann jede einfache leng muß zweymal gesetzt vnd zusamen multiplicirt werden / damit sie auch zum Feld werde / vnd alßdann gilt erst die regel detri. Exempel: in einem Circkel 19 Schuch brait am diameter wurden eingefangen 100 stuck Feldes einer gewissen Maaß / wievil deren stuck kämen einem Circkel / dessen braitte am diameter 22 Schuch. Allhie gelten die 19 vnnd die 22 nur eine einfache zwerlini deß diameters / da doch der Circkel vberzwer vnnd den langen weg so brait ist / vnnd mit disem beding genommen wirdt. Hingegen die 100 / bedeuten das vmbzirckte Feld / setz es derhalben durch die regula quinque also

19. 19		gibt 100		was 22. 22
Multiplicirt				Multiplicirt
361				484

folgt 134 / sovil ist deß Feldes im Circkel von 22 Schuchen / mit der vorigen Maß gemessen.

Ein anders / Hans braucht 12 Elen zeugs zu einem Klaid / vnnd sein Sohn Hänßl ist gleich halb so lang als der Vatter / wolt jhme gern auß einerley Zeug ein gleiches Klaid machen lassen / der Schneider macht jhme die rechnung / weil der Sohn halb so lang / müß er auch halb sovil Zeugs das ist 6 Elen haben / obs recht gerechnet sey? Antwort / der Schneider hette an dem Sohn 3 Elen zum besten. Dann der

Vatter iſt nicht nur an der leng gröſſer dann der Sohn / ſondern auch an der zwehr vnd dicke. Derohalben iſt er zweymal ſo lang / ſo hatt er viermal ſovil an der Haut vnd achtmal ſovil am Leib. Weil aber die Klaidung nach der Hautt gehet / vnd nicht nach dem innerlichen Leib oder ſchwäre / ſo kompt derowegen auff den Sohn nur der vierte theil Zeugs / nämlich 3 Elen.

† Noch eins / vnd zwar ein vermiſchtes. Ein Binder hat ein gerades feuchtens Faß ohne Boden / wann ers auff das Flötz ſtürtzet / ſo gehen drey Metzen Habern darein. Er ſchneidet daß Faß oder die Taufeln mitten enzwey / vnnd macht ein anders Faß oder Botung darauß / alſo das die Taufeln alle darein kommen / wievil Habern wirdt in diß nider Faß gehen. Setz anfangs es ſey ſo hoch als das vorige. Demnach nun ein jede Taufel zwifach inn das newe Faß kommen / ſo iſt ſein vmbkreiß zweymal ſo weit als deß vorigen / das runde Feld aber am Boden iſt viermal ſovil als zuvor. Wann es nun die vorige höch behielt / ſo lägen auff jedem vierten theil am Boden drey Metzen Habern / das weren alſo 12 Metzen / weil es aber nur halb ſo hoch / ſo ſeind der Metzen noch 6. Wirt alſo das nidere Faß 2mal ſoviel faſſen als das höhere / vnangeſehen einerley runde feldung oder Taufeln auſſen herumb geordnet ſeind.

Doch merck / das diſer proceß nur alsdann zuverſtehen / wann die Felder baider orten einander ehnlich ſeind / als im erſten vnd dritten Exempel / ſeind baider orten Circkel / im andern Exempel baider orten gleich gefurmbte Klaider.

Sonſten wann ſie einander nicht ehnlich / bleibt es bey der regula quinque nach gewonlicher weiſe. Als 12 Elen halb Elen brait geben ein Klaid / was geben 42 Elen zwo Elen brait. Sprich 12 halb nemlich 6 / gibt 1. was 42 zweymal / das iſt 84 / kompt 14.

Der ander fall / wann einfache lengen / braitten oder höhen / vnd dreyfaltige Maaß als Gewicht / Raum oder Leib vndereinander kommen: ſo ſetze die einfache jede dreymal / das es regula ſeptem werde / vnd multiplicirs vnder einander / damit wann auß der einfachen auch ein dryfache wirt / man hernach die rechnung durch die Regel detri vollführen könde.[1]

13 Ein Exempel / vnd geſetzt ein ſtuck geſchützes / zwen Zoll weit offen / ſchieſſe ein Kugel von 5 pfunden / eins gewiſſen zeugs / Bley Zinn Eyſen oder Stein / wann dann ein anders 3 Zoll weit / was wirt ſein Kugel wegen einerley zeugs.

Hie merck / gleich wie droben die vierung von 19 / der vierung von 22 Schuchen / vnnd jener Circkel diſem Circkel / Item deß Vatters Klaid / dem Klaid deß Sohns gleich geſehen oder ehnlich geweſt / alſo findet ſich hie abermalen Kugel vnnd Kugel einander ehnlich / aber die 2 vnd 3 Zoll bedeuten nur einfache dicke / oder lenge deß diameters durch die Kugel vnd mitten durch das Muntloch der Stucke: da doch die Kugeln ein dreyfaltige Maaß oder quantiteten / nämlich Leiber ſeind / die nicht nur in die leng ſondern auch in die zwehr vnd in die höch außgeſpannen ſeind / vnd nach ſolchen Leibern jede jhr gewicht helt. Setze es derhalben alſo

2. 2. 2. gibt 5 was 3. 3. 3.

zweymal zwey zweymal iſt 8 / vnnd dreymal drey dreymal iſt 27 / ſtehet derhalben entlich in der Regel detri alſo

8 gibt 5 pfund was 27 / kompt 17 pfund ſo vil wigt die gröſſere Kugel.

21) 41 22) 41 33) diſeren Circkeln

Diſer fall begibt ſich im Faßmeſſen oder mit der Oeſterreichiſchen viſier. Geſetzt du hetteſt kein Viſierruthen zur hand / hetteſt aber für Augen zwey Faß / da dir nur deß einen Halt bekant were / doch das ſie durchauß einander ehnlich ſeyen / wie hievor zwo Kugeln: dann wann diß nicht iſt / ſo gehört es hinunter inn den andern Thail / allda beſſer zu bedencken. So meſſe nun baide am Boden mit einerley maaß / vnd was dann eines jeden diameter für eine zahl bekompt / die multiplicier in ſich ſelber Cubicè, hernach dividir den groſſen durch den kleinen Cubum, ſo kombt dir wievil der kleinen Fäſſer im groſſen ſtecken; als der diameter am Boden deß kleinern / finde ſich inn dem diametro deß gröſſern zweymal vnnd 2 ſibentheil / das alſo das klein Faß am Boden hielte 7 / das groſſe 16. Sprich 7 mal 7 iſt 49 / diß 7mal iſt 343. Alſo 16 mal 16 / iſt 256 / diß 16 mal iſt 4096 / das theil inn 343 kompt beynahe 12. Wann dann das klein Faß hielte einen Eimer / ſo würde das groſſe nicht vil weniger dann 12 Eimer halten.

Der dritte fall / wann die eine zahl die Wand oder Feld bedeutete / die andere aber den jnnerlichen Raum oder Leib / von der Wand vmbgeben / da muß eintweder die Wand zum Leib oder Raum werden / wann man der zahl wurtzel ſuchet vnnd ſolche in die zahl multiplicirt, oder der Raum muß zur Wand werden / wann man der zahl Cubiſche Wurtzel ſucht vnnd in ſich ſelber multiplicirt: Alsdann mag es erſt in die Regel detri geſetzt werden. Exempel.

Ein Goldſchmid hette eins mahls ein ſilberne Kugel verguldet / am gewicht 6 Marck / darzu er verbraucht 64 gran Golds / auff ein andermal gebeſtu jhm ein Kugel von 12 Marcken / gleichsfalls jnnen voll / zuverguldendeſ / der kan dir nicht zweymal 64 gran Gold abfordern / gleich wie die andere Kugel 2 mal 6 Marck helt / dann das gewicht gehet nach der jnnerlichen fülle / das Gold aber wirt nur auſſen vmb die Wand oder runde Feld herumb gedehnet / ſondern ſuch die Wurtzel von 64 die iſt 8 / multiplicirs in 64 / kompt 512. jetzo ſprich durch detri, 6 gibt 512 / was 12. kompt zwar 1024 gran / gelten aber nicht alſo / wie ſie ſeind / nämlich ein zahl einer vollen Figur; ſondern müſſen wider zur Feldung werden. Such nun die Cubicwurtzel von 1024 die iſt 10 vnd zwey 25 theil / mit deren dividir 1024 / oder multiplicir ſie in ſich ſelber / ſo kompt baider orten 101 vnnd drey fünfftheil / ſo vil gran Goldes gehet auff die Kugel von 12 Marcken / wann baide gleich ſtarck verguldet werden / vnnd ſoviel iſt deß Feldes vmb die Kugel herumb die der vorigen ſchwere zwo hat von einerley zeug. Das thuts / das baide Figuren / Kugel vnnd Kugel einander ehnlich ſeind.[1] Sonſten wann die 6 Marck ein außgedehnter Becher wehren / die 12 aber bliben *14*
ein kugel / wurde wol mehr Goldes auff die 6 Marck gehen / denn auff die 12.

Auß dem 2. Th.

14. Von der Feldung in einem Circkel.

Zuvor hat der diameter oder durchzug vns das Maaß geben zu der krümme oder lenge deß vmbkraiſes: Jetzo gibt vns abermal das gevierte Feld von vier diametris winckelrecht eingeſchloſſen / diß Feld / ſpreche ich gibt vns das maaß zu der Feldung ſeines Circkels / dann Feld muß durch Feld gemeſſen werden. Hette das gevierte Feld den Namen eins / ſo wirdt deß Circkels feld ein Bruchzahl / vnnd were ailff

6) dultiplicier 16) Raum wenden 28) wenden 29) vnd ein 125 theil 30) baiden

vierzehen theil vom gevierten Feld bey nahe. So aber das gevierte feld in etliche gewisse gleichgültige Thail getheilet / unnd mit einer zahl außgesprochen wurde / als so es hette an der schatzung 14. So kämen dem runden Feld drinnen bey nahe 11. und so fortan.

Exempel / du hettest einen gevierten Garten / das ist / der da Winckelrecht und an allen seyten gleich. Ein Gartner aber machte dir einen runden Irrgarten drein / der mit seiner krümme an alle vier zeune deß Gartens anstreiche: ist die frag / wievil Feldes er dir an den vier abgeschnittenen spitzen ubergelassen. Antwort / wann der gantze Garten in vierzehen stuck Feldes getheilt wurde / deren eins soviel hielte als das andere / so wurde der einfang deß Irrgartens soviel halten als der gemachten stuck ailffe / und die uberbleibende vier spitzen wurden samptlich sovil halten ungefahrlich / als die uberige drey stucke.

Inn diser theilung / unnd was deren gleichen / gilt es gleich / die gemachte stucke Felder haben eine gestalt wie sie wollen / wann nur alle einander an der fläche oder platz gleich / das ist gleichgültig seind.

Dieweil aber dise zahl 14 / gegen 11 / nicht gar auff alle scherffe gefolget / auch keine andere nicht: so haben die Künstler ein andere mehr kunstliche und gar subtile Thailung deß gevierten Feldes vom diameter eingeführt / nämlich in solche stucke / welche nicht allein undereinander alle gleich oder gleichgültig / sondern auch alle miteinander dem gantzen gevierten Feld gleich sehen oder ehnlich seind / das geschicht / wann man alle seyten deß gevierten Feldes mit einerley Thailung theilt / unnd nach denselben thailungen das gevierte Feld Creutzweis in stucke zerschneidet / da werden die stucke auch geviert. Also wann der diameter in zwey stuck gehet / an allen vier seyten / so werden auß dem Feld zwey mal zwey das ist vier stuck / und so der stucke am diameter 3. wurden / so gewunne das Feld 9 stuck. Dieweil aber die Künstler den diameter in die lange zehener zahlen theilen / die da rund behend und gut zu rechnen seind / nämlich gemeinglich in 200000 / so gewinnet das gevierte Feld nach diser subtilen thailung 40000000000 auch gevierter stuck / und so fortan / allewege zweymal sovil Nullen am Feld als an dem diameter. Im Täfelein No. 12 gegen 1. uber findestu wievil solcher Thail in deß Circkels feld kommen / nimb nur sol che zahl nicht lenger oder mit mehrern ziffern / als dein diameters vierung gewinnet / nämlich hie nur ailff ziffer. Im besagten Täfelein ist auch zusehen / wie die zahl zum umbkraiß gerad zweymahl soviel sey als die zahl zum Feld / allein kürtzer genommen. Hast also den Zaun und das Feld fein zusamen verknüpfft / kanst eins ohne das andere nicht vergessen.[1]

15. Wie groß die Feldung im Ablengen Circkel.

Ex Episag. 3.

Da mache auß zwoen seiner lenge und zwoen seiner braite ein ablenge vierung / die theil in 14 / und nimb für den Ablengen Circkel deren stuck Ailffe / wie beim Circkel.

Es vergleicht sich aber der Ablenge Circkel gegen einem gerechten Circkel gleicher höch / wie sein braitte oder kürtzere diameter sich helt zu dem lengeren / oder wie die ablänge vierung gegen der gerechten vierung gleicher höch. Gilt derhalben hie † die Regel detri wie No. 12 / dann Geviert und Ableng seind einander nicht ehnlich.

1) aber deß Circkels feld

16. Zurechnen allerhand Feldungen von geraden strichen eingeschlossen.

Wann das Feld geviert vnd rechtwinckelig / so multiplicir die leng in die braitte. Als zum Exempel / wann die ablenge vierung (bey No. 15. gedacht) hette an der leng 9 / an der braitte 7 schuch: 7 mal 9 ist 63 / soviel gevierter Schuch wären in der ablängen vierung.

Geviert / aber nicht rechtwinckelig / doch mit parallelis oder gleichlauffenden zäunen oder schrancken eingefangen / das man theils Rautten = Rhombos nennet / solche zurechnen ist nicht gnug / das du die lenge der schrancken habest / sondern du must wissen wie weit zwo bekante gegen vberstehende schrancken von einander stehen / das ist / wie hoch die Figur seye / dann so multiplicir die bekante schrancke in die höch / so findestu das Feld wie zuvor.

Dise höch verstehet sich nur gleichnuß-weiß inn dem Gemäld / welches doch warhafftig kein höch nicht hatt.

Dreyeckete rechtwinckelige felder. Da multiplicir die eine schrancken deß winckels in die andere halbirt. Also thue jm auch wann du ein viereckt feld hast / welches vngleiche seiten oder schrancken / aber zwen rechte winckel hat; da rechne zwen solcher rechtwinckeligen Triangeln / vnnd schlag baide feldungen zusamen.

Dreyeckete Felder / von scharffen oder stumpffen winckeln / oder so sie sich naigen / da mustu bekant haben den einen strich oder seyten / vnnd die höch deß spitzes vber solche seiten erhaben / nach dem saiger / Multiplicir deren eins halb / inn das ander gantz.

Also thue auch wann du allerhand spießeckete Felder / oder von vielen ecken hast / theil solche inn jhre Triangel mit strichen von einem eck zum andern / als / ein vierung gehet durch einen riß inn zwen Triangel / ein fünffeck inn drey / durch zwen risse / vnd so fortan.

Exempel / bey der 1. figur sey ein dreyeckt Feld BDF, das zurechnen / so zeuch auß dem einen spitz (gilt gleich / sey aber jetzo F,) den saiger inn die gegenvberstehende seiten BD winckelrecht herunter / der wirdt sein FG, meß baide FG vnnd BD mit einem Maaß / gesetzt FG halte dessen Masses 2 / vnd DB 6 / halb 6 ist 3 / vnd 3 mal 2 ist 6 / oder halb 2 ist 1 / vnnd 1 mal 6 ist 6 / hette also das Feld DBF 6 uniteten, deren jede deines gebrauchten Maßstabs lang vnd braitt / das ist Geviert / verstanden wirt.

Auß dieser lehr kompt die gantze Kunst deß Feldmessens auff ebnen flachen feldern vnnd zwischen geraden schrancken / die vberige fundamenta finden sich von da an biß No. 23.[1]

Einmal wirdt dir diß maaß / darmit du solche strich messest / an die hand gegeben / *16*
nach gestalt der sachen / ein andermal wirt es dir frey stehen. Gesetzt die lini DB hielte dein maaß / vnd were also 1. GF aber were davon ein drittheil / multiplicir 1 halb in 1 drittheil / kombt 1 sechßtheil / were also das Feld DBF ein sechßtheil von deren vierung die so lang vnd brait ist / als dein maaß DB.

Sonderlich gehet es geschwind zu / wann die höch ein runde zehnerzal ist / als 10. 100. / etc. Dann da setzet man nur jhre Nullen zu der zahl der ligenden seiten / vnd nimpt darnach das halbe thail von der erlengerten zahl / also kan man behend rechnen alle geordnete Figuren vmb den Circkel herumb.

26) die wirdt 36) EF

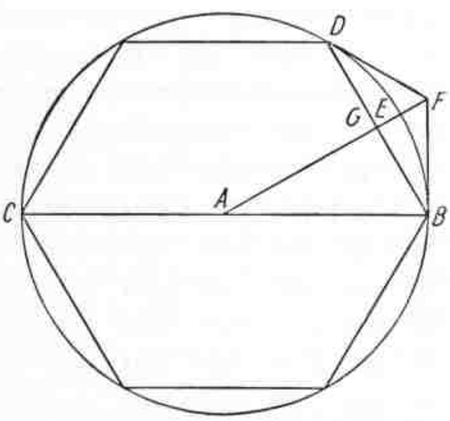
Ein Exempel vom zwölffeck / da iſt ein jede ſeiten ein doppelter Tangens oder Anſtreichende lini an das 24te theil deß Circkels / das iſt an 15 gradus / nämlich auß dem Canone Tangentium 26795 / wann der halb diameter hat 100000 / nim diß 24 mahl / ſo haſtu 643078 darzu ſetze die fünff nullen deß halben diameters / vnd halbirs hernach / ſo kompt dir 32153903091 / ich hab hie für die 5 Nullen den Bruch außgeführt / den kanſtu wol auſſen laſſen vnd alſo ſchreiben 32153903000.

Mit denen Triangeln vnnd Figuren welche in den Circkel hinein geordnet werden / vnnd mit allen ſpitzen am vmbkreiß anſtehen / bedarff es nicht viel mehrers; zum Exempel ſey der zwölffeck im Circkel drinnen. Nimb den secantem oder Durchſchneider auff 15 gradus auß dem Canone, mit demſelbigen dividir das Feld deß euſſern zwölffecks / was kompt / nämlich 310582848 etc. das dividir noch einmal mit demſelben secante, ſetze aber allemal zuvor deß diameters Nullen hinzu / damit dir widerumb ſovil ziffer kommen als zuvor: wirt dir entlich kommen 300000 / etc. ſovil iſt deß Feldes im innern zwölffeck.

17. Zu rechnen die Feldungen ſo halb mit geraden ſtrecken / halb mit runden gezircken vmbgeben.

Ex Coroll. 1.

Zuwiſſen wieviel Feldes in einem ſtuck Circkels ſtehe / das mit geraden zwoen linien auß dem Centro geſchnitten / als BEA, welche Figur Griechiſch Τομεύς, lateiniſch sector, genennet wirdt / Teutſch der Schuſter Werckmeſſer / wir köndens aber füglicher einen Circkelzaan tauffen / da muſtu wiſſen wie groß der Bogen ſey / der vom Circkel abgeſchnitten iſt. Geſetzt nun / es finden ſich an dem abgeſchnittenen Bogen EB, 30 grad / deren 360 im gantzen Circkel ſeind. So ſprich nun / 360 grad halten 11 vierzehende thail von der vierung von CB, was werden 30 grad halten / folgt nicht gar ein vierzehender thail / ſondern 11 zwölffthail von einem.



Die Erſt Figur.

Wann nun das quadrat deß diameters getheilt wirdt inn ein zahl die vorn an 4 hat / vnnd hinten auß etliche Nullen inn gerader anzahl / ſo dienet dir das hievor
17 geſetzte Täfelein / das hat[1] zur rechten ſechs Fäche von Bögen. Vnd ſtehet neben denſelben gegen der lincken ein lange zahl deren theilen / ſo inn jedem geſetzten Bogen ſeind / doch mit diſem vnderſchaid: wann der halbe diameter hatte 100000 / ſo wirff von der langen zahl die 6 letzte ziffer hinweg für die Bögen im erſten fach / 7 für die im andern / vnnd ſo fortan / entlich 11 für die im ſechßten fach; vnnd ſoviel der halbe diameter mehr oder weniger Nullen hette als jetz geſetzt / ſovil mehr oder weniger ziffer müßteſtu vberal nemen.

Aigentlicher nutzen deß obrigen Täfelins.

3) Tangentum 9) secanten 23) dern *statt* deren

Ex Coroll. 2.
Schnit vnnd Schnitz ist hie zweierlei.
Der erste vnnd gewisse aber mühselig weg.

Zu rechnen das Feld am Circkelschnitz / diser haißt lateinisch Segmentum nämlich das Feld zwischen einem bogen vnnd geraden schnitt / als da ist die Orttafel von einem Faßboden / allhie DEBG. Da besihe abermal wie groß der Bogen sey gegen dem vmbkraiß / auß demselben rechne erstlich seinen Sectorem oder Zaan BEDA, wie du jetzo bist gelehret worden / hernach rechne das Feld deß Triangels ADB, durch No. 16 / das zeuch ab vom gantzen Zaan ADEB, so bleibt dir das Feld im Schnitz GDEB.

Zum exempel / der bogen BD sey 25 grad / 21 minuten, 42 secunden, vnnd der halbe diameter sey 100000 / so wirdt das feld des gantzen Circkels sein von eilff ziffern im Täfele zusehen / da ein jede vnitet ein kleine vierung bedeutet / lang vnnd breit einen hunderttausentisten theil deß halben diameters AB. Brauch das obige Täfelin / da wirstu finden in Summa 2213220609. So groß ist der zan ADEB doch die fünff letzte ziffer seind vngewiß / denn das eine secundum ist nicht genau.

Vnnd wann dann AB, oder AE ist 100000 so findet sich der sinus BG auß dem † canone auff disen halbirten Bogen 21951. vnnd AG der sinus complementi 97561. Dise beide zahlen den sinum deß halben Bogens vnnd den sinum seines complementi multiplicir in einander / so kommen 2141682393 / so groß ist das feld BDA, zeuch es ab vom feld BEDA, so bleibt 71538200 oder 71540000 / so groß ist der schnitz DGBE, vnder dem gantzen Bogen stehende.

Der ander nähere aber nicht so genawe weg.

Dise rechnung ist fast verdrießlich vnd lang / wil derhalben hie ein Täfelin beyfügen auß welchem du behend rechnen kanst / wie groß ein jeder Schnitz vngefahrlich seye / dann man braucht disen schnitz zum offternmal.

Täfelin zu den Circkelschnitzen †

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0		587	1635	2955	4473	6142	7927	9799	11735	13711	15708
1	19	676	1756	3100	4634	6316	8110	9990	11931	13911	
2	53	769	1880	3244	4796	6491	8295	10182	12128	14110	
3	97	866	2007	3392	4959	6667	8480	10374	12324	14309	
4	150	967	2135	3541	5124	6844	8667	10567	12522	14509	
5	209	1070	2266	3692	5291	7022	8854	10761	12719	14708	
6	274	1177	2400	3845	5459	7201	9041	10954	12917	14908	
7	345	1287	2535	4000	5628	7381	9230	11149	13115	15108	
8	421	1400	2673	4156	5798	7562	9419	11344	13314	15308	
9	502	1516	2813	4314	5969	7744	9609	11539	13512	15508	

Wer lust hette diß Täfelin zu erweitern / der thue jm also. Theil den sinum versum in 1000 (oder so dich die Haut noch beisset / in 10000) gleicher theil / setze neben einen jeden seinen sinum Complementi, mit welchen auß dem Canone sinuum Pitisci die sinus recti gerad gegenüberstehend / außgeschriben / vnd der kleineste (oder vilmehr 2 drittheil von demselben) zum nechsten hernach addirt werden muß /

3) DEGB 14) EG *statt* BG 18) 716 20000 *statt* 715 38200 37) Canone sinum

die ſumma zum dritten / vnd alſo fortan. Wann ſie alle 1000 oder 10000 zuſamen kommen / ſo wirt entlich das viertel von der Circkelfläch (fol. 10) drauß / vnd gilt alſo ein jede vorgehende ſumma das feld jres Schnitzes halb.[1]

18 Diß Täfelin brauch alſo / wan DGBE ein gerechter Circkelſchnitz iſt / ſo meſſe ſein breite oder höhe EG, vnnd die lenge AB (das iſt / meſſe EG vnnd GD mit einerley maaß vnnd auß diſem rechne den halben diameter AB, wie du bey No. 10 gelehrt biſt) hernach multiplicir EG mit 100 vnnd dividir was kompt / mit AB.

Geſetzt die breite EG ſey 6 vnnd AB 11. 6 mal hundert iſt 600 / diß mit 11 dividirt macht 54 vnnd 6 eilfftheil / nun ſuch die 50 inn der obern zeil vnnd die 4 mit dem bruch zur lincken am rand / fahr von oben herunder vnnd von der lincken nach der rechten zuſamen / ſo findeſt du im Creytzwege 6941. Soviel vierungen finden ſich im ſchnitz DGBE jede den hundertiſten theil des halben diameters BA lang vnnd breit.

So aber dein halber diameter ein andere theilung hat / (als hie iſt ſein theilung 11.) ſo multiplicirs in ſich ſelber (wie du bey No. 13 gelehrnet) / kompt 121 / das multiplicir in das gefundene feld / wirff die vier letzte ziffer hinweg / ſo kompt dir 84. Sovil vierungen / da jede den eilfften theil deß halben diameters lang vnnd breit iſt / finden ſich im ſchnitz DGBE.

Alſo im vorigen Exempel da der halbe diameter geweſt iſt 100000 vnnd AG 97561 / da iſt die breite deß ſchnitzes EG die vberige 2439. wann dann der halbe diameter jetzo im Täfelin nur 100 theil hat / ſo iſt diſe breite nur 2 vnnd nicht gar ein halbs / ſuch 0 oben / vnnd 2 mit dem bruch zur ſeitten / da findeſt du 72. wann dus in das quadrat von 100000 multipliciereſt vnd 4 figuren weg wirffeſt das iſt / wann du 6 nullen zuſetzeſt / ſo haſt du diſen weg 72000000. zuvor 71538200.

Vnd weil diß Täfelin nur ainhundert Schnitze vermag vnd zwar auch diſe nicht mit aller ſcherffe / wie es dann in kurtzen zahlen nicht ſein kan / alſo wil ich dir für die gar kleine ſchnitze noch einen bequemen weeg zeigen / deſſen fundament iſt dieſes: Der dritte Weg.
wann mit einer jeden Sennen vnnd mit jhrem boltz / Subtensa et Sinu verso, ein ablenge vierung beſchloſſen wirdt / ſo helt das feld deß Circkelſchnitzes ſo darinnen ſtehet / mehr dann zwei dritte theil deroſelben ablengen vierung / vnd weniger dann ailff vierzehen theil / dann wann der ſchnitz erſtlich anfahet / ſo helt er zwey drittetheil / das iſt 6667 von 10000 wie vnten bey No. 18. ein jeder Kegelſchnitt / wann er aber gar zu einem halben Circkel wirdt / ſo helt er ailff 14 theil / das iſt 7854 von 10000. wechßt alſo vom anfang biß zu end vber die 2 drittheil hinauff vmb 1187 von 10000.

Wann dann nun jetzo der Circkelſchnitz einen gar kleinen bogen hat / als 2 grad 15 Minut / ſo nimb ſein halbe ſenne / oder den sinum auff den halben bogen 1 grad Für die kleine ſchnitze.
7 Minut 30 secund. der iſt 196375 wann der halbe diameter ſiben nullen hat. Sein des halben Complementum iſt 88 grad 52 Minut 30 secunden vnnd gibt in Canone den sinum 9998072 / was diſem abgehet zu ergentzung deß halben diameters, iſt der boltz oder sinus versus, nemlich 1928. Multiplicir mit 4 / ſo wirdts 7712 / multiplicirs in den dritten thail des sinus, nemlich in 65458 / ſo kompt dir 504720000 / das iſt nun gar vmb ein vnkennliches weniger / dann das Feld vom ſchnitz.

6) halhen 8) EB *statt* EG 20) halbe *fehlt* 24) 715 38000

Ein anders / der halbe diameter ſey 100000 / die höch des ſchnitzes 2439 (diß 4 mahl iſt 9756) alſo das ſein vberiges 97561 / vnd der reſt zu deß ſchnitzes halben bogen ſey 77 Grad. 19 minut. 51 sec. vnd deß ſchnitzes halber bogen 12 grad. 40 min. 9 sec. deſſen sinus 21951. deſſen dritter theil 7317 in 9756 multiplicirt macht 71385 etc. ſolte 715382 etc. ſein. Iſt doch nähener getroffen dann durch das Täfelin / dann das gibt 72000; dieweil die höch iſt nur dritthalb von hundert. Magſt alſo diſen process von dem Bogen 25 gr. an bey den kleinern Circkelſchnitzen brauchen.[1]

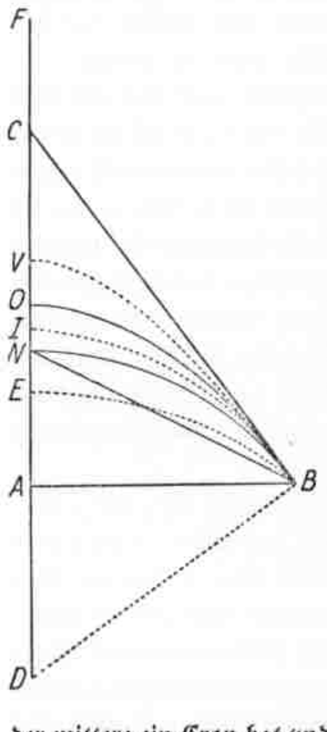
Auß dem 1. Zuſatz. Schnitt vnnd nit Schnitz.

18. Von der Feldung im Kegelſchnitt. *19*

Was ein rechtwinckeliger Kegelſchnitt ſey / Parabole genennet / findeſtu beſſer vnden. Iſt ein fläche oben mit einem vngleich gebognen zug (in der 10. figur bey No. 29. mit PCQ) vmbzogen / vnten aber ſtehet ſie auff einem geraden ſtrich PQ, anzuſehen wie ein Schorſchauffel. So nun dieſem geraden ſtrich PQ, ein anderer LC oben gleich lauffet oder parallel iſt / vnd gerad an diſe fläch am oberſten güpffel C anſtreichet / vnd man zeucht ſolchen güpffel C, vnnd baide ende deß grundes PQ zuſamen / alſo das es einen Triangel gibt / ſo helt die gantze Parabole vmb ein drittheil mehr / als der Triangel / oder wie droben beim Circkelſchnitz meldung gethan worden / helt es zwey drittheil von der ablengen vierung.

Derhalben ſo meſſe ſein höch / oder wieweit die gleichlauffende linien PQ vnd CL von einander ſtehen / meſſe auch ſeinen geraden ſtrich PQ, darauff er ſtehet / zeuch ein drittheil davon / das vbrige multiplicir in die höch / ſo haſtu das Feld. †

Die 17. Figur.



Am Circkel vnnd an der Parabole iſt diß ein gemeiner vortheil / man ſchneid einen ſchnitz darvon auff welcher ſeyten man wölle / wann die Grundſtriche durch welche der ſchnitt gegangen / einander gleich / ſo ſeind auch die vom Circkel abgeſchnittene Felder einander gleich / ſo auch die Felder von der Parabole abgeſchnitten / ſeind vndereinander gleich.

Noch iſt ein ſolcher Kegelſchnitt Hyperbole, von einem ſtumpffen Kegel / iſt No. 29 / bey der 10. figur mit VSX oder MCN bezeichnet / deſſen rechte Meſſekunſt noch nicht erfunden iſt / † er hat aber mehr dann drey vierte thail eines ſolchen Triangels in jhne hinein geriſſen / hingegen helt er mehr dann zwey drittheil deß euſſern Triangels bey der 17. Figur / mit ABC halb auffgeriſſen / vnd der Bogen mit BV bezeichnet.

Auß dem 5. Th.

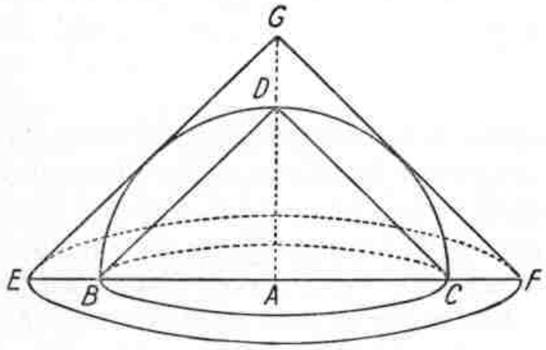
19. Von runden Feldungen an einem Kegel.

Kegel haißt inn der Kunſt nicht ein ſolcher Kegel / darnach die Buben mit der Kugel zilen / vnder deren der mittere ein Cron hat vnd König iſt / ſondern ein ſolche Figur die einen gerechten Circkelrunden boden hat / vnd von demſelben vmb vnd vmb mit gerader ſtrecke / auff einen ſpitz hinauß laufft. Iſt alſo ſein euſſerlich Feld oder Dach nach der ſeiten rund / nach der höhe aber gerad / vnnd also gemischet: diß Feld lasset sich leichtlich auff die fläche außbraitten / gibt einen luckechten Circkel / der einen Sectorem als gleich einen Zaan verlohren. Messe die Lähn vom vmbkraiß am boden / biß oben an den spitzen / messe auch deß bodens braitte oder den diameter mit einerley maaß. So † dir nun das Feld aines Circkels durch die Lähne als einen halben diametrum kund worden / so dividir es in die lähn / vnd multiplicir, was kompt / in den halben diameter deß Circkuls am boden / so hastu das runde Dach vom Kegel.

Lähn latus acclive cuius circumductu creatur superficies Coni.

Exempel / ich sol einen runden zugespitzten Thurn mit Blech decken lassen / der am diameter 7 schuch hat / die lähn aber 10 schuch / weil dann der diameter hat 7 schuch / so hat des Dachs boden 38 s. gevierter schuch / multiplicirs in 10 kompt 385 / dividirs mit halb 7 / kompt 110. sovil Bleche jedes eins schuch breit vnd lang / wirstu brauchen.[1]

20 Wann nun ein halbierte Kugel were / vnnd auff ihrem Circkelrunden boden stünde ein Kegel wie hie zusehen / der biß an den würbel D reichete. Es striche aber ausserhalb ein anderer Kegel an die Kugel / der dem innern gleich sehe / nemlich baide rechtwinckelig weren: So ist deß Feldes am innern Kegel halb so viel / als deß am eussern.

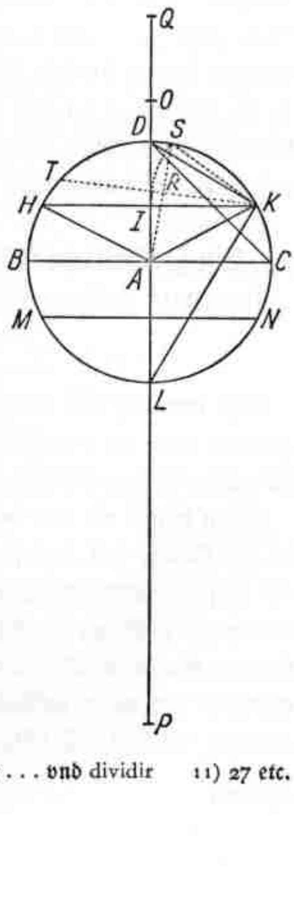


Die 5. Figur.

Zu vergleichen aber das Dach gegen dem Boden wann der Kegel winckelrecht / so duplir den Boden / such die Wurtzel davon / also kombt dir das Feld am Dach deß Kegels / ohne abmessung der lähn.

20. Vom gantz runden Feld vmb die Kugel.

Aussen vmb die Kugel herumb ist viermal so viel rundes Feldes / als innen am Circkelrunden schnitt / wann man die Kugel mit einer fläche BDCL durchs Centrum A enzwey schneidet.



Die 6. Figur.

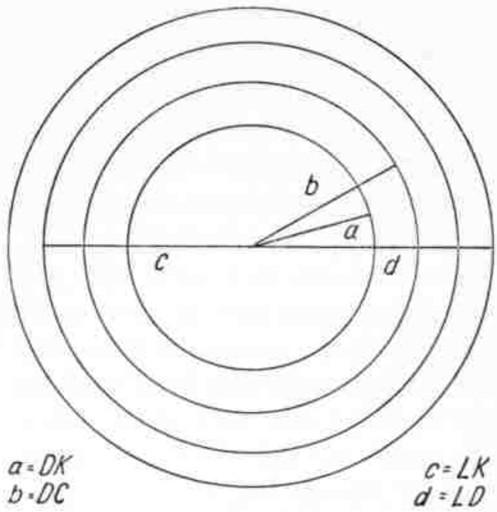
Exempel. Die Erdkugel ist 1720 teutscher Meilen dick / helt derohalben am schnitt durchs mittel 23 mal hundert tausent gevierter Meilen / vnd ist aussen herumb 92 mal hundert tausent vierecketer meilen breit.

Ein anders. Der Mond ist 400 teutscher meilen dick / helt also innen am Circkelrunden schnitt bey einhundert tausent / vnd ferners fünff vnd zweintzig tausent teutscher gevierter meilen / diß viermal genommen / macht fünff mal hundert tausent teutscher gevierter meilen aussen herumb / da gehöreten nun auch etliche vil par Ochsen zu /

5) das Feld am Boden durch den diameter kund   6) so multiplicir . . . vnd dividir   11) 27 etc. *statt* 110   26) tach *statt* Dach

ſoviel Feldes zu bawen / wann gleich das halbe thail Waſſer wäre.

Die 7. Figur.



21. Vom runden Feld oder Hüetlin deß Kugelſchnitzes.

Ein Kugel nit eben allein durchs Centrum, ſondern auff der ſeyten geköpfft: wie hieoben zuſehen bey HKD, da ſetz den einen Fuß deß Cir|ckels in D, iſt der wirbel oder höchſte punct am Hütlein HDK, den andern Fuß ſtreck herunter an ſchnitt / als an K oder H, darmit reiß auff der fläch einen Circkel D, auß dem Centro K, wie hie zuſehen: ſo wirt das runde Feld am hütlein diſem flachen gleich ſein. Alſo thue ihm auch mit dem ſtumpff oder gröſſern übrigen thail der Kugel HLK, begreiff mit dem Circkel die leng LK oder LH, vnnd reiß auff der fläche einen Circkel K auß dem punct L, der hat gleiche feldung mit dem runden Feld am ſtumpff. Nicht anders iſt es auch mit DC, vnnd mit dem Circkel C, auß dem Centro D auff die fläche geriſſen.

Hetteſtu aber ein gürtel als BHKC inn die fläche zubringen / ſo thue fürs erſt mit dem hütlin HDK wie du jetzo gelehret biſt / hernach thue dergleichen mit dem gröſſern ſchnitz BDC, magſt baide auß einem oder auß zweyen puncten L, D auff die fläche auffreiſſen / nur das der kleiner kraiß in dem groſſen ſtehe. Was nun für Felds zwiſchen beyden Circkeln ſtehet / deſſen iſt ſoviel als deß runden an der gürtel BHKC, ſie ſey jetzo rings herumb gleicher brait / oder an einer ſeit ſchmeler als BHKC: da dann ein jeder ſchnitt ſeinen beſondern wirbel haben wirdt / als TSK den puncten S vnd BDC den puncten D.

Auß dem 8. Th.

22. Ein ſonderliche behendigkeit / bald zu wiſſen wie groß das Feld ſey in einem ſolchen Hütlein oder Gürtel / gegen der gantzen Kugel zurechnen.

Sihe nur auff den diameter oder höhe der gantzen Kugel / vnd auff die höhe deß Hütlins oder der Gürtel / welche rings herumb ein gleiche braite hat / dann ſo viel die gantze höhe gröſſer iſt / ſo vil iſt auch die gantze Feldung vmb die Kugel gröſſer.

Wiltu wiſſen wie viel Landes in der verbrennten Gürtel oder Zona Torrida lige / da die Sonne deß Jahrs ein mal oder zwey gerad vber die Köpffe gehet / vnd in die tieff außgegrabne Schöpffbrunnen auf den Boden hierinn ſcheinet / vnd die thürne zur mittags ſtund keinen ſchatten haben: ſo laß dir nur einen Astronomum ſagen / wie brait ſolche Zona Torrida ſey / nach der gerad vnderzognen lini: das wäre an der nider geſtürtzten Gürtel die höch. Nämlich wann der diameter helt 200000 / ſo helt diſe höhe 79815 / gleich ein ſo groß ſtuck von der gantzen runden

11) ſtreckt

Feldung deß Erdbodens gehört vnder das verbrante theil / nämlich weniger dann der halbe / vnnd mehr dann der dritte thail. Hingegen das kalte Land / da im Winter die Sonne vnderweilen gar nit auffgehet / ist vil kleiner. Dann das Hütlin von der Kugel ist nicht höher / als 8311 / wäre das fünff vnd zweintzigste thail von der gantzen rundung / doch seind ihrer zwey. Wann nun haisse vnnd kalte Länder von der gantzen rundung abgezogen werden / so bleiben zwo temperirte Gürtel: die machen ein wenig mehr / dann die halbe rundung deß gantzen Erdbodens.

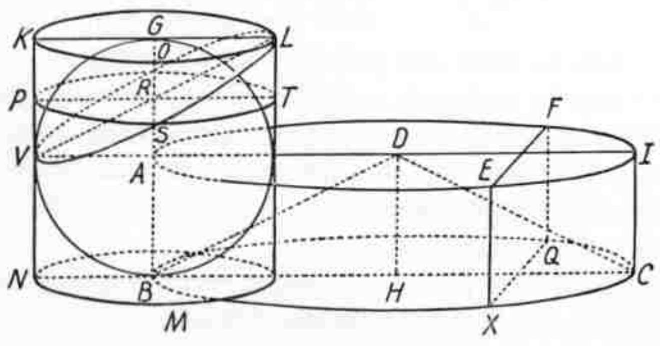
Wann nun jetzo die gantze rundung oder Feldung vmb die Kugel herumb in einem gewissen Maaß bekant ist / so mag leichtlich durch die Regel detri erkundiget werden / wie groß in solcher Maaß / das runde Feld vmb einen schnitz oder hütlin sey.

Zum Exempel / der Circkel BDCL flach verstanden hat am Feld 31415926536 solcher gevierter thail / wie sein diameter DL oder BC hat 200000 langer thail / als bey No. 14 gemeldet worden. Nu bistu bey No. 20 gelehret / das deß runden Feldes aussen vmb die Kugel herumb gerad viermal so viel sey: nämlich 125663706144.
22 So setze nun / die höhe DI vom schnitz HDK sey 78049.[1] Multiplicir sie inn das runde Feld von der gantzen Kugel / was kombt / dividir durch der gantzen Kugel höhe 200000 / durch hülff deß Täfelins No. 12. dann was dir durch das Täfelin kombt / das duplir / vnd wirff die fünff letzte ziffer hinweg / so findestu / das die rundung am schnitz oder hütlin inn sich habe 4903963 3004 solcher thailungen / jede ein Vnitet lang vnd brait verstanden.

23. Vom Feld an einer Wellen / Walger oder Cylindro.

Auß dem 9. vnd 10. Th.

Ein Wellen oder Walger / so hoch als brait am Boden / vnd ein Kugel gleicher höhe oder dicke mit jhr / haben gleiche rundungen: oder deutlicher / deß halbrunden Feldes vmb den Walger herumb (die zwen flache Böden nicht darzu gerechnet) ist gleich sovil als deß gantz runden Feldes vmb die Kugel.



Die 8. Figur.

Vnd wann durch baide in einander gesetzt / ein schnit geschicht / als POTS, welcher rechtwinckelig auff den innern graat RB (als in R.) zutrifft / so werden abermals beider orten gleich grosse Felder abgeschnitten / nämlich an dem walger KP, LT, an der Kugel PGT als ein hütlin.

7) halben 25) vnd *statt* vmb

21*

Auß dem 3. Th.

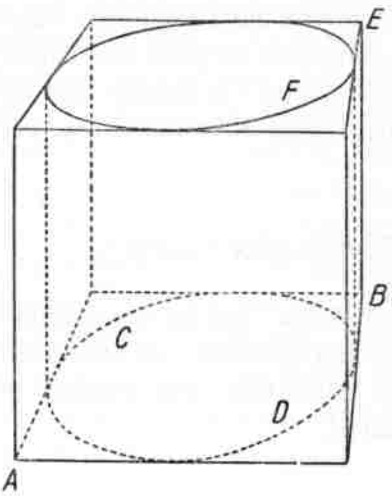
24. Vom Raum / fülle oder Corpus der geraden Seulen vnnd Wellen (Walger / Waltzen oder Täller).

Wann es rund ist / vnd nider / so wöllen wirs ein Täller nennen / oder ein Rad. Ist es aber hoch oder lang / so heißt es ein runde Seule / wann es auffrecht stehet: ligt es aber / so haist mans einen Walger / eine Waltzen / eine Wellen.

Das innerliche Corpus oder Fülle / oder der Raum / welchen ein jeder zeug oder erhebte Figur einnimpt / ist noch weniger bekant vnnd sichtbar / dann zuvor das flache Feld. Derohalben muß das Maaß / mit welchem man einen solchen Raum misset / abermal mit dem mehr bekanten langen Maaß verbunden sein. Vnd misset man einen jeden Raum / er sey mit runden oder flachen feldern eingeschlossen / durch ein raumliches Maaß / oder erhebte Figur / in sechs flache vierungen winckelrecht eingeschlossen / also daß es in der lenge / braite vnd höhe das Maaß halte / das dem Messer zur hand gehet.

Dises maaß oder figur haisset Cubus: teutsch könden wirs von gleichnus wegen / einen würffel nennen. Wann dann ein runder Walger in einem Cubo stehet / vnd an dessen vier auffgerichte Felder ab vnd ab anstreichet / auch vnten vnnd oben an der fünfften vnd sechßten vierung mit zweyen flachen Circkelrunden Feldern oder Böden anstehet / alßdann hiebey zusehen: so ist es gleich als wie mit der blossen flachen vierung / vnnd jhrem Circkel.[1] Dann der Cubus AC *23* gibt das Maaß / vnnd wann du denselben in 14 stuck thailest / gleiches raums oder gewichts / so werden deren 11 auff den runden Walger / die vbrige 3 auff die vier auffgerichte ecke gehen.

Die 3. Figur.



Sprichstu / wie sol ich einen Cubum in 14 stuck thailen? Antwort / nicht also / das 14 junger Cubi oder gerechte würffel drauß werden / dann diß kan durch die Kunst nicht geschehen / bestehet auff einem gerathwol. Ein vierung kan nit getheilet werden ohn vnderschaid in andere vierungen soviel man deren wil / sondern nur allein in 4 / oder 9 / oder 16 / oder 25 vierungen vnd so fortan / in die quadrat zahlen: Also ein Cubus kan gleiches fals inn kleinere Cubos anderst nicht / dann in 8 / getheilet werden / oder in 27 / oder in 64 / oder in 125 vnd so fortan / inn die Cubische zahlen.

Es würden dir auch solche 14 cubi wenig nutzen / dann sie weder mit jhrer lenge / braitte vnd höhe sich in dein fürhabendes langes Maaß / nämlich inn die lenge deß grossen cubi, schicketen / noch auch mit jhren flachen Feldern auff das flache Feld deß grossen cubi: sondern es verstehet sich dise zahl 14 / nur allein auff den zeug gewicht oder raum / ohn ansehung / wie er von aussen gestaltet.

Was nun gesagt worden vom Cubo vnnd seinem runden Walger / soll auch verstanden werden von einem jeden quaderstuck vnd seinem runden Walger oder Wellen sie sey höher oder niderer / wann nur baide zwen gleich schwebende / das ist parallel böden haben.

Zum exempel / du hettest ein geviertes stuck silber / am gewicht 70 quintlein / auß demselben wurde ein runder Täller herauß geschrotet oder gepresset welcher an alle vier seiten des gevierten stuckes anstriche / der wurde 55 quintlein vnnd das abgeschnitzel von vier ecken / 15 quintlein halten / dann 70 ist 14 / 5 mal / vnd 11 / 5 mal ist 55.

Ein anders / ein groß quaderstuck / 14 Centner schwer / soll zur runden seulen oder walger werden / was wurde sie wegen ? antwort 11 Centner.

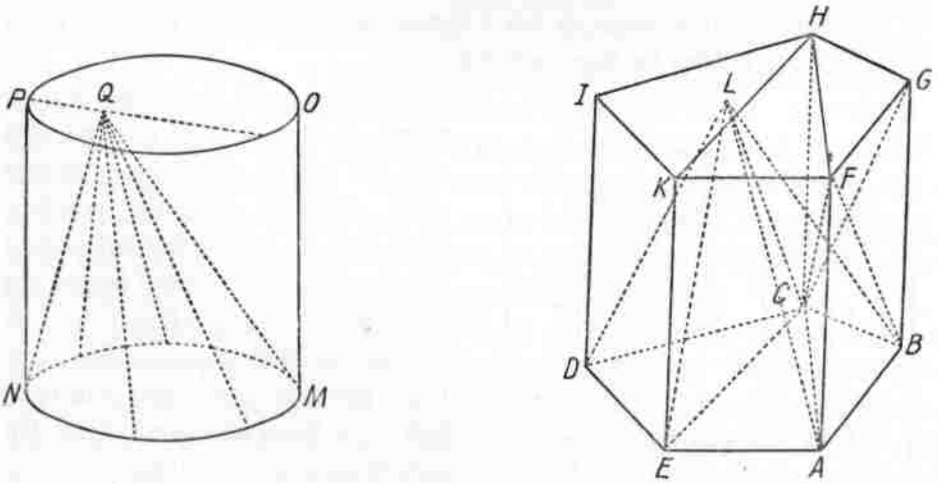
Wie sich nun helt die runde Seulen zu jhrem geraden quaderstuck mit gevierten gleichen Böden / also helt sich auch ein jede gedruckte Seulen / die zwen Böden von Ablengen Circkeln oder Cylinien hat / zu jhrem rechtwinckligen quaderstuck mit Böden von ablengen vierungen / an dessen seiten sie anstreicht / nämlich auch wie 11 gegen 14.

Wie dem aber / wann nicht das ein auß disen Gefelleten von gleicher höch / das andere / sondern ein gewisses Maaß oder cubus alle baide messen soll ? So messe mit der lenge deines cubi oder maaß / baides die lenge vnd die braitte an böden / dann auch die höch der Seulen oder quaderstucks. Auß der lenge vnd braitte wann die Böden recht winckelig / oder auß ihren triangeln / wie bey No. 14. 15. 16. erlehrne erstlich wie vil gevierte Feldungen deines Maasses der Boden halte. Darnach multiplicir den Boden in die höch / so kompt dir die anzahl deiner vollen Maasse / welche in dem Leib oder Fülle deß quaderstucks oder Seulen seind.

25. Vom Raum der zugespitzten Kegeln vnd Seulen / Pyramides genannt.

Auß dem 4. Th.

Ein jede gerade Seulen von gleichschwebenden Böden hat dreymahl so viel raums / als ein zugespitzte Seulen oder Kegel / auff jhrem Boden stehend / vnd mit dem spitz



Die 4. Figur

an jhren obern Boden reichend / oder an deß obern Bodens höch / wann man denselben fürgehen lesset. Besihe [1] hierumb dise Figur / da stehet ein gerade vnnd ein zugespitzte Seulen auff einem fünffeck / darnebens ein Walger vnd ein Kegel auff einem

2) Taller 4) 14 *statt* 15

Circkelrunden boden. Die gerade Seul vnnd der Walger fasset dreymal soviel als die zugespitzte vnnd der Kegel.

Zu rechnen einen jeden Kegel oder zugespitztes. Wann dir bekant ist das Feld am Boden / auß No. 14. 15. 16. vnnd zumal die höhe inn einerley langem Maaß / so multiplicir den Boden inn das dritte theil der höch / oder das dritte theil deß Bodens in die gantze höch / oder multiplicir baide gantz inn einander / vnd nimb hernach das dritte theil auß dem was kompt / so hastu die zahl der vollen maasse im Leib vnd raum der zugespitzten Seulen.

Auß dem 11. Th.

26. Vergleichung deß Walgers vnnd seiner Kugel.

Ein Walger so hoch / als brait an den flachen Böden / helt nach dem Raum anderthalb Kugeln / die inn dem Walger anstreichen oder gleiche höch haben / besihe die 8. Figur am 22. blat / vnd hie die 9. Da ist der runde Walger KY, vnd KL, NY seind die braitte der böden / so groß als die höch GB, oder KN.

Auß dem 13. Th.

27. Vergleichung der Kugel vnd deß Kegels.

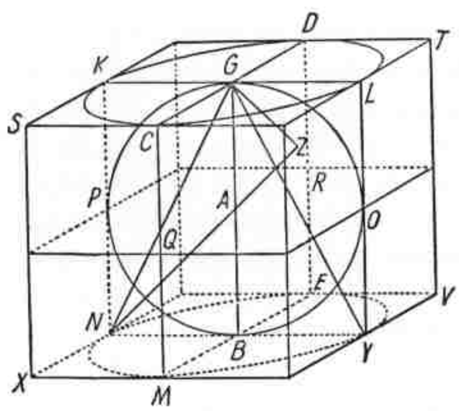
Ein Kegel gleicher höch mit der Kugel / wann er auch einen boden hat so groß / als die Kugel am mitteln schnitt ist / helt das halbe theil von der Kugel / besihe hie die 9. Figur.

Auß dem 12. Th.

28. Vergleichung deß Wirffels mit seiner Kugel.

Wann ein Kugel an deß Würffels 6 Wänden innen anstreicht / so ist sie ein wenig mehr dann das halbe theil vom Wirffel / besihe hie die 9. Figur. Da ist der Wirffel STVX, seine 6 mittelpuncten an den 6 Wenden seind / oben G, vnden B, neben P, Q, O, R, an welchen die Kugel anstreichet.[1]

Die 9. Figur.



Deutlicher wann der Wirffel wigt 21 pfund / so wigt die Kugel 11 / doch nicht nach der scherffe zuverstehen / welches allhie abermahl vnmüglich zutreffen; dann nach der gewonlichen außtheilung deß diameters / oder eines langen ecks deß Wirffels in 200000 langer theil / so bekommt der Wirffel 8 00000 00000 00000 theil / jeden ein Vnitet lang brait vnnd hoch / die Kugel aber nimbt deren fast 418879 02047 86301 hinweg.

Dise zahl zu behalten / so merck auß Villalpando, das sie zusamen gesetzt sey † auß vier drittheilen deren zahl welche No. 17. das Feld deß Circkels bedeutet. Das nun hie flaches vnnd rundes also genau mit gantzen zahlen miteinander eintreffen / das

1) als das 14) *(Randnote)* 31. 24) Kugel die 11

geſchicht nicht vons Garten ſondern vons zauns wegen. Dann ob ſchon das Feld am Circkel flach außgebreittet vnd alſo gerad iſt / ſo wirdt es aber doch mit einem runden kreiß vmbzeunet: vnnd vergleicht man alſo auch hie krummes mit krummem / vnd wie ſich helt der diameter 7 / gegen dem ſechſten theil deß vmbkreißes 22 / alſo auch der Würffel gegen ſeiner Kugel.

Summa von gedächtnus wegen. Der Kegel 1 / die Kugel 2 / der Walger 3 / der Würffel nicht gar 4. Sondern nehener alſo: wann der Kegel wigt 11 / ſo wigt die † Kugel 22 / die wellen oder walger 33 / der Würffel 42 / nicht 44.

29. Von Walger- vnnd Kegelſchnitten.

Auß dem Supplemento.

Noch ſeind andere figuren / nicht ſo perfect wie die vier jetz abgehandelte / die ſich doch auch etlicher maſſen nach den hievorgeſetzten arten: die entſtehen / wann man den Kegel durch eine gerade fläche entzwey ſpaltet / oder wann man ein Lehr / dannen hero genommen / an Drähſtock anſchlegt / vnnd nach ſolcher Lehr ein ſtuck zeugs am Drähſtock abdrähet.

Ich wil aber den Kegelſchnit beſchreiben / vmb beſſerer richtigkeit willen / nicht wie † Archimedes, ſondern wie Apollonius jhne beſchreibet / dann alſo gedunckt es mich leichter zufaſſen. Es ſeind der recht runden Kegel mancherley / etliche ſtumpff / wie ein Kampffrad oder Thürangel / der mit dem ſpitz in ſeiner pfannen vmbgehet / vnnd die gantze Thür tregt / etliche ſpitzig wie ein Gewirtzſcarnitzel von Papir. Diſe alle ohne vnderſchaid / die mögen auff fünfferley weiſe geſpalten werden / verſtehe durch einen geraden ſtraich oder ſchnitt / mit einem flachen Beihel / Axt oder Meſſer. Eintweder du triffſt auff den ſpitz zu / ſo gewint der Schnitt die Figur eins rechtliniſchen Triangels / oder du triffſt neben dem ſpitz auff die rundung / wann dann der ſtraich oder ſchnitt gantz durchgehet / vnnd der Kegel gantz geköpffet iſt / dann ſo nimb den Schnitz an welchem der Spitz gebliben / ſtürtz jhne auff den Schnitt den er gewunnen; ſtehet er gerad auffrecht / ſo iſt ſein Schnitt gewiß Circkelrund / neiget er ſich aber auff ein ſeyten / ſo iſt ſein Schnitt oder Boden ein ablenger Circkel / oder Aylini / genannt Ellipsis, iſt in der folgenden Figur zuſehen bey den Buchſtaben CHIO. Vnd ob es ſich alsdann begebe / das der ſtreich durch deß Kegels boden gangen wäre: ſo wurde diſer Schnitt ein ſtuck ſein von einem Ablengen Circkel / vnd ſo man den Kegel erlengerte / daß er vmb vnd vmb die durchſchneidende fläche erraichete / ſo wurde alsdann auch der Ablenge Circkel am Schnitt ergäntzet ſein.

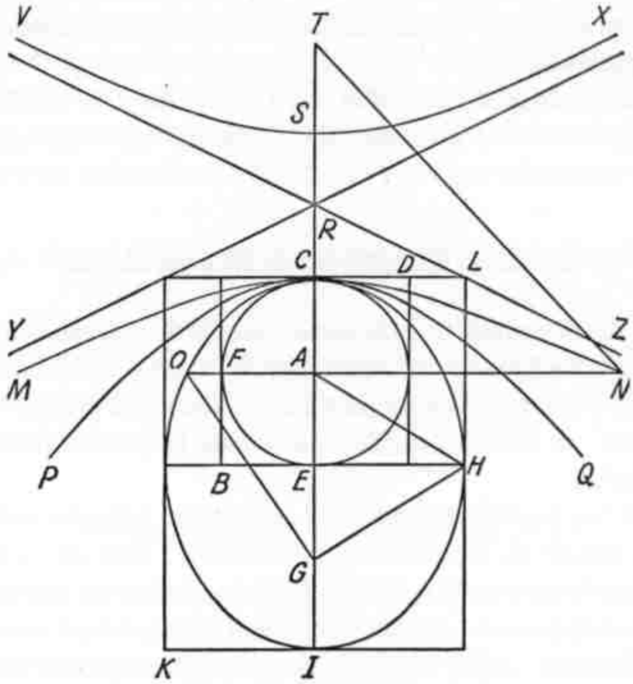
Schnitt Sectio.
Schnitz Segmentum.

Hetteſtu aber den Kegel alſo getroffen / das der runde rucken am abgehawenen
26 Schnitz / der den ſpitz behalten vnd auff den ſchnitt geſtürtzet iſt / vom ſpitz an / [1] ab vnd ab einerley höch behielte / ſo wurde der Schnitz Parabole haiſſen / deſſen furm (deß Schnitts ſprech ich / vnnd nicht deß Schnitzes) haſtu allhie bey PCQ. So aber der rucken deß Schnitzes gegen dem ſpitz am niderigſten wäre / vnnd gegen dem braiten theil in die höche ſtige / ſo iſt alßdann der Schnitt ein Hyperbole, deſſen geſtalt ſiheſtu bey MCN, beſſer aber bey VSX.

Diſer Kegelſchnitte wirt hie gedacht von zweyerley vrſachen wegen. Erſtlich erfordert es die notdurfft / das man wiſſe die weiſe / zumeſſen einen jeden herab gehawenen Schnitz an vnd für ſich ſelber / nicht weniger als den gantzen Kegel / Kugel oder

Wellen. Fürs ander / als kurtz hievor gemeldet / ſo kommen auß diſen Kegelſchnitten andere mehr Figuren / die man auch nach der Hand meſſen oder betrachten muß /

Die 10. Figur.



wollen derhalben jetzo die Schnitze beſeits ſetzen / vnnd auß dem Sinn raumen / vnnd vorerſten nur von diſen Schnitten handeln: allein vorher zuerinnern / auß Sereno, † das ein Wellen oder Cylinder, ſchlims geſchnitten / keinen andern Schnitt gewinn / dann auch einen Ablängen Circkel oder Cylini / gantz oder abgeſtutzet.

Wurde ſie aber gerad nach der zwer geſchnitten / ſo gibt es einen gerechten Circkel / wann anderſt die Wellen recht Circkelrund. Entlich ſo ſie (die Wellen oder Walger) gerad abwärtz geſpalten wurde / es wäre durch den mittlern graat / oder auff einer ſeitten / ſo gewinnt der Schnit eine rechtliniſche gerechte oder Ablenge vierung / nach dem die Wellen lang oder kurtz.

Auß dem Supplemento.

30. Ordnung vnd Aigenſchafft der Kegelſchnitte.

Der Circkel gehet voran / auff jhn folgen allerhand Ellipses oder Ablenge Circkel / deren furmen ſeind vnentlich viel / nicht allein an der geſtalt vnnd maaß der braitte gegen der leng / ſondern auch in jeder Sorten an der gröſſe. Nach allen Ellipsibus kompt die Parabole, die iſt / der geſtalt nach / einig / wie der Circkel / allein der gröſſe nach ſeind jhrer auch vnentlich vil. Nach der Parabole gehen die Hyperbolae an / ſeind jhrer gleichsfals vnentlich vil / letztlich beſchleußt ein gerade lini den gantzen hauffen.

Circkel / gleiche vnnd ablenge / kommen in ſich ſelber wider zuſamen / Parabole vnd Hyperbolae ſtrecken jhre Bögen immer fürbaß hinauß / vnd begehren nicht zu=

1. *Randnote)* 11. Figur   4) von erſten

ſamen / wann man ſie auch vber den euſſerſten Himmel hinauß erſtreckete. Je weitter man ſie erſtrecket / je geräder ſie werden / doch nimmermehr gar allerdings gerad: mit diſem vnderſchaid / das in der Parabole die gerade Axlini CI, ſo durch den wüpffel C gehet / baide Bögen CP, CQ zu ſich locket / die endtlich der CI faſt gleich / doch nimmermehr völlig gleich lauffen / dann ob ſie ſich wol je mehr vnnd mehr nach der geräde CI richten / kommen ſie doch je mehr vnnd mehr vnentlich weit von jhr hindan / hingegen inn der Hyperbola laſſen ſich die Bögen SV, SX, oder CM, CN
27 von den [1] linien RY, RZ laiten / die da im R zuſamen fallen / vnnd bey einer jeden Hyperbola einen gewiſſen winckel ſchlieſſen / der iſt allhie ſtumpff / kan auch recht oder ſpitzig ſein / vnnd alle Hyperbolae die auß jedem ſolchen winckel einerley furm haben / die haben auch nur ein par ſolcher linien / Asymptoti genannt / da eine weit von den asymptotis entan ſtehet / die andere nahe bey jhnen iſt / jene wirdt gröſſer geſchätzt / diſe kleiner. Je weitter nun der Bogen CM in ſeiner art erſtreckt wirdt / je näher kompt er zu der lini RY, vnd kompt doch in ewigkeit nimmermehr gar an ſie / alſo das ſie zuſamen fallen.

31. Die drey Kegelſchnitte mit behendigkeit auff ein eben Feld auff zureiſſen.

Auß dem Supplemento vnnd Paralipomenis ad Vitellionem.

† Wann du heffteſt einen faden in dem puncten A, vnd nimmeſt die lenge AC, ſteckeſt auch einen ſpitz bey C durch den faden / vnnd fehreſt mit dem ſpitz vnd auß- geſtreckten faden vmb das A herumb / ſo wirſtu mit dem ſpitz einen gerechten Circkel auffreiſſen / das ſag ich von vergleichung wegen / ſonſten iſt es einem jeden zuvor bekant.

Nimb jetzo zwen ſteffte / ſtecke ſie auff das Reißbrett in zwen puncten / A vnd G, deins gefallens weit von einander / nimb einen Faden / ſchlag jne vmb den ſtefft G, ſtrecke von da an zwey trümmer deß Fadens vber den andern ſtefft A hinauff / eins zur lincken / das ander zur rechten baider ſteffte / laß baide vber den ſtefft A deins gefallens weit hinauff gehen / als zum Exempel biß ins C, da knüpff baide trümmer zuſamen / vnd ſetz einen ſpitz hinein / ſtreck mit demſelben den Faden an / vnd fahr alſo herumb mit geſtrecktem Faden von C in H vnnd I, ſo wirdt ein Ellipsis oder gerechter Ablenger Circkel oder Oval lini drauß.

Wann ein Cavalliero wider auß Italia kompt / vnd hat in Mathematicis ſoviel proficirt, daß Er ein ſolche Oval- vnnd etwa ein spiral lini darzu / reiſſen kan / leſſet er ſich die raiſe deſto weniger dauren: Man pflegt auch ſolche ſtücklin drinnen wol zu bezahlen / das wär aber allein die Ellipsis, ich wil hie noch die vbrige Conicas hinzu ſetzen.

Nimb abermal zwen ſteffte / ſtecke ſie auff das Reißbrett in zwen puncten A vnnd T deins gefallens weit von einander / knüpff an jeden ſtefft einen Faden. Theil die leng TA inn zwey vngleiche thail deins gefallens / im puncten S, vnnd ſtrecke von baiden angeknüpfften Fäden A vnd T, zwey trümmer AS, vnd TS zuſamen biß ins S, ſteck einen ſpitz zwiſchen baide bey S, vnd von diſem ſpitz in S erlengere die zwey trümmer der Fäden / zuſamen gelegt / ſo weit als dir beliebet / ſtrecke alſo baide fäden mit einer hand an / vnd laß sie den spitzen auß dem puncten S gegen V hinauß ziehen / biß er dir an die Finger kompt / mit welchen du die Fäden gefasset hast / so wirdt der spitz ein Hyperbolam auff einer seiten auffreissen / so lang du die Fäden gefasset hast; das andere halbe theil auff der anderen seiten SX mach auch also.

Die Parabolen aber reiß also / zeuch ein gerade lini CI so lang du wilt / steck einen stefft in deren puncten einen / als A, mache die lini CA so groß du wilt / vnd wa du die lini endest / als in I, da reiß ein andere lini IKP recht winckelig auff. Hernach knüpff einen Faden an den stefft A, den streck hinauff biß ins C, da setz einen spitz an / schlag den Faden vmb jhn herumb / vnnd streck jhne biß ins I, da mach einen Knopff / jetzo nimb den Knopff inn die eine | hand / den spitz C in die andere / *28* streck den Faden mit dem spitzen C an / fahr mit baiden Henden von der lini CI entan / also das der faden zwischen dem spitz vnnd knopff allezeit der lini CI gleich oder parallel stehe / bleib mit dem knopff inn der lini IP, so wirdt der spitz auß C ein Parabolen reissen / biß inn die lini IP, also das knopff vnd spitz entlich in der lini IP, nämlich in P zusamen kommen.

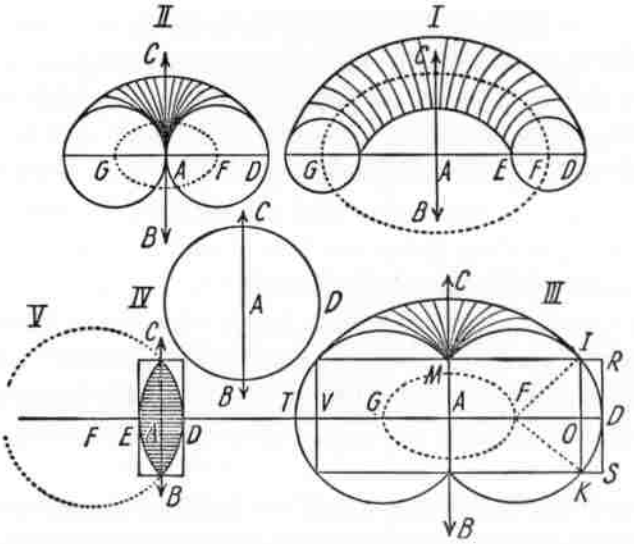
Diß zuerhalten magstu auch ein winckelmaaß brauchen / wie man die proportional linien findet.

32. Was für Figuren auß den flachen Kegelschnitten kommen / wann einer nach dem andern auff vnderschidliche weise zur Lehr gebraucht / vnd die Massa oder Zeug am Dräſtock nach solcher Lehr abgedräet wirdt.

Auß dem Supplemento.

Deren Kegelschnitte seind vier / ein Circkel / ein Ablenger Circkel / ein Parabole, ein Hyperbole: auß disen vier figuren kan jede auff fünfferley art herumb getriben / oder zur Lehr angeschlagen werden: besihe hie die 11. Figur.

Die 11. Figur.



Dann eintweder lauffen sie aussen vmb die Ax herumb / wie hie bey No. I. Da gibt jede einen Ring; oder sie stehen mit dem einen End oder puncten gleich an die Ax an / da gibt es beschlossene Ringe / wie hie bey No. II. Oder sie werden besser

4) SA 10) den Knoff S

vber die Ax hinein gerucket / alſo das ſie nicht gantz vmblauffen / ſondern es gehet innen ein Schnitz ab / dann ſo wirdt ein Apffelrunde figur auß dem Circkel / beſihe hie bey No. III. Oder die Ax gehet gar durchs Centrum, alſo das nur ein halber Circkel vmlaufft / oder die Lehr nur auß einem halben Circkel genommen wirt / da wirdt ein gerechte Kugel darauß / wie hie bey No. IV. zuſehen. Oder entlich gehet weniger vmb / dann das halbe theil / nämlich nur ein Schnitz / da wirt ein Citronenrunde figur drauß / wie bey No. V. allhie zuſehen.

Wann nun die drey vbrige Kegelſchnitte auch ſo perfect vnd einfeltig weren / wie der Circkel / ſo hetten wir der figuren in einer Summen zweintzig: demnach aber ein groſſer vnterſchaid iſt am anſchlagen deren anderen figuren / vnnd viel dran gelegen / nach welchem ſtrich man jhr halbes theil / weniger oder mehr / nemen ſolle: Als erſtreckt ſich die anzahl diſer gedrähten figuren / ſo allein auß dem Kegelſchnit herkommen / auff zwo vnd neuntzig / einer jeden abſonderliche wunderbarliche kleine theil oder Spältlin / item die figuren ſelber vmbgekehrt / vnd jre holaußgedräte furmen nicht mit eingerechnet. Ob es nun wol vnnoth dieſelbige noch lengs zubeſchreiben / wie im lateiniſchen Werck beſchehen / ſo kan ich doch der fürnemſten hie nicht geſchweigen / ſonderlich von der Fäſſer wegen.[1]

29 Ein halber Ablenger Circkel oder Ellipsis nach der leng angeſchlagen / gibt einen Leib wie ein Ey / doch ordenlicher / vnnd oben ſo dick als vnten / artet ſich nach der Kugel / darumb es Griechiſch Sphaeroides longum genennet wirdt / Teutſch ein Ablenge Kugel. Die ſiheſtu hieunten zur Rechten.

Selbige figur nach der zwer alſo halbirt angeſchlagen / gibt einen Leib / wie faſt eine Linſen / oder wie ſich etliche Kißlingſtein im Bach abſtoſſen / Griechiſch Sphaeroides latum, möchtens Teutſch eine gedruckte Kugel nennen / oder einen runden polſter oder Küß. Hie vnten zur lincken iſt ſie Radweis auffgericht.

Wurde aber weniger dann das halbe theil angeſchlagen / das gibt nach der leng die geſtalt einer Oliven / oder lenglechten Zweſpen: nach der zwer / die geſtalt einer Kriechen / oder Gurren / wie mans hie zu land haißt.

Ein halbe Parabole oder Hyperbole COP nach der Axlini CI angeſchlagen / geben zwey Griechiſch genennte Conoidea, oder rund abgeribne Kegel / das Conoides Parabolicum ſihet wie ein runder Hewſchober oder Hewſchoch / das Hyperbolicum wie ein Aiß / oder geſchwer / oder wie ein ordenlich auffgeſchitteter Arbishauffen / oder ein runder Bergkülbel.

Diſe figuren gantz recht nach der zwer NO angeſchlagen / geben die geſtalt einer Spulen OINC. Soviel wirt vns zu betrachtung deß Faſſes dienſtlich ſein. Sonſten kommen vnder die obbeſagten 92 Sorten allerhand Küttenrunde / Birenrunde / Zirbelnußrunde / allerhand Kernrunde / dann zapffenrunde / Brait-Kürbisrunde / Judenkerſchenrunde / vnnd dergleichen figuren: deren faſt jede jhr aigene weiſe hat / dardurch ſie kunſtlich mag gemeſſen werden; alſo das es nicht noth ſey ſie gegen andern Sorten gleichszeugs / zuwegen / oder inn ein Waſſer zuwerffen / vnnd die erhöhung deß Waſſers / durch ſie beſchehen / warzunemen / welches ſonſten die zwey / aber nit kunſtliche / mittel vnd handgriffe ſeind / allerhand vnordenliche vngeſtalte figuren nach jhrem Leib Raum oder Fülle zu meſſen. Handgriff die vngeſtalte figuren nach ihrem raum zumeſſen.

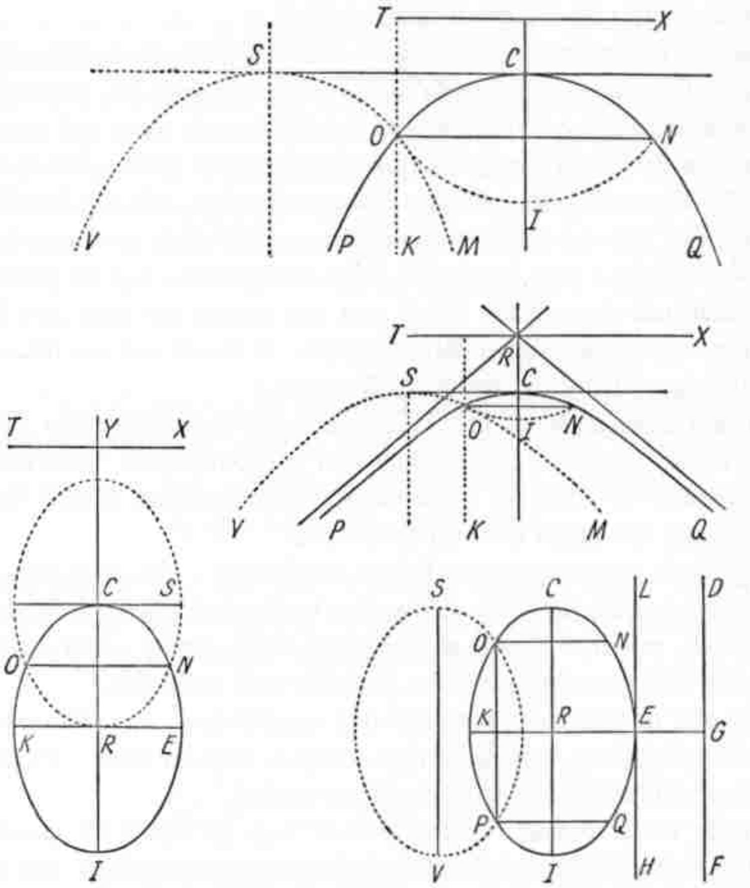
15) nach *statt* noch

Auß dem Epis 1. ad Th. 13.

33. Vom Leib der Ablengen vnd Gedruckten Kugel oder deß Ayes / vnd der Linsen.

Als nu gesagt / daß das Ay (verstehe es Geometrisch / wolgeordnet / oben so dick als vnden / wie inn hie bey gesetzter Figur vnden zur rechten) Kugelart habe: also

Die 12. Figur.



ist es auch gleich wie die Kugel / gantz oder halb / jedesmahl zweymal so viel als der Kegel von gleicher höch / dessen boden dem mittern schnit deß Ayes gleich ist. Muß also die feldung am boden deß halben Ays bekandt sein / sampt [1] der höch deß halben 30 theils durch einerley lenge / dann auß dem diameter deß Circkelrunden bodens hastu seine Feldung / als du bey No. 14. gelehret bist. Dann so multiplicir die zahl der Feldung am Boden in zwey drittheil von der höch / so hastu den raum deß halben Ays. 10 Also auch von der Linsen / die ist bey diser 12 Figur vnten zur lincken gemahlt.

34. Vom Hewschober.

Conoides Parabolicum (in hie beygesetzter 12. Figur oben an / PCQ) wirt auch durch einen Kegel gemessen / der mit dem Conoide auff einem flachen runden Boden

7) der höch *fehlt*

PQ ſtehet / gleicher höch mit jhme / dann das Conoides oder Hewſchober PCQ füllet oder raumet ſolcher Kegel anderthalbe. Multiplicir derohalben die zahl der feldung am Boden PQ deß Hewſchobers PCQ in ſein halbe höch / ſo haſtu den raum † von dem gantzen Corpus.

Wie wär aber das feld am Boden zu finden? Meß auſſen herumb / kanſtu nicht mitten hindurch / dann auß dem vmbkraiß wirdt dir bekant der diameter, wie bey No. 6. Hernach ſuche das Feld durch No. 14.

35. Vom Berg oder Arbißhauffen. Auß Epis. 2.

Mit dem Berg oder Arbißhauffen Conoide Hyperbolico (in hie beygeſetzter 12. Figur in der mitte gebildet / vnd droben in der 17. Figur am 19. blat / durch BV verſtanden) hat es mehr wunders / dann diß Conoides gilt nicht gar anderthalb ſeiner Kegel / ſonder je geſpitzter / je weniger / vnd entlich gar vmb ein vnkennliches mehr dann ſein Kegel.

Muß derohalben fürs erſt / einem jeden ſolchen Conoidi, deren vnentlich vilerley ſorten / zum Exempel inn der 17. Figur dem Conoidi VB (halb gemahlet) noch ein Am 19. blat. anderer Kegel geſucht werden / nämlich ACB (halb gemahlet) auß welchem ſolch Conoides gleichſam geſchelet iſt / nämlich höher dann es: der vnderſcheid CV baider Höchinen CA, vnd VA, muß einerſeit zweymal genommen werden / anderſeit dreymal / baider orten wirdt die kleinere / nämlich deß Conoidis vnd ſeines inwendigen gleich hohen Kegels höche / nämlich AV hinzu geſetzt. Dann helt ſich allererſt in der Regel detri das Corpus deß gleichhohen Kegels zu dem Leib deß Conoidis, wie die zuſamen geſetzte kürtzere zahl zu der gröſſeren / oder multiplicir das feld in das drittetheil der höch deß Conoidis, was kompt / multiplicir wider in die gröſſere zuſamen geſetzte zahl vnnd dividirs durch die kleinere / ſo haſtu das Corpus vom Conoide.

Fragſtu / wie wirt aber der beſagte höhere Kegel ACB, auß welchem das Conoides AVB geſchehlet iſt / zuſuchen ſein? Antwort / das iſt zwar hie zu weitleuffig nach der ſcherffe abzuhandlen / doch nach dem Augenmaaß / vnd von deß Handgriffs wegen / iſt es ein Traidhauff / ſo ſtecke oben auff den wüpffel V ein ſtecklin FV, truck es ſo lang hinunter / biß die mittere runde vom hauffen VB, nach dem obriſten theil deß ſtecklins C abgeſehen / anfahet den vnderen rand deß Traidhauffens B zubedecken. So weit nun das ſtecklin CV vber den Traidhauffen V außgehet / das iſt vngefehrlich die maaß / die (nach vnſerer bekandten maaß abgemeſſen vnnd numerirt) man zweymal vnnd dreymal zu deß hauffens höch VA ſetzen muß. Die höch aber deß hauffens VA findeſtu leicht / truck nur [1] das Stecklein biß an boden A. Were es aber ein Berghügel / da müſteſtu oben mitten darauff bey V eine Stange auffrichten / ſo hoch / das man das oberſte theil darvon / mit einem zaichen kenlich gemacht / nemlich das C, vnten am Berg rings herumb / nämlich bey B, erſehen könte vor der runde deß Bergs. Oder ſo diß vnmüglich / könte man die Sonne zu hülff nemen / wann ſie gleich anfahet obern Berg VB herein zuſtreichen mit dem ſtreim CB, vnnd der Berg keinen ſchatten mehr in die ebne von ſich hindan wirfft: in diſem Augen-

8) *(Randnote)* Epis. 22 31) Traidhauffens BG

blick nimbt man durch die Astronomische Kunst der Sonnen höch ABC, vnnd mit deren jhren Tangentem auß dem Canone, das ist eins. Fürs ander misset man wie weit es vmb den Circkelrunden Berg (dann von einem solchen reden wir) herumb sey / auß disem vmbkraiß erlerne (wie bey No. 6) den diameter, oder wie weit es gerad durch den Berg hindurch sey: Multiplicir dessen halbes theil BA in den gesuchten Tangentem, vnd wirff die fünff letzte ziffer hinweg / so hastu wie hoch es sey von dem mittelpuncten A am boden deß Bergs / biß an den obristen güpffel C deß Kegels / auß welchem der Berg geschelet ist / oder biß an denjenigen Sonnenstreimen CB, welcher das vnderste am Berg B erleuchtet / neben dem Berg hinunter streichend. Fürs dritte mustu vom Berg entan stehen an ein ort / da du deß Bergs güpffel V ersehen kanst / vnd alda durch die Kunst altimetram, messen die höhe deß Bergs VA an jhr selber.

Zum Exempel / ich setze / ich finde die Sonne hoch 16 gr. 42 min. wann sie / wie gesagt / gerad vbern Berg gegen mir herunder streicht: da find ich den Tangentem von 16 gr. 42 min. sovil als 30000 / auß dem Canone, ich setze fürs ander / es sey vnden vmb den Berg herumb 3142 schrit / finde derhalben mitten durch den Berg hierauß 1000 schrit / vnnd biß ins Centrum hinein halb sovil nemlich 500. also das feld am boden des Bergs wurde sein 78 53982 gevierter schrit / multiplicir 500 in † 30000 kommet 15000000 / wirff fünff ziffer zu letzt hinweg / bleibt 150 schrit / die höhe vbern Berg hinauß / biß an den obgesagten Sonnenstreimen. Gesetzt fürs dritte / es funde sich auß der kunst altimetra die höch des Bergs 120 schrit. Machs nun fürder also.

Bergs höhe	120	Bergs höhe	120		120	Feld am Boden	
Erste höhe	150	vbermaß 2 mal	60	vbermaß 3 mal	90		78 53982
Vbermaß	30	gibt	180	gibt	210	dritttheil der höhe	40
Zweimal	60	oder	6	oder	7	gibt	3141 59280
Dreymal	90						

sovil Cubischer schritt / oder würffel / deren ein jeder einen schrit lang breit vnd hoch / seind im Kegel / der vnderm Berg steckt.

Nach verrichter Regel detri kompt deß Bergs Corpus vmb das sechßte theil grösser / nämlich 3665 19160 Cubischer schritte / da ein jeder einem Mann einen gantzen Tag zu arbeiten gibt / wil er jhne nur einen roßlauff lang hindan bringen / vnnd deren 366 geben einem Mann ein gantzes Jahr zuthun / vnverschonet deß Sontags / hetten also vber zehenmal hundert tausent Mann zuthun lenger dann ein gantzes Jahr / wolten sie einen solchen Berg abtragen / deß brechens zugeschweigen. Ich halte man laß jhn stehen.

Auß dem 15. Th.

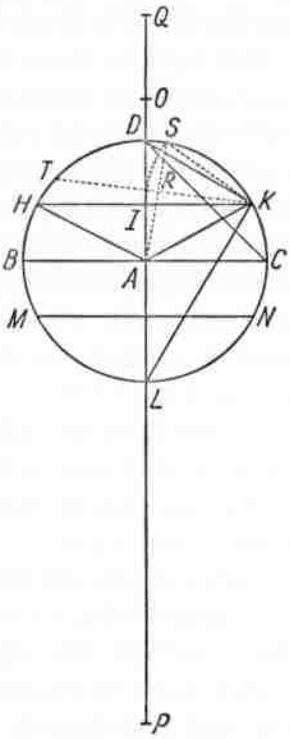
36. Vom Kugelzaan vnnd seiner Fülle oder Raum.

Ist zuverstehen / wann ein stuck auß der Kugel Kegelweiß herauß geboret vnd geschrottet wirt / also das es mit dem spitz auffs Centrum treffe / das sey bey der

Am 20. blat. 6. Figur HAKDH gantz voll vnnd erhebt zuverstehen.[1]

14) Tangenten 37) *(Randnote)* 25. Th.

32 Merck derohalben / das ein ſolcher Zaan HAKD hat zwey ſtuck / das ein HKD iſt ein Kugelſchnitz / das ander HKA iſt der Kegel der mit dem Schnitz HKD einen gemeinen Circkelrunden Boden hat durch die lini HK verſtanden. Meſſe derohalben den diameter HK von diſem Circkelrunden Boden / ſampt der leng AK vom ſpitz A biß an den vmbkraiß deß Bodens K oder H, iſt der halbe diameter der Kugel: auß welchen beiden du leichtlich durch die 10 Lehr finden kanſt die höch deß Schnitzes DI, diſe iſt die gemeine höch vom Kugelſchnitz vnd vom Circkelſchnitz / dann wann du den Kugelſchnitz mitten entzwey ſchneydeſt / ſo gibt es im Schnitt ein Circkelſchnitz: baide Schnitze hie bey HKD zuverſtehen.



Die 6. Figur.

Vnd ob du nicht rechnen wolteſt / ſo reiſſe mit der linien AK nach der jungen Maaß / auff ein papir / einen Circkel HKN, vnnd ſetze die lini HK darein / laß auß A einen winckelrechten ſtrich AI biß an Circkel D hinunter gehen / ſo kanſtu DI nach dem jungen Maaß durch den Circkel meſſen.

Nun iſt dir bekandt / das die gantze Kugel halte 418879 etc. beſihe No. 28. Diſe zal multiplicir in die höch DI, was kompt / das dividir inn die gantze Kugelhöch DL, ſo kompt dir der Leib deß Zaans in der Maaß / damit dir der gantzen Kugel Leib bekant iſt.

Zum exempel die höch DI am ſchnit HDK habe 78049 / nach der sinus zal / multiplicirs in die Kugel zahl 418879 etc. / dividir was kommt mit 200000 oder be-hender multiplicir auß den zwo erſten die eine gantz in die ander halb / vnd wirff die 5 letzte figuren hinweg / ſo werden dir kommen 1 63465 44334 66830 / ſo groß iſt der zaan HAKDH. Doch die 10 letzte ſeind vngewiß / dann das letzte 9 an DI iſt nicht genaw.

Noch behender auß No. 28. dividir ſolche höch mit 3 / was kompt das duplir vnd multiplicirs in die zahl deß Circkels Feld / doch das ſie ſo viel ziffern habe / als vil dein fürhabende Kugelzahl ziffer hat. Diſe Multiplication verrichteſtu durch hülff deß Täfelins No. 12. mit lauterm addirn, wirff endtlich die 5 letzte ziffern hinweg / ſo bleibt abermal der Zaan.

37. Vom Leib oder Raum deß Kugelſchnitzes.

Zu wiſſen den Raum am Schnitz HKD, ſuch erſtlich nach der 36. Lehr / den Raum deß Zaans HAKD, hernach ſuch den Raum oder Leib deß Kegels HKA, dann weil du waiſſeſt DI die höhe deß Schnitzes / ſo waiſtu auch IA die höhe deß Kegels / dann baide in DA ſeind ſovil als AH. Zeuch ab den Leib HKA von dem Leib HAKD, ſo bleibt dir der Leib im Schnitz HKD.

Der Erſte gewiſſe aber mühſelige weg. Auß dem 15. Th.

Ein Exempel / der bogen KD ſey 77 grad, 19 min. 9 secunden der hat einen sinum (auß dem Canone darvon No. 9 geſagt) nemlich IK 97561 / diß iſt der halbe

20) der höch   36) *(Randnote)* Der *fehlt*

diameter zum gemeinen boden deß schnitzes HDK, vnnd deß Kegels HAK. So sprich durch detri, die vierung von AC 100 etc. gibt jhrem Circkel am feld 314 etc. / was gibt die vierung von 97561, nemlich 9518148721 jhrem Circkel? wie du gelehrt bist / bey No. 12. 13. so kompt das Feld deß Circkels HK 2990214 6098. das behalt.

Weil dann der Bogen DK bekant / so weistu auch sein vberiges stuck KC zum 1
quadranten oder vierten theil deß Circkels DC, nemlich 12 grad 40 min. 51 sec. *33*
dessen sinus findet sich auß dem Canone 21951, so lang ist AI. multiplicir das dritte theil hievon / nämlich 7317 in das jetz gefundene Feld deß Circkels HK, so hastu den Leib deß Kegels HKA, nämlich 21879 40029 99066. Nu hastu zuvor gefunden / wann die höch DI am Schnitz HKD ist 78049 (welches mit der höch IA 21951 gerad 100000 machet) das alsdann der Leib im Zaan HAKD seye 163465 44334 66830. So zeuch nun jetzo ab / den Leib deß Kegels HKA, wirdt dir bleiben 141586 04304 67764, soviel ist deß Leibs am Schnitz HKD, wann sein halber Bogen DK ist 77 grad 19 min. 9 sec.

Laß dich die langen zahlen hie nicht irren / es ist nicht allwegen dein (wie jetzo mein) notdurfft / mit so langen zahlen zurechnen. Es seind auch die 10 letzte ziffern nicht genaw / dan sie folgen auß dem letzten secundo deß Bogens / vnnd auß der letzten Vnitet deß sinus, die ist nicht so gerad / wie wir sie hie brauchen müssen / sondern vmb etwa ein halbs weniger oder mehr / vnd wann du dann dem diameter nicht 200000 / sondern nur 20 theil gibest / so kompstu mit dem Leib nicht vber 8000 / mit dem Feld nicht vber 400 / wie bey No. 13 gemeldet ist.

Der andere weg für die kleine Schnitze / deren Bögen vnder 25 gr. sind.

Doch wann die Kugelschnitzlein gar klein seind / so kompstu neher zu / wann du nur thust / als seyen sie lauttere Conoidea Parabolica, darvon droben No. 34 / nämlich multiplicir das Feld deß runden Bodens inn die halbe höhe deß Schnitzes / so kompt der Raum oder Fülle deß Kugelschnitzes. Dann der kleineste Kugelschnitz raumet seine Wellen oder Täller / in dem er stehen mag / gerad halb auß / der grössseste Schnitz aber / nämlich die halbe Kugel / raumet die zwey dritte thail von jhrer Wellen oder Täller.

Auß Th. 14. vnd Cor.

38. Zu verwandlen einen Kugelschnitz in einen Kegel auff einem Boden mit jme.

Der dritte weg.

Diß gibt zumal auch noch einen Weeg zurechnen das Corpus deß Kugelschnitzes. So merck nu / wann ein Kegel auff dem boden HK stehet / vnd nit weiter mit seinem spitzen reichet / dann biß inn den Würbel D, so kan er nicht so groß sein / als der runde Kugelschnitz HKD, auch auff dem Boden HK stehend. Soll dann der Kegel so groß werden als der Schnitz HKD, so muß er vber das D hinaußraichen / zum Exempel biß ins O: ist nun die frag / wie lang IO, deß Kegels höch / sein werde? das rechne also.

Wann du hast die höch ID 78049, so zeuchs ab von DL 200000, bleibt dir IL 121951. Nu multiplicir ID mit DA, was kompt das dividir inn IL, so kompt dir 64000, nämlich DO, setz es zu DI, so hastu IO, 142049: jetzo nimb das dritte theil / nach der Lehr No. 25, multiplicirs in das Feld deß Bodens HK, wie du jhne droben

7) den *statt* dem   14) 40 min. 51 sec.

No. 37. gefunden / ſo kompt dir der Leib deß Kegels HKO, oder deß Schnitzes HKD 141586 0000 00000 faſt wie zuvor.

Sonſten iſt es gar gemein / wann man ein ſeltzame Figur jrem Leib nach meſſen wil / ſo muß man ſehen / das man ſie inn einen ſolchen Kegel verwandlen könde.

Noch ein Exempel. Ein Kugelſchnitz ſey am Boden 18 mal ſo brait als hoch / halte am Boden nach der Feldung 1513 764977 / ſo wirdt die Kugel 82 mal ſo hoch ſein als der Schnitz. Sprich nun alſo / wie ſich helt das lenger Trumm 81 zum halben diameter 100000 / nach der sinus zal / ſo helt ſich die höch oder das kürtzere Trumm 1 / zu 1234. Diß iſt die erlengerung deß Kegels / der dem Schnitz gleich iſt / nu iſt die höch nach der sinus zal 2439: ſetz es zuſamen ſo kommt deß Kegels höhe 3673 / deſſen drittes theil iſt 1224 ein halbs / darmit multiplicier die obgefundene Feldung 151 / etc. ſo kompt der Raum oder Fülle deß Kegels / vnd alſo auch deß Schnitzes 185 0000 00000.[1]

34 Ein vortheil. Multiplicir gleichsfals IL mit LA, was kompt das dividir mit ID, ſo kompt dir LP, 156250 / ſetz LI darzu / ſo haſtu auch die höch zum Kegel HPK, der dem gröſſern Schnitz HLK gleich iſt / nämlich 278201. Setze baide höchin zuſamen ſo haſtu OP 356250. Der vierte Weg.

† So dir nun das Gewicht von der gantzen Kugel bekant wäre / ſo multiplicirs inn die ein höhe IO, dividir was kompt durch OP, ſo haſtu wie vil der ſchnitz HKD wege. Als / die Kugel wege 100 pf. Multiplicirs mit 142049, kompt 14204900, das dividir mit 356250 / ſo kompt bey nahe 40 pf. ſo vil wigt der Schnitz HKD, alſo bleibt dem gröſſern Schnitz HLK 60 pf.

Dieweil es aber doch allerſeitz viel groſſer mühe vnnd arbeit gibt / hab ich dir hie zum beſten ein Täffelin auff einhundert Kugelſchnitze außgerechnet / wie droben No. 17. ein gleiches auff einhundert Circkelſchnitze zufinden. Darbey ſoltu aber mit fleiß mercken / wann der halbe diameter von der Kugel / getheilet wirt in 100 langer⸗ ſein vierung in 10000 gevierter⸗ vnd ſein Cubus in 1000000 gewürffelter theil / ſo findeſtu zwar im Täfelin / wievil ſolcher gewürffelter theil in einem jeden Schnitz ſtehen / doch nicht anderſt / du ſetzeſt dann zuvor noch ein Nullen daran / welche hie von deß Formats wegen außgelaſſen iſt: Zum Exempel / der erſte Schnitz hat ſolcher theil nicht nur 33 / ſonder 330: der letzte oder die halbe Kugel nicht nur 209439 ſondern 2094390 / etc. Wäre aber der diameter getheilt in 100000 theil / ſo müßteſtu zehen nullen zu einer jeden zahl ſetzen / zuwiſſen den Raum deß Schnitzes nach ſolcher Thailung. Nota.

† Täfelin zu den Kugelſchnitzen.

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
	0	3036	11728	25446	43562	65446	90479	118019	147443	178126
	33	625	1156	1622	2030	2367	2657	2871	3021	3115
1	33	3661	12884	27068	45592	67813	93136	120890	150464	181241
	92	682	1205	1667	2065	2399	2679	2890	3034	3120

19) höhe ID . . . durch GP   21) mit *fehlt*

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
2	125	4343	14089	28735	47657	70212	95815	123780	153498	184361
	155	736	1254	1712	2103	2428	2700	2907	3045	3125
3	280	5079	15343	30447	49760	72640	98515	126687	156543	187486
	217	791	1303	1753	2140	2458	2720	2917	3057	3129
4	497	5870	16646	32200	51900	75098	101235	129604	159600	190615
	275	846	1354	1796	2176	2488	2739	2932	3067	3132
5	772	6716	18000	33996	54076	77586	103974	132536	162667	193747
	336	899	1400	1835	2207	2519	2762	2949	3075	3135
6	1108	7615	19400	35831	56283	80105	106736	135485	165742	196882
	394	950	1443	1873	2242	2552	2785	2966	3083	3139
7	1502	8565	20843	37704	58525	82657	109521	138451	168825	200021
	453	1002	1492	1915	2275	2583	2812	2985	3091	3140
8	1955	9567	22335	39619	60800	85240	112333	141436	171916	203161
	512	1055	1532	1952	2307	2605	2833	2999	3102	3139
9	2467	10622	23867	41571	63107	87845	115166	144435	175018	206300
	569	1106	1579	1991	2339	2634	2853	3008	3108	3139
									100	209439

Diß Täfelin brauche also / wann du hast von dem Kugelschnitz HDKI, seine höch DI, vnd den halben diameter zur Kugel DA oder HA, inn deinem fürhabenden Maaß / so setze zwo nullen zu der höch DI, was kompt / das dividir mit HA, das facit bekompt alsdann nicht vber zwo gantze ziffer / da such die zehener oben im Täfele / die zahl aber vnder zehen such zur lincken abwärtz / so findestu im Creutzwege den Leib deß Kugelschnitzes sampt der differentz zwischen zwoen gantzen zahlen / durch welche man partem proportionalem auff den Bruch [1] suchet / so einer fürhanden. Multiplicir hernach den gefundenen Leib inn die Cubiczahl von HA, vnnd schneid vom facit fünff ziffer hinten ab / so hastu wie groß dises Schnitzes Leib sey in deiner fürhabenden Maaß.

Zum Exempel / die höhe sey 1 / der halbe diameter 41 / setze zwo nullen zu 1 vnnd dividir was kompt / mit 41 / so kompt dir 2(439 / suche oben im Täfelin 0 (dann du hast nur eine ziffer gantzer zahlen) / vnnd 2 zur lincken / so findestu du den Kugelschnitz 125 vnnd die differentz 155 / darvon auff den Bruch mit (439 bezeichnet / vngefehrlich 60 kompt: wirt also der schnitz 185 / das multiplicir mit der cubiczahl von 41 nemlich mit 68921 / vnnd würff die 5 letzte hinweg / so findet sich 127(5, sovil ist deß leibs vom kugelschnitz in deinem Maaß.

Auß Epis. 1. 39. Von zerschnittenen gleichen vnnd Ablengen Kugeln / item von Conoidibus.

Zerschneid eine Kugel wa du wilt mit einer geraden fläche / so gewinnet sie einen Circkelrunden schnitt. Zerschneide die ablenge Kugel gerad neben ihrer Axlini / so gewinnet ſie einen ſolchen Schnitt / wie der Kegelſchnitt geweſt / nach welchem ſie gedräet worden / nämlich demſelben ähnlich.

Zerſchneide die Ablenge / oder Gedruckte Kugel / oder die Conoidea, wie du wilt / nur das die fläche gantz durchgehe / ſo wirt der Schnitt ein ablenger Circkel ſein / doch von vnderſchidlichen Sorten.

40. Von Ablengen Kugelſchnitzen.

Auß Epis. 2. In der 6. Figur am 32. Blat.

Wann die Ablänge Kugel gerad geköpfft wirt / ſo thut man jhme durchauß wie bey No. 38. gleich als wann LD der lengere diameter oder Axlini wäre / vnd BC der kürtzere: allein das man die linien nicht auß den Bögen nemen kan / ſondern man muß ſie meſſen mit einem instrument, wie hoch nemlich ID, oder wie lang HK ſey.

Wann aber der Schnitt ſich lähnete vnnd die Axlini DL ſchlims träffe / müſte man baide Schnitze auff jhre böden ſtellen / vnnd zwiſchen zweyen gleichſchwebenden Feldern (als da ſeind die zwey Bretter inn einer Preß) einſetzen / zu erkundigen wie hoch ein jeder wäre / baider höchinne zuſamen geſetzt / geben mir hernach einen diameter etwas kürtzer dann die Axlini: mit dem man hernach calculiren müßte / † anſtatt der lengſten = oder Axlini.

41. Von ſchnitzen deß Conoidis Parabolici.

Auß Epis. ad Th. 15.

Wann du diſe Figur köpffeſt nach der Hand / wie es gereth / nur mit einer geraden fläch / zuwiſſen wie groß der Leib inn jedem Schnitz ſeye / ſchaw nur das du erlerneſt / wie lang der mittere abgeköpfft Graat oder Axlini ſey / er ſey jetz nach der geraden zwer oder ſchlims getroffen. Multiplicir die grätte / deß gantzen vnd deß Schnitzes / jeden in ſich ſelber / darnach die kleinere vierung multiplicir in die zahl / darinnen dir das gantze Conoides bekant / was kompt dividir durch die gröſſere vierung.

Zum Exempel. Ein Conoides wege 54 pf. vnnd ſey der Graat alſo getroffen / das 2 von 5 ſtucken hinweg gehawen ſeyen. 2 mal 2 iſt 4 / vnnd 5 mal 5 iſt 25 / multiplicir 4 in 54 kompt 216 / das dividir in 25 kompt 8 vnnd ſchier 2 drittheil / ſovil wigt der abgehawene Schnitz.[1]

36 42. Wan ein ſtuck von der Kugel mit mehr dann einem Schnitt herauß geſchrottet wirdt.

Auß dem Coroll. 1. In der 6. Figur am 32. blat.

Das könten wir Oeſterreichiſch ein Spältl haiſſen / wie die Apffel vnd Biren ſpältlen geformiret ſeind. Wann die Schnitte in einem diameter DL zuſamen gehen / wie alsdann dem mitteln Circkel BC geſchicht / oder auch dem gantz runden Feld oder ſchelffen vmb die Kugel auſſen herumb / alſo auch dem Leib oder innerlichen Raum / bedarff nicht viel rechnens: wann aber nicht baide Schnitz auff den diameter oder innern graat hinein gehen / da ſchreibt Lucas nichts darvon.

Auß dem Coroll. 2.

43. Einen Riemen oder Gürtl vmb die Kugel herumb / nach jhrem Raum oder Leib zumessen.

Bedenck das die Kugel oben vnd vnden geköpfft / oder baide Schnitze HKD vnnd MNL jhr abgenommen / vnnd hernach noch auß dem stumpff HKNM der mittere Walger oder Cylinder, oder so die hütlin HKD vnnd MNL nicht gleich wären / der mittere Kegelartige stock herauß geschelet werde / alsdann bleibt erst die Schelff / Riem oder Gürtel HM, KN. So such nun den Leib baider Schnitze / vnnd den Leib der innern Wellen / nimb alle drey von dem Leib der Kugel / so bleibt dir der Leib an solchem Riemen.

Durch N. 37. 38 vnd 24.

Zum Exempel / wann der Bogen DK so groß bleibt wie oben No. 37 vnnd 38. so ist der Schnitz HKD dannen auch bekant / vnd MNL ist hie gleich soviel / vnd baide zusamen 283171 00000 00000. Das zeuch ab von der gantzen Kugel 4 18879 02047 86301. So bleibt der stumpff HKNM 1 35708 00000 00000. Nu seind HK vnnd MN gleichschwebende Circkelrunde Böden / derhalben stecket zwischen jhnen in disem stumpff drinnen ein gerader Walger / zweymal so hoch als IA, die ist droben geweßt 21951 / ist derhalben dises Cylinders höch 43902 / die multiplicir nach der 24. Lehr / in den Boden HIK, droben No. 37. zufinden / oder multiplicir nur den Leib deß Kegels HKA mit 6 / so kompt dir der Wellen Leib 1 31278 00000 00000 / den zeuch ab vom gefundenen stumpff / da wirt dir bleiben die Gürtl vmb jhne her / 4430 00000 00000 / oder die letzte 13 ziffer hinten hinweg geworffen / noch 4 thail vnd 2 fünfftheil von 419 thailen der Kugel / das wär etwas mehr dann der hunderteste theil der Kugel.

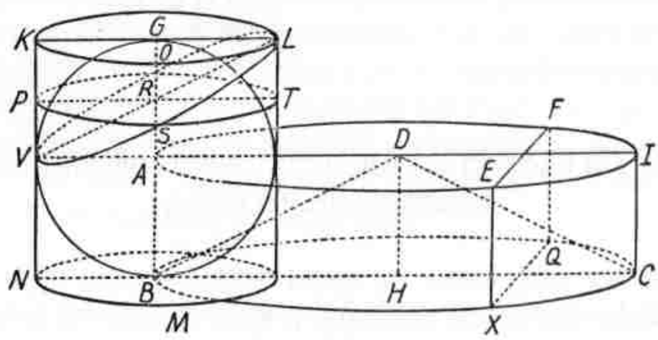
Wären aber die Hütlin oder Schnitze nicht einerley grôß / vnnd also die Gürtl oben enger dann vnden / da mustu zuvor auß folgenden Lehren den Kegelstock lernen rechnen / welcher vnter einer solchen Gürtel stecket.

Auß dem 17. Th.

44. Von Spalten oder Scheittern auß dem Walger oder Seulen: jtem von Röhren.

Wann sie gerad abwertz gespalten werden / das also das Beihel (oder der Schnitt) durch FOXQ dem innern Graat oder Axlinien DH gleich laufft / wie alsdann dem

Die 8. Figur.



Boden ¹ BQCX geschicht / also auch dem gantzen Leib oder Raum BAIC. Ist der boden halbirt / so ist die gantze Wellen halbirt / vnd so fortan / bedarff nicht vil *37*

14) strumpff 19) 4430 60000 00000

rechnens. Doch Multiplicir den abgeſpaltenen Circkelſchnitz QCX am Boden in das gantze Corpus oder Gewicht BAIC, vnd dividirs mit dem gantzen Boden BQCX.

Nicht anderſt helt es ſich auch dann zumal / wann der Schnitt nach der Wellen abwärts Circkelrund iſt / wie in einem außgeborten Teichel / oder bleyenen Brunnenröhren oder runden Kaſten / Mörſer oder ſtuck Geſchützes / wann es ab vnd ab gleiche dicke hette.

Zum Exempel es ſtünde ein hültzener rundholer ſtifel im Waſſer / eines Schuchs weit offen / der hette vnden am Boden ein rundes loch eines Zolls weit / das gieng inn eine Röhren / in die höch gerichtet. Es wolte aber ein vnerfahrner jhme fürnemen / das Waſſer in die höch zudrucken mit einem Centnerſtein oben in den Stifel auff das Waſſergehüb hinein geſencket / vermeinend / das gantze Waſſer im Stifel ſolte dem Gewicht weichen / vnnd inn die höch vberſich gehen / der kan auß diſer Lehr ſoviel rechnen / daß er nicht vber 20 lot Waſſers vber deß Gewichtes höch hinauff bringen wurde. Dann der Stifel iſt am diameter ſeiner höle / 12 mal weiter dann ſein loch am Boden: derhalben hat der Boden in deß Stifels höle 144 mal mehr Felds dann das Feld im loch. Derowegen auch das gantze Corpus deß Waſſers inn dem Stifel / geformirt wie eine runde Wellen / wirt 144 mal mehr ſein / dann das Corpus deß Waſſers auff dem loch / welches auch eine runde Wellen iſt / wie das loch Circkelrund iſt: nun ligen 100 pfund auff dieſen 144 ſtucken deß Bodens oder darauff ſtehenden Waſſers: wirdt derhalben auff jedem ſtuck / vnd alſo auch auff dem Loch vnd darauff ſtehendem Waſſer / mehr nicht dann vngefahrlich 20 lot gewichtes auffligen. Wann aber das Waſſer inn der Röhren nit in die höch gehen darff / ſondern ſich in der nidere außgüſſen kan / ſo verſtehet es ſich ohne rechnung / das es vom Gewicht gantz hinauß gedrucket werde / doch nicht geſchwinder als ſonſten auß einer Röhren nur eins Zols weit / wann nur 20 lot darauff lägen.

Ein gleiches. Ich hab einen Würffel auß Bley eines Zolls lang brait vnd hoch / darauß ſoll gegoſſen werden eine Bleyene Röhren auch eines Zolls dick nach dem diameter, aber nach dem Leib in der runde ein zehendtheil Zols dick / wie lang wirt ſie werden mögen. Hie iſt der Boden am Würffel das Maaß / vnnd iſt eine vierung / eines Zols lang vnd breit. Derhalben ein Circkel auch eines Zols brait / wirdt an der Feldung haben ailff 14 theil Feldes / nach der 14 Lehr: weil aber die höle am Rohr vmb zwey 10te theil eines Zols weniger haben ſoll / dann die euſſere rundung deß Rohrs / nemlich nur acht 10theil oder vier 5theil Zolls / ſo ſuch auch diſes engern Circkels Feldung nach der 13 Lehr / nämlich quadrir vier 5theil / thut 16. 25theil. Wann dann deß diameters vierung 1 / gibt ſeinem Circkel ailff 14theil Feldes / ſo wirt deß kleinern diameters vierung 16. 25theil / ſeinem Circkel geben 176.350theil Feldes. Diß iſt das außgenommene Feld in der Röhren / ſo nimb es von dem Feld 11. 14 theil / das iſt von 275. 350 theil hinweg / bleibt 99. 350 theil / ſoviel iſt deß rund außgenommenen grundes / auff welchem die Röhren ſtehet. Nu haſtu in diſer 44. Lehr vernommen / das ein gerader Würffel vnd ein gerade Wellen auß jhme Circkelrund herauß geſchnitten / item ein dickere Wellen / vnnd ein ſchmälere auß jhr geſchnitten / ſich nach dem Leib zuſamen halten / wie ſie ſich nach dem Feld am Boden vergleichen. Folgt alſo / das ein ſolches Rohr nicht höher dann einen Zoll ſey / von dem für-

33) vier 4theil

habenden Würffel auch 99. 350 theil. Das ist / wann der Würffel getheilt wurde in 350, so giengen deren 99 auff ein Rohr / eins Zolls hoch. Wann dann 99 geben eins Zolls lenge / so werden alle 350 ein Rohr geben vierthalb Zoll lang ungefahrlich.

Was ich hie von der Figur deß Würffels gesagt / das verstehe auch vom Gewicht. Dann nach Villalpandi anzeigen / sol ein solcher Würffel von Bley / der eines Lintzer Zolls lang breit unnd hoch / wegen 6 Uncen unnd drey quintlen / das wäre beynahe ein drittheil eines Lintzer pfundes. Gebe also ein Lintzer pfund eine Röhren 10 Zoll lang / wann sie geformirt wäre wie obstehet.[1]

Auß dem 17. Th.

45. Von Trümmern einer jeden Seulen.

In der 8. Figur am 36. Blat.

Wie dem innern Graat GB geschicht / oder der Axlinien / also auch dem Leib KLN: nur das der Schnitt LSV oder TSP auff baiden seyten an der runden Feldung außlauffe / und nicht durch den einen Boden gehe. Sonsten mag er schlims / wie LV, oder nach der geraden zwer / wie TP, durchgehen: ist alsdann die mittere lini oder Graat halbirt / so ist das gantze Corpus halbirt / unnd so fortan. Derohalben so multiplicir das trum GR vom Graat GB, inn das gantze Corpus KLN, was kompt / das dividir durch den gantzen Graat GB so hastu den Leib am trum KVL oder KPTL.

Auß dem 17. Th.

46. Zu rechnen das Zwerstuck (Speidel / Keil / oder Wecken) von einer jeden runden oder solchen Seulen die gleichschwebende Flächen oder Felder hat.

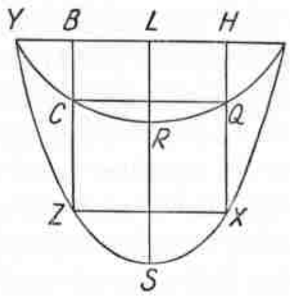
Die Griechen haissens vom Sägen Prisma, weil man mit hawen oder spalten einen solchen zwerschnitt von unden zur rechten biß oben zur lincken nicht verrichten mag / sondern man muß die Saag brauchen und mit gantzem fleiß ziehen. Es ist aber ein solches zwerstuck (das unten den einen Boden behelt / oben aber mit einer Schneid gleich am obern Boden hinauß laufft / und jhne doch gantz lesset) gerad das halbe thail von der Seulen / dann es werden zwey stuck auß der Seulen / und baide stuck einander ehnlich und gleich. An dem stuck von einem zerschnittenen Walger / ist die Schneid rundlecht / wie hie bey YZSX zusehen: ein solcher Schnitt / wie No. 29. gemeldet / ist ein Ablenger Circkel / als hie MSN, verstehe unten auch gantz wie oben / wann der Walger unten erlengert wäre.

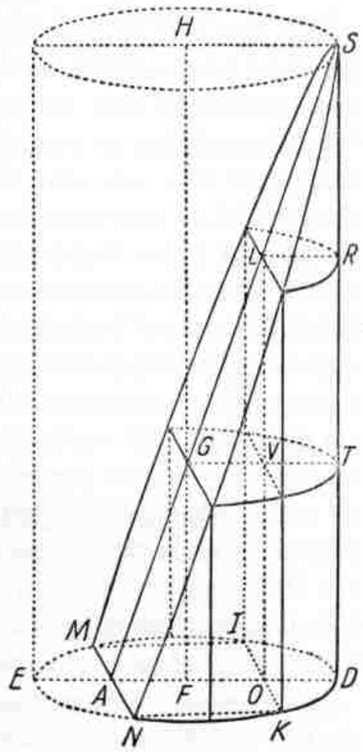
Zu rechnen das Corpus vom zwerstuck / multiplicir die Feldung deß Bodens in seine halbe höch.

Zum Exempel / die Tonaw sey oberhalb deß Kalenbergs 6 Claffter tieff / und man wolte von unden hinauff gegen dem Kalenberg einen Graben führen 10 Claffter weit / der oben 2 Claffter tieffer sey dann die Tonaw / damit sie oben einen Fal hinein gewinne / und hernach das Land hinab nach Wienn lauffe / zurechnen wie groß der keil / oder wievil Erden sey / die man auß einem solchen graben herauß nemen sol: da muß ich wissen wie weit ich zugehen habe / biß ich gegen Wien 8 Claffter in die nidere komme: setze es wäre ein halbe Teutsche Meilen / gerades unnd nicht bürgiges feldes / oder 2000 Claffter / dann fast sovil falt ein wasser / das

3) 3 vierthalb 38) niderr . . . habe Teutsche

füglich iſt zuſchiffen / nemlich 8 Claffter in 1600 Claafftern: fellet es höher ſo iſts geferlich: laſſe es aber doch gar 2000 Claffter ſein / damit es weniger falle. Hiermit formir ich mir ein halbe Seul 10 Claffter breit / oben 8 Claffter hoch / 2000 Claffter lang / die vnten auff ein Schneid hinauß lauffe / vnd ſich alſo verliere. Such das feld deß Bodens / 10 mal 2000 iſt 20000 / diſen Boden in die höch 8 halb / nemlich in 4 / macht achzig tauſent Claffter lang breit vnnd hoch: das were mit zwey tauſent Mannen inner Jahrs friſt noch wol zubrechen vnnd zuraumen / dann ich achte das ein Mann inner 8 tagen mit einer Claffter wol möge fertig werden. Doch ſtehet es auff dem abmeſſen / ob der arbeit weniger oder mehr werden möchte.[1]





Die 14. Figur.

39 Hieher gehört die gantze hochnotwendige rechnung auff die Schantz- vnd Lauffgräben / auffgeworffene Schantzen / halbe Monde / vnd was dem anhengig: dann es leſſet ſich in derſelben materi der Leib nicht alſo leichtlich mahlen vnd † reiſſen / wie die pianta: es bedarff aber auch daſelbſten keiner mehrern Kunſt / den Leib oder die Schitte zurechnen / dann allein ſovil / das man erſtlich alle ſtuck an der Schantzen recht verneme vnnd nennen lerne / wie die Kriegsleuthe ein jedes nennen / fürs ander / das man die fürgebne Schantzen wiſſe zutheilen in jre Geometriſche ſtucke / dann ein Schantz iſt zuſamen geflickt (ſo zu reden) auß Geometriſchen Seulen / zwerſtucken / vnd zugeſpitzten Seulen / oder Trümmern von denſelben / vnd leſſet ſich gantz vnd gar in diſe formen eintheilen / vnnd alſo per partes rechnen.

Weil aber mein fürhaben in dieſem Buch nicht iſt / von Veſtungen zuſchreiben / dann es gehört nicht nur das Schüttmeſſen / ſondern auch anders meſſen vnd formiren darzu; als wöllen mir Exempla dannenhero / zu erklerung meiner jetz fürhabenden regeln zu weitleuffig ſein.

47. Von kleinern Walger-Spältlin oder Schnitzlein.

Auß dem 17. Th.

Hie beginnet vns die Kunſt zuſchwinden / da wir deren am nöttigeſten bedürfftig wären: dann es ligt viel an dergleichen Schnittlein / als zum Exempel / Ich hette ein gantzes zwerſtuck von einer Wellen / das würde aber noch einmal nach der geraden zwer zerſchnitten / nämlich durch NKDIMA, oder durch GT, oder durch LR, alſo

1) im 1600 37) *(Randnote)* 7. Th.

das alle Schnitte rechtwinckelig auff den runden Rucken DS zutreffen / wußte gern / wie groß ein jedes wäre / gegen der gantzen Wellen.

Wann nun vnden der Circkelrunde Boden gantz / so ist bey No. 46. gesagt / das er gerad das halbe theil sey von einer gleichhohen Wellen. Wann aber der Schnitt gleich ein halber Circkel wirt / als bey GT zusehen / so helt sich der abgestutzte Güpffel GTS gegen dem gleichhohen Cylinder YT, wie 14 gegen 66 vnd gegen dem halben † Cylinder HGTS wie 14 gegen 33 / also das dem vbrigen stuck vom halben Cylinder HGS die 19 bleiben / vnnd den andern halben Cylinder YHG am gewicht 33 darzu geschlagen / so wirdt das grössere stuck YSG deß Cylinders (so da gleich ist dem stumpff GTA, vnden gantz zuverstehen) die 52 darvon bringen / hab also durch GT etwas mehr dann das vierte theil herab geschnitten / da doch der Boden nur halbirt worden. Vnnd diß gilt allwegen / der zerschnittene Cylinder sey hoch oder nider.

Wäre aber nicht der halbe Circkel / sondern ein kleiners stuck LRS abgestutzet / da kan ich mit der Kunst nicht mehr gerad zugehen / sondern ich muß thun als wann in einem jeden solchen stuck / die höch TS gleich wäre dem vmbkreiß am gantzen Circkel deß Bodens MDN, in die geräde außgestreckt / alsdann so muß ich rechnen den Circkelschnitz IDK, vnd wann dann eine Kugel wäre / deren halber diameter wäre FD oder GT, da muß ich suchen / wie groß jr Gürtel sein werde / welche die braitte IK hat. Dise Gürtel ist gleich dem spalt LVTS. Hernach muß ich rechnen den spalt LVTR, als ob TS nochmahlen dem vmbkraiß deß Circkels MDN gleich wäre / disen spalt LVTR von LVTS abgezogen / so bleibt mir das schnitlin LRS vberig / verstehe wann TS dem außgestreckten Circkel MDN gleich ist. Wil ichs hernach auff ein jede höch TS richten / so muß ich sol'che fürgebne wahre höhe in das gefundene Corpus deß Schnittlins LRS multiplicirn, was kompt mit dem außgestreckten Circkelkraiß TS dividiren, da bleibt mir erst der gerechte Raum oder Gewicht deß Schnittlins in der rechten fürgebnen höhe deß Schnitzes GTS. Dann diß ist sonsten richtig; ein jeder solcher Walgerschnitz / wie MSDN, zerschnitten von einer Schneide an / als von MN, gegen dem runden rucken SD, als gegen T, gewinnet am Gewicht eben solche thail oder Schnittlin / als an den Lengen deren Rücken ST, vnd TD, an disen Rücken hastu das maaß zum innerlichen Raum oder Gewicht richtig.

Ex Th. 17 et ejus correcturâ in Erratis.

Zum Exempel / so sey vns fürgelegt ein Cylinder oder Walger YT gleich so hoch als breit / nemlichen 200000 / diser sey erstlich zerschnitten von dem Güpffel S nach dem Centro deß Bodens G, also das YGS, wie jetzo gemeldet / sey 52 / vnd GTS 14 / disem aber sey oben nach der geraden zwer abgestutzet ein Schnittlin LRS so groß / das sein halbe braitte LY oder OI, OK am Boden seye 21951. So setze nun die Wellen sey nicht eben so hoch als brait / sondern sey so hoch als lang der vmbkraiß am Boden ist / vnnd dise 21951 seyen die halbe braitte einer Gürtel vmb die Kugel herumb / deren diameter halte 200000. Such den Leib von diser Gürtl / nach der 43. Lehr / alda er allbereit gerechnet stehet / vnd ist 4429 etc. mit noch 10 ziffern. So groß ist nun der Spalt LVTS.

Ferners vnd weil gesetzt ist worden / die höhe TS sey gleich dem außgestreckten Circkel / dessen halber diameter ist GT, demnach so muß die höch VL oder TR denjenigen außgestreckten Circkel gleich gesetzt werden / dessen halber diameter ist GV oder FO. Nu waiß ich auß dem Canone, wann OI ist 21951, das alsdann FO sey

97561, das multiplicir ich nach der 12. Lehr / in den vmbkraiß deß grössern Circkels / vnd wirff die 5 letzte ziffer hinweg / findet sich alßdann der vmbkraiß deß kleinern Circkels / dessen halber diameter ist FO, nämlich 612994, so lang muß ich die höch VL oder TR setzen. Nu multiplicir ich nach der 24. Lehr / dise höch in den Boden VT, oder IKD, oder HYR (dann sie seind alle gleich) diser Boden oder Circkelschnitz ist droben bey No. 17 gefunden worden 71620000, so kompt mir für den Leib deß Scheitts oder Spalts LVTR 4390000000000, das nimb ich hinweg von LVTS so droben gefunden worden / nämlich 4430 etc. so bleibt mir 4000000000000. Wann nun der fürgebne Cylinder oder Wellen die höch gehabt hette von seines Bodens vmbkraiß inn die geräde außgestreckt / wie wir bißhero haben setzen müssen / so wäre diß der Leib deß Schnittlins LRS. Weil aber die Wellen nur so hoch geweßt als brait / nämlich nur 200000 / so multiplicir ich diß in 40 etc. vnd dividir was kompt in den vmbkraiß 628 etc. kompt 13 etc. so groß ist jetzo das Schnittlin LRS nach der rechten fürgegebnen höch.

48. Vom Raum eines jeden Kegelschnitzes oder Spalts.

Auß dem 16. Th.

Was Kegelschnitze seyen besihe bey No. 29. Wann der Spalt durch den spitz gehet / wie alsdann dem Boden geschihet / also auch dem Raum oder Gewicht; da handele schlecht hinweg wie bey No. 44. In gleichem wann ein Kegel in dem andern darinnen steckete / so doch das sie baide nur auff einen spitz hinauß lieffen / so handele wie mit den Röhren bey No. 44. nur allein das du wol behaltest / das bey den Kegeln nicht die gantze höch / wie bey den Wellen / sondern nur das dritte theil von der höch gebrauchet werde.

49. Vom Kegeltrumm vnd Stock wann der Kegel auffrecht geköpfft ist.

Wann der abgestutzte güpffel auff seinem Schnitt recht auffgericht stehet / nit
41 weniger dann der gantze Kegel / so meß nur schlecht | baide diametros an Böden / multiplicir ein jeden in sich Cubisch / das ist zweymal. Dann so multiplicir den Raum oder Gewicht deß gantzen in die kleinere Cubiczahl / vnd dividir / was kompt mit der grössern Cubiczahl / so kompt dir der Leib am abgehawenen Trumm / den zeuch ab vom gantzen Kegel / so bleibt dir der vndere Kegelstock.

Exempel / deß Kegels diameter am Boden sey 3 / am Schnitt aber 2 / vnd der gantze Kegel wege 20 pf. 2 mal 2 zweymal ist 8 / diß mit 20 pf. macht 160 / 3 mal 3 dreymal ist 27 / damit dividir, so kompt dir beynahe 6 pf. so viel ist abgehawen / bleibt am stock etwas mehr dann 14 pf. Nicht anderst thue jme / wann du etwa baide höchine füglicher haben kanst / oder baide Lähne / acclivia latera. Oder nur gerad den Stock zu rechnen / so zeuch ab die kleiner Cubiczahl 8 von der grössern 27 / bleibt 19. Jetzo multiplicir 19 in das gantze Gewicht 20 / kompt 380 / das dividir durch 27 / so kompt das Gewicht deß Stocks 14 / vnd zwey 27 theil.

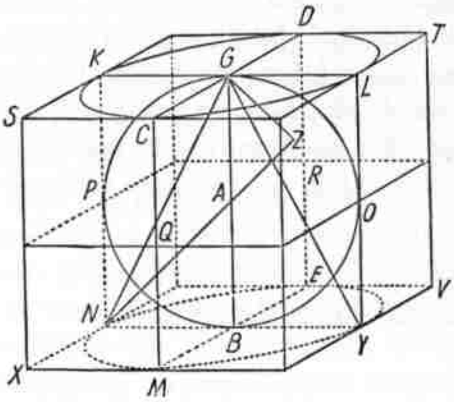
37) 38 *statt* 380

Ex opinione Th. 16.

50. Wann der Kegel schlims / doch durchauß geköpfft ist.

Verstehe wann das abgestutzte Trumm / auff seinen schnitt gestelt / den spitzen obersich vnnd nicht vndersich kehret: Alsdann / so deß Kegels boden auch getroffen wäre / müste man jhn erlengeret verstehen / biß dahin / da der Schnitt gantz durch gehen mag. Nu dieser abgehawene güpffel / als hie GNA, hat vngleiche lähne / dann GN ist am lengsten / gegen vber aber bey Z ist sie am kürtzesten / nim das mittele zwischen baiden / vnd rechne dar=mit / als wär es ein gerades Kegeltrum / wie bey No. 49 gemeldet / an stat deß schlimmen GNA, dann baide sollen ein=ander gleich sein. Wiltu nicht trawen (wie ich dich dann noch zur zeit nit auff alle scherffe zuversichern habe) so such das Feld am Schnitt NA nach der 15. Lehr / meß auch die höch GZ zwischen zweyen gleichschwebenden Brettern / vnd multiplicir das dritte thail von derselben in das Feld am Schnitt oder Boden NA, also thue auch mit dem Circkelrunden Boden NY deß gantzen Kegels NGY, vnnd mit seiner höch GB, so findestu in baiden Multiplicirten zahlen die vergleichung deß gantzen NGY vnnd deß trums G, durch den Schnitt NAZ abgestutzet.

Die 9. Figur.



Auß 16. Th. partis 1. vnd 9. Th. partis 2.

51. Den Stock von einer jeden zugespitzten Seulen / Pyramide oder Kegel / wann sie sich gleich naigen / aber doch mit einem Schnitt / dem Boden gleichschwebend / geköpfft seind.

Da kanstu füglich die diametros vnd seitten / baids vnden deß Bodens / vnd oben deß Tisches mit einem maßstab messen. Dann so rechne durch No. 14. 15. 16. baide Felder auß jhren diametris oder vmbzeunungen / multiplicir die Felder in einander: was kompt / darvon such die Wurtzel / bringe dise vnnd baide Felder in eine Summen / vnd multiplicir solche in das dritte theil von der höch deß stocks (die du auch messen must) so kompt dir die Fülle oder der Leib im Stock.[1]

Ein Stock 5 schuch hoch / nach dem seiger / hat vnten ein ablengen Boden 42
8 schuch lang vnd 6 brait / oben hat er einen gleichförmigen oder ehnlichen Schnitt 4 schuch lang vnd 3 brait: 6 mal 8 ist 48 / soviel gevierter Schuch sein am Boden / 3 mal 4 ist 12 / sovil sein gevierter Schuch oben am Schnitt oder Tisch. 12 mal 48 ist 576 / hiervon die wurtzel ist 24. Setze 12. 24. vnd 48 zusamen / so werden es 84 / diß in das drittheil von der höch der 5 schuchen / oder das drittheil von 84 nämlich 28 in 5 / macht 140 Cubic= oder gewürffelte Schuch / sovil ist am Stock.

52. Behende vergleichung deß geraden Kegelſtocks mit der Wellen oder Walger.

Ex Cor. 1. Th. 17.

In einem jeden Kegelſtock ſtehet ein Walger gleicher höch / vnnd hat den obern Boden oder Tiſch mit dem Stock gemein / alſo das der Stock die wellen oder walger gleichſam bekleidet / mit einem Glockenweiten Rock.

Wann du nun haſt die diametros von baiden Böden / zum Exempel 9 vnd 15 / ſo multiplicir den kleinern 9 in ſich ſelbs / kompt 81 für den Walger / multiplicir jn auch in den gröſſern 15 / kompt 135: multiplicir ferners den vnderſcheid 6 inn ſein drittheil 2 / macht 12 / das ſetze zu 135 / kompt 147 für den Stock. Wann nun der Walger wigt 81 pf. ſo wigt der Stock 147 / vnd der Rock vmb den Walger 66. Wäre das Gewicht deß Walgers anderſt / ſo ſuch durch detri, wievil Gewichts in der hie gefundenen proportz auff den Stock komme.

Zu wiſſen den Rock gerad zu; von dem vnderſchaid baider diametrorum, zum Exempel 19 vnd 22 / welcher iſt 3. nim das drittheil 1. ſetz es zum kleinern 19 / das macht 20. das multiplicir in den gantzen vnderſchaid 3 / bringt 60 / ſovil iſt deß Rocks / wann die Wellen iſt 19 mal 19 / das iſt 361: leg hernach der Wellen 361 jren Rock 60 an / ſo machts den Stock 421. Gilt gleich Walger vnd Stock mit einander ſeyen hoch oder nider / nur das eins ſo hoch ſey als das ander.

53. Von rund außgenommenen Stucken oder Rinden deß Kegels vnd deß Walgers.

Ex Coroll. 2.

Wie bey No. 46 gemeldet / wann ein Cylinder oder Walger mitten auß dem andern herauß genommen wirt / ſo bleibt ein Figur gleich einem Rohr / oder Rinden / diſe leſſet ſich durch ein Kegelrundes Feld noch einmal außſchelen / ſo das zwo Rinden drauß werden / die euſſere vnden ſchneidig / oben brait / zum Walger gehörig / die innere vnden brait oben ſchneidig zum Kegel gehörig / zuvor No. 52 hat ſie der Rock geheiſſen.

Seind bald zurechnen: laß den innern diameter ſein 5 den euſſern 11 der vnderſcheid iſt 6 deſſen ein 3theil 2 zu 5 geſetzt macht 7. ferners 2 drittheil 4 zu 5 geſetzt / macht 9. multiplicir beide 7 vnd 9 in den gantzen vnderſcheid 6 / ſo kompt für den Rock 42 / für die euſſere Walgerſchelff 54 / ſie ſeyen hoch oder nider.

Vnd wann ſie auch gleich nicht zwiſchen zweyen gleichſchwebenden Böden ſtünden / ſonder der obere Tiſch wäre ableitig / ſo braucht man doch die kürtzere diametros am Schnitt / vnd rechnet mit denen auch recht: allein zuwiſſen daß das Kegelfeld / welches dannzumal Rinden vnnd Rock von einander ſchelet / nit recht rund / ſonder von einem getruckten Kegel ſey / der eine andere Axlini hat / dann die Wellen.

54. Kegelſtöcke vndereinander zu vergleichen.[1]

Ex Coroll. 2.

43 Wann baide Stöcke gleiche Böden haben vnden vnnd oben / ſo helt ſichs mit jhrem Raum / wie mit baiden höchinen / Multiplicir deß bekanten raum in deß vnbekanten höch / was kompt dividir mit deß bekanten höch / ſo kompt dir deß vnbekanten

Raum / Gewicht / Leib / oder Fülle / nicht anderſt als wären es gantze Kegel auff einem Boden / oder gantze Walger; ſo helt ſichs auch mit den Rinden vnd Röcken.

Ex No. 5. partis 3.

55. Wann der Kegel neben dem Spitz auff das runde Dach / doch gerad nach der Axlini hinab getroffen iſt.

Hie ſtehen wir gar an mit der Kunſt / könden noch nicht rechnen wie groß jeder Schnitz iſt / wann der abgehawene Schnitz (an welchem der Gipffel oder Spitz geblieben) auff ſeinen Schnitt geſtelt / den rucken nicht vom Spitz vnderſich ſencket / ſondern eintweder gleich ligt / oder der Spitz niderer iſt. Wär vns doch hoch vonnöthen das wir nur dieſe Schnitze wiſſen möchten / wann das Beihel oder der Schnitt der Axlini gleich nebens gelauffen / müſſen noch zur zeit von auſſen herumb gehen wie die Katz vmb ein haiſſes Koch. Vnd erſtlich wann der Boden eines ſolchen Schnitzes (der iſt aber ein Circkelſchnitz) in das dritte thail der höch deß Kegelſchnitzes multiplicirt wirdt / ſo bekompſtu etwas wenigers / dann deß Schnitzes Leib in ſich helt: diſe rechnung fählet ſovil weniger / ſo näher man mit deß ſchnitzes Boden an einen halben Circkel raichet. Hingegen wann der Boden ein gar ſchmales Schnitzlin iſt / ſolte es am meiſten fählen / iſt aber alsdann der gantze Schnitz klein / vnnd derohalben auch der fähl vnachtſam.

Fürs ander wann auß diſes Schnitzes boden vnd höch ein Wellenſchnittlin wie No. 47 / gerechnet wirdt / gleich als wären baide deß Kegels vnnd der Wellen ſchnitze (ſo gleiche höche haben) auch am Leib einander gleich / ſo geſchicht der ſachen zuvil / vnnd fählet am meiſten / wann der Boden ein halber Circkel iſt / dann das Wellenſchnittlin iſt alsdann 14 / der halbgeſpaltene Kegel nur 11 / da doch diſe rechnung ſagt / ſie ſeyen einander gleich: je kleiner aber der Boden / je weniger diſe rechnung fehlet / vnd je gleicher diſe beede ſchnitzlen einander werden.

Merck wie oben / durch den Schnitt gewinnt man einen Schnitz / vnd diſer Schnitz hat vnd behelt ſeinen Schnitt / das iſt / das zeichen deß beſchehenen ſchnits nämlich einen flachen boden / mit einem krummen bogen vmbzogen.

Fürs dritte ſo wil es das anſehen gewinnen / man müß jhme alſo thun. Demnach ein ſolcher Kegelſchnitz am Schnitt ein furm gewinnet / die wir Hyperbolam haiſſen / wie No. 29. gemeldet / als ſolle man das Feld in diſem ſchnit in einen Triangel verwandlen / der eine Boden lini habe / ſo lang als die Hyperbola hat / diſer Triangel wirdt alsdann vber die Hyperbolam oben auß gehen. Wann dann das dritte theil der höch von diſem Triangel in den flachen Boden deß Schnitzes multiplicirt wirt / alsdann ſoll kommen deß ſchnitzes Leib. Wie aber das Feld in einer Hyperbola zumeſſen ſey / das lehret Archimedes im buch quadratura Paraboles, in der vneins erſten / vnd eins mehr dann der letzten proposition: beſihe No. 18. †

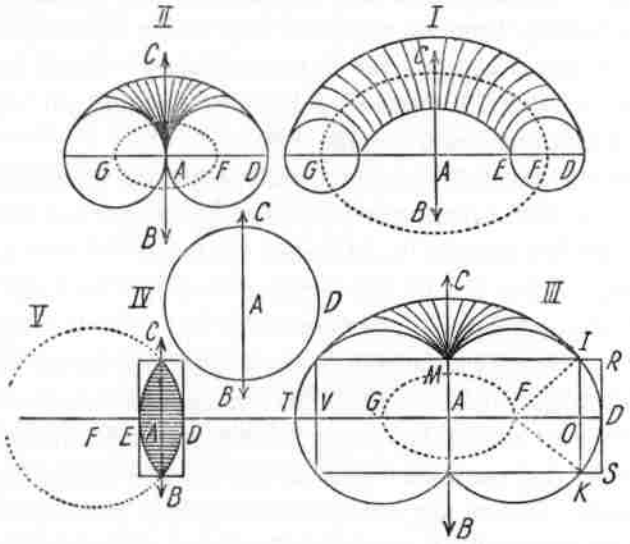
Ex Suppl. Th. 18.

56. Allerhand Ringe nach jrem Leib oder Gewicht kunſtlich zumeſſen.

Du muſt wiſſen was der Ring inwendig am Schnitt für eine geſtalt gewinnen werde / ob ſie auch alſo | beſchaffen / das ein gerade lini durch das centrum gezogen / *44*
ſie in zwey gleiche ſtuck abtheile / deren das ein am ring gerad einwärtz / das andere außwärtz ſtehe: dann ſo es ein Triangel oder fünffeck oder ſonſten ein Figur von vngeraden zahlen wäre / ſo traw nicht / es lige dann der ring vmb vnnd vmb / auff

3) Tach 34) 65 *statt* 56

der einen seyten auff / vnnd recke ein schneide gerad übersich. Wann dann die Figur also recht geschicket ist / so such das Feld an deroselben / als hie bey No. I. das Feld



Die 11. Figur.

von ED, auß deß Circkels diameter, nach der 14. Lehr. Hernach misse deß rings baide braitten oder diametros, den innern vnd den eussern / durch welche erlerne baide vmbkraiß innen am Ring vnnd aussen / nach der 6. Lehr / oder messe sie gleich anfangs mit einem Faden / wann du kanst. Nimb das mittere von baiden vmbkraisen / multiplicirs inn das Feld am schnitt ED, so kompt dir der Leib deß gantzen Rings.

Ein Löwenkopff an einer Seulen / hette einen runden Eheren Ring im Maul eines Zolls dick / innen 8 Zoll weit / aussen 10 Zoll. Wievil Ertzes ist daran? ich wil setzen er sey nicht rund / sondern vierecket an der leng / von behendigkeit wegen. Demnach nun baide Weitine seind 8 vnd 10 / als ist das mittele 9 / wann dann 7 gibt 22 nach der 6. Lehr / so wirt 9 geben 28 vnd zwey 7theil / diß in einen gevierten Zoll multiplicirt / kommen 28 gewürffelte oder volle Zölle vnnd 2 sibentheil / soviel wäre am Ring wann er vierecket wäre. Nun er aber rund ist an dem Leib / so sprich durch die 24. Lehr / 14 gibt 11 / was 28? kommen 22 solcher Würffel vnd fast ein fünfftheil: soviel Ertzes ist am Ring.

57. Vom beschloßnen Ring vnd Kugel darinnen.

Ex Coroll.

Den beschloßnen Ring sihestu bey II. abgemahlet. Ist er nu rund / so Multiplicir das Feld am schnitt AD inn seinen vmbkraiß AD, so kompt dir sein Leib: daher dann volgt / das die Kugel von AD, die innen im Ring herumb lauffen mag / sey gegen eim solchen beschloßnen Ring / wie 7 gegen 33.

58. Zu messen ein Apffel- oder Quitten- oder Kürbisrunden Raum.

Als bey No. III. hie zu sehen. Da finden sich mehr dann ein Circkel (wie auch droben beim Ring) vnderschidlicher grösse / die müssen in zahlen gegen einander verglichen

4) welchen 8) Ehren

vnd nebens der Apffel inn zwey thail nach dem Sinn getheilet werden / inn den inwendigen Leib / vnnd in sein Gürtl aussen vmb jhne herumb: demnach so thue jhm also / messe den diameter oder die höch [1] deß Apffels / meß hernach die braitte oder weitte TD, die halbire / damit du wissest wie lang TA sey / zeuchs ab von der höch / so bleibt / wievil bey A abgehe / das es nicht ein gantzer Circkel; sovil nimb auch aussen hinweg / nämlich TV, demnach halbir die VA, vnnd mit dem halben diameter GA such seinen vmbkraiß GF, für eins.

Zum andern auß der höch TV oder DO, such das Feld am Circkelschnitz IDK, durch die 17. Lehr / das nimb doppelt vnd zeuch es ab / vom Feld am Circkel / so bleibt dir das abgestutzte Feld zwischen IK, MN vnnd den Bögen IM, KN, das multiplicir in den vmbkraiß GF (bey No. III. hie) so kompt dir wieviel der Apffel inwendig am Leib habe / zwischen den linien V vnd O, wär also noch vmb die eussere Schelff oder Gürtel zuthun / die braucht mehr kunst / dann sie muß nach zweyen stucken gerechnet werden. Erstlich mustu auch das Feld IKD multiplicirn inn den vmbkraiß GF. (Nota wann du zuvor wol berichtet vnd geübet bist / so kanstu baide bißhero gelehrte operationes vnder eins verrichten / nämlich also / das du droben den Circkelschnitz IKD nicht doppelt / sondern nur einfach von deß Circkels Feld abziehest / vnnd das bleibende inn den vmbkraiß GF multiplicirest / so kompt dir der Leib innerhalb der Gürtel vnnd diß erste stuck der Gürtel mit einander). Hernach anlangend das vberige stuck von der Gürtel / das ist gleich so groß als die Gürtel diser braitte vmb die Kugel / welcher halber diameter ist FD. Must also dise Kugelgürtel nach der 43. Lehr rechnen / vnd zu dem obigen setzen / darmit hastu den gantzen Apffel.

Ex Coroll. ad Th. 19.

Ex Coroll.

Nicht anderst handelt man mit einer Küttenrundung / allein das man zu deren brauche die Ablänge Kugel oder Ay / vnd zu einer braitten Kürbißrundung die getruckte Kugel.

59. Zu rechnen einen Citronenrunden Raum.

Auß diser Figur folgt die Faßrechnung zum guten thail / vnnd ist bißhero fast vmb dise zuthun gewest: wirdt gerechnet wie die Apffelrunde / doch kürtzer / nämlich also.

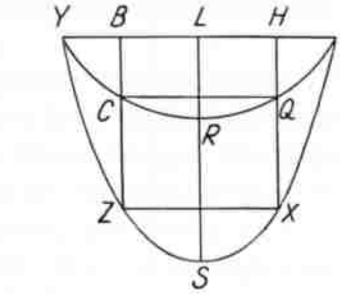
Besihe hie oben bey No. V. die Citronenründung CEB meß jhre lenge BC, vnd jhre dicke ED, vnd auß deren halben theilen EA vnd AC, such (nach der 10. Lehr) den diameter deß gantzen Circkels hie mit puncten fürgestelt / dessen halbertheil ist FD, darvon zieh ab DA bleibt FA, dessen vmbkraiß such auch / vnd multiplicir jhn wie No. 58 / inn das Feld am Circkelschnitz CBD. was kompt das behalt / für eins.

Biß hie die 11. Figur.

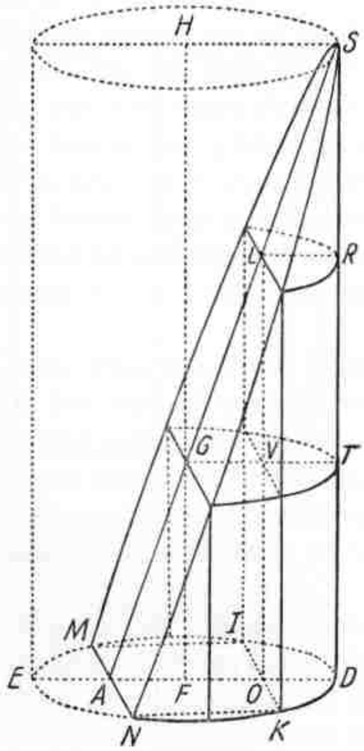
Zum andern such die gantze Gürtel vmb die Kugel / deren halber diameter ist FD, nach der 43. Lehr / dannen nimb hinweg was du erst behalten / so bleibt dir der Leib von der Citronenründung CEBD.

Inn der 14. Figur allhie sihestu einen Walgerschnitz MNDS, so groß als die Apffelrunde / wann der Circkelschnitz MDN gleich ist dem Circkelschnitz MND in der 11. Figur No. III. vnd die höch DS in der 14. Figur / dem vmbkraiß deß gantzen Circkels MDN gleich ist. Also ist auch das kleinere Walgerschnittlin LRS am Leib gleich der Citronenründung CEBD in der 11. Figur bey No. V. darumb ists auch einerley rechnung.[1]

46 Nimb das Exempel / deſſen wir vns bißhero gebraucht / ſetze die lenge CB in der 11. Figur vnnd No. V finde ſich 54 / vnnd ED 6 / das alſo CA 27 vnnd AD 3 ſeye: da findeſtu durch die 10. lehr den diameter 246 / halb 123 / vnd durch die 12. lehr / wann 123 wirt 100000 oder der gantze sinus, ſo gibt 27 den sinum 21951 auff 12 gr. 40 min. 51 sec. vnd AD 2439 / dis von DF 100000 genommen / bleibt AF 97561 / vnnd ſein als eines halben diameters zugehöriger vmbkreiß wie No. 47. iſt 612994. So findet ſich auch nach der 17. lehr / der Circkelſchnitz CBD 71620000. Multiplicir beide miteinander / ſo kompt dir 4390 0000 00000 / das behalt / für eins. Darnach ſo iſt ſchon bey No. 43 gefunden worden / wann der diameter in der kugel iſt 200000, vnd es gehet mitten vmb die Kugel herumb ein Gürtel / deren halbe breite iſt 21951 / oder die dicke 2439 / ſo helt alsdann die Gürtel am Leib 4430 etc. noch 10 ziffer. So zeuch nun ab jenes 4390 etc. von diſem / bleibt dir 40 etc. noch 10 ziffer / wie bey No. 47. vnnd diß iſt alßdann die fülle der Citronenrundung / da die gantze Kugel hielte 418879 etc. noch 10 ziffer. Were alſo diſe Citronenrundung weniger dann der 1000 theil von der Kugel.



Die 14. Figur.



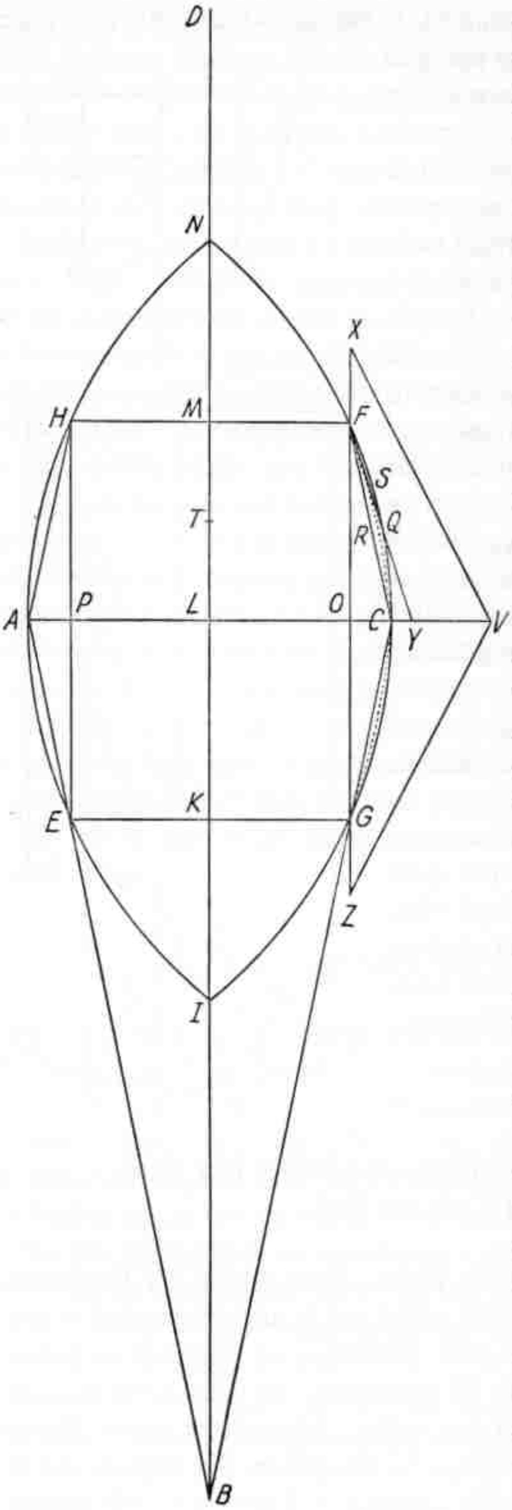
Ein andere kürtzere rechnung der Citronenrundung findet ſich vnden bey No. 63 / vnd gehet nicht auß der Gürtel vmb die groſſe Kugel / ſondern auß dem Kugelſchnitz der am Boden ſo breit iſt / als hoch diſe Gürtel / das iſt / der vberrucks einen gemeinen Bogen hat mit diſer Citronenrundung.

60. Zurechnen eine Citronenrundung baider ſeyt gleich abgeſtutzt / wie ein Faß.

Ex Th. 22.

Diſe Figur verſtehe in hie beygefügter langen Figur / durch die Buchſtaben FSQCGKEAHM. Diſe zurechnen / muſtu erſtlich wol in acht nemen / das in derſelben drey Circkel inn vnderſchidlicher gröſſe fürfallen / der kleineſt iſt an baiden Böden / durch die diametros EG vnnd HF verſtanden / die ſollen gleich ſein. Die Binder haiſſens die weite. Vnd diſe ſoll man meſſen / wie auch den andern Mittelmeſſigen am Bauch / durch ſeinen diametrum AC einzubilden. Der gröſſeſte aber iſt an der krümme oder am Bogen der Taufeln / nämlich HAE oder FCG, diſer formirt
7 die | gantze Citronenrundung durch die zwen Bögen NAI vnd NCI. Deſſen diameter

22) wenider 29/30) Citronenrundug



Die 18. Figur.

Gehört zu No. 10.

muß baids mit meſſen vnnd mit rechnen erlernet werden / dann er iſt der fürnemſte / weil ohn jhne alle rechnung vnvollkommen wäre / jhme allein gehört die sinus zahl völlig / die andere müſſen darvon nicht mehr haben / dann jhnen jhr Maaß gibt. Alſo aber kompt man zu deſſen diametro vnd halben diametro hie mit BT bezeichnet. Vber die baide linien EG vnd AC, muß man auch meſſen die lenge eintweder zwiſchen baiden Böden / iſt GF, KM, oder EH: oder doch zwiſchen dem mittel puncten C vnd dem einen Boden / iſt CF, oder CG.

Dann nimb den halben diameter deß Bodens KG oder LO vom halben diameter deß Bauchs LC, ſo bleibt OC, iſt die höhe deß ſchnitzes GFC auß demſelben groſſen Circkel; vnnd auß dieſer höhe mit hülff der halben lenge OF, (iſt der sinus deß halben Bogens CF) rechne nach der 10. Lehr / desſelben groſſen Circkels diametrum. Oder ſo du nicht die lenge OF, ſondern die lenge CF wußteſt / ſo multiplicir ſie in ſich ſelber / vnd dividir was kompt / mit CO, findet ſich alsdann gleich anfangs der gantze diameter deß groſſen Circkels.

Fürs ander / vnd wann nu der diameter diſes gröſſeſten Circkels bekant iſt / ſo verwandelt man alle mit meſſen gefundene zahlen inn die gewonliche sinus zahl / durch die 12. Lehr / alſo das diſer deß gröſſeſten Circkels halber diameter ſey 100000 / die andere linien / nämlich KG, OC, vnd OF auch jede jhr maaß bekomme. Vnnd rechnet hierauff die Feldung deß Circkelſchnitzes GFC

10) gezeichnet

nach der 17. Lehr. Vnd wie der halbe diameter deß Bodens KG hie ſein aigne lenge bekompt / vnnd weniger iſt dann 100000 / alſo muß auch ſein vmbkrais vnnd ſeine Feldung durch die 12. 13. 14. Lehr darauff gerechnet werden / dann wir werden deſſen alles hernach bedürffen.

Drittens ſo ſoll diſer ſtumpff / oder diſe abgeſtutzte Citronenrundung EAH, FCG dem Sinn nach / getheilet werden erſtlich in zwey theil / das ein iſt die inwendige Wellen oder Cylinder EPHFOG, das ander iſt die Gürtel / Riemen / oder Schelffen vmb diſe Wellen oder Walger auſſen herumb / mit den Buchſtaben EPHA, GOFC bezeichnet. Weil dann bey dem andern puncten die höch diſes Cylinders GF, ſampt deſſen Feld am Boden GE oder FH bekant worden / ſo rechne ſein Fülle durch die 24. Lehr. Die Gürtel vmb diſe Citronenrundung hat widerumb zwey ſtuck (wie auch No. 58 / die Gürtel vmb den Apffel) deren das ein gleich iſt einem geraden Spalt / der auff dem Boden FGC ſtehet / vnd ſo hoch iſt als lang deß Faßbodens EG vmbkrais iſt / wirdt gerechnet nach der 24. oder 44. Lehr. Das andere ſtuck iſt ein gantze / aber kleinere Citronenrundung / doch auß dem vorigen gröſſern Circkel genommen / deren Axlini verſtanden werden ſoll FG, vnnd der Bogen FCG. Die wirdt nach der 59. Lehr gerechnet. Setzet man nun hierauff baide ſtucke von der Gürtel / vnd die obgerechnete Wellen zuſamen; ſo findet ſich wievil Raums inn der gröſſern aber abgeſtutzten Citronenrundung ſey / nach der sinus theilung / beim andern puncten eingeführt.

Zum Exempel / Ich fände GE vnnd FH 19 / CA 22 / vnnd FG 27 / der Bogen FCG ſey Circkelrund rings herumb / da wirdt CL 11 ſein / vnnd LO 9 ein halbes / vnd OG 13 ein halbes / OC aber anderthalbs. Hierauß rechnet man deß gantzen Circkels FCG diametrum 123 für eins. Zum andern vnd wann dann für halb 123 / genommen werden 100000 / ſo muß OG werden 21951 / vnd OC 2439 wie No. 59. derhalben es bey dem hievorigen process vnnd zahlen bleibt vnnd findet ſich die feldung FGC, 716 etc.

Alſo weil der diameter deß gröſſeſten Circkels iſt geweſt 123 / iſt aber worden 100000 / vnd ſein vmbkreiß 628318 / ſo wirt der diameter 19 / ſeinen vmbkreiß ſo groß gewinen / 97057: vnd gleichsfals / weil die Circkel gegen einander ſeind / wie *48* die vierungen | von den diametris, vnnd des Circkels feldung iſt 314 / etc. (vnd diß darumb weil man dem diameter die sinus theilung 100 etc. gegeben) ſo neme ich nach der 12. Lehr / den diametrum 123 geviert / nemlich 15129 / vnnd alſo auch EG, 19 geviert / nemlich 361 vnd rechne hierauß auch die feldung deß Circkels EG, 7496 14823. Fürs dritte / ſo rechne ich erſtlich den Cylinder, nemlich multiplicir ich das Feld EG ietzgeſetzt / in die höch GF, das iſt OF doppelt nemlich 43902 ſo kompt 3290 00000 00000: darnach rechne ich den ſpalt / durch multiplicirung deß Circkelſchnitzes GFC, 716 / etc. in den vmbkraiß am Boden EG, 97057 / kompt das ſtuck an der Gürtel 695 00000 00000. Entlich rechne ich auch die kleine Citronenrundung / nach der 59. Lehr / kommt 40 etc. zum andern ſtuck der Gürtel. Alſo gewint die Gürtel 735 00000 00000, vnnd mit zuſetzung deß Cylinders 329 etc. findet ſich die Citronenrundung 4025 00000 00000.

4) bedüffen   10) FK *statt* FH   41) 392 *statt* 329

Bißher ſeind wir mit einem Exempel von einer Lehr zu der anderen gangen / vnd hat vns allwegen die vordere Lehr zu der nachfolgenden gedienet. Iſt alſo der gantze process hin vnnd her zertheilt vnnd verſteckt worden / wil derhalben jetzo ein anders Exempel geben / in welchem der gantze process durch alle vorgehende Lehren gefürt / beyeinander vnnd für augen ſtehet / damit man ſehe / wievil arbeit darauff gehe. Darbey dann diſe zwey ſtucke zumercken / Erſtlich / das die ordnung / welches vor oder nach zurechnen / nicht eben allerdings / wie im vorigen / gehalten werden müſſe / dann es jetzo nit mehr vmb die vorige Lehren zuthun / ſondern fürnämlich vmb die fürhabende 60. Lehr / gilt vns derwegen nach dem zweck zuſtreben / ſo kurtz als wir immer könden. Fürs ander weil ich kurtze zahlen brauche / derohalben es offt Brüche geben wirdt; ſo mercke das alle ziffer / welche nach dem zeichen (. folgen / die gehören zu dem Bruch / als der Zehler / der Nenner darzu wirt nicht geſetzt / iſt aber allezeit eine runde zehnerzahl / von ſo vil Nullen / als vil ziffer nach dem zeichen kommen. Wann kein zeichen nicht iſt / das iſt ein gantze zahl ohne Bruch / vnnd wann alſo alle ziffern nach dem Zeichen gehen / da heben ſie bißweilen an / von einer Nullen. Diſe art der Bruchrechnung iſt von Joſt Bürgen zu der sinus rechnung † erdacht / vnd iſt darzu gut / das ich den Bruch abkürtzen kan / wa er vnnötig lang werden wil / ohne ſonderen ſchaden der vberigen zahlen; kan jhne auch etwa auff erhaiſchung der notdurfft erlengern. Item leſſet ſich alſo die gantze zahl vnnd der Bruch mit einander durch alle species arithmeticae handlen wie nur ein zahl. Als wann ich rechne 365 gulden mit 6 per cento wievil bringt es deß Jars interesse? das ſtehet nun alſo:

Ein behende Bruchrechnung.

3(65
6 mal
facit 21(90

vnd bringt 21 gulden vnd 90 hundertheil / oder 9 zehentheil / das iſt 54 kr.

Nun laſt vns zum Exempel ſchreitten: vnnd ſetze es were ein Citronenrundes Faß / an welchem der Boden GE an ſeinem diametro oder breite (die Binder haiſſens die weite) hette meines fürhabenden Maaßſtabs drey theil / die tieffe CA hette 4 innerlich / die lenge GF auch innerlich vnd gerad zu / hielte 4(12 / oder ſcherffer 4(1231; die vrſach diſer ſcherffe deß Bruchs wirt in folgenden Lehren folgen / No. 78. Hie rechne ich vor allen dingen deß Circkels FCG diametrum, auß welchem die krümme zu den Taufeln genommen iſt. Dann ich hab LO 1(5, nemlich halb ſovil als GE, ich hab auch LC 2, derowegen ſo iſt CO (5, vnd halb GF das iſt / OG helt 2(06 etc. deſſen vierung 4(25, nach der 10. Lehr / dividir ich mit dem Boltz / sinu verso CO (5, ſo findet ſich 8(5, ſo lang iſt das vbrige trum vom diametro diſes groſſen Circkels NAI oder NCI, oder FCG. Setze nun das Trümlein CO (5, hinzu / da hab ich den gantzen diametrum 9 / vnd den halben 4(5. Vnnd weil ich auch die gantze Kugel von diſem Circkel haben muß / ſo nemb ich / nach der 13. Lehr / den Cubum von 9 / ſprechend / 9 mal 9 / 9 mal macht 729 / das multiplicir ich in das Circkelfeld 3(141 etc. auß dem Täfelin No. 12. nach der 28. Lehr / vnd ſetze zu dem was kommt ein drittestheil / dividir es miteinander durch den cubum eines diametri 2(0 etc. nämlich durch 8(000 etc. ſo kompt die Kugel zu diſem Circkel / vnd helt meines fürgenommenen maſſes 381(7035 / jede vnitet würffelgantz verſtanden.[1]

33) GE *statt* GF 39) 3(142

49 Diſe Kugel muß gantz außgenommen werden / darmit mir bekandt werde die vberbleibende Gürtel vmb ſie herumb / ſo dick vnd breit / das ſie vberall den Circkelſchnitz FGC halte. So nemb ich nun erſtlich hinweg beide Kugelſchnitze / den obern nach der erlengerten fläche FH den vndern nach GE abgeſchnitten / deren Bögen nach FN hinauff vnnd nach GI abwertz gehen. Vnnd ob wol diſe Kugelſchnitze hie nicht völlig abgemalet ſo wiſſen wir doch allbereit den halben diameter zur Kugel / iſt die höch zur halben Kugel (nach CA abgeſchnitten) nämlich 4(5. wir wiſſen auch die halbe braitte dieſer Gürtel / nämlich OF, 2(06 etc. Wann diſe von 4(5 wirdt abgenommen / ſo bleibt die höch deß Kugelſchnitzes 2(4 etc. multiplicir ſie nach der 38. Lehr in 100 / vnnd was kompt / dividir mit 4(5. ſo gewinneſtu 54(2 / darmit nimb auß dem Täfelin daſelbſt die zahl 75680 die dividir mit 8 / vnd das facit multiplicir in den cubum von 9 / nemlich in 729 vnnd wirff die 5 letzte ziffer hinweg / kompt 69 / der Leib zum Kugelſchnitz / deren zwen ſeind / zuſamen 138.

Nun komen wir auch zum Walger zwiſchen jhnen beiden / deſſen höch iſt GF, die ich gemeſſen hab 4(12 etc. aber der halbe diameter zu ſeinem vnnd beider Kugelſchnitze gemeinen Böden / iſt 4 / nemlich vmb CO weniger / dann der halbe diameter zur Kugel.

Hierauß muß ich rechnen das Feld am Circkel / das geſchicht leicht durch das Täfelin No. 12. vnnd durch die 13. Lehr / dann ich muß das Circkelfeld 3(14 inn die vierung vom halben diametro, nämblich in 16 multipliciren / thut 50(2655 / diß in die höch GF, 4(12 etc. multiplicirt, ſo kompt der Walger 207(26 etc: vnd merck das hie der vmbkraiß zu diſem Boden / welches halber diameter 4 / gleich halb ſoviel iſt als 50. nämlich 25(1328 / das behalt hinunter. Machen alſo Walger vnnd baide Kugelſchnitze ſamptlich 345(14. das nim nach der 43. Lehr von der Kugel / droben gefunden / bleibt der geſuchten Gürtel 36(5654.

Vnd weil auch in dem fürhabenden Citronenrunden Faß EAHFCG ein Walger EPHFOG zurechnen iſt / gleicher höch mit den vorigen / deſſen halber diameter iſt 1(5. damit ich nu hernach nicht wider zuruck gehen müſſe / ſo multiplicir ich nach der 13. vnd 44. Lehr / ſeine vierung 2(25 inn den jetzgefundenen Walger / vnnd dividir, was kompt mit deſſen halben diameters vierung 16 / damit kompt diß eine vnnd gröſſeſte ſtuck an der fürhabenden Figur / 29(14, zubehalten.

Wir ſeind nu biß an baide Gürtelen kommen / die müſſen auß dem Circkelſchnitz GFC gerechnet werden: da hab ich die höch CO (5. die multiplicir ich mit 100 / thut 50, diß dividirt mit dem halben diameter 4(5 / gibt 11(1 / darmit finde ich im Täfelin No. 17 / 686, das multiplicir ich nach derſelben Lehr inn die vierung deß halben diametri 20(25 / vnnd ſchneide ab die vier letzte ziffer / ſo findet ſich 1(39. Iſt alſo diſer Circkelſchnitz nicht viel braitter dann meines Maaſſes eins / lang vnnd brait verſtanden. Multiplicir diſen Schnitz in den vmbkraiß deß Bodens am erſten Walger / der kurtz zuvor iſt auffbehalten worden / nämblich in 25(1328, ſo kompt 34(9 / iſt der theil von der Kugel Gürtel / die ſich einem Spalt vergleichet / Nimb jhn hinweg von der gantzen Kugel Gürtel 36(5654 / nach der 59. Lehr / ſo bleibt die kleine Citronenrundung 1(65. Vnnd diß iſt der eine theil von der andern Gürtel vmb vnſere fürhabende Figur herumb gezogen / welche durchgehet durch EAHP vnd FCGO.

4) fläche FK der vndern   11) 7568   22) halber *fehlt*

Der andere theil ist bald zufinden / vergleicht sich auch einem Spalt / so hoch als lang der vmbkraiß EG ist / nach der fürhabenden 60. Lehr. Multiplicir derohalben den vorgefundenen Spalt mit dem gantzen diametro EG, 3. was kompt / dividir ich mit dem diametro deß Bodens am grössern Walger oder Kugelschnitz / nämblich mit 8 / so findet sich 13(0934 / ist das andere stuck vnserer Gürtel / vnd also die gantze Gürtel 14(74. Setze darzu die obgefundene Wellen oder Walger drinnen / nämblich 29(14 / so hab ich endtlich den gantzen Raum der fürhabenden gleich abgestutzten Citronenrundung / nämlich 43(88.

Wann nun ein Faß diese Maasse alle hatt / so ist nicht viel weniger dann der dritte theil am Bauch / vnnd ein anderer Weinvisierer welcher zwen Cylindros rechnen wolte / einen mit dem diametro deß Bodens 3 / den andern mit dem diametro deß Bauchs 4 wie sie pflegen / der würde den einen finden | 29(14 / den andern 51(79. 50
Wann ers dann halbirte / so funde er 40(46 / solte 43(88 sein / vnd käme Er also in einem doppelten dreyling mehr dann vmb drey Emmer zu kurtz. Nach der doppelten Kegelstocksrechnung No. 52. das ist / wann der Bauch nicht gebogen were / sondern gerad von beiden Böden nach dem Beihel striche / vnd vmb das Beihel einen Reiffen machte wie die Römische Fässer / nach Clavij anzeig / so thete ich zu deß Bodens †
diametro ein drittheil von dem vnderscheid beider diametrorum 1. vnnd multiplicirte also diß in den vnderscheid / das brächte 3 vnnd ein drittheil / diß setze ich zu der vierung von 3 das ist 9. keme 12 vnd ein drittheil. Diß multiplicirte ich in den kleinern Walger oder Wellen 29(14 / vnnd dividirte es mit 9 / käme mir 39(93 / noch weniger denn zuvor / bey der gemeinen halbierung.

Ob nun wol nicht ohn / das dieser process vnderweilen nötig seye: so muß ich doch nebens bekennen / das er sehr mühselig; sonderlich in dem / das man nur allein von deß allerkleinesten Stucks wegen erst eine gantze Kugel zu einem solchen Bogen / wie die Taufeln seind / anatomiren muß. Hierauß dann folget / das er acht schwäre particular processe begreiffet / vnnd hette deren noch wol mehr / wann die zwey obrige Täfelin No. 17. zu den Circkel= vnd No. 38. zu den Kugelschnitzen nicht weren.

Were derhalben ein erwünscheter handel / wann sich drunten bey No. 63 / ein anderer process funde / zwar auch durch einen Kugelschnitz / nicht aber durch disen / der ob= vnd vnder der Citronenrundung vnnd Gürtel stehet / sonder durch disen / in welchen die kleine Citronenrundung gleich gerecht ist / nach der krümme der Taufeln.

61. Zwen gesellete Kegel.

Wann auß zweyen gedoppelten Kegeln je der ein so hoch ist / als dick der ander ist / †
an der mittern Schneide oder Bauch / so gibt jhnen die dicke an Beüchen das Maaß zu eines jeden raum.

62. Ablenge vnnd gedruckte Kugeln gesellet / vnder sich selbsten vnd mit der gerechten Kugel.

So tieff ein getruckte Kugel nider getruckt ist / so viel weniger Leibes hat sie / dann ein gerechte Kugel / in welcher ein solche gedruckte Kugel oder Linsen mit dem gantzen vmbkraiß deß Bauchs anstreichet.

26) Tafeln

Vnnd hinwiderumb / wann in eine getruckte Kugel ein andere Ablenge eingesetzet ist / mit baiden jhren würbeln gleich inn dem Bauch der getruckten anstreichend / das ist / wann die Ablenge Kugel so hoch oder lang ist / als brait die gedruckte ist in der mitte / vnnd hingegen die Ablenge so dick in der mitten / als hoch die getruckte ist / so gibt jhnen abermal die dicke auß der rundung jrer Beuche das Maaß zu einer jeden Leib oder fülle / gegen einander gehalten.

Also vnnd noch ferners zugehen / wann in dise dritte Ablenge Kugel oder Ay / widerumb ein rechtrunde Kugel eingesetzt wirt / gleich inn jhren Bauch gerecht mit dem gantzen vmbkraiß oder mittern Circkel; so hoch als dann die Ablenge vber jre jnwendige gerechte Kugel außgehet / so vil mehr Leibs hat sie / dann solche. Hierauß folget / das zwischen einer grossen / vnd einer kleineren Kugel / die getruckte vnd die † Ablenge die zwey media proportionalia seyen / nach dem Leib.[1]

51

63. Kugelschnitze mit Citronenrundungen gesellet / vnnd darbey ein kürtzere rechnung der abgestutzten Citronenrundung.

Ein gedoppelter Kugelschnitz / oder zwen gleiche Schnitze von einer Kugel / auff-einander gestürtzet / vnnd eine Citronenrundung so lang als breit jenne seind / vnd † so dick als hoch jenne zusamen seind / haben gleichßfals jhre Maaß in den mittern breittinen. Inn gleichem der Kugelschnitz einfach / vnd die Citronenrundung nach der leng oder Axlinien entzwey gespalten.

Zum Exempel / es were von der Kugel NCI ein schnitz FGC, der hette einen Circkelrunden Boden / so brait als FG. Hingegen were ein Citronenrundung so lang als FG, vnd so brait als OC zwey mal / es were aber CO 3, vnd OG 27 / nemblich 9 mal sovil: so wurde nach diser fürgab / der Kugelschnitz auch neun mal sovil sein: nemblich weil bey No. 38. diser Kugelschnitz hat gehalten 185 etc. so müste die halbe Citronenrundung / so von eben demselben Circkelschnitz gemacht / den neunten theil halten / nemlich 20587203 6872 / Wie dann bey No. 59 vnd 47 zusehen / das eben dise Citronenrundung gehalten 40 etc. Derowegen jhr halber theil gewest 2000000 0000.

In der 18. Figur am 46. Blat.

Wir wöllen auch das andere Exempel No. 60 besehen / da ist die höch CO gewest (5 / vnd OF 2(06155 / vnd die kleine Citronenrundung 1(65 / halb (825. Wann ich dann spreche / (5 gibt (825 / was 2(06155? so kompt 3(4 das sol der Kugelschnitz von CO sein. Nun such disen Kugelschnitz auff die höch CO (5 / vnd auff den halben diameter 4(5. Dann da hastu die vierung zum halben diameter seines Bodens / die ist 4(25 / die gibt das Circkelfeld deß Bodens 13(35: vnnd wie sich helt 8(5 / das vbrig vom diametro, zum halben diametro 4(5 / so helt sich die höch (5 / zu jhrer erlengerung (2647 / das also die gantze höch deß gleichen Coni wirdt (7647 / vnnd deren drittestheil (2549 / dise in 13(35 multiplicirt / gibt den Kugelschnitz auch 3(4. Sovil findet sich auch auß dem Täfelin der Kugelschnitze. Dann setze oo zu (5 / so wirt 50(o / das dividir mit 4(5 / so finden sich 11 vnd ein 9theil. Such 10 oben im Täfelin vnd 1 zur lincken / da findestu im Creutzwege 3661 vnnd die differentz 682 / dannen das 9 theil ist 75 / das setze zu 3661 / so hastu den Kugelschnitz 3736: multiplicir jhne

36) 7647 *statt* (7647   37) 13(37   39) (500 *statt* 50(o

mit dem cubo von 4(5 / der ist 91(125 / vnnd schneid die 5 hinderste vom facit ab / Nota. das ist / wann du die gantze 91 in die gantze 3736 multiplicirt hast / so setze die 5 letzte ziffer vber das zeichen (hinauß / so bleibt dir 3(40536 oder kurtz 3(4 / wie oben.

Sihe da wie nahe beider orten die rechnung auß No. 59 mit der rechnung auß No. 63 vbereintreffe. Ich achte du mögest diser Lehr wol trauen / obschon sie noch jhren rechtmessigen beweiß nicht hat.

Auß disem Fundament wil ich dir nun einen andern etwas kürtzern process zeigen zurechnen die obgesetzte Citronenrundung / oder die rechte Faßform / in der 18. Figur / weil der ander process droben No. 60 gar zu schwer vnd lang gewest / vnnd das sol geschehen durch drey Exempla / da im ersten der Bauch CA / gegen dem Boden FH wie 10 gegen 9 / im andern wie 15 gegen 14 / im dritten wie 18 gegen 17 / oder die zahlen doppelt genommen / damit man füglich halbiren möge / dann das gilt gleich. Darmit wirt die Gürtel vmb die Figur herumb / in allen dreyen Exempeln nur 1 dick sein / nemlich CO / welches auch ist die höch deß Circkel= vnd deß Kugelschnitzes FGCS. Es sol aber in allen Exempeln die gerade lini CF / vnder dem Bogen CSF / an jhrer vierung halb soviel halten / als FH an seiner vierung.

Weil dann dem Boden FH gegeben wirt 18. 28. 34. so ist seine vierung 324. 784. 1156. Vnnd die vierung von CF als jetz angedinget / ist halbsovil / nemlich 162. 392. 578.

Der Circkelschnitz. Wann dann dieses nach der 60. Lehr / dividirt wirdt mit der Gürteldicke CO 1. 1. 1. so kompt der diameter zum grossen Circkel NCI, 162. 392. 578 / der halbe aber 81. 196. 289 / darmit / vnd mit der höhe deß Circkelschnitzes GCFO, suche denselben schnitz nach der 17. Lehr / oder weil der Bogen klein gegen dem diameter, so brauch alda den dritten weg / darzue dir von nöten / die lenge OF, die findet sich auß der vierung CF wann man dannen weg nimmt die vierung von der höch COI, die ist auch 1. bleibt also die vierung OF 161. 391. 577. Darauß ist die wurtzel 12(69. 19(8. 24(02. Diß / nach No. 17 / vierdoppelt inn ein drittheil von CO multiplicirt, oder dafür nur einfach in die gantze höhe CO. 1. vnd von dem facit das drittheil darzu gesetzt / macht den Circkelschnitz 16(917. 26(4. 32(029. disen multiplicir, nach No. 60 / in den vmbkraiß deß Circkels FH, der wirt nach No. 12. gefunden 56(55. 87(965. 106(81. so findet sich das grössere stuck von der Gürtel FCG, HAE, nemlich

Zur Gürtel das grössere stuck. 956(63. 2322(26. 3420(93. Das andere kleinere stücklein wöllen wir jetzo / nach der

Der Kugelschnitz. fürhabenden 63. Lehr / suchen durch den Kugelschnitz FCG auß der Kugel NCI. Weil dann der schnitz klein / so brauche No. 37 den andern weg / vnnd auß der vierung von OF als dem halben diametro deß Bodens zum Schnitz / die gewest ist 161. 391. 577. such / nach No. 12 das Feld am Circkelrunden Boden FG / das wirdt 505(8. 1228(36. 1812(7 / das multiplicir in die halbe höch deß Schnitzes / so wirdt der Leib zu disem schnitz kommen 252(9. 614(18. 906(35.

Das kleinere stuck zur Gürtl. Disen Leib multiplicir ich nach No. 63 / inn den sinum versum oder höch CO 1. 1. 1. was kompt / das dividir mit OF dem halben diameter am Boden 12(69. 19(8. 24(02 / so erzeigt sich die halbe Citronenrundung FCG 19(93. 31(02. 37(75. Diß doppelt / ist das kleinere stuck zur Gürtel FCG, HAE, nemlich 39(86. 62(04. 75(5. Setze beide stucke zusamen / so wirdt die gantze Gürtel 996(49. 2384(3. 3496(43.

11) 14 gegen 15 . . . 17 gegen 18 31) HAG

Zu dem Walger zwischen FH vnd GE, haben wir allbereit gehabt die vierung von dem diametro FH, nemlich 324. 784. 1156 / die multiplicir / nach No. 24 / in OF doppelt / nemlich in GF / 25(38. 39(6. 48(04 / so wirdt ein viereckete Seulen 8223(12. 31046(4. 55534(24. auß welcher / nach No. 24 vnnd 12 / gefunden wirdt der Walger 6457(4. 24383(78. 43616(3. Nun setze beide Walger vnnd Gürtel zusammen / so erzeüget sich der Raum deß gantzen Fäßlins 7453(89. 26768(08. 47112(73. Wann man dise Fesser nicht auff die Citronenrundung rechnet / sondern nur schlecht wie gedoppelte Kegelstöcke / nach No. 52 / so hielten sie nur 7201(3. 26161(84. 46252(19 / vnd also vmb das 30. 44. 52. theil weniger. Der Walger.

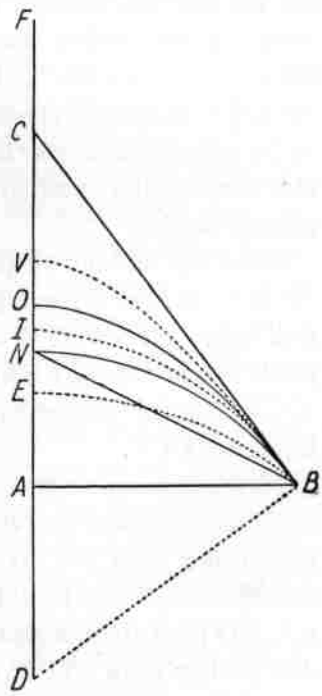
Aber nach der halbirung deß jnnern vnnd eussern Walgers / findet man den Halt auff die Kegel- vnd alle andere rundungen ohn vnderschaid also / 7214(4. 26187(2. 46292. Hierauß dann zuersehen / das dieser halbirung / die bey etlichen Weinvisierern im brauch ist / nicht zu trawen seye.

64. Oliven- oder Zwespenrunde / Kriechenrunde / vnd allerhand Spulrunde Figuren zurechnen.

Ex opin. Th. 26.

Alle diese Figuren (doch abgestutzet) finden sich an den Fässern. Wann dann gewiß ist / was es für eine Rundung seye / so nimb allewege jhr verwante volleibige Figur darzu / die du hievor No. 34. 35. 40. hast rechnen lehrnen / dann wann solche gerechnet / so kanstu auß derselben auch dise leibhaffte Figuren rechnen. Darzu dann diß weiter gehörig.

In der folgenden Figur.



Die 17. Figur.

Ist es ein Olivenrundung / nämlich so der Bogen BE (welcher gedoppelt vmb die gedoppelte BA herumb lauffend verstanden werden muß) auß dem † flachen oder mittern Theil eines Ablengen Circkels wäre / so rechne auß No. 40. den Schnitz der getruckten Kugel (zuverstehen wann der Bogen EB vmb EA herumb laufft) vnd multiplicir die zahl seines Raums mit der zahl einer linien / die etwas kürtzer ist dann die höch EA. Ist es ein Citronenrundung durch 33 NB [1] zuverstehen / wann es ein gerechter Circkelbogen ist / so rechne auß No. 37. 38. den Kugelschnitz wie auch No. 63 gesagt / vnd multiplicir seinen Leib in die völlige höch NA.

Ist es ein Zwespen- oder Kriechenrundung / nämlich so die lini BI (doppelt verstanden) auß dem rundspitzigen thail oder Güpffel eins ablengen Circkels wäre / so rechne auß No. 40 den Schnitz der Ablengen Kugel / vnd multiplicir seinen Leib in ein lini die lenger ist dann die höch AI, doch kürtzer dann AC. Das C soltu also verstehen / wann an deß bodens puncten B, vnnd an der runden Feldung IB, die lini CB anstreichet.

6) ereüget . . . 26762(08

Ist es eine Spulrundung / auß der Parabole, nämlich BO, so rechne auß No. 34. das Conoides Parabolicum, vnnd multiplicir den Leib inn die lini AC selbsten / die ist alsdann gerad zweymal so lang als AO die höche.

Ist es ein Spuelrundung auß der Hyperbola, nämlich BV, so rechne auß No. 35 das Conoides Hyperbolicum, vnd multiplicir den Leib in ein lini / die etwas lenger ist / dann alsdann die AC sein wirdt / doch kürtzer dann die AF, dann AF ist die höch dessen Kegels / auß welchem das Conoides Hyperbolicum BV geschelet ist.

Entlich zu allen fällen / so dividir den multiplicirten Leib in die lini AB halbirt / nämlich in das vierte thail der Axlinien inn den hie fürhabenden Figuren / oder deß diameters am Boden jhrer verwandten Figuren / auß No. 34. 35. 37. 38. 40 / hie herzu gezogen / so kompt dir der Leib deren Figur oder rundung die du suchest.

Wolte dir Exempla gegeben haben / ich kan dich aber der speculation halben noch nicht auff alle scherffe versichern; wie es dann auch zu rechter instruction nicht gnugsam ist / wann einer sagt / nim etwas weniger oder etwas mehr dann diß oder das: sonder er muß hinzu setzen / wie viel weniger oder mehr. Item wil es auch inn disem Teutschen Buch zulang vnnd zu spitzfindig werden / erst zu lehren / wie man die puncten C vnd F behend finden solle.

Ex Th. 27. et partis 3. No. 4.

65. Wie dergleichen Rundungen zu vnderschaiden / was Geschlechts ein jede sey.

Reiß auff ein papir den krummen Bogen welcher mitten vber den Bauch herüber von eim spitz zum andern / oder inn dem Kugelschnitz vnnd Conoidibus, vber den obersten güpffel herüber vom Boden biß wider zum Boden gehet / zeuch ein gerade lini von dem einen end B, biß an das ander; die halbire bey A, vnd laß ein andere lini auß A winckelrecht vbersich gehen / hernach zeuch neben dem end B hin / ein lini die da anstreicht an B, aber den Bogen / wann er auch gleich fürbaß gezogen wurde / nicht durchschneidet / zeuch dieselbe hinauff / biß in die lini AC, das baide im puncten C zusamen lauffen.[1]

Gesellen. Spulrund vnd Conoides Parabolicum. Spulrund vnd Conoides Hyperbolicum. Citronenrund vnd Segmentum Globi. Olivenrund vnd Segmentum lentis circulare. Kriechenrund vnd Segmentum Ovi circulare.

Wann nun alsdann die zwey stuck CO, OA einander gleich seind / so ist OB ein *54* Parabole; ist dann CV weniger dann VA, so ist VB ein Hyperbole; vnd so CV halb sovil wäre / als VA, so ist diser Hyperbolae Centrum oder der punct F leicht zufinden / dann CV vnd CF seind alsdann einander gleich; ist CV weniger dann halb VA, so ist auch FC kürtzer dann CV, ist aber CV mehr dann halb VA, so ist auch FC lenger dann CV.

Hingegen wann die zwey stuck CN, NA also beschaffen / das die winckel ABN, NBC einander gleich werden / so ist der Bogen NB auß einem Circkel / wäre aber EBA kleiner dann EBC, so ist EB auß dem mittern theil eines Ablengen Circkels. So alßdann AE halb soviel ist als EC, so ist das Centrum D leicht zu finden / dann EA, AD seind alsdann einander gleich / ist AE weniger dann halb EC, so ist auch AD weniger dann AE, ist aber AE mehr dann halb EC, so ist auch AD mehr dann AE.

Endtlich wann CI lenger ist dann IA, darneben aber CBI kleiner dann IBA, so ist IB auß dem Güpffel eines Ablengen Circkels.

18) *(Randnote)* et *fehlt*

66. Vergleichung dieser Figuren gestümmelt verstanden.

Ex Th. 28. 29.

Am 46. Blat.

Vnderschidliche Figuren (inn der 18. langen Figur alle verstanden bey HFCGE) so eine lenge oder höch GF oder KM haben / auch einerley tieffe CA, vnnd einerley Böden EG oder HF, werden also verglichen oder gegen einander geschätzet. Ist die Figur HFCGE ein doppelter Kegelstock / vnd die linien CF, CG, AH, AE gerad / so helt sie am wenigsten: mehr wirt sie haben / wann es Spulrund / nach der Hyperbola, also das man die rundung wol in der mitten bey C erkennen mag / vnnd die fläche außwärtz gegen F. G, da die punctirte lini CQ zwischen R vnd S hinauß schlieffet auff das F. Ists Spuelrund auß der Parabole, so helt es noch mehr / vnd abermal mehr / wann es ist Kriechenrund / widerumb mehr / wann es Citronenrund oder Circkelart / vnd der Bogen CQSF auß einem gerechten Circkel ist / am allermeisten helt es / wann es ist Olivenrund / nämlich in der mitt flach / vnd aussen gegen FG gähling gebogen: also das es von C vber den Circkelbogen CQS herumb gehet / vnnd sich entlich nach dem F herunter zeucht.

67. Einen Schnitz von diesen Rundungen zurechnen / so das sie gerad neben der Axlinien hin zerschnitten werden.

Ex Th. 30. probl. inexplicato.

Ob wol diß im lateinischen Werck auff einer blossen frag oder Rätzel beruhet das ich andern Kunstmessern auffzulösen fürgelegt: solte es doch nicht viel fehlen / die 63. vnd 64. Lehr solten vns auch hie zustatten kommen: inmassen dann allbereit No. 55. mit dem geraden Kegel ein anfang gemacht worden.

Demnach soltu dir bey einem jeden solchen schnitz noch andere zwo volleibige Figuren einbilden / die alle eine lenge vnd ein höch haben / alle auff einem flachen Boden stehen / der den schnit gethan (doch eine auff einem grössern theil deßselben / die andere auff einem kleinern) alle obern Rucken her nur einen Bo|gen haben von jeder Figuren art. Auß disen dreyen / ist der fürhabende schnitz die mittele / wirt von der andern einer bedeckt / nemlich vom gerechten- Ablengen- oder Getruckten Kugel- † schnitz / oder vom Conoide, das einem Hewschober / oder das einem Berg gleich sihet: hingegen bedeckt er die andere / nemlichen eine halbe Citronen- eine halbe Oliven- ein halbe Kriechen- ein halbe Spulrundung / kleiner dann die zerschnittene / auß welchen der fürhabende Schnitz genommen worden.

General Lehr solche schnitze zu rechnen auff allerley art der rundung.

Vnd beruhete also das Werck auff dem / das wir mit der höch eines solchen Schnitzes / vnd mit dem halben diameter deß grössesten Circkels an der abgestutzten Figur (welchen wir No. 59 haben lernen suchen) rechnen den Kugelschnitz durch No. 37. 38. oder den Oliven- oder Kriechenschnitz / durch No. 40. oder die Conoidea, durch No. 34. 35 / einer jeden rundung jhren gesellen / der vber jhren schnitz gehet / vnnd jhne bedecket.

Auß disem rechne den andern gesellen / der vnder jetzt fürhabendem Schnitz stehet / nach der 59. 63. 64. Lehr.

Fürs dritte so suche nach der 17. Lehr / mit der fürgegebnen höch zwen flacher Schnitze / jeden in seiner bescheidenen maaß / auß zweyen Circkeln / da der kleiner

12) mit *statt* mitt 26) Gertuckten

zum halben diameter hat dise höch selber (desthalben der Schnitz ein halber Circkel sein wirt) der Grössere ist der mittere Circkel vmb die zerschnittene rundung herumb / dessen diametrum kanstu an der Figur messen / dann er ist die dicke der Figur.

Entlichen multiplicir den nachgesetzten grössern Circkelschnitz in den Leib der ein=geschlossenen kleinern rundung / was kompt / dividir mit dem vorgesetzten kleinern Circkelschnitz oder halben Circkelfläche / so gewinnestu im facit den Leib deß für=gegebnen schnitzes auß der grössern zerschnittenen rundung.

Exempla werden außgelassen / auß vrsachen / die No. 64. angezeigt.

Dise general lehr zu solcherley schnit=zen deß Kegels No. 55 tauglich.

Eben dieser griff solte wol auch No. 55. bey dem Kegelschnitz mit seiner Maaß angehen / vnnd den vierten weg geben / nämlich so man suchete den Leib eines andern kleinern / nach der Ax halbirten Kegels / dessen Boden wäre ein halber Circkel / vnd also ein theil vom Boden deß fürgelegten Schnitzes / vnnd hetten eine Axlini am Schnitt (in Kegeln ists die höch / doch anderst verstanden dann hie bey No. 67.) vnd so man also den Leib dises halben Kegels multiplicirte inn seinen Boden oder halben Circkel / vnnd was kompt / durch deß fürgelegten Schnitzes Boden (welcher ist ein schnitz von eim grössern Circkel) dividirte.

Zum Exempel / wir hetten einen Kegelstock / dessen halber diameter am Boden 22 / am Schnitt oder Tisch 19 / die höch 27. Der vnderschaid baider halber diametrorum 3. Wann nu das Beihel gleich oben am Rand deß Tisches angesetzt wurde / vnd einen Schnitt gerad abwärtz thäte / also daß der vndere Circkel einen Schnitz verlöhre / dessen höch 3. wie groß wurde diser Schnitz sein? Weil dann der halbe diameter am Boden ist 22 / vnnd darvon 3 am Circkelschnitz seind / so wirdt das Feld an disem Circkelschnitz sein 45(012: vnd weil die 3 sollen ein halber diameter werden / so geben sie den halben Circkel 9(425 / wirdt also der halbe Kegel auff diesem Boden stehend (vnd 27 hoch) sein 84(825. Das multiplicir mit dem Boden 9(425 / kompt 799(5 / das dividir mit dem Circkelschnitz 45(012 / kompt 17(76 / so groß sol der Schnitz sein vom Kegel.

Special=lehr auff die schnitze der Ci=tronenrundung ge=richtet.

Bey der Citronenrundung hette man einen vortheil / das man einer kleinern halbirten Citronenrundung / in dem hie fürgelegten Schnitz steckend / nicht bedürffte / sondern man rechnete diesen Schnitz gleich auß dem gewidmeten Kugelschnitz selber / folgender massen. Mit deß hie fürgebnen Schnitzes höch / such baide den Kugel=schnitz zum grossen Circkel / in welchen die Citronenrundung nach der leng gebogen ist / vnd auch desselben grossen Circkels schnitz / fürs dritte [1] auch deß Bauchcirckels Schnitz. Multiplicir jetzo den Leib deß Kugelschnitzes in die fläche deß Bauch Circkel=schnitzes / was kompt / dividir mit deß grossen Circkels schnitz / so findestu den Leib deß Schnitzes von der Citronenrundung.

In der 18. Figur am 46. Blat.

Nimb die drey letzte Exempla auß No. 63. vnnd laß in allen dreyen / den Schnitz FGC, von der Citronenrundung NCIA, welcher zurechnen ist / sein so hoch als CO, nämlich 1. 1. 1. also das er gleich biß an G, F, raiche / da die rundung abgestutzet ist / da ist deß grossen Circkels NCI halber diameter 81. 196. 289. gewest / vnd dessen Schnitz 16(917. 26(4. 32(029. dessen Kugelschnitz aber 252(9. 614(18. 906(35. hat auch die höch CO, vnd zum Boden den Circkel vnd diameter FG. Weil aber deß Bauch Circkels halber diameter CL ist geweßt 10. 15. 18. so findet sich deß Bauch

10) suchrte 18) halber *fehlt* 20) thätte 37) NO *statt* No. 43) CO *statt* CL

Circkels Schnitz / welcher auch die höhe CO 1. 1. 1. hat / 5(87. 7(29. 8(07, disen Circkelschnitz multiplicir in den Kugelschnitz / kompt 1484(5. 4477(4. 7315(1. das dividir mit dem Schnitz deß Circkels NCI, so findet sich der Schnitz FGC (von der Citronenrundung NCIA) 87(75. 169(6. 228(4, ist also gefunden ohne die kleine halbe Citronenrundung drinnen / auch mit FGC bezeichnet / die ist droben geweßt 19(93. 31(02. 37(75: die gantze Gürtel aber ist geweßt 996(49. 2384(3. 3496(43. von welcher Gürtel ein solcher Schnitz allwegen ein stuck ist.[1]

68. Inhalt deß Andern Thails deß Viſierbuchs.

Im andern Thail wirdt erſtlich angezeigt / wie ſich ein jedes Faß zu den hie vorgeſetzten Lehren ſchicke / vnd vnder was Sorten von den bißhero abgehandleten Figuren es zuzehlen. Nämlich das deren ein Thail (als dann vil geſchehen ſoll inn Italia) nur ſchlecht zweyen gleichen / auff einander geſtürtzten Kegelſtöcken oder Bottungen gleich ſehen / vnnd inn der mitt / da das Beihel / gleichſam eine Schneide oder Reiffen habe.

Etliche ſeind vmb das Beihel gächrund / lauffen aber gegen den Böden / auff gerade linien hinauß / vnnd gehören vnder die Spulrunde Hyperboliſche Figur vnd 64. Lehr.

Etliche ſeind von einem Boden vbern Bauch zum andern Boden / Paraboliſch / etliche Elliptiſch / etliche recht Circkelrund / vnnd alſo vmb die Mitten Citronenrund / gehören in die 63. vnd 59. Lehr. Selten aber begibt es ſich / das ein Faß in der mitte flach / vnd erſt zu euſſerſt gegen den Böden gächrund oder abſchüſſig gemacht wirdt / das wäre Olivenrund / in die 64. Lehr gehörig. Aber gantz flache Taufeln / die ſich nur gar ein wenig außwärtz biegen / iſt nichts ſeltzames / deſto mehr verwantnus hat ein ſolches Faß mit der Wellen vnnd 24. Lehr / gehört doch aigentlich zur Citronenrundung / vnd 59. Lehr.

Demnach folget wie ein Faß in Oeſterreich gemacht werde / vnnd was es für wunderbarliche aigenſchafften vor andern allen habe / welches weil es an ihm ſelber ſchön / vnd dem Kunſtverſtendigen lieblich zuvernemen / hat es müſſen nach rechter Geometriſcher Kunſt inn 25 Theorematibus außgeführet werden. Gleichwol iſt diſe speculation nur auff die erſte Sorten der gedoppelten Kegelrunden Figur gerichtet / vnd fundirt ſich auff die zwerlini vom Beihel oben / biß vnden an den Boden / wie man in Oeſterreich die Viſierruthen brauchet / da wirdt angezeiget / wann allerhand Fäſſer / lange vnd kurtze / flache vnd bauchete (nach art der Kegelrundung) fürhanden wären / die alle nur ein zwerlini hetten / da ſie nach anzeig der Oeſterreichiſchen Viſierruthen alle mit einander nur einen Halt oder Eych haben / nämlich eins ſoviel halten ſolte als das andere; welches alsdann vnder allen am maiſten halte / welches am wenigſten / vnd welches mehr dann das andere / vnnd wieviel an einem jeden abgehe / das es die Oeſterreichiſche Viſier nicht halte.

Endtlich wirdt in den 4 letzten Theorematibus die Oeſterreichiſche Viſierruthen ſelbſt erklärt / wie die zumachen / vnd an Oeſterreichiſchen Fäſſern recht zugebrauchen: das wollen wir im Teutſchen in den dritten Thail ſparen.

Was nun für den Teutſchen Leſern ſein wirdt / das ſol außzugs weiſe nach einander folgen / in der bißher geführten ordnung.

Ex Th. 4.

69. Wann die vmbzeunungen gleicher Lenge ſeind / welches Feld alsdann am gröſſeſten.

Ein reicher Maier gibt einem armen Mann ein ſchnur / erlaubt jhme ſovil Traids auß ſeinem Acker abzuſchneiden / als er mit der Schnur vmbfangen mag. Ich rahte

4) eins Thails

58 jhme / er mach keine Ecke mit der | Schnur / ſondern ziehe ſie rund herumb / das trifft er leichtlich alſo. Theil die Schnur in 11 gleicher ſtucke / vnnd deren eins in 4 kleiner lengen / nimb ſonſten ein Trum / ſo lang als der jetz gemachten ſtucken ein groſſes vnd drey kleine / ſteck das ein End mit einem Zweck in Boden / gehe mit dem andern auſſen herumb / ſo wirſtu die gantze Schnur fein in einen Circkel ordnen. Sehne dich nicht die Schnur anzuſtrecken / dann du gewinneſt nichts / weil du alsdann Ecke macheſt.

Wann aber je ſolten Ecke gemachet werden / ſo wirdt deß Feldes am meiſten ſein / wa dern Ecke am maiſten / ſo doch / das die Ecke auch inn einer gleichen Circkel⸗ordnung herumb ſtehen / dann je vngleicher / je weniger ſie einfangen.

Setze die Schnur ſey 120 Schuch lang: Mache darauß einen Triangul / der auff der einen ſeitten habe 20 / auff der andern 45 / auff der dritten 55 / da wirſtu nicht mehr dann 424 lang⸗ vnnd braitte Schuch Feldes einfangen. Ordene es ein wenig beſſer / nämlich alſo 30. 40. 50. da wirſtu ſchon 600 ſtuck Feldes einfangen / jedes einen Schuch lang vnd brait. Ordene den Triangel gar recht / nämlich alſo 40. 40. 40. du vmbzeuneſt hiermit 693 Schuch.

Verſuchs jetzo mit vier ecken / vnnd ſolche ſeyen erſtlich vnordenlich von zweyen rechtwinckeligen Trianguln / die mit der lengſten ſeitten an einander ſtehen / thail auſſen herumb die Schnur alſo / in die 4 ſeitten / 10. 30. 35. 45. du beſchleüſſeſt 750. Ordene es beſſer / nämlich rechtwinckelig vnd gegen vber gleich / als 20. 40. 20. 40. das vmbgürtet 800. Machs noch gleicher / nämblich 25. 35. 25. 35. da wirſtu 875 einfangen. Machs gar gleich / als 30. 30. 30. 30. dann wirdt das Feld 900. So du aber die winckel änderteſt / das ſie nicht gleich bliben / ſondern an ſtatt der vierung wurde ein Rautten / mitten durch / von eim ſtumpffen eck zum andern auch 30 / ſo fiengeſtu für 900 nicht mehr dann 779 / alſo auch bey 25. 35. 25. 35. wann die Figur ſich naiget / das die zwen durchzüge (Diagonii) einander vngleich / vnd der lengere 50 wirt / ſo bekomſtu für die vorige 875 / nur 812.

Gehe weiter / verſuchs mit dem fünffeck inn guter ordnung / alſo das jede ſeiten 24 bekomme / da gewinneſtu ſchon 991.

Mit dem ſechseck / da jede ſeitten 20 hat / wirdt dir 1039 zum Feld. Mit dem achteck / da jede ſeiten 15 hat / kompt 1086. vnnd ſo fortan.

Endtlich wann die Schnur zum Circkel wirt / vmbfangt ſie 1145: vnnd ſonſten in keinerley wege kan ſie mehr einfangen.

Diſen griff wirdt Dido gebrauchet haben / da ſie von den Mauritaniern ſovil Landes kaufft / als man mit einer Ochſenhaut belegen möge.

Wie nutzlich aber vnnd auch notwendig diſe wiſſenſchafft ſey / haſtu auß etlichen volgenden Exempeln zuerſehen.

† Wann du nit Schaub oder Widen gnug hetteſt / die Garben zubinden: ſo knüpff je zwey Bande zuſamen / vnnd mach groſſe Garben / dann du ordneſt hiermit die Bande beſſer in einen Circkel / als wann ſie in zwen Circkel vertheilt wurden.

Alſo wann ein reicher Herbſt wirt / vnd man hat nicht Fäſſer oder Taufeln gnug / ſo ſollen die Binder ſich hüten / das ſie die Taufeln nicht zu kleinen Fäßlen ver⸗ſchnitzlen / ſollen lauter groſſe Fäſſer machen.

34) grifft

Zuſchonen das die Garben nicht brechen / ſitze oder ſpringe nicht darauff / vnd beſchwäre ſie nicht zuvil / dann ſie ſeind rund gebunden / wann du ſie nu druckeſt / ſo wirdt auß der rundung eins ablengen Circkels rundung / die faſſet weniger / muß alſo ſpringen / weil der Garben zuvil wirdt.[1]

Diß iſt auch der vrſachen eine / warumb die Raiffe / ſonderlich die Bauchraiffe / von vollen Fäſſern ſpringen / je ehe / je gröſſer ſie ſeind / wann man ſie auff dem Bauch waltzet. *59*

Wer den Bauch voll angefreſſen vnd geſoffen / der ligt vil beſchwerlicher auff dem Rucken / dann auff der ſeiten: ſol ſich auch zu ſolcher ſtund nicht recken laſſen / biß er zuvor abgedäwet / er möchte ſich erbrechen vnd vbergeben. Dieſer Barmhertzigkeit erinnert Delrio die Züchtiger in disquisitionibus Magicis. †

Alſo könden die Weinſchencke jhnen auß diſer Lehr leichtlich ein einkommen machen: Nur die Eychkandel einmal oder etlich die Staffeln hinunter geworffen / damit ſie braitmäulig werde / ſo gehet dann weniger drein.

Ein verwantnus iſt zwiſchen diſen gantz beſchloßnen vmbzeunungen vnd zwiſchen dem Bogen. Wann ein Bogen halb Circkelrund gebogen wirdt / ſo beſchleußt er mit ſampt ſeiner Sennen vielmehr / dann wann er eintweder weniger gebogen wirdt / mit einer lengern Sennen / oder mehr gebogen / mit einer kürtzern Sennen.

Ex Th. 4.

70. Wann deß euſſern Feldes an Wänden gleich vil iſt / welche Figur alsdann am maiſten Raum beſchlieſſe.

Antwort / wann die Feldung gantz Kugelrund iſt / dann ſie hat gliechſamb vnendtlich viel Wände / alſo das ein jeder punct für eine Wand zuſchätzen. Nach jr helt allezeit die Figur am maiſten / die der Kugel am ehnlichſten / das iſt die am maiſten gleicher vnd in die Kugelrundung geordnete Wände hat: als Pyramis helt am wenigſten / weil ſie nur vier Wände hat / Cubus mehr / dann er hat ſechs Wände / Octaedron noch mehr / dann er hat jhrer achte / hernach das Dodecaedron, oder zwölffwändig / vnnd am meiſten das Icosaedron oder die zwaintzigwändige Figur.

Zum Exempel / du kauffteſt vmb ein gewiſſe Summa Gelts ſoviel Traids / als du in drey Elen Zwilch faſſen magſt / ich rahte dir / mach keinen langen Sack darauß / ſondern ſchaw wie du den Zeug am füglichſten zu einer Kugelrundung ſchneideſt / nemlich ſchneide jhn zu 10 gleicher rauttenſtucken / vnd ſetze ſie ordenlich zuſamen.

Hieher gehört auch diß / das ein halbe Kugel gröſſer iſt / dann ſo man jhr euſſeres Feld zu einem andern Kugelſchnitz brauchete / der wäre gleich von einer gröſſeren oder von einer kleinern Kugel.

Auß Th. 4.

71. Wann die beſchloſſene Figuren alle in ein hole Kugel geordnet ſeind / vnd mit jren Ecken an deren inwendig anſtehen / welche alsdann am maiſten Raums einfange.

Antwort die am maiſten Ecke hat / vnnd alſo der Kugel am ehnlichſten iſt / dann die Kugel hat gleichſam vnendtlich vil Ecke / beuget ſich vmb vnd vmb. Hie gilt es nicht mehr / die am maiſten Felder hat / Nein / dann die zweintzigwändige fangt hie weniger / als die zwölffwändige / dieweil dise hat zweintzig Ecke oder Spitze / jene nur zwölffe / spreist sich also mehr dann dise (verstehe mit lengern spitzen) derowegen dann auch / nach dem gemeinen sprichwort / desto weniger darhinter / oder darinnen ist. Also spreisset sich auch die achtwändige / oder der spitzige Diamant / in der Kugel / mit 6 | spitzen viel mehr / dann der Würffel mit achten / hat derhalben auch weniger Raums in sich / dann der Würffel. Am allermeisten spreist sich die vierwändige Pyramis mit vier spitzen / vnd fanget am allerwenigsten Raums ein.

72. Welche auß den beschlossenen Figuren / (so da sechs Wände haben / vnd alle in einer Kugel stehen) am maisten Raum einneme. Auß dem 4. Th.

Antwort / diejenige / die am besten geordnet / vnnd also der Kugel abermahl am ehnlichsten ist / dann die Kugel sihet vmb vnnd vmb jhr selber gleich / derhalben auch vnder allen sechswändigen Seulen oder nideren Platten / die am Leib oder obern- vnnd vndern Boden gerecht viereckt seind / ist der Würffel / welcher sechs gevierter vberal gleicher Wände oder Böden hatt (so hoch als brait vnnd lang) am fähigsten: Merck hierumb diß Täfele / da der diameter in der Kugel ist 20.

Die viereckete Platten.				Die viereckete Seulen.			
Höch	braitte	zwerlini	Leib	Höch	braitte	zwerlini	Leib
1	14 +	20 —	399	Ein an-	der gleich	16 +	3080
2	14 +	20 —	792	12	11 +	16	3072
3	14 —	20 —	1173	13	11 +	15 +	3003
4	14 —	20 —	1536	14	10 +	14 +	2856
5	14 —	19 +	1875	Ein an-	10	der gleich	2828
6	13 +	19 +	2184	15	9 +	13 +	2625
7	13 +	19 —	2457	16	8 +	12	2304
8	13 —	18 +	2688	17	7 +	11 —	1887
9	13 —	18 —	2871	18	6 +	8 +	1368
10	12 +	17 +	3000	19	4 +	6 +	741
11	12 —	17 —	3069	20	0	0	0
Höch	lini der vierung am boden	diameter am Circkel-runden Boden	Leib	Höch	Lini der vierung am Boden	diameter am Circkel-runden Boden	Leib oder raum
Die nidere Wellen / Täller oder Räder / Cylindri humiles, breves, crassi.				Die hohe schmale Wellen / Wellbäume / Waltzen / Walger / Cylindri graciles, longi, alti.			

7) eins *statt* ein 19) 794 *statt* 792 22) 10 — *statt* 10

Auß dem 5. Th.

73. Welcher Walger oder Cylinder auß allen denen ſo mit einander eine zwerlini von eim Boden zum andern / oder ein Viſier halten / iſt am fähigſten?

Antwort / derjenige / da man mit der höche ein quadrat oder vierung auff den runden Boden machen kan / das mit allen vier ſpitzen an den vmbkreiß reichet. Wann diß geſchicht / ſo helt die vierung vom | diameter am Boden / gerad zwey mal *61* ſoviel als die vierung von der höch.

Als es were die höch 10000 / ſein vierung iſt 100000000 / diſe doppelt iſt 200000000. ſuche hierauß die Wurtzel die iſt 14142 / ſo lang wer der diameter, oder hingegen / ſo der diameter iſt 100000 wirdt die höch ſein 70711. So aber die Viſierlenge von dem einen Boden oben in die zwer gegen dem andern Boden vnderſich helt 20 / ſo wirt die höch deß Walgers 11(5 / vnd der diameter am Boden 16 + halten.

Alſo macht man faſt die Metzen / alſo werden die meiſte Bottungen / alſo ſeind faſt die halbe Fäſſer in Oeſterreich / nach dem Beyhel entzwey geſchnitten.

Auß dem 6. Th. vnd parte 3. No. 4.

74. Zurechnen wie lang ein jedes Faß zwiſchen beiden Böden innerlich / Item wie lang es vom Beihel biß zum Boden nach der rechten geräde / vnder der Taufel? Item wie lang die zwer oder Viſierlini ſey?

Wann du nicht weiſſeſt wie dick die Taufeln am Holtz ſeind / vnd alſo dem euſſerlichen meſſen nicht trawen kanſt / ſo nimb einen Stab von gleichen theilungen / vnd meſſe die höch / breitte / oder weite an baiden Böden / vnd die tüeffe am Bauch / ſo dann auch die zwerlini vom mitteln puncten deß Beihels gegen dem vnderſten theil deß einen vnd deß andern Bodens: dann beide zwerlinien ſollen gleicher Lenge ſein / inmaſſen auch baide Böden nicht allein in die höch / ſondern auch in die breitte / gleiche diametros haben ſollen.

Die halbe Taufelleng zurechnen.

Multiplicir nun die zwerlini in ſich ſelbſten / multiplicir auch die tieffe deß Bauches in die höhe deß Bodens / was dir hie kompt / das nimb hinweg von dem das dorten kommen / was dir vberbleibt darauß ſuch die Wurtzel / ſo haſtu die gerade Strecke vom mitteln puncten deß Beyhels / biß zum nechſten puncten deß Bodens. Nimb auch hinweg den halben diameter deß Bodens vom halben diameter deß Bauchs / was bleibt das multiplicir in ſich ſelbſt; was dir hie kompt / das zeuch ab von dem / ſo dir beſſer oben vbergebliben / was dir dann jetzo vberbleibt / darauß ſuch abermal die wurtzel / ſo haſtu die halbe Leng deß Faſſes / oder ſeine halbe höche / wann mans auffſtellet.

Die halbe Faßleng zurechnen.

Zum Exempel / ein Fäßl hielte am diameter deß Bodens (iſt in nechſt folgender Figur die lini CT) 288. gleicher theil / am Bauch aber / oder an der lini AV, hielte es deren theil 327, vnd in die quer / oder an der zwerlini CA, vom Beihel biß vnden an Boden 354. Wirdt nun gefragt nach TA oder CV, der halben Taufellenge nach der geräde / vnd nach TR oder CS der halben Faßlenge.

12) 11(4 20) (*Randnote*) Taufeleng 37) Tafellenge

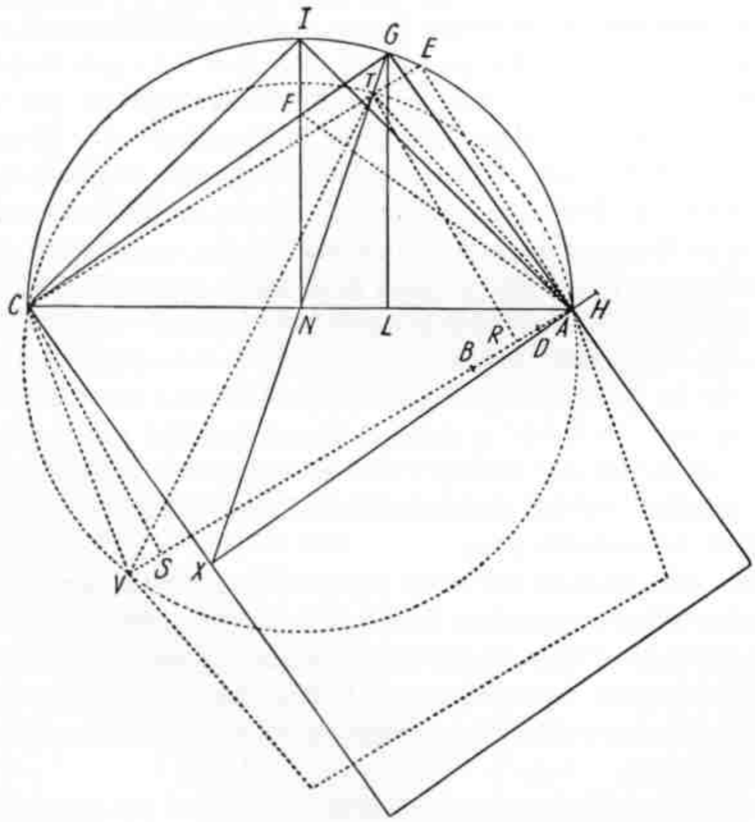
So multiplicir 354 mit sich selbs / so werden drauß 125316. multiplicir auch 288 in 327 / kommen 94176 / das nimb von jenem / bleiben 31140 / so groß ist die vierung von CV. deren Wurtzel ist 176 s. nämlich TA oder CV.

Ferners nimb halb CT, das ist 144 / von halb AV, das ist 163 s. bleiben 19 s. diß in sich selbs gibt 380 / das nimb von der vierung CV, bleibt 30760 / ist die vierung von CS oder TR, dessen Wurtzel 175 vnd ein drittheil / diß ist die halbe Faßlenge.

Also hinwider / so das Faß verbeyhelt bleiben muste / vnnd doch nach der quer AC gefragt wurde / muß man den Boden CT, den Bauch AV, vnd die halbe Taufellenge nach der geräde / nemlich TA / oder CV bekant haben. Dann so multiplicirt man die halbe Taufel CV oder TA in sich selbst / vnnd den Boden CT in den Bauch AV / setzt beides zusamen / vnnd nimbt auß der Summa die Wurtzel / so findet sich die zwer- oder Visierlini AC.[1]

Die Zwer oder Visier lini zurechnen.

62 Zum Exempel. Es wäre inwendig vmb den Bauch eines grossen dreyling Fasses 153 zoll vnd fünff 19 theil / vmb die Frösche innen herumb 135 zoll vnd zwelff 19 theil / vnd die lenge zwischen Böden were 63 zoll vnd drey 19 theil / wolte gern wissen die Visierlenge deß Fasses. Hie muß ich erstlich die zwen diametros suchen / auß jhren



vmbkraisen / nach der 6. Lehr. Wöllen setzen die Circkel seyen alle perfect: so wirdt deß ersten diameter AV sein 927. 19 theil / deß andern CT 820 / vnnd die lenge zwischen Böden 1200 / weil dann dise halb / nämlich TR oder CS, ist 600, vnnd halb CT 410 / vnnd halb AV 463 s. so nim halb CT von halb AV, bleibt VS oder

RA 53 s. multiplicirs in ſich ſelbs / ſo wirdts 2862 / das ſetze zu der vierung von TR 360000 / ſo kompt die vierung TA oder CV 362862: multiplicir auch CT 820 in AV 927 / kompt 760140 / ſetze baide zuſamen / ſo folgt die vierung von CA 1123002 / demnach ſo iſt hierauß die Wurtzel 1060. 19 theil eines Zolls / diß iſt 4 Schuch 8 Zoll / das were nach der Lintzer Viſierruthen (als drunten No. 80. folgen ſoll) bey 29 Emmern.

Ex Th. 5.

75. Was ein Oeſterreichiſches Faß heiſſe / wie es zugerichtet werde / vnd wie es nach dem Boden / Taufeln oder Zwerlini zurechnen.

Die Binder in Oeſterreich haben ein Regel ein Faß zumachen. Wir / ſprechen ſie / Setzens auffs drittheil / das iſt / ſie nemen ein Taufel / theilen die in drey gleicher theil / faſſen mit dem Circkel das ein drittheil / vnnd reiſſen darmit den vmbkraiß zum Boden / welchen das Faß haben ſolle; nach ſolchem vmbkraiß nemen ſie deren Taufeln viel oder wenig / biß ſie deren gnug haben; wann die Taufeln zuſamen gerichtet ſeind / dann ſtreichen ſie allererſt baide Sagen darein; darmit kürtzen ſie den theil von der Taufeln / der zwiſchen baide Böden hinein kompt / vmb etwas ab / das er nicht mehr ſo lang iſt als drey halber diametri deß Bodens / die Fröſche oder velgen an baiden orten gehen darvon hinweg / vnd vber die Böden auß.

Demnach aber ein jedes Faß zwey gleiche halbe thail hat / vom Beihel gegen baiden Böden hinauß / vnnd aber man die Viſierruthen durch die zwer [1] nit deß *63*
gantzen / ſondern nur deß halben Faſſes hinein ſenckt / alſo findet es ſich auß diſer zurichtung der Fäſſer / daß ein halbes Faß gleich nach einem ſolchen Walger oder Wellen gerichtet / wie bey No. 73 beſchrieben / die nämlich auß allen andern Wellen / welche nach der Viſier nur ein zwerlini vndereinander haben / am allerfähigeſten ſeye. Dann gleich wie die Wellen No. 73 / wann ſie am Boden 100000 brait iſt / alsdann inn der höch 70711 hat / vnnd diß gedoppelt macht 141422 / welches weniger iſt dann 150000 / drey halbe diametri, alſo auch am Oeſterreichiſchen Faß / iſt die Taufeln vmb die Fröſche weniger / dann drey halbe diametri am Boden.

Taufel zurechnen.

Demnach wirdt die Taufel zu einem Oeſterreichiſchen Faß nach dem bekanten diametro deß Bodens alſo gerechnet / Multiplicir denſelben inn ſich ſelber / was kompt / das halbire / vnd ſuch diſes halben thails Wurtzel / ſo haſtu die halbe Tauffel= leng auff die Oeſterreichiſche form.

Bauch zurechnen.

Hingegen vnnd wann dir auß einem Oeſterreichiſchen Faß die zwer= oder Viſier lini fürgelegt wirdt / zuſampt dem diameter deß Bodens / nämlich AC vnnd CT, ſo rechne den Bauch AV alſo. Multiplicir die Zwerlini AC mit ſich ſelber / vnd den Boden CT deßgleichen / was baider orten kommet / muß alſo beſchaffen ſein / daß das letztere nicht etwa mehr dann 2 drittheil ſey deß vorigen; ſonſten gibt es kein Oeſterreichiſche form.

Auß dem 6.7.8.9. Th.

Dann ſo halbir das letztere / vnnd diß halbe thail zeuch ab von der vierung AC, † das vbrige dividir mit dem Boden CT. ſo kompt der Bauch AV.

Zum Exempel / die Zwerlini wär 100 / ſein vierung iſt 10000 / nu laß deß Bodens diameter ſein 80 / ſein vierung iſt 6400 / weniger dann 2 dritte theil von 10000 /

3) 760040 4) 1122902 34) halbe Taufelleng *statt* Zwerlini

kan derowegen ein Oeſterreichiſches Faß werden. Nimbs halb / das iſt 3200 / diß von 10000 genommen / bleibt 6800 / das dividir mit deß Bodens diameter 80 / ſo kompt 85 / ſo tüeff wäre der Bauch AV: damit das Faß ein Oeſterreichiſche form gewinnen möge.

Darauß dann hernach die lenge deß Faſſes folget / wie No. 74. Faßleng zurechnen.

Dann wann CT, oder SR iſt 80 / vnnd VA 85, ſo iſt SV, oder RA 2(5 / oder dritthalbs / deſſen vierung iſt 6(25, nimbs von der vierung TA oder CV, nämlich von 3200 / ſo bleibt 3193(75 für die halbe lengen TR oder CS. Wirt alſo die Wurtzel auß diſer vierung ſein 56(51 vnd die gantze Faßlenge 113.

Wurde dir aber mehrers nicht gegeben / dann die zwerlini AC, vnd allein der Schick oder proportz zwiſchen dem Boden CT, vnnd dem Bauch AV inn zwoen zahlen / ſo thue eben als wäre dir Bauch / Boden vnd Taufeln gegeben / vnd ſolteſt die zwerlini erſt ſuchen / die ſuche auch nach der 74. Lehr. Hernach brauch die Regel detri, nach der 13. Lehr / darmit du das gefundene Maaß in das gegebne Maaß der Zwer⸗ oder Viſierlini vberſetzeſt. Bauch Boden vnd Faßlenge zurech⸗nen.

Nimb deſſen vier Exempla / Es ſey der diameter deß Bodens zum diameter deß Bauchs wie 8 zu 9. 9 zu 10. 14 zu 15. 17 zu 18. Aber CA ſey gewiß vnnd warhafftig 100 / wie kompt der Boden CT aygentlich? So ſetze nun Boden vnnd Bauch ſey 8 vnnd 9 / etc. vnnd ſprich /

8 mal	9 mal	14 mal	17 mal
9	10	15	18
iſt 72	iſt 90	iſt 210	iſt 306
8 mal	9 mal	14 mal	17 mal
8	9	14	17
iſt 64	iſt 81	iſt 196	iſt 289
halb 32	halb 40 s.	halb 98	halb 144 s.
zu 72	zu 90	zu 210	zu 306
macht 104	macht 130 s.	macht 308	macht 450 s.

Were alſo diß die vierung von CA nach dem geſetzten Maaß.[1]

64 Entlich multiplicir das warhaffte Maaß zu CA, nämlich 100 in ſich ſelbſt / ſo wirdts 10000. Nun ſprich durch detri.

			deß Bodens	deß Bauchs	Komen
Die vierung CA, ſo	104	hat warhafftig 10000	64?	81?	6154. 7789.
da nach dem geſetzten	130 s.	was hat dann die	81?	100?	6207. 7663.
maß haben ſolt	313	vierung	196?	225?	6363. 7305.
	450 s.		289?	324?	6417. 7192.

Hierauß die wurtzeln genommen zeigen die vier Böden CT 78(45. 78(8. 79(77. 80(1. vnnd die vier Beuche VA 88(25. 87(55. 85(47. 84(8.

9) vierund 18) 180 *statt* 100 22) 215 *statt* 210 27) 215 *statt* 210 28) 313 *statt* 308
30) multiplicirt 36) 6262. 7188. *statt* 6363. 7305. 38) 79(14 *statt* 79(77 39) 84(79 *statt* 85(47

76. Erſte wunderbarliche aigenſchafft eines Oeſterreichiſchen Weinfaſſes / vnd warumb diſe weiſe zu Viſieren / nur allein in Oeſterreich ſo gemein ſey / vnd ſonſten in keinem andern Land.

Wann nun dem alſo / als folget / das ein Oeſterreichiſches Faß / nach der Viſier / vnder allen Fäſſern (wellenrund zuverſtehen / vnd die Beuche jetzo hindan geſetzt) am meiſten halte / ſie ſeyen jetzo gleich lenger / wie die Reinfäſſer / oder kürtzer / wie etliche Vngariſche.

Vnd fürters / weil der Oeſterreichiſche Binder wie gehört / auff das meiſte zihlet / alda es mit dem innerlichen Raum gleich innen ſtehet / vnd im wexel iſt / wie du in hie vorgeſetztem Täfele No. 72. (ſo nach außweiſung der vntergeſchribnen Wörter auch auff die Wellen zugebrauchen iſt) bey den zahlen 3069 / 3080 vnd 3072 zuſehen haſt; alſo kan es jhme nicht viel am Raum fehlen / wann er gleich nicht eben genaw den Zweck erreicht: oder wann er ſchon einmal die Fröſche abſchneiden / ein andere Sag ſtreichen / vnd einen gröſſern Boden einſetzen muß.

Zum Exempel / das Faß ſey alſo gerathen / wann ſein Viſier 20 gleicher theil gewinnet / das es an den Taufeln (ſovil von denſelben zwiſchen beide Böden hinein kompt) halte ſolcher theil 12 zwei mal / ſuche im Täfelin 12 vber dem Titul / HOECH/ da findeſtu gegenvber vber dem Titul DIAMETER am Boden / das der diameter halten werde 16. Hie were alſo das Faß zwiſchen den Böden 3 halber diametros (das iſt 3 mal 8 / nemlich 24) hoch / vnnd die Fröſche giengen noch drüber auß / anderſt dann wie droben in beſchreibung deß Oeſterreichiſchen Faſſes gemeldet worden. Da findeſtu den halt eines ſolchen Faſſes vber dem Titul LEIB / 3072. So aber das Faß recht were getroffen geweſt / hette es zwiſchen beiden Böden nicht 24 / ſondern nur 23 halten müſſen / vnnd am diameter deß Bodens 16 vnnd ein 3 theil / vnnd hette alſo gehalten 3080: der vnterſcheid iſt 8 / darmit dividir 3080 / ſo kompt 385 / wurdeſt alſo allererſt die 385te maaß oder Achtering weniger in einem ſolchen Faß haben / dann die Viſierruten ſagt / das were von 10 Emmern kaum ein Achtering weniger.

Hingegen verſuchs mit einem kürtzern Faß / das vom Beihel biß an Boden nur 11 / vnnd alſo zwiſchen beiden Böden nur 22 habe / eins weniger dann in der rechten Oeſterreichiſchen form / vnd ſey alſo (wie du im Täfelin gegen 11 vber ſiheſt) der diameter am Boden etwas weniger dann 17. Diß Faß wirt 3069 halten / zeuchs ab von 3080 ſo bleibt 11 / darmit dividir 3080 / kompt 280 / da wirſtu nun die 280te Achtering weniger haben / als die Viſierruten ſagt: käme auff 7 Emmer erſt ein Achtering.

Siheſt alſo / das die Oeſterreichiſche Fäſſer / ſie gerahten gleich lenger oder kürtzer / nur das deſſen nicht gar zuvil werde / allwegen beynahe jhre Viſier halten / vnd jhnen baider orten ein kleines abgehe / ſo nicht zuſchätzen iſt.[1]

Nimb aber jetzo ein Reinfaß / das auch Wellenrund ſey (dann wir reden jetzo *65*
noch nicht von den Baucheten) diſe werden gemeiniglich alſo gemacht / das die Taufeln zwiſchen beiden Böden zweymal ſo lang ſein / als der diameter am Boden / oder

16) der *statt* den 29) einen

das die halbe höche vnnd derselbe diameter einander gleich seind / beide etwas mehr dann 14 / von ihrer Visierruthen 20; Suchs im Täfele / da findestu den Leib oder Raum 2828 / das zeuch ab von 3080 / bleibt 252 / darmit dividir 3080 / kompt nit gar 12 / Hie wirdt dir alwegen die 11. oder 12. Achtering oder Emmer abgehen / wann du die Oester. Visierruthen bei einem solchen Faß brauchen woltest / also das ein solches Weinfaß / so nach anzeig der Oesterreich. Visierruthen sechßthalbe Emmer halten solte / nur fünff Emmer hat / für eins.

Wann aber du schon auff ein solches Weinfaß ein besondere Visierruthen zurichten woltest / so lasse sehen / wievil auch dise fehlen wurde / wann der Binder nit eben gleich das Maaß träffe.

Setze erstlich / das Faß werde ein wenig kürtzer oder niderer / nemblich gerad 14 zweymahl / vnd der diameter am Boden werde lenger dann 14 (solten im rechten maaß gleich sein) da findestu im Täfelin gegen vber / das sein Halt sein wurde 2856. Nun were das rechte maaß gewest 2828 / hie hette nun durch deß Binders verfehlen / ein solches Faß gewunnen ein vbermaß 28 / das were die 101. Achtering zuviel vnnd mehr dann sein eygene Visierruthen sagte / vnnd ist doch hie die höche nur vmb den sibenden theil einer vnitet kürtzer genommen / nemblich 1400 an statt 1414. Laß aber fürs ander das Faß ein wenig lenger werden (wie dann die Weinfässer offtermals vil lenger seind an tauffeln / dann zwen Böden aneinander gelegt) also daß das halbe Faß die drey viertheil von seiner visier hoch sey / oder 15 von 20 / da findestu den Halt im Täfelin 2625 / ist vmb 203 weniger dann 2828 / gieng dir allwegen die 14te Achtering oder der 14te Emmer vnnd also ein merckliches ab / durch ein solches verfählen deß Binders / wann du schon dem Weinfaß ein besondere Visierruthen machtest.

Zuvor were es zuvil worden / jetz were es zuwenig. Nicht vil anderst helt es sich auch mit den kürtzern gestumpeten Fässern. Dahingegen das Oesterreichische Faß / beider orten zuwenig / aber vmb ein vnkenliches vnnd schier gar nichts zu wenig helt. Vnd hast also auß dieser vergleichung anderer Fässer mit dem Oesterreichischen / leichtlich abzunemen / das ein Oesterreichischer furm ein besondere artige eigenschafft vor andern außlendischen Formen habe / nicht allein zum vil fassen / sondern auch / vnd sonderlich / zu der Visierruthen / oder zum wenig fehlen. Das wirt aber bey der andern eigenschafft noch mehr erscheinen.

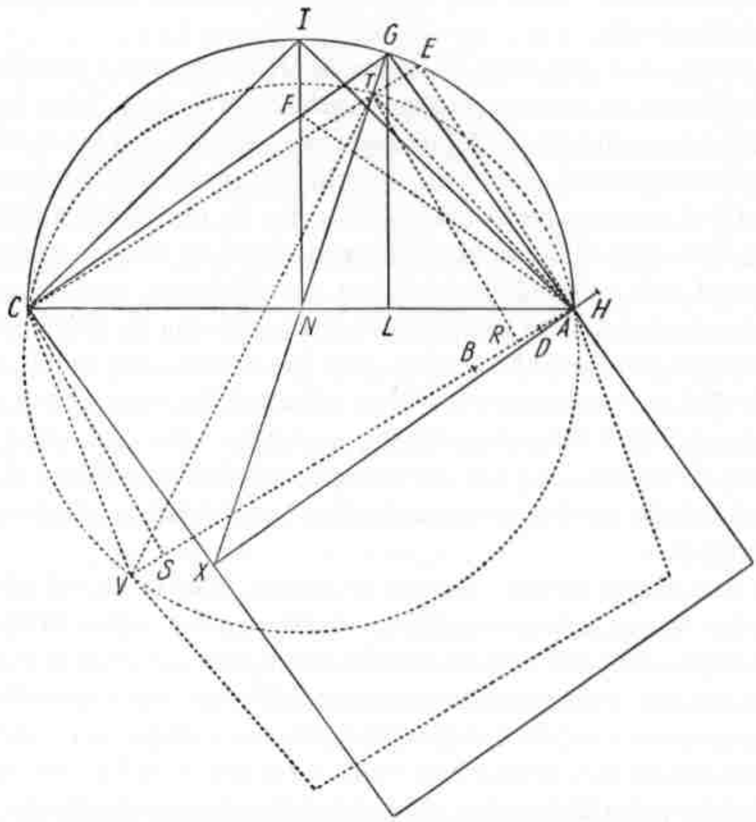
77. Die andere noch mehr wunderbarliche aigenschafft eines Oesterreichischen Weinfasses / vor andern außlendischen.

Bishero ist nichts auff die Beuche der Fässer geschetzet worden / wie dann die meiste Weinfässer / wie auch die grosse Oesterreichische Dreyling gar geringe Beuche haben. Weil aber doch bißweilen auch gar großbauchete Weinfässer / so auch dergleichen großbauchete Anlägen / Oesterreichischer Form / fürkomen / als fragt es sich / wie sich hie die Visierruthen halte / vnnd ob jhr so schlecht zutrawen / oder wieviel sie bey einem vnnd andern Faß / zuvil oder zuwenig sage.

1) weniger *statt* mehr

Antwort / wann es gespilt werden solt / so könte man die Karten nicht künstlicher legen oder wünschen alß es alhie mit dem Oesterreichischen Faß versehen ist / das kanstu also verstehen.

Schlage dir dißmahls die runde krümme zwischen dem Beihel vnnd beiden Böden auß dem Sinn / vnnd thue als wann der Bauch am Faß zu einer schneide zusamen
lieffe / oder als wann es vmb das Beihel ein Reiffen hette / | nämlich als wann 66
das Faß nichts anders wäre / dann zwo Botunge / oder zwen abgestämte Kegelstöcke / mit den braiten Böden auff einander gestürtzt / wie bey der 18. Figur zusehen /



noch mehr aber bei hie bey gefügter 21. Figur / da ist der braitte Boden VA, der Kegelstock VCTA, vnnd der andere vnten daran disem gleich.

Es wölle sich aber der einfältige Leser nicht ergern / das ich von solcherley Fässern schreibe / die nicht in rerum Natura, oder doch zum wenigsten nicht inn Teutschland seind. Es geschicht darumb / weil die Richtschnur / nach welcher die Fässer sich arten / muß vom grund auß disputirt werden: diser Richtschnur hab ich im Lateinischen Werck nicht den namen Faß / sondern vilmehr nomen artis, nämlich Truncus conicus, gegeben / Teutsch Kegelstock. Allhie aber inn disem Teutschen außzug / hab ich mit dem namen Faß / dem Teutschen Leser etwas besser fürleuchten wöllen / dieweil doch das meiste (wiewol nicht alles) an den Fässern vnd sonderlich an den Botungen zusehen ist.

Weil nun hie durch den puncten A das Beihel verstanden wirt / oder in den Botungen der ranfft vnd durch AC die Visierruthen / so bedencke ferners / das solche lenge AC bleiben / vnd hingegen die form deß Fasses oder der Botung sich auff vil vnd mancherley wege vergstalten vnd verstellen könde / als AGCX ist ein halbes Oester. wellenrundes oder gerades Faß / ATCV ist noch die Oester. form / aber bauchet wie ein Botung / dann die halbe Taufel AT helt sich gegen dem diameter am boden TC, gleich wie die halbe Taufel AG, gegen dem diameter am boden GC, vnd haben doch baide formen nur ein Visierleng oder zwerlini AC. Also kan sich der boden CT fort vnd fort verkleinern oder vermindern / vnd hingegen der bauch oder in der Botung die weite deß obern ranffts AV vermehren lassen / daß CT vnd AV je neher vnd neher zusamen kommen / biß entlich baide linien CT, TA sammtlich der lini CA gleich lang werden / vnnd hingegen AV so lang als baide AC, CV; darmit ist der Bauch AV oder die obere weite inn der Botung so groß gewachsen / biß entlich gar nichts mehr drinnen gebliben / vnd baide böden am Faß auff einander getruckt worden. Hierauß merckestu / das entlich der grosse bauch (verstehe an solchen Fässern da ein jede Taufel vom Beihel an / zwo gerade strecken hat) nur schädlich wirt / vnd auß zweyen Fassen die nur ein Visier AC haben / nicht allewege das jenige am meisten halt / das den grössesten Bauch hat.[1]

Auß dem 19. Th.

67 Was nun gesagt von der Oesterreichischen form oder proportz der höch AT, gegen dem diameter TC, das soll auch verstanden werden von allen andern formen vnd proportzen / als zum Exempel / AIC, AFC ist die Reinform / doch die Fässer seind nicht gar außgemahlet. Dann AIC bedeuttet das Faß / Wellenrund / aber AFC bedeuttet es mit einem schneidenden Bauch bey A, vnd haben doch abermals baide Fässer vnder jhnen selbs / vnd mit den zweyen vorigen Oesterreichischen nur ein Visier AC. Wie aber IC der Boden am Reinfaß viel kleiner worden / dan GC der Boden am Oesterreichischen Faß / da doch die Visier AC baider orten nur einerley / also kan der Boden IC auch fort also je mehr vnd mehr vermindert / vnd endtlich gar zu einem puncten / vnd das Faß zur lini werden / darmit dann abermal nichts darinnen bleibt / wie dann im obigen Täfele zusehen / wie sich der Leib oder Raum mit dem Boden CI verminderе oder vermehre. Gleichsfals kan solcher Boden CI auch grösser werden / nämlich CG, alda das Wellenrunde Faß / wie obgesagt / am maisten helt; Item es kan der Boden noch grösser werden / nämlich CE, da es anfahet wider weniger zuhalten / biß endtlich der Boden so groß wirt als CA, vnd die höch gar verschwindet / also das abermals baide Böden zusamen kommen / vnnd kein Faß mehr da ist. Hiermit haben wir kreutzweise vnendtlich vielerley Sorten der Fässer / die alle vndereinander nur ein Visier AC haben.

Hie fragt sichs nur / weil erstgemeldet / das man endtlich den schneidenden Bauch so weit vnd tüeff machen könde (wann die Visier lini bleibt) daß das Faß weniger halte / als wann es gar keinen Bauch nicht hette; ob dann alle solche gerade oder zugescherffte Bäuche schädlich. Antwort / an den kurtzen gestumpfften Fässern zwar / die da kürtzer seind dann das Oesterreichische / ist es allezeit also / je grössern zugescherfften Bauch sie haben / je weniger sie die Visier halten / es sey die Oesterreichische / oder jhr aigne Visier / vnnd wann ein solches kurtzes Faß nach den Taufeln gerad vnnd ohne Bauch ist / so helt es sein Visier am maisten / oder gehet jhme von dem Halt / den die Oesterreichische Visierruthen zeiget vnd aussaget / am wenigsten ab.

Auß Th. 22.

30) BE, 43) Visierrutten

Hingegen an den langen Fässern wie die Reinfässer seind / ligt vil daran / das sie bauchet seyen / dann der Bauch wann er auch gleich zugescherfft / oder ein magerer Bauch ist / gibt jhnen das sie die Visier besser halten / dann wann sie gerad vnd Wellenrund wären / vnd gar keinen Bauch hetten; doch zuverstehen von zimlichen vnnd gebräuchigen Bäuchen / dann wie gehöret / wann die zugescherpffte Bäuche vngewonlich hoch / vnd die Böttungen oben gar weit werden / wie die Milchschüsseln oder weitlinge / so dräet sich das spil wider vmb / das sie allgemach wider weniger / vnd entlich gar nichts halten.

Auß Th. 12. 13. 14. 15. 16. vnd sonderlich 17. Ex Cor. Th. 22.

Aber an den Oesterreichischen Fässern / wie sie oben No. 74. beschriben / ist es abermal gleich im wechsel / der schneidende Bauch gibt jhnen nichts vnnd nimbt jhnen nichts / er wolte dann vngewonlich groß werden / da nimbt er jhnen auch / wie allen andern: wie aber bald hernach gemeldet werden soll / so kompt jhme diß als=dann zu hilff / das man hie zu Land keine solche Bäuche an die Fässer machet / da die Taufeln von Böden an gegen dem Beihel gerad zu lauffen / vnd vmb die Mitte deß Fasses einen Reiffen oder schneide machen.

Helt also ein Oesterreichisches Faß allezeit seine Visier / es hab einen solchen Bauch oder hab keinen / vnd diß ist die andere wunderbarliche aigenschafft eines Oester=reichischen Fasses vor allen anderen: darum dann die Oesterreichische behende weise zu Visieren sonst inn keinem Land / da anderley Sorten Fässer im brauch seind / gebraucht werden mag.[1]

Ex partis 3. No. 3.

78. Wievil die Oesterreichisch Visierruthen an einem jeden Außlendi=schen oder vngewonlichen Faß / das doch sonsten am Bauch mit dem Oesterreichischen einerley Geschlechts ist / zuvil oder zuwenig sage. 68

Der richtigest weg diß zu wissen ist diser / rechne nach dem du thails bißhero bist vnderwisen worden / thails im dritten thail noch weiters wirst vnderwisen werden / wievil ein jedes Faß warhafftig halte / Visier es hernach mit der Oesterreichischen Visierruthen / wirstu leichtlich sehen / wievil es mehr oder weniger halte / dann dir die Visierruthen sagt.

Hette aber einer lust zur Kunst / vnnd wolte dises wissen ohn die Visierruthen / wie sie in Oesterreich gemacht wirt / nur allein auß erkundigung der tieffen am Bauch / deß diameters am Boden / vnd der Taufeln Leng zwischen baiden Böden / wie man am Reinstrom visiert / der findet im Lateinischen Werck nicht allein den process zu einer solchen vergleichung / sondern auch den augenscheinlichen beweiß vnd allerhand vortheil zurechnen.

Dann es gleichwol etwas kürtzern process gibt / als wann man sonsten den Ordinari weg gehet mit der Faßrechnung / auch guten beschaid vnd gemercke hat / das einer nicht darff sorgen es verführe jhne die rechnung / oder er habe etwa ge=fählet / sondern er weißt zuvor / wievil jhme aller orten vngefahrlich kommen müsse: wer nur das Fundament recht verstehet.

Dieweil aber doch dise demonstration mit sampt den gebrauchten Terminis auch im Lateinischen gantz new vnd vngewonlich / dahero ich mich besorgen müssen / es

16) Bnuch 24) wege

werde für den Teutſchen Leſer noch viel ſchwärer vnnd alzu ſpitzfindig ſein; als hab ich ſie hie nicht nach der leng einführen / ſondern allein die Summen deſſen / was durch ſolche demonstration albereit gerechnet vnnd gefunden worden / hieher vberſetzen wöllen.

Nämlich gleich wie das Oeſterreichiſche gerade oder Wellenrunde Faß (oder die Oeſterreichiſche gerade Bottung) das aller erſte iſt von den lengern zu den kürtzern zu gehen / welches allezeit ſoviel / ja entlich ein wenig mehr in ſich helt / dann ein anders Oeſterreichiſches Faß / mit einem zugeſcherfften Bauch / (oder ein Botung oben weit) ſo mit dem vorigen nur ein Viſier hat: alſo findet es ſich auch inn den lengern Fäſſern / als wie die Reinfäſſer ſeind (vnder welchen wie No. 77 gemeldet worden / Ex Th. 19. 20. 21. die Bauchete noch fähiger ſeind / dann die gerade Wellenrunde jhres geſchlechts) das allwegen das jenige Bauchete vnder allen andern ſeins geſchlechts am fähigiſten iſt / welches mit dem Oeſterreichiſchen Wellenrunden oder geraden / dann zumal nur einerley höch hat / wann baide auff den Boden geſetzt vnd auffgerichtet werden; es ſey nu jetzo das lenglechte Faß höher oder niderer / ſo helt es alle wege weniger dann das gleich hohe / das ligt nicht daran / daß das Oeſterreichiſche braittere Böden / das Reinfaß aber einen tüeffern Bauch hat (verſtehe es vom Bauch mit einer ſchneide) wann ſie nur baide ein Viſier haben.

Ferners vnd wann gefragt wirdt / wieviel dann diſer zugeſcherffte Bauch einem ſolchen lenglechten Faß auffs aller meiſte geben könde / iſt die Antwort / das es vnder den Beuchen von gewonlicher gröſſe kein zihl habe / ſondern je gröſſer Bauch / je
69 mehr ein ſolches bauchetes Reinfaß ein anders gerades Faß ſeines ge|ſchlechts vbertrifft / doch thut der geſcherffte Bauch (was die gewonliche Bäuche anlanget) nimmermehr ſovil / das ein ſolches langes Faß einem Oeſterreichiſchen Faß / mit dem es nur ein Viſier hat / gleich fähig werde / ſondern es haben auch die gebauchete Reinfäſſer (verſtehe die geſcherffte Bäuche) ſo auch die gar hohe oben weite Weinzüber allezeit noch weniger / dann die Oeſterreichiſche Viſierruthen ausſaget.

Wolte man aber durchauß von gewöhnlichen vnnd vngewöhnlichen Bäuchen ge- Ex Cor. ad Th. 13. fragt haben (wiewol alsdann kein Faßfurm mehr bleibt / auch kein Raiff angelegt werden kan) ſo iſt erwiſen / das inn den Reinfäſſern die vbermaaß am fang / von einem an der mitte geſcherfften Bauch verurſachet / vber das gerade Faß ſeines geſchlechts / könde biß auffs dritte theil deßſelben hinein lauffen vnnd nicht höher. Mehrer particularia finden ſich inn hie vnden geſetztem Täfele.

Ex Cor. 2. 3. ad Th. 9.
Ex Cor. 2. ad Th. 25.

† Wann Bauch iſt / Boden	So helt: das gerade (Oeſter.)	das ſcharpf bauchete (Oeſter.)	das gerade (Reinfaß)	das ſcharpf bauchete (Reinfaß)	Das Reinfaß gegen dem Oeſterreichiſchen.
1.2.	15.	11 +	54.	60	vmbs 3 theil mehr vnnd drüber
2.3.	48.	46 +	180.	197 +	vmb das 19 theil mehr
3.4.	99.	97 s.	378.	405 +	Nichts mehr nichts weniger

Nota. Diſe Tafel gilt nur / wann bey beiden ſorten der Fäſſer / die Beuche an der form vnd tieffe einander gleich ſein ſonderlich wann die Beuche zugeſcherffet.

16) da ligt   40) 450 *statt* 405

Wann Bauch ist / Boden	So helt				
	Oester. das gerade	Oester. das scharpf bauchete	Reinfaß das gerade	Reinfaß das scharpf bauchete	Das Reinfaß gegen dem Oesterreichischen.
4.5.	168.	167 —	648.	685 —	vmbs 42 theil weniger
5.6.	255.	254 —	990.	1036 —	vmbs 26 theil weniger
6.7.	360.	359 —	1404.	1456 +	vmbs 23 theil weniger
7.8.	483.	482 —	1890.	1946 —	vmbs 20 theil weniger
8.9.	624.	623 +	2448.	2521	vmbs 18 theil weniger
9.10.	783.	782 +	3078.	3160 +	vmbs 17 theil weniger
19.20.	3363.	3362+	13328.	13468+	Entlich bey nahe vmbs 11 theil weniger / wie im Täfelin bey No. 72 zusehen.

Zuversiehen dises Täfele / so setze es wäre müglich das ein Oesterreichisches Faß köndte gemacht werden / das ein außsehen hette / wie zwen auff einander gestürtzte weitlinge / nämlich welches zweymal so tüeff am gescherfften Bauch wäre / als am † Boden (wiewol es nicht müglich / dann es blibe kein Raiff). Ein Reinfaß (da die Taufel zweyer Böden diametros lang ist) wäre auch zweymal so tüeff am gescherfften Bauch als brait am Boden / vnd hetten baide gleich lange Visier / da würde ein anders Oesterreichisch gerades Faß / so auch dise Visier hette / so offt 15 Achtering haben / als das Bauchete 11 vnnd etwas drüber hette / das gerade Reinfaß wurde so offt 54 haben / als offt das Bauchete 60 hette: wurde also das bauchete Reinfaß vmb den neunten theil mehr halten / dann das gerade Reinfaß / hingegen das Bauchete Oesterreichische beynahe vmb das dritte theil weniger dann das gerade Oesterreichische. Entlich das Bauchete Reinfaß wurde das Bauchete Oesterreichische vbertreffen mehr dann vmb das dritte theil / alles von solchen Beuchen zuverstehen / die von beiden Böden an / gegen dem Beyhel vnnd rings herumb / gerad zugescherffet seind.[1]

Also wann der Bauch deß Oesterreichischen vmbs halb theil tüeffer wäre dann der *70* Boden brait ist / oder wäre gegen dem Bauch / wie 3 gegen 2 / so gieng dem bauchæten die 30ste Achtering ab / wär er vmbs drittheil tüeffer / oder wie 4 gegen 3 / da gieng dem baucheten die 66ste Achtering ab. Da aber die gebreuchige Bäuche anfangen / als / wann sie vmbs vierte theil tüeffer dann der Boden / da ist im baucheten erst von 150 vngefahrlich / die eine weniger / vnnd wirdt also der defect immer fort kleiner / vnnd so fortan auch von Reinischen / vnnd endtlich mit der vergleichung / wann ein Reinfaß mit einem schneidigen Bauch nicht vmb das gantze dritte theil des diameters vom Boden / tüeffer ist am Bauch / so helt es die Oesterreichische Visier gewißlich nicht / vnnd soviel weniger / so viel seicher der Bauch ist / gegen dem Boden zurechnen.

Notwendige erinnerung.

Diß alles ist zuverstehen von solchen Fässern / die vmb das Beihel gleichsam ein scherffe haben: mit denen aber / die von einem Boden zum andern gebogne Taufeln

6) 284 *statt* 254   8) 1846 *statt* 1946

haben / nach einem solchen bogen / der bey baiden Fässern einerley geschlechts ist / als baids am Reinfaß vnd am Oesterreichischen Citronenrund / oder an baiden Spulrund / etc. da ist es gar ein wenig anderst.

79. Noch weittere vnd mehr freyschwaiffende vergleichung allerhand Fässer / die auch an den Bäuchen vnderschidlich geartete rundungen haben: welches vnder jhnen die Visierruthen am besten halte.

Auß dem 29. Th.

Wann man also alle gleichheit der Bäuche an zweyen Fässern ins freye Feld setzet / vnd nicht mehr zwey / welche einerley art rundungen an Bäuchen haben / zusamen nimpt / so ist kein rechte Regul mehr für zuschreiben. Dann alsdann kan geschehen das vnder zwey Oesterreichischen / das eine ein solches gewölb am Bauch habe / durch hülff dessen / es warlich auch die Oesterreichische Visierruthen vbertreffen vnd mehr halten kan. Diß wil ich dir mit etlichen droben bey No. 52. 60. 63. abgehandleten Exempeln beweisen.

Ein Faß / dessen weitte am Boden ist 19 / die tüeffe am Bauch 22 / vnnd also vmb das sechste theil / oder etwas weniger / tüeffer am Bauch dann breitt am Boden: das hat zwischen beiden Böden nach dem geraden Walger gehalten 3290 / etc. vnderm Raiffen oder am Citronenrunden Gürtel 735 / zusamen 4025. wie bei No. 60 zusehen. Wann aber eben dises Faß vmb das Beyhel eine Scherffe gehabt hette vnnd von dannen gegen beiden Böden nicht gebogen gewest were / sondern gerad / so were sein gantzer Raum gegen dem geraden Walger oder Wellen zwischen beiden Böden / nemlichen gegen 3290 gewest / wie 361 gegen 421. Multiplicir die vbermaß 60 mit 3290 / kompt 197400 / das dividir mit 361 / kompt 547 / die setze zu 3290 / so findet sich der gantze Raum 3837 / vmb 188 weniger / dann wann es zwischen dem Beyhel vnnd Boden Circkelrund gebogen were / darmit dividir 4025 / so findestu 21 vnnd bei zway drittheilen / wirt also der Circkelrunde Bauch von einem Boden zum andern allwegen vmb die 21 oder 22 Achtering mehr halten / dann wann der Bauch vom Beyhel gegen dem Boden gerad were.

Damit du aber wissest / von was Fassen diß Exempel lautte / so mercke / das jhme droben sein lenge gegeben worden 27 / da der diameter am Boden gehalten hat 19. vnnd am Bauch 22.

Setze das halbe theil eines jeden seye so lang / vnd weil dann die vierung von 27 ist 729 / vnnd die vierung von dem vbermaß 22 vber 19 nemlich von 3 ist 9 / so wirt mit zusamen setzung 729 vnnd 9 / die vierung zu der halben Taufellenge kommen 738.
71 Die | vierung aber von 38 / (so lang were jetzo der diameter deß Bodens) ist 1444 / dessen halbes theil were 722 / ist also die halbe Taufellenge / mit der vierung 738 / nach der 73. vnnd 75. Lehr gar vmb ein geringes lenger dann die Oesterreichische Faßform vermag.

Das ander Exempel No. 60 / ist mit gantzem Fleiß zur Oesterreichischen Form gerichtet / dann da helt der Boden 3 / der Bauch 4 / die Lenge 4(1231. Dann wann ich die vierung vom Boden 3 nemlich 9 halbire / so wirdt darauß 4(5. die vierung der halben Taufellenge vom Boden biß zum Beihel nach art deß Oesterreichischen

20) beiden *fehlt* 31) von *statt* von

Faſſes. Dannen nemb ich hinweg (25 / iſt die vierung der vbermaß (5 deß halben diameters am Bauch vber den halben diameter am Boden 1(5. Alſo bleibt mir 4(25 iſt die vierung zu der halben Faßlenge. Suche nun die wurtzel hierauß / die iſt 2(06155 vnnd doppelt 4(1231 iſt die lenge deß gantzen Faſſes. Vnnd hat alſo diß Faß die Oeſterreichiſche Form. Diſes nun hat droben gehalten / nach der Citronen=rundung gerechnet / 43(88, aber nach der Art eines gedoppelten Kegelſtocks nur 39(93 / weniger dann zuvor vmb 3(95 das iſt beynahe der eilffte theil weniger.

Sihe da / wann ich hundert Anlagen hette / die alle mit einander I. einerley diametros an den Böden / nämlich vberal 3 / II. einerley Tüeffe am Bauch näm=lich 4 / III. einerley Viſier auff dem Oeſterreichiſchen Hemſtab nach der quer / vnd alſo einerley leng an den Taufeln / nämlich 4(24 hielten / ſie hetten aber doch nicht einerley bögen vom Beihel an gegen dem einen vnnd dem andern Boden / ſondern das eine wäre gantz gerad vom Beihel an / biß gegen jedem Boden / alſo das es nur allein vmb das Beihel einen bug hette / das andere aber / hette vmb das Beihel einen kleinen bogen / mit den vbrigen enden der Taufeln lieff es nach den Böden gerad hinauß / das dritte wäre noch ein wenig mehr ploderet / vnd entlich wäre eins von dem einen boden vbers Beihel herüber gegen dem andern boden gantz gerecht Circkelrund gebogen: ſo köndte bey aller oben außgedingten gleichheit / nur von diſer einigen hinterſtelligen vngleichheit wegen / noch das ein Faß vmb die ailffte Maaß oder Emmer mehr halten dann das andere / vnnd wer nicht die krümme zwiſchen dem Beihel vnnd Böden inn acht nimmet / der kan mit gutem grund nicht ſagen / ob ein ſolches Faß (das vmb das drittheil tüeffer iſt am Bauch / als am Boden) zehen oder ailff Emmer halte / wann er ſchon die Oeſterreichiſche Viſier=ruthen oder ſonſten die gewohnliche Faßrechnung brauchet. Noch mehrere Exempla findeſtu bey No. 63.

Diß hat abermal an den langen Reinfäſſern noch einen mehrern außſchlag vnder jhnen ſelbſten.

Vnd endtlichen wann man allerhand Reinfäſſer mit allerhand Oeſterreichiſchen / ohne einige bedingnus gleicher Bäuche vndereinander hernimbt / vnnd die alle nach der Viſier gleich halten ſolten / ſo kan ſich das ſpil mit No. 77. auch bißweilen gantz vnd gar verkehren / alſo das ein groß vnnd wol gebauchetes Reinfaß / mehr halte dann ein weniger gebauchetes Oeſterreichiſches Faß.

Diß zubeſcheinen / wil ich dir hie an ſtatt allerhand Exempeln / ein Täfelein für Augen ſtellen / inn welchem der Boden vom 25ſten thail biß auffs halbe thail deß Bauches abnimpt.

Merck aber / weil wir hie von der Citronenrundung handlen / welche kompt auß einem Circkelſchnitz / kleiner dann ein halber Circkel / ſo hat ein jede art deß Faſſes ſein gewiſſes zihl vnd maaß / welches es mit der tüeffe deß Bauchs nicht vber=ſchreitten kan / ſonſten blibe es nicht Citronenrund / ſondern wurde endtlich Apffel=rund; diſe maaß wirdt jhme beſtimmet durch die Kugel / weil ſie gleich das mittele helt zwiſchen dem Apffel vnd der Citronen / vnd mit der Kugel die Apffel=rundungen jhr endſchafft / vnd hingegen die Citronenrundungen jhren anfang nemen.[1]

7) 39)39 *statt* 39)93

72 Also gibt nun die Kugel dem Reinfaß / das der Bauch auffs höchst zweymal so tüeff sein kan als der Boden brait ist: vnnd dann helt die also abgestutzte Kugel beynahe vier dritthail deß doppelten abgestutzten Kegels / der drein gerecht ist. Dem Oesterreichischen gibt sie zum † grössisten schick / wie fast 5 gegen 3 / scherffer 200000 gegen 123607 / kan also der Bauch nicht zwaier Böden tüeffe haben / vnd helt alsdann das Faß siben 6 thail seins doppelten Kegelstocks oder Botunge. Das vberige findet sich im Täfele / das halte gegen dem andern / No. 78 / da wirstu finden / wann in einem Reinfaß die proportion deß Bodens gegen dem Bauch ist / wie 7 gegen 8 / das alsdann das Reinfaß nach dem Kegel gerechnet / vmbs 20 theil weniger halte dann ein gerades Oest. Faß / das mit jhme einerley Visier oder zwerlini hat. Vnd hingegen helt es nach der Citronenrundung vmb das 20 theil mehr dann nach dem Kegel. Darauß folget / wann ein Reinfaß diese tüeffe am Bauch habe / vnnd darneben Citronenrund sey / so halte es die Oesterreichische Visier so gut vnd gerecht / als ein Oesterreichisches gerades Faß. Hette es noch einen tüeffern Bauch / so wurde es das Oesterreichische gerade noch mehr vbertreffen: wann aber der Bauch seicher ist am Reinfaß / dann vmb das 7 theil deß Bodens / so mag es einem geraden Oesterreichischen nicht gleichen / wann es schon Citronenrund ist / zugeschweigen / das es einem Oesterreichischen an Form vnnd tüeffe gleich gebaucheten zuvergleichen sein solte / dann wann zwey solche Fässer an Form vnnd tüeffe gleich gebauchet seind / da bleibt es bey dem Täfele No. 78.

Diß ist zu verstehen Geometrisch vnd nicht Binderisch / dann man kan kein so groß gebauchetes Faß auff dise form machen.

Wann der Diameter am Bauch	Boden ist	So gehet dem doppelten Kegelstock ab im Oester.	Reinf. der
25.	24.	80.	83.
24.	23.	76.	79.
23.	22.	72.	75.
22.	21.	68.	71.
21.	20.	65.	67.
20.	19.	61.	63.
19.	18.	58.	59.
18.	17.	54.	55.
17.	16.	51.	52.
16.	15.	48.	48.
15.	14.	45.	45.
14.	13.	42.	41.
13.	12.	39.	37.
12.	11.	36.	34.
11.	10.	33.	31.
10.	9.	30.	27.
9.	8.	27.	24.
8.	7.	24.	21.
7.	6.	21.	18.
6.	5.	18.	15.
5.	4.	15.	12.
4.	3.	11.	9.
3.	2.	8.	6.
2.	1.		4.
		theil der Citronenrundung	

Derohalben vnnd damit doch auch ein wenig ein gewißheit alhie außgezeichnet werde / so mercket ihr Weinvisierer / so wenig von hohen aber dürren / das ist gegen dem Beihel zugescherfften Beuchen zuhalten / an Oesterreichischen vnnd kürtzern Fässern / soviel desto reicher seind die hohe / wol in Circkel geordnete Beuche. Vnnd jhr Reinlender haltet in allewege an ewren langen Fässern diejenige grosse Beuche in ehren / da die taugen nach der lenge wol inn Circkel gebogen seind / vnnd wisset für gewiß / je grösser der Bauch / wann er also recht in Circkel gebogen / je mehr euch

34) 1. *fehlt* 43) der *fehlt*

ewer rechnung verführet / da ihr zwiſchen zweyen Cylindris oder Wellen / einen im Faß den andern vmb das Faß / nach eines jeden außgerechneten Leib oder Raum / das mittel nemet / wie euch deſſen droben No. 60. vnnd 63. Exempla für augen geſtelt worden. War iſts / wann die Taugen vmb das Spontloch einen Bug oder Klack hetten / wie die Römiſchen haben ſollen / alſo das ein jede Tauge zwen gerade theil hette / gegen jedem Boden einen / ſo thete diſe ewere rechnung der ſachen zuvil. Wann ſie aber wie jetzo geſetzt iſt / durchauß gleich gebogen ſeind / ſo thut ewere rechnung der ſachen vil zu wenig. Hierauß dann auch der Hochgelehrte Herr D. Hartman Bayer Statt medicus zu Franckfurt / leichtlich zuſchlieſſen hat / an welchen Sorten † der Fäſſer jhme ſein Medium Conicum zuſtatten komme vnnd an welchen es jhme hingegen nur hinderlich ſeye.[1]

73

Dritter Theil deß Büchleins

Von zubereitung vnnd gebrauch der Oesterreichischen Weinvisierruthen.

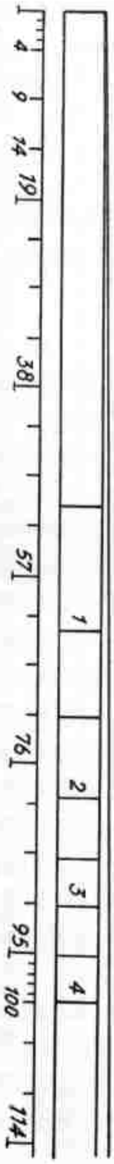
80. Wie ein jeder Haußwirt eine gerechte Visierruthen nach dem gerechten Lintzer schuch oder caementirten Maaß bereitten / oder ein andere probiren möge: item von dem Oesterreichischen Emmer vnd Achtering.

† Mach dir eine gerade Ruthe von Lerchenbaum / oder sonst einem geraden Holtz / mehr breit dann dick / spitze dieselbe gegen dem einen Ende nach der breitte gemählich zu / also das sie vnden fast eine gerade schneide gewinne / wie ein gerades Schrott- oder Stem Eysen / verware die schneid vnden mit einem Silbernen oder messinen Schuch / damit dise schneide durch das vilfeltige stüren vnnd stupffen sich nicht bald abnutzen könde.

Von diser schneide / mache die Ruthen einer Lintzer Klaffter / das ist / sechs Lintzer Schuh lang / dessen dir hieneben in beygefügter Figur ein gerechter halber Schuh / beim Stattgericht zu Lintz caementirt, vnnd in seine 6. Zölle abgetheilt / fürgestelt wirdt. Einen jeden Zoll theile ferners in 19 gleicher puncten / sovil seind Jar in einem Monds-Circkel / oder inn der gulden Zahl / die Järlich vornen an die Calender / gleichwol nicht Gulden / sondern nur roth gesetzt wirt / das mercke von besserer gedechtnus wegen. Also wirt dise gantze Ruthe in 1368 puncten gehen. Diese gleiche vnd kleine thaile soltu auff die eine schmale seiten der Ruthen ordenlich nach einander verzaichnen / also daß der vnderste punct nechst an der schneide / mit der ziffer 1, der nechste drüber mit 2 gezeichnet werde / vnnd so fort an / biß zu dem aller obersten / da sol die ziffer 1368 fallen. Ein verstendiger waißt jhme wol zu thun / wann er gleich nicht alle 1368 puncten mit jren ziffern zaichnet / darzu dann die ruthe viel zu eng sein wurde.

Hierauff nun / hab ich dir ein Täfelin hienach gesetzt / auß welchem du sehen kanst / auff welche puncten die zeichen fallen / zu einem jeden Seidl / Achtering / vnd Emmer / welche zaichen gerad gegen vber auff der einen braitten seitten müssen eingeschnitten werden. Vnd mercke / das dir ein jede ziffer nach dem zaichen .(. bedeutte den zehler zu einem Bruch / dessen Nenner ist allweg 10.

Ferners ist zumercken / warumb ich dreyerley Emmer setze. In dem vergleich der 5 N. O. Landen Anno 1542. getroffen / werden 8 Achtering auff ein viertel gezehlet / dahero die Achtering den namen bekommen / vnd 4 viertel oder 32 Achteringe für einen Emmer / diß ist die rechte (so genennte) alte Maaß. Wie nu hernach vngefahrlich vor 70. Jaren erst-



Gulden zahl.

74

Tafel zu zuberaittung einer gerechten Visierruthen gehörig.

Das feind vnd (Zölle Schuch)	Neben die ziffer der gleichen puncten	Setze das zeichen (Achteringe)
1.	19	
2.	38	
	50	s
3.	57	
	63	1
	72(1.	1s
4.	76	
	79(4.	2
	85(5.	2s
	90(9.	3
5.	95	
	95(7.	3s Seidl
	100	1
6.	114	
	114(5.	s
	126	2
7.	133	
	135(8.	s
	144(2.	3
8.	152	s
	158(7.	4
	165(1.	s
9.	171	5
	176(5.	s
	181(7.	6
	186(6.	s
10.	190	
	191(3.	7
	195(7.	s
	200	8
	204	s
	208	9
11.	209	
	211(8.	s
	215(4.	10
	219	s
	222(4.	11
	225(7.	s
1. 0.	228	
	229	12
	232(1.	s
	235(2.	13
	238(1.	s
	241	14
	243(8.	s
	246(6.	15
1. 1.	247	
	249(5.	s
	252	16
	257(1.	17
	262(1.	18
1. 2.	266	
	266(9.	19

Das feind vnd (Zölle Schuch)	Neben die ziffer der gleichen puncten	Setze das zeichen (Viertl Emmer)
	271(4.	20
	275(9.	21
	280(2.	22
	284(4.	23
1. 3.	285	
	288(4.	24
	292(4.	25
	296(2.	26
	300	27
	303(7.	28
1. 4.	304	
	307(3.	29
	310(6.	30
	314	31
	317(5.	32
	320(8.	33
1. 5.	323	
	324	34
	327(1.	35
	330(2.	36
	333(2.	37
	336(2.	38
	339(1.	39
1. 6.	342	40
	344(8.	41
	347(6.	42
1. 7.	361	
		Achtering
	369	
	372	1. 1
	375	
1. 8.	380	
	392	
	395	1. 2
	398	
1. 9.	399	
	412	
	416	1. 3
1. 10.	418	
	419	
	431	
	435	2. 0
1. 11.	437	
	438	
	448	
	452	2. 1
	455	
2. 0.	456	
	465	
	469	2. 2
	472	
2. 1.	475	

Das feind vnd (Zölle Schuch)	Neben die ziffer der gleichen puncten	Setze das zeichen (Emmer)
	479	
	483	2. 3
	487	
	493	
2. 2.	494	
	497	3. 0
	501	
	507	
	511	3. 1
2. 3.	513	
	515	
	519	
	524	3. 2
	528	
	531	
2. 4.	532	
	536	3. 3
	540	
	543	
	548	4. 0
2. 5.	551	Viertl
	552	
	565	
2. 6.	570	4. s
	575	
	585	
2. 7.	589	
	590	5.
	594	
	604	
2. 8.	608	
	609	5. s
	614	
	622	
2. 9.	627	6.
	632	
	638	
	643	6. s
2. 10.	646	
	648	
	654	
	660	7.
2. 11.	665	
	669	
	675	7. s
	680	
3. 0.	684	
	689	8.
	695	
3. 1.	703	

Das feind vnd (Zölle Schuch)	Neben die ziffer der gleichen puncten	Setze das zeichen (Emmer)
	711	
	717	9
3. 2.	722	
	723	
	737	
3. 3.	741	
	743	10
	749	
3. 4.	760	
	761	
	767	11
	773	
3. 5.	779	
	783	
	790	12
	796	
3. 6.	798	
	804	
	811	13
3. 7.	817	
	824	
	831	14
3. 8.	836	
	838	
	843	
	850	15
3. 9.	855	
	857	
	862	
	869	16
3. 10.	874	
	876	
3. 11.	893	
	896	
	904	18
	911	
4. 0.	912	
	928	
4. 1.	931	
	936	20
	944	
4. 2.	950	
	958	
	966	22
4. 3.	969	
	974	
	986	
4. 4.	988	
	995	24
	1003	

Das feind vnd (Zölle Schuch)	Neben die ziffer der gleichen puncten	Setze das zeichen (Emmer)
4. 5.	1007	
4. 6.	26	
	35	27
	43	
4. 7.	45	
	62	
4. 8.	64	
	71	30
	80	
4. 9.	83	
	1096	
4. 10.	1102	
	6	33
	16	
4. 11.	21	
	30	
5. 0.	40	36
	50	
5. 1.	59	
	70	
5. 2.	78	
	79	40
	88	
5. 3.	1197	
	1208	
5. 4.	16	
	18	44
	28	
5. 5.	35	
	44	
5. 6.	54	48
	64	
5. 7.	73	
	76	
	87	52
5. 8.	92	
	1297	
	1308	
5. 9.	11	
	20	56
5. 10.	30	
	31	
	38	
5. 11.	49	
	50	60
	61	
6. 0.	1368	

lich das Vngelt / darnach Anno 1562. die einfache, vnd entlich Anno 1569. die doppelte zapffenmaß auffkommen / ist die anzahl der Kandeln in einem Emmer / von 32 Kanteln / erstlich auff 35 / hernach auff 38 / entlich auff 41 gestigen. Damit ist der Tätz auff die weite hälse gelegt worden / die sich mit verringerung der Maaß nit haben wollen einziehen lassen. Dergleichen ordnungen seind auch damallen in Würtenberg vnd anderswo gemacht worden.

Sonsten kan ich auß allerhand berichten sovil verstehen / das obwol allein 41 die rechte anzahl der Kandeln in einem Emmer seye (soviel stehen auch auff den gerechten visierstäben gegen dem zeichen eines Emmers gerad vber) jedoch so einer jme einen Emmer mit Kandeln messen lesset / beut man jhme nur 40 Achtering für einen. Hingegen wolte der Kauffer gern 42 darfür haben / als ob der Schenck wol 42 auß einem Emmer außschencke. Weil dann beiderley / kleinere vnnd grössere durch den aigen nutzen / neben dem den die Landsordnung gibt / auffkommen / hab ich sie vmb mehrer nachrichtung willen zusamen gesetzt / vnnd an seinen orten drunter eingemischet / wievil meiner puncten auff einen jeden Schuch vnd Zoll gehen.[1]

71 81. Was für einen Bauch das jenige Faß gehabt / auß welchem die Oesterreichische Visierruthen hergenommen / gemessen oder caementirt worden.

Wie droben bey der 13. Lehr meldung geschehen / so gehet der Oesterreichische gebrauch der Visierruthen nicht anderst recht an / es seyen dann die Fässer einander ähnlich / oder ob sie einander nicht ähnlich / das doch sonsten die Faßformen vndereinander gleichgültig seyen.

Nu hat es sich zwar bey No. 75. befunden / das die Binder in Oesterreich eine regel haben / nach deren allezeit der Boden gegen der Taufel einerley Schick behalten solte / vnnd bey No. 76. das dem behalt nichts merckliches benommen werde / wann schon der Binder sein Regel nicht eben auffs genauest treffe. Item No. 77 / wann schon die Fässer / so nach dem Schick der Taufeln vnnd Böden einander ähnlich / nicht eben gleiche Bäuche haben / sondern etliche gar einem Cylinder oder Walger gleich seyen / andere aber tüeffe Bäuche haben / so fern das doch die Bäuche vmb das Beihel rings herumb eine scherffe haben / von dannen sie gegen den Böden gerad hinauß lauffen / als wären es zwo auff einander gestürtzte Botungen. So sey abermalen dem Oesterreichischen Faß mit dem Bauch nichts gegeben / auch nichts merckliches benommen / vnd halte ein so gebauchetes Faß gleich sovil als wann es allerdings gerad vnnd ohne Bauch wäre / vnnd doch einerley Visier hette. Diß zwar / sprech ich / hat sich bißhero also befunden.

Wiewol nu gemeiniglich die Fässer / je grössere Bäuche sie haben / je mehr sie in der mitten gächrund / vnd also einem doppelten Kegelstock (wie am 62. blat) beynahe gleich sehen: Jedoch vnd wann auch bißweilen Bäuche fürkommen (wie bey No. 79 gemeldet) die fein wolgeschickt in einen Circkel gebogen / vnnd also mit Wein wol an-

13) denn *statt* den

gefüllet seind: da wil gleichwol ein wenig ein vngleichheit auch vndern Oesterreichischen Fässern entstehen / die ist aber desto weniger zu anten / oder zu achten / weil es der augenschein gibt / daß das erste Faß / darauß man die Visier genommen / nicht ein purlauttere geräde am Bauch / sondern gewißlich einen runden Bauch gehalten haben müsse / derowegen dann alle andere Fässer die auch also gebauchet / abermalen jhre Visier gerecht halten / die aber so etwas weniger am Bauch haben / nicht vmb viel weniger / vnnd welche mehr gebauchet / nicht vmb viel mehr in sich haben / dann jhnen die Visier gibt.

Diß alles zuerweisen / bedürffte es nicht vil vmbschwaiffens / wann man inn Oesterreich auch ein caementirtes gefäß hette / das einen gerechten Emmer hielte: dieweil aber der Emmer nur allein auff der Visierruthen caementirt ist / so müssen wir von der heutiges tags gebreuchigen Achtering anfahen / vnnd auff den Emmer zuruck rechnen. Derhalben so lasset vns erstlich nemen die caementirte Visier auff ein Achtering / die ist gleicher / obeingeführter puncten 100. Wann nach dieser zwerlini durch die 75. Lehr ein Oesterreichisches gerades Fäßlin gerechnet wirdt / so gewint es am Leib 604600 / halb 302300.

Wann nu das erste Faß keinen Bauch / oder aber einen zugescherfften Bauch (weil baides im Oesterreichischen Faß gleich gilt) gehabt hette / so müste ein halbe Achtering nicht mehr in sich halten dann sovil meiner thail / jeden einer Vnitet lang brait vnnd hoch verstanden. Ich hab aber bey der Statt Obrigkeit zu Lintz ein Caementirte halbe abgefordert / vnnd mit grossem fleiß zu etlich | vnderschidlichen malen gemessen / *76* das sie mir angefüllet hat eine runde blechine Büchsen / die am Boden gehalten hat meiner puncten in die leng 77 / vnnd in die braitte 74 sampt 2 drittheilen.

In dise Büchsen hab ich die erwehnte halbe gegossen / die hat sie angefüllet / meiner thail 68 hoch. Auß diser höch vnd diametris am Boden findet sich nach der 24. Lehr der Raum deß Wassers 307055 / das ist vmb 4755 meiner gewürffelter puncten mehr / dann droben das Oesterreichische halbe Fäßlin mit einer Walger geräde auff die Visierlini 100 gerechnet / gehalten hat. Sihest also das ein Oesterreichische Caementirte halb Kandel vmb das 65ste thail mehr helt / dann wann ein Fäßl ohne Bauch / auff die Visier einer halben zugerichtet wurde.

Darauß dann folget daß dasjenige Faß / auß welchem die Oesterreichische Visier genommen worden / nach anzeig deß Täfelins No. 79 / vmb das 20 theil tüeffer am Bauch geweßt sein müsse / als brait am Boden: so anderst die Taufeln recht Circkelrund gekrümmet gewest.

Wäre aber die krümme der Taufeln auß der Parabola oder auß einer Hyperbola, das ist vmb das Beihel gächrund / vnnd gegen den baiden Böden außwärtz geräder geweßt; so kan der Bauch wol vmb ein gutes tüeffer geweßt sein. Wie dann gmeiniglich die Fässer mit gar tüeffen Bäuchen dise form gewinnen.

Es ist aber fast glaublich / weil die alte / in andern Landen bräuchige Visier rechnung sich sonsten auff den Walger oder Cylinder fundirt, so werde auch derjenige / welcher die jetzo gebräuchige Visierruthen anfenglich bestelt vnnd caementirt, in dem wohn gesteckt sein / das solche rechnung notwendig vmb etwas verfählen müsse / wenn das Faß nicht recht Cylindrisch oder Wellenrund seye / vnnd werde sich derowegen

43) daß *statt* das

nach ſolchen Fäſſern vmbgeſehen haben / welche gar vnſichtige Bäuche gehabt / vnd einem Cylinder oder Walger am aller ehnlichſten geweßt ſeind. Sonderlich wirt er ſich vmb mehrer gewißheit willen / an die groſſe Oeſterreichiſche dreyling gehalten haben / die könden von jhrer ſchwere vnd von der gefahr wegen im Waltzen / keine hohe Bäuche leiden.

Doch bin ich nicht in Abred / das diß ein gar ſubtil Werck / vnnd nicht ſo ſcharpff drauff zugehen ſey / wie es die zahlen geben. Dann bedenck wie klein meine theilung ſey / da 19 puncten einen Zoll machen / wie leicht kan es ſein / das es mir in der höch deß Waſſers vmb einen ſolchen theil gefählet habe / darmit hette ich ſchon vmb den 68 theil deß Waſſers gefehlet / das iſt ſchon ſchier der 65 theil / auß welchen 65 thail wir bißhero den Bauch gerechnet.

Nem ich dann nun die höch deß Waſſers inn meiner büxen 67 / ſo blibe dem Faß gar kein Bauch / als wann es ein gerader Walger geweßt wäre / nem ich ſie aber 69 / ſo fellt ſchon der 40 theil auff den Bauch / vnnd muß er alsdann nach außweiſung deß Täfelins No. 79. vmb das 12 oder 13 theil deß Bodens tüeffer geweßt ſein / auch nach der Citronenrundung.

Ich halte aber nicht / daß es mir mehr dann vmb eine ſolche Vnitet fählen ſolle. Vnd iſt zwar auch diß ein gar geringer Bauch / wann er gleich vmb das 12 theil tüeffer iſt / dann der Boden / da hingegen die meiſte Anlagen vnd kleine Fäßlin / ſo mir noch fürkommen / vom 10ten in 5ten thail tüeffer am Bauch geweßt ſeind / dann am Boden.[1]

77 82. Wie das Faß geſtaltet ſein ſolle / damit die Viſierruthen dich nicht verführe.

Anfangs wil ich widerholet vnd erinnert haben / das meine meinung nicht ſeye / daß man durch die Oeſterreichiſche Viſierruthen / etlicher fürgeben nach / bey einer Achtering wiſſen könde / wieviel ein Faß halte: dann wie bey No. 63. mit Exempeln / vnd No. 79. mit mehrerm grund erwiſen / iſt ſolches bißhero nicht allein den Oeſterreichiſchen / ſondern auch allen andern Weinviſierern vnmüglich geweßt. Dann das etliche jhres aignen beduncken ſubtile Rechenmeiſter ſich vnderwinden dörffen / bey einem Gläßlin außzurechnen / wie viel das Faß halte (wanns nicht brait gedruckt / nicht bodenhol / ſondern jnnen glat ſeye / ſetzen ſie darzu) das heißt mücklen ſeügern vnd hummeln verſchlucken / was wöllen ſie vil von Beulen vnd Böden ſagen / ſo ſie doch noch die Beuche nicht kennen?

Laß dir derohalben die Oeſterreichiſche Viſierruthen wegen jhres leichten gebrauchs vnd guten vortheils lieb / vnd vor allen bißhero verübten Viſiereichungen wolbefohlen ſein / ob ſie dir ſchon nicht eben bey einem Gläßlin / Achtering / Viertel oder Emmer (in den groſſen doppel Dreylingen) zutrifft / angeſehen der aller glehrteſte Rechenmeiſter / der noch fürkommen / mit aller ſeiner Kunſt / dir noch wol vmb ein mehrers fallirn kan.

Doch kan es nicht ſchaden / wann du dich nach denen bißhero erwehnten vnderſchaiden / vnd was ſonſten einer vnnd der ander außdinget / fleiſſig richteſt / darmit du mit demjenigen / was du auff der Visierruthen findest / zuhengen vnd zu dispensirn wissest.

Erstlich / sol die Faß Taufel mit sampt den Fröschen anderthalb Böden lang sein / nicht viel lenger / auch nicht viel kürtzer / dann baider orten wirde es die Visier nicht so wol halten.

Zum andern besihe es / ob es einen vbermässigen vnd plodereten Bauch habe / dann die Visierruthen gehört aigentlich nur auff solche Fässer / welche nicht vber das 12 thail auffs maiste / tüeffer am Bauch seind / dann brait am Boden; oder auch auff solche / an welchen die Taufeln / wann sie noch tüeffer gebauchet / zwischen den mitteln Raiffen gächrund gebogen seind / vnd gegen den Böden geräder hinauß lauffen / vnd so deren keins wäre / wurde dir die Visierruthen zu wenig sagen / dann die hohe vnd ploderete Bäuche seind reicher.

Doch sol das Faß auch nicht gar glatt sein wie ein purlauterer Walger / sondern wie gesagt / sol der Bauch vom 20ten biß ins 12 thail / mit einer wol formirten rundung herauß gehen / oder so er gächrund vmb die mitte / sol er noch weiter herauß gehen: sonsten wurde das Faß seine Visier nicht so wol halten.

Fürs dritte / so dir aber ein langes Reinfaß fürkäme / mit einem tüeffen wol inn den Circkel gebognen Bauch / das mag mit haltung der Visier einem recht gebaucheten Oesterreichischen gleichen / vnd sonsten gar nicht / wie No. 79 erwisen.

Viertens / ob der Boden / oder ein Taufel etwa tüeff eingebogen wäre / da brauche dich deß Augenmasses / wieviel etwa ein solcher bug außtrage / das zeuchstu billich von der Visier ab. So man das Faß auff den einen Boden auffrichtete / liesse sich diser fehl am obern Boden mit Wasser eichen.

Sonderlich aber vnnd zum fünfften hastu dich an den tüeffgebaucheten Fässern wol fürzusehen / das sie rings herumb gleich gebauchet / vnnd nicht etwa | oben vmb *78* das Beihel mit vilen braitten / vnden aber / mit vielen schmalen Tafeln besetzt seyen / vnd gleichsam am rucken ligen / vnnd den Nabel (das Beihel) vbersich kehren; dann wa diser fehl sich befindet / da kanstu auff den ploldereten Bauch nicht so viel schätzen / weil er nur oben / vnd nicht zumahl auch vnden / so weit herauß gehet. Ja es wirdt dir alsdann die Visierruthen vmb ein mercklichs zuvil sagen / weil es oben von einem so hohen Beihel viel weiter ist biß an die Böden / dann wann das Beihel vnten gemacht wurde.

Hingegen vnd zum sechßten / wann etwa das Beyhel eingebogen wäre / das kan gar bald ein namhafftes außtragen / so die Visier zu wenig sagt.

Fürs sibende sol das Faß an Böden vnnd Bauch nach dem Raiffen recht Circkelrund sein / dann die Oesterreichische Visier ist nicht auff die Wälsche Lägeln gemacht. Wiewol hie kein sonderliche gefahr nicht ist / dann ob wol die Böden mit dem wetter sich werffen / nach der seit eingehen / vnd das Holtz sich zusamen treiben lassen möchte / da hingegen die höch vnverenderlich / vnd die Jahre jhnen nichts benemen lassen: so gibt sich aber hingegen der Bauch etwas inn die braitte vnnd nidere wegen der schwäre / kompt also eins dem andern zu hilff vnnd zubuß.

Entlich vnnd zum achten / so die Tafeln inwendig vngeschwunglich dick wären / sonderlich an den Böden / von der stercke wegen / also daß das Faß innen nicht glat

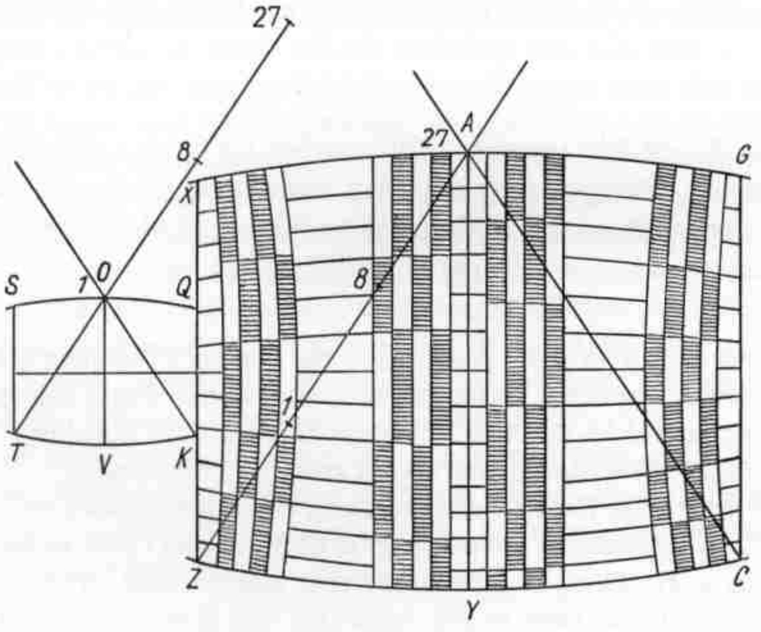
16) daß *statt* das

wäre / das laß ich den Binder verantworten / die Meßkunſt nimpt ſich vmb das nicht an / was vnordenlich iſt / wann mans weder ſehen noch greiffen kan.

83. Wie die Viſierruthen zugebrauchen auff die Fäſſer vnnd Botunge.

Das wirdt mit hievorgehender Figur für Augen geſtelt mit zweyen vngleichen / aber einander allerdings ähnlichen Fäßlein / bey welchen A vnd O das Beihel bedeuten / AZ vnd AC die Viſierruthen welche mit dem zeichen 27 Emmer oder Achtering ans Beihel raichet / im kleinen Fäßlin raichet die Viſierruthen OK oder OT, ans Beyhel / mit dem zeichen 1 Emmer oder Achtering.

Hie iſt aber zumercken / weil inn einem Faß das Beihel nicht ein ſolcher punct ſein
79 kan / | wie hie in der Figur das A vnd O, ſondern es muß ein zimliche weite haben / ſonderlich auch von der Viſierruthen wegen / das man dieſelbige vngehindert nach der zwer hinein ſencken könde: ſo wil es eine notdurfft ſein / das man zuvor einen gewiſſen puncten (nicht auſſen ſondern) inwendig an der offenen Taufel zeichne oder in ſinn neme / vnnd die ruthen AZ, AC an denſelbigen innerlichen puncten A zu baiden mahlen anſchlage / auch wie weit diſer punct an der Viſierruthen raiche / an-



Die 22. Figur.

mercke; dann ſo man nicht von nur einem puncten / ſondern herüber von der einen ſeyten deß Beihels / hinüber aber von der andern ſeiten meſſen / oder auſſen anſchlagen / vnnd das Holtz zum Wein oder innerlichen Raum rechnen wolte / könte leichtlich die Viſierlini vmb einen Zoll zu lang oder zu kurtz genommen werden / das trüge in einem groſſen Dreyling nahend zwen Emmer auß.

Ex Th. 27. Wann nun diser gemerckte punct / vnd das Beihel mit jme / nicht eben gerad in der mitte stehet / sondern AC etwas lenger ist / vnd also mehr Emmer oder Achteringe zeichnet / als AZ; als zum Exempel AC zaigete 8 Emmer / AZ 10 Emmer / so nimbt man nur das mittele zwischen baiden für die gerechte Eych / nämlich 9 Emmer / vnd schadet dise halbirung der gewißheit nichts. Hüte dich aber das du nicht etwa das mittele nach der gleichen thailung nemest: dann es würde dir in den kleinen Fässern vmb viel fählen. Inn den gar grossen zwar trüge ein solcher kleiner vnterschaid vnd dessen halbirung weniger auß.

Ex Th. 28. Also hastu dich auch keiner jrrung dahero zubesorgen / wann etwa baide Böden nicht gleiche Felder hetten / darumben sich doch andere Visierrechnungen mit sonderm fleiß vnnd verdrießlicher Arbeit annemen müssen. Vrsach dieser baider posten ist / weil es in der Oesterreichischen Faßform sehr wenig außträgt; bey andern Faßsorten ließ es sich nicht also verrichten. Desthalben dann dise art zu Visieren sonsten in keinem Land also angehet / wie in Oesterreich / man brauche dann auch dise Form der Fässer.

Visierung der Botungen. Dise weise zu Visieren gehet auch auff die Bottungen: welche auß einem Faß (gerad vmbs Beihel entzweygeschnitten) gemacht werden / oder sonsten nit viel niderer oder höher seind / dann ein halbes Faß; da setzet man den Visierstab auch auff das ein Ende deß Bodens / vnd messet vber zwer biß oben an den ranfft / gerad gegen vber; das kan man also vmb vnnd vmb versuchen / obs überal gleich eintreffe / oder ob man mitteln müsse: Allein zu mercken das die anzahl der Emmer vnnd Achteringe / so auff der Visierruthen anzeiget wirdt / den Bottungen nur halben gelte.

84. Wann kein zugerichte Visierruthen zur hand / oder dise vnsere von 6. Schuhen zu sehr grossen Fässern nicht lang gnug wäre / wie alsdann die Oesterreichische Fässer nichts minder behend zumessen.

So nimb einen jeden stab / brauch jhne / wie man die Visierruthen brauchet / halt jhn darnach gegen dem Lintzer Schuch / zusehen / wievil Schuch oder Zölle die Visier oder zwerlini im Faß halte. Dann im Täfele auff die Visierruthen gestelt No. 80 / findestu schon wievil Emmer ein jede anzahl der Zölle bedeutet.

Zum Exempel / das Faß hette nach der zwer 4 Schuch vnd 10 Zölle / die bedeuten inn der Tafel mehr dann 33 kleiner Emmer zu 40 Achteringen / vnnd weniger dann 33 mitterer zu 41 / dann jene haben 1096 meiner puncten / diese aber ha|ben 1106 *80*
derselben / aber 4 schuh vnnd 10 zölle haben 1102 / das ist vmb 6 mehr dan 1096 / vnnd etwa vmb 4 weniger dann 1106.

So aber ein solcher stab lenger wurde dann 6 Schuch / also das dise lenge im Täfelin nicht zu finden wäre / so nimb das halb thail oder dritt thail oder vierthail der gefundenen lenge an Schuchen / Zöllen vnd kleinen thailungen / such im Täfelin / was

5) Hütte 13) vernichten 17) Beihl 34) 1202 *statt* 1102

es für eine Eych anzeige / die multiplicir mit 8. wann du das halb thail genommen / oder mit 27 / wann du das drit thail / oder mit 64 / wann du das viert thail genommen / ſo haſtu auch die gantze Eych deß groſſen Faſſes.

Zum Exempel / die viſierlenge mit dem Lintzer ſchuh gemeſſen / hielte 10 ſchuh vnnd 3 zölle / weil es nun mehr dann 6 ſchuch / ſo halbire es / vnnd ſuch 5 ſchuh vnnd anderthalben zölle / das iſt 1168 kleiner theilungen im Täfelin / da findeſtu das 1140 geben 36 mitterer Emmer / vnd 1179 geben 40 mitterer Emmer / der vnderſcheid iſt 39 vnnd macht hie 4 Emmer / Nun iſt 1168 mehr dann 1140 vmb 28 / das iſt beynahe drey viertheil von 39 / vnnd macht weniger dann die 3 Emmer / hielte alſo dieſe halbe viſier nicht gar 39 Emmer. Vnd weil du die Viſier halbirt haſt / ſo multiplicir 39 mit 8 / komen dir 312 Emmer nicht gar / das iſt bey 311 Emmern / ſovil hielte das Faß.

Geſetzt / der ſtab were 15 Lintzer ſchuh vnnd fünffthalben zoll lang / hie kanſtu nicht das halbtheil nemen / dann es iſt ins täfelin auch zu lang / nimb derhalben das drittheil 5 ſchuh vnnd anderthalben zoll / das gibt / wie zuvor / etwas weniger dann 39 mitterer Emmer; weil du dann das dritte theil genommen / ſo multiplicir 39 mit 27 / das macht 1053 / hielte alſo das Faß bey 1050 Emmern: vnnd alſo kan man alle Feſſer viſieren / biß auff den halt 1728 kleiner Emmer / das iſt für Oeſterreich meines wiſſens gnug.

Das groß Faß zu Heydelberg.

Zu Heydelberg aber ligt ein Faß / deſſen Tauben oder Taufeln ſeind 27 Schuh lang / der Boden 16 / der Bauch 18 ſchuch hoch / wie in einem deſthalben außgefertigten Kupfferſtuck vermeldet wirt. Rechne von den Taufeln einen ſchuch auff die Velgen oder Fröſche / bleiben 26 ſchuh / vnd die halbe leng nach dem Wein 13 ſchuh / rechne nach der 74. Lehr ſeine zwerlini / die wirt nicht gar 22 ſchuh. Nun diß Faß iſt nicht vil lenger dann die Oeſterreichiſche Form / Geſetzt / es ſey gerad die Oeſt. Form vnnd der Lintzer Schuch / wieviel wirdt es Oeſterreichiſcher Emmer halten? Hie kanſtu weder das halbe noch das drittheil nemen / dann du findeſt es nicht im Täfelin. Nimb derhalben das vierttheil von 21 Schuhen / das iſt 5 Schuch 3 Zölle / die zeigen im Täfelin / oder auff der Oeſterreichiſchen Viſierruthen 42 Emmer. Weil du nun das 4 theil genommen / ſo multiplicir 42 mit 64 / das macht 2688 Emmer. Wie dann im Kupfferſtuck beygeſetzt wirdt / das Faß halte 132 Fuder / oder 795 Ohm vnd 3 viertel / das trifft vngefahrlich alſo zu / wann man bey vierthalb Oeſterreichiſcher Emmer auff ein Pfältziſche Ohm rechnet.

Nicht vil anderſt ſol man jhme auch dann zumal thun / wann eine lenge zu Viſieren wäre / kürtzer dann die leng eins ſeidls / wie drunten No. 90. es die noth erfordert / dann man duplirt oder triplirt die lenge / vnd nimmet hernach das 8 oder 27 thail von ſeiner Eych.

23) 16 *statt* 13 24) 21 *statt* 22

85. Wann das Faß nicht müßte auffgebeihelt werden / wie jhme alsdann mit der Oeſterreichiſchen Viſierruthen / oder an deren ſtatt / mit jrem Täfele bey No. 80. beyzukommen.

Meſſe mit einer ruthen von gleicher thailung / oder mit derſelben ſeitten an der Viſierruthen / wie hoch vnd brait ein jeder Boden XZ vnnd GC abſonderlich ſeye: findeſtu den Boden nicht Circkelrund / ſo nimb das mittere zwiſchen der höhe vnnd der braitte eines jeden Bodens. Zeuch hernach ein Band vmb deß Faſſes Bauch herumb / das doch das | Band ſich nicht außſtrecken vnnd außdehnen laſſe wie ein Faden / vnd auß 81
diſem vmbkraiß / rechne nach der 6. Lehr / wie lang der diameter vom Bauch ſey mit ſampt dem Holtz / meſſe auch an Fröſchen die dicke der Taufeln / zeuch ab ſolcher dicken zwo / vom diameter deß Bauchs / alſo behelteſtu den diameter AY deß bloſſen Weins / da das Faß am dickeſten iſt.

Entlich meſſe auch mit einem auffgeſperten Circkel / wie weit es ſeye von dem mitteln puncten deß Beyhels A biß hinauß an baide Böden / X vnnd G, da muſtu die lenge der Fröſche vnnd deß Bodens dicke wiſſen vernünfftiglich zu ſchätzen / vnnd darvon abzuziehen / damit dir die baide lengen AX vnnd AG nur allein nach dem Wein bleiben.

Hiermit haſtu zu dem einen halben Faß diſe Maaſſe GC, AG, vnd AY zu dem andern aber XZ, AX, AY.

Suche derhalben hierauß nach der 74. Lehre baide lengen AC, vnnd AZ, als wann du ſie mit der Viſierruth oder ſonſt einem ſtab gemeſſen hetteſt. Wann dir dann nu die Viſierlenge hierauß bekant worden / ſo thue jhm ferners wie du bey No. 83. 84. gelehret biſt.

Viſier auff Pergamen.

Etliche gebrauchen ſich eines pergaments / darauff die Emmer alſo auffgeſchriben ſeind / wie auff der Viſierruth / allein vmb ſoviel lenger / als viel CG vnd GA zuſamen lenger ſeind dann AC: ſetzen auch an / vnden am Boden C, fahren vber die Fröſche bey G, vnd ſtrecken das pergament biß ins A / da zeiget es die rechte Eych / allein das die Fröſche bey G der gewißheit etwas weniges benemmen mögen.

Groſſe ſtuck nach der ſchwere zu viſieren.

Dieſe weiſe wirdt von den Büchſenmeiſtern auch zu abmeſſung der groſſen Stücke gebrauchet: vnd kan ein ſolch pergamen / auff die Faßeych gerichtet / ohn einige verenderung auch dorthin gebrauchet werden / nämlich alſo.

Wann alle ſtucke vnder einander beynahe einerley Schick haben / vnnd einander ehnlich ſeind / auch auß einerley Zeug gegoſſen ſeind; ſo laß das kleineſte wegen / Viſier es hernach mit einem ſolchen pergamen / wie ein Faß / nämlich ſetze mit dem pergamen zu vnderſt am Muntloch an / fahr oben hinüber biß ans Zündloch / oder gar erhinter an das end / vnd merck / welche zahl der Cubiſchen Thailung oder Emmer auff das end falle: die halte gegen der zahl ſeines Gewichts von Zentner oder Pfunden; hernach Viſier ein jedes Stuck mit demſelben pergamen / vnd mercke die anzahl der Emmer / ſo haſtu drey zahlen die geben dir durch detri das Gewicht eines ſolchen vngewegnen ſtucks.

21) herauß 27) F *statt* G

86. Summariſche widerholung vnnd inſtruction / ein jedes Faß auß ſeinem rechten Grund zurechnen.

Deſſen bedarff man inn Oeſterreich zu den Landfäſſern gar nicht: die Viſierruthen iſt ſo richtig als kein rechnung nimmermehr ſein kan. Aber die Außländiſche Fäſſer ſeind von ſo vielen vnd mancherley Sorten / das es dannoch auch für die Viſierer in Oeſterreich nicht ein vnebner handel / daß ſie ſolche vnbräuchige Fäſſer recht Viſieren lernen. Dann es wiſſentlich iſt / das täglich viel außländiſche Fäſſer ins Land kommen / eintweder voll mit Reinweinen / oder anzufüllen mit Oeſterreichiſchem Wein / vnd auſſer Landts zuführen.

Sonderlich aber iſt diſer letzte theil deß Büchlins auch für die andere Länder gemeinet / die ſich der Oeſterreichiſchen art zu Viſieren nicht gebrauchen könden. |

82 Meſſe mit der oben beſchribnen Viſierruth / vnd deroſelben gleich außgetheilter ſeitten / was du an einem Faß meſſen kanſt / nämlich I. die zwerlinien AC, AZ wie No. 83 / doch hie mit der gleichen / vnnd nicht mit der Cubiſchen thailung: ſo auch II. die baide Böden GC vnnd XZ wie bey No. 85. Item III. die tüeffe AY für ſich ſelbſt vnd zumal durch den vmbkraiß / wie bey No. 85. Dann ſo du auß dem vmbkraiß nicht eben das jenige findeſt / was dir dein ſtab / nach AY hinunter geſencket / anzeiget / ſo iſt der Bauch am Faß nicht Circkelrund / diſe vngleiche rundung am Bauch magſtu auch erlernen durch einen groſſen eingekrümpten Circkel / oder durch Parallellinien.

Dann ſo meſſe auch die lengen AG, AX, mit einem Circkel / wie bey No. 85: vnnd weil du mit abſehung der Fröſche vnd deß Bodens / als in einem blinden Werck / verfählen möchteſt / ſo laſſe dich von gewißheit wegen nicht verdrieſſen / dieſe lengen auch zurechnen / auß den 3 gemeſſenen linien AY, AC vnnd GC, durch die 74. Lehr.

Wann du nun alſo dieſe linien alle gemeſſen vnnd gerechnet haſt / ſo ſuch erſtlich deß Faſſes gerade lenge von X gegen G, auß der 74. Lehr / nämlich alſo. Zeuch ab den halben diameter eins jeden Bodens vom halben diameter deß Bauchs (oder wann ſie nicht Circkelrund / ſo nimb die mittere leng auß dem lengſten vnnd kürtzeſten diametro eines jetwedern) was bleibt das multiplicir in ſich ſelbſt vnd zeuchs ab von der vierung AG, ſo bleiben die vierungen zu der einen vnnd der andern halben Faßleng / die iſt die Wurtzel darauß.

Mit dieſer halben Faßleng vnnd mit dem Diameter GC, vnnd ſeiner Circkelfläch / ſuch nach der 24. Lehr den Walger oder Cylinder, der auff dem Boden GC ſtehet; alſo thue auch mit dem andern halben thail / wann ſie gar vngleiche Böden hetten / ſeind ſie aber gleich / ſo bedarff es nicht doppelter arbeit / ſondern nur bloſſen duplirens deß einen gefundenen Walgers. Hiermit hetteſtu den einen vnd zwar gröſſeſten thail deß Raums oder Weins im Faß / nämlich ſovil deſſen nach der geräde zwiſchen baiden Böden GC vnd XZ iſt. Hernach iſt es einig vnnd allein zuthun vmb den vberigen thail deß Weins / ſoviel deſſen vndern raiffen ſteckt / vnnd vmb den

12) Miſſe mit der obnen   21) lenge

gefundenen Walger herumb gehet wie ein Gürtel. Wiewol aber ſchon allberait die fürnemiſte linien bekant gemacht ſeind / ſo kanſtu doch noch nicht gerades weges fortgehen / weil du die art diſer Gürtel oder Bauchs noch nicht waiſſeſt / auch nicht ein jede art deſſelben rechnen kanſt / wie droben No. 64. angezeigt worden. Muſt dich derohalben auff zwen wege thailen / vnd auff einem ein ſolche Gürtel rechnen / welche gewiß weniger iſt / dann die am Faß / auff den andern eine ſolche die gewiß mehr iſt / oder doch gerad das rechte Maaß: damit du wiſſeſt daß dasjenige / ſo man ſucht / ſich gewiß innerhalb diſer zweyer zielen halte.

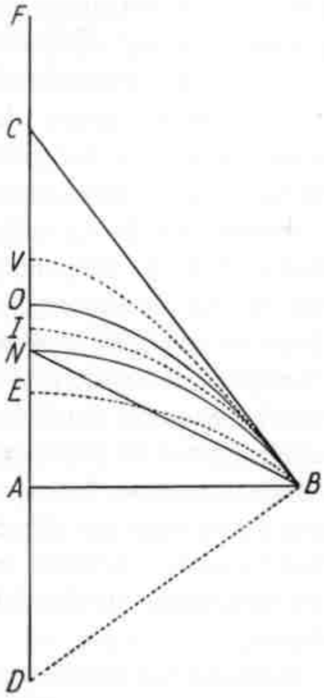
Der erſte weg nimmet das Faß an wie einen gedoppelten Kegelſtock / vnd rechnet dieſe zugeſcherffte Gürtel nach der 52. Lehr / auß baiden diametris deß Bauchs vnnd deß Bodens / vnnd auß dem allberait bekanten Walger / auff dem Faßboden ſtehend: dieſer ſagt gewißlich zuwenig.

Der andere Weg nimmet dieſe Gürtel für Citronenrund an / rechnet dieſelbe auß der 63. Lehr. Dieſer weg ſagt vnderweilen recht / offt aber ſagt er zuviel.

Wiltu nun entlich wiſſen wievil vngefahrlich ein jeder zu wenig oder zuviel ſage / ſo muſtu zum fünfften durch ein geſchicktes Inſtrument erlernen / was das Faß an der Taufelleng für eine rundung habe. So dich nun gelüſtet diß nach aller ſcherffe zurechnen / ſo nimm einen viereckten glatten ſtab / ſo lang ein | Faß ſein mag / der *83*
ſich nicht leichtlich biege. An diſem ſtab ſollen fünff oder ſiben Mütterlein / jedes mit einem zugeſpitzten ſtefft / hin vnd her gerucket werden mögen / ſo das ſie doch feſt ſtehen / vnd nicht hin vnnd her wancken / ein jeder ſtefft ſol auß dem Mütterlein von dem ſtab herfür geſchrauffet werden mögen / doch der mittere ſtefft mag mitten am ſtab angehefftet bleiben / der ſol aber etwas lenger ſein dann kein raiff an keinem Faß mit ſampt den Banden dick iſt. Wann du nun wiſſen wilt / was das Faß am Bauch für eine rundung habe / ſo nimb für dich die eine Fueg am Faß / auff dieſelbe ſetz deinen ſtab mit dem feſten ſtefft auff / gleich mitten am Bauch deß Faſſes / hernach rucke an dem ſtab je zwen vnnd zwen auß den vberigen ſteffiten in gleicher weit von dem mittern ſtefft gegen den baiden Böden hinauß / an ſolche ort / da die ſteffte zwiſchen den raiffen auff die fürgenommene Fueg hinunter raichen mögen / die zwen euſſerſte rucke gar auff die Fröſche hinauß / vnd zwen andere nahend zu jhnen / da die erſte raiff auffhören / gleich weit voneinander. Schrauffe die ſteffte alle vom ſtab herfür / ſo weit / biß ſie alle ſo wol als der mittere vnbewegliche ſitſamlich auff die Fueg raichen.

Wann du nun alſo fünff oder ſiben puncten von der gebognen Fueg deß Faſſes inn dein Inſtrument gebracht / ſo leg den ſtab ſittſamlich nider auff einen flachen Tiſch / vnd wa ein jeder ſpitzen hinzeigt / da trag einen puncten auff den Tiſch. Wann alſo alle fünff oder ſiben puncten auff den Tiſch auffgetragen / ſo magſtu ohne ſonderliche Irrung gleich thun / als wann die krümme zwiſchen zweyen vnnd zweyen euſſerſten puncten ein gerade lini wäre / oder als wann ein gerade lini / durch ſolche zwen euſſerſte puncten gezogen / gleich zu euſſeriſt am bogen anſtriche. Derohalben ſo handele mit ſolchen zwoen anſtreichenden linien (auff jedem end einer / deren hie nur die eine BC) vnd mit dem vberigen bogen (hie nur halb / nämlich BV oder BO etc.) mit diſen / ſprech ich / handele nach der 65. Lehr / zeuch die lini BA (doppelt) vnnd AF, zeichne auch den puncten C, vnnd thail den winckel

CBA inn zwey gleiche thail durch BN, merck auch den puncten N, vnnd kanst alsdann nach dieser beschaffenheit dem bogen seinen rechten namen geben / wie du daselbst gelehret bist worden. Wann alsdann der Bogen (durch die 5 oder 7 puncten angebildet) bey dem puncten N durchgehet / so behalt was du nach dem andern weg gerechnet hast / dann sovil wirt das Faß gewißlich fassen. Wa nit / sondern er gehet oberhalb N durch / als in I. O. oder V. so lasse die gantze lini NC den gantzen vnderschaid baider rechnungen gelten / vnnd so ein grosses stuck von diser lini zwischen dem puncten N vnnd dem bogen stehet / so ein grosses stuck von dem vnderschaid baider rechnungen soltu von der letztern rechnung deß Fasses hinweg werffen. Wann aber der bogen vnder N durchgieng / nämlich BE (welches doch nicht offt geschehen wirdt / wann es recht zugehet) so hielte das Faß noch mehr / dann nach dem andern weg gerechnet worden / vnnd müßte man also auch soviel hinzu setzen von dem vnderschaid baider rechnungen / so ein grosses stuck NE wäre von der lini CN. |



Die 17. Figur.

84 Gewiß ist es / das diser process nach der rechten scheiben ziele / dann je kleiner CI, CO, oder CV, je nehener es bey dem ersten facit bleiben muß: das aber hierdurch eben das schwartze getroffen werde / nach gründlicher Geometrischer Kunst / das wil ich nit für gewiß außgeben haben. Andere Geometrae mögen auch suchen / ich hab im Lateinischen Werck mit erfindung viler newer demonstrationum meinen ehren gnug gethan.

87. Wie man durch die Oesterreichische Visierruthen allerhand außlendische Fässer / Lägeln vnd Stäntner Visieren / vnd den grössesten thail der hievor beschribnen verdrießlichen raittungen vbertragen könde.

Wann das Faß lenger ist dann die Oesterreichische form vermag / so begreiffe mit einem Circkel das viertheil der Boden braitte / stich derselben drey vom mittelpuncten deß Beihels gegen dem Boden hinauß / wa der letzte punct felt / da zeuch einen Faden / Borten oder Band vmb das Faß herumb / der sich nicht döhnen lesset / darauß erlerne nach No. 6. den diameter am selbigen ort / doch zeuch ab die Taufel vnnd Raiffsdicke von baiden enden desselben diameters, damit du habest die höch deß blossen Weins am selben ort. Lange Fässer.

Messe hernach die Bauchs tüeffe mit einerley Maaß / trag baide diametros deß Bauchs vnnd deß erwehlten Circkels auff einen ebnen Tisch gegen einander vber / vnd ordne auff jede seit die abgestochne leng der Taufel / oder die 3 viertheil deß Bodens / also das eine Spießeckete vierung auß diesen vier linien werde / doch also geordnet / das die baide zwerchlinien vber eck (oder von eim eck zum andern gegen jhme vberstehenden gezogen) einander gleich seyen. Dann so Visier dise zwerchlini mit der Oesterreichischen Visierruthen / so findestu wie viel Weins in einem solchen langen Faß sey / zwischen zweyen solchen erwehlten Circkeln: bleibt dir also noch vngemessen vbrig / was baider seyt zwischen disen Circkeln vnd zwischen seinem benachbarten Boden eingehet. Wiltu nun dise zwey nach dem sinn abgeschnittene stuck / oder Kegelstöcke nach No. 24. vnd 49. 52. rechnen / das stehet dir frey. Wiltu mir aber folgen / so sey hie nicht allzusubtil / sondern messe nur allein mit dem Circkel / wie weit es noch an der Taufel von dem eussern gemachten puncten biß zum Boden (innerlich dem Wein nach) seye / vnd mache auß den dreyen viertl deß Boden diameters soviel thail / als vil Emmer du auff der zwerlini gefunden / setze hernach das vbrige von der Taufel drauff / wie du es mit dem Circkel begriffen / so sihestu / wieviel Emmer inn dises nach dem sinn abgeschnittene stuck deß Fasses / vnd seinen gesellen am andern Boden / eingehe / das setze zu dem / was die Visierruthen gezeigt: da wirdt dir offtermahlen eben dasjenige kommen / was du mit der Visier nach dem gemeinen weg gefunden hast / nämlich / danzumal wie No. 79. gemeldet / wann das Reinfaß vmbs sibende thail höher ist am Bauch dann am Boden.

Kurtze Fässer. Wäre aber das Faß kürtzer dann die Oesterreichische form haben wil / so trag abermals auff einen ebenen Tisch die Bauch vnd Böden höhe zu sampt der Taufelleng auff baide seyten / richts zu einer viereckten Feldung die zwo gleiche zwerchlinien habe / erlengere hernach die Taufellenge vbern Boden hinauß / daß das Faß die Oesterreichische form bekomme / vnd zeuch ein newe Bodenlini / Vi|sier also die 85 zwerlini an disem erlengerten Feld / vnd sovil es Emmer zeigt / soviel gleicher theil mach auß der erlengerten halben Taufelleng / da sihestu bald / wieviel thail an dem stuck seyen / das an die Taufellini gesetzt worden / soviel Emmer ziehe ab von der gefundenen Visier.

Lägeln. Item so eine Lägel fürkäme / die sonsten mit der Taufelleng gegen der höhe deß Bodens den Oesterreichischen schick oder proportz hette / so Visiere sie nach dem gemeinen weg: wievil du nun Emmer oder Achtering findest / inn so vil gleicher theil stiche die Bodenhöch ab / hernach begreiffe mit einem Circkel die Boden braitte / die setz auff die abgestochene höhe deß Bodens / so findestu / wieviel von der Visier aussag warhafftig inn der Lägel seye / vngefahrlich. Diß gehet auß der 25. vnd 24. Lehr.

Stantner. Einen zinnen Stäntner zu Visiern / reiß ein winckelrechtes viereckets Feld auff einen Tisch / an welchem die zwo seitten jede deß Bodens braitte haben / die zwo vberige aber / jede drey viertel vons Bodens braitte / an disem Feld Visier die zwerlini mit dem Visierstab / vnd sovil Achtering du findest / in sovil gleicher thail zertheile die dreyviertl vom Boden / nimb hernach die halbe höch deß stantners / vnd

33/34) nach den gemeinen: weg

messe sie / wievil solcher gemachter thail sie habe / dann sovil Achtering werden inn den Stantner gehen / doch kleber / weil die Ständner keine Beuche haben.

88. Zurechnen wie viel Weins auß einem Faß kommen / oder noch drinnen seye / wann es gerad aufligt / vnd nicht gehebt ist.

Diß sol ein Kunst sein / dann dem rechten grund nach prangen die Meßkünstler so sehr damit / das es meines wissens noch nie an tag kommen / vnnd ist zwar wol ein rechtes Creutz für die Künstler / vnd gar nicht jedermans ding.

† Coignetus gibt dise Lehr / man solle von dem außgelehrten Raum / oder von der höhe deß Weins (welches nu weniger) das mittele nemen nach dem Boden vnnd nach dem Bauch / so auch zwischen baiden diametris das mittel / vnd den Circkelschnitz suchen / nach No. 17. Dann das gantze Circkelfeld gilt die gantze Faß Eych / das Feld aber am Schnitz / gilt den Thail deß Fasses. Diser weg thut es oben vnnd vnden im Faß nicht: vmb die mitte saget er gar nahe hinzu. Wie aber zuerkundigen / wie hoch der Boden oben vbern Wein außgehe / sol jetzo angezeiget werden / bey einführung meines process.

Erster weg / sonderlich auff Fässer / die keinen bauch haben oder denselben gar seich.

Zwar hab ich im Lateinischen Werck auch einen process gezeigt / der fundirt sich aber auff No. 18. vnnd 55. welche noch nicht erleuttert / hat auch sonsten sein rechtmässige demonstration nicht / sonderlich der miteingeführte Circulus Metator: wil derhalben dißmals einen andern versuchen.

Anderer weg im Lateinischen Tractat noch nicht richtig.

Zum forderisten muß man bey allen dreyen wegen abziehen von deß Bauchs tüeffen (mit den gleichen puncten der Visierruthen abgemessen) den diametrum deß Bodens / was nun vberbleibt / das halbirt man / vnnd ist diß die erhöhung deß Beihels vber die Böden.

Dritter vnd gewissester weg.

So nun der thail vom Faß welchen man messen solle / nicht tüeffer ist: so rechnet man auff dise höhe drey schnitze / vnnd durch solche den vierten nach No. 67 / der ist der Raum im fürhabenden theil deß Fasses.[1]

Erster fall.

86 Zum Exempel sey die Bauchstüeffe 22 / der Boden 19 / die leng zwischen beiden Böden 27. Da wirt deß Beyhels vberhöhung sein / anderthalbs. So wöllen wir nun setzen / die außklärung oben / oder die Weinshöhe vnden / sey nicht grösser dann diese 1(5 / lasse es gleich gerad dise 1(5 sein / dann es ist ein ding.

Da findet man nach No. 10 den diameter deß Taufel Circkels / das er sey 123 / vnd nach No. 17 seinen flachen schnitz / der wirt 716200000 / wann man disem diameter gibt 200000: Also nach No. 38 / seinen Kugelschnitz 185000000000 / vnd entlich wann die vberhöhung 1(5 gegen deß Bauch Circkels halben diametro gehalten wirt / findet sich auch dessen flacher schnitz nach der sinus theilung 93000000 / aber nach seiner verjüngung gegen dem vorigen / nach der 13. Lehr / 29750000. Auß disen dreyen folgt nach No. 67 der Citronenschnitz oder raum deß theils Fasses † 770000000000. Dise höch 1(5 hab ich nicht vergeblich vor andern kleinern zu einem Exempel erwehlet.

Droben fol. 47.

Anderer fall.

Dann so der fürhabende theil deß Fasses tüeffer ist dann die vberhöhung / also das schon die Böden angewendet (oder / wann man mit dem Reigl im Faß handlen muß / noch im Wein stehen) so muß dieser schnitz nach seinem raum inn alle wege zuvor bekant sein / sambt der gantzen Faßeich vnnd dem Walger zwischen den Böden / auß No. 24. Darzu muß jetzo auch mit der tüeffe deß fürhabenden theils vom Faß / gerechnet werden deß Bauch Circkelsschnitz / nur nach der sinus theilung / nach No. 17.

Entlich nimbt man die vberhöhung deß Beyhels von der tüeffe deß fürhabenden theils deß Fasses / so bleibt die höhe deß Bodenschnitzes / den der Wein abzeichnet / die gibt durch No. 17. das Feld dises schnitzes / nach der gewonlichen Circkelstheilung. Also volgends gibt dise höhe vnd der diameter deß Bodens auch den Bogen mit disem schnitz abgeschnitten / durch No. 10. Der Bogen aber gibt den Circkel zaan darauff / nach No. 17. nach der sinus theilung. Vnd wann ich den schnitz vom Zaan abziehe / so bleibt das Feld deß Triangels / das muß gegen deß Bauch Circkels diametro verjüngt werden.

Erster theil im andern Fal.

Wann diese notdurfften fürhanden / dann so nimmet man mit dem bogen deß Bodenschnitzes / von der gantzen Faßeych den beschaidnen theil / als ob ein spältl auß dem Faß heraußgeschnitzt werden müßte / wie auß einem Apffel. Darnach nimmet man auch mit dem Feld deß Triangels / wie es ist nach der sinus thailung / den bschaidnen thail vom Walger / vnd zeucht jne ab von dem vorigen spaltl: so bleibt das grösseste stuck von dem außgelährten (oder vnden noch vollen) raum: dem gehen zu baiden seiten noch zwey kleine zugespitzte stücklin ab / die seind baide zusamen niemahlen grösser dann der Faßschnitz auff die vberhöhung gerechnet / werden auch gähling / so bald die Böden angewendet / so klein / daß es der mühe nicht werth / solche außzurechnen / aber vmb der Künstler willen / wil ich auch dise rechnen lehren / vnd wil erwarten / ob jemand mir den grund hierzu vmbstossen / oder einen † gewissern fürbringen wölle.

Ander theil im andern Fal.

Derohalben so setze zu dem außgerechneten Bauch Circkelschnitz / das verjüngte Feld deß Triangels / von der Summa zeuch ab den Circkelzaan / so bleiben dir die zwey kleine spitzfeldlein vom Bauch Circkel. Nu hastu zuvor zu außrechnung deß Faßschnitzes auch haben müssen den flachen schnitz vom Bauch Circkel / auff die vberhöhung gehörig. Sihe da / von dieser geringen stücklin wegen / müssen wir soviel mehrere notdurfften haben / die wir sonsten wol köndten vngerechnet lassen. So sprich nun durch detri, der flache schnitz der vberhöhung / nur nach der sinus thailung genommen / wie er anfenglich kompt / gibt seinen Faß= oder Citronenschnitz / was gibt die Summa diser zweyen spitzfeldlin? was dir kompt schlag zu dem vorigen / so hastu die gantze obere außlehrung / oder den gantzen vndern Wein.[1]

Zum Exempel nem ich abermal das vorige Faß / das hat bey No. 59. 60. ge= 87 halten 4025 0000 00000 / am Walger 3290 0000 00000. Nun setze / es sey vmb 6 theil von 22 außgerunnen. Weil dann 6 mehr ist dann die vberhöhung deß Beyhels 1(5 / so müssen auff dise vberhöhung der flache vnnd der völleibige schnitz bekand sein / die seind nun eben darumb zuvor exempels weise gerechnet worden / vnnd ist der flache schnitz gewest nach der sinus theilung 930 00000 / auff die höhe 1(5. Aber jetzo wirt auff die grössere höch 6 / vom halben diametro 11 der Bauchcirckelschnitz gefunden 6941000000. In gleichem / wann die vberhöhung 1(5 genommen wirt von 6 / ſo bleibt 4(5 die höhe zum Bodenſchnitze / der vom Wein entblöſſet ſtehet / vnnd gibt mit dem halben diameter deß Bodens 9(5 / ſeines Schnitzes Feld nach der sinus theilung 569000000.

Ferners mit 4(5 / vnnd mit dem diameter 19 wirt nach No. 10 gerechnet der sinus 85029 / oder nur der sinus versus 31034 / die zeigen in Canone sinuum den halben theil deß abgeſchnittenen Bogens / der iſt gantz 116 Gr. 29 M. 12 Sec. Mit diſem Bogen findet man den Circkelzaan 1016540000: darvon abgezogen den Circkelſchnitz 569 etc. bleibt das Feld zum Triangul 447540000 / nach der sinus theilung / aber nach der verjüngung gegen dem Bauchcirckel / weil der Boden iſt nur 19 breit / der Bauch 22 / wirt es durch No. 13. 333830000. Das weren die Notturfften.

Wann dann 360 gradus gelten die gantze Faßeich 4025 etc. ſo wirt auff den Bogen 116 Gradus etc. fallen 1302400000000 / das were gleichſamm der ſpalt auß dem Faß vom innern Grat herauß. Vnnd wann das gantze Circkelfeld 314 etc. gilt den gantzen Walger 3290 etc. ſo wirdt deß Triangels Feld nach der sinus oder Circkels theilung / nämlich 4475 etc. darvon hinweg nemen 468600000000 / das zeuch ab vom Spalt 1302 etc. Bleibt 833800000000 / vnd iſt der theil vom abgelauffenen Wein / der rechnens wirdig / nemlich etwas mehr dann der fünffte theil vom gantzen Faß. Das vberige kleine Naigl deß abgerunnenen Weins rechnet man alſo. Der verjüngte Triangel 33383 etc. vnnd der Bauchcirckelſchnitz 6941 etc. machen zuſamen 1027930000. Nimb hinweg den Circkelzaan 101654 etc. ſo bleiben die zwey ſpitzlein 11390000. Wann dann der Circkelſchnitz auff die vberhöhung gerechnet / nemlich 930 etc. auff jme ſtehen hat den Citronenſchnitz 77 etc. wie beim erſten fall / ſo wirt auff 1139 etc. kommen 9430000000. Sihe da den mechtigen abgang / in 10 Emmern ein Achtering. Doch ſetze es zu 83380 etc. ſo findet ſich der gantze abgefloſſene Wein 8432300000000.

Am letzten Blat deß Lateiniſchen Wercks l. altit. für 3922 s. Leſe 39229 s. Vnnd dann bald hernach / für 81429 s. Leſe 46121 / diß iſt alda der außgelärte theil deß Faſſes. Alſo auch l. defici. für 3640 Leſe 36400 / vnnd demnach für 72672 Leſe 39912 / diß iſt aldortten nach dem andern weg der außgelärte theil deß Faſſes. Jetzo mag der fleiſſige Leſer alle hie vnnd dorten geführte processe gegeneinander halten: allein zumercken / daß im Lateiniſchen auß einem doppelten Kegelſtock gerechnet worden / hie aber auß der Citronenrundung.

Verkürtzung deß Processes.

Diſe Rechnung iſt alſo beſchaffen / das ſie mit dem gröſſeſten theil deß abrinnenden Weins / den obern Faßſchnitz / oder was obern Böden ſtehet / gähling verſchlinget (ſo bald die Böden ein wenig herfür ſtechen) vnd nur ein wenig zu beiden ſeitten vberleſſet / vnd zwar je mehr gähling / je ſeycher der Bauch. Demnach mag der process ohne ſonderliche vnrichtigkeit vmb ein gutes abgekürtzet / vnnd baide ſchnitze auff die vberhöhung / der flache vnnd der volleibige / ſo auch der Bauch-

15) Grad 25) 1239 *statt* 1139

schnitz auff die außklärung / vnnd entlich die verjüngung deß Triangels / sambt allem andern / was im andern thail darauß gerechnet / vnderlassen werden.

Wann der diameter am ... ist			
Bauch	Boden	So stehet oberhalb der Böden biß ans Beißel der	
2	1	6	Theil des gantzen Fasses
3	2	15	
4	3	24	
5	4	33	
6	5	42	
7	6	52	
8	7	62	
9	8	73	
10	9	85	
11	10	98	
12	11	112	
13	12	127	
14	13	142	
15	14	158	
16	15	174	
17	16	190	
18	17	207	
19	18	224	
20	19	241	
21	20	258	
22	21	276	
23	22	294	
24	23	312	
25	24	330	

Damit aber doch niemand zu weit hinderfürt werde / hab ich hiebey ein | Täfelin / auß disem Exempel *88*
vnnd auß andern dreyen / so droben No. 63. 67. zu finden / beyläuffig proportionirt, darbey zusehen wievil Weins obern Böden stehe: in jedem Faß / †
dessen Taufeln wol rund oder Citronenrund gebogen seind. Wann aber die Fässer zugescherffte / oder in der mitten / gächrunde Bäuche haben / so helt diser obere schnitz weniger.

Gebrauch dieses Täfelins.

Dividir die gantze Faßeych / mit dem gefundenen theil deß Fasses / so kompt / wieviel obern Böden stehe.

Zum Exempel / das Faß hab die tüeffe am Bauch vnnd Boden wie 7 gegen 6 / das gibt den 52ten theil. So nun das Faß hielte 4025 / so dividirte ichs mit 52 / kompt 77 / soviel hielte der schnitz obern Böden.

Die drey Fässer Fol. 52. 56. haben gehalten 7454. 26762. 47113. die Proportz ist gewest 10. 15. 18. zu 9. 14. 17. Zeiget derowegen den 85. 158. 207 theil / dividir so findestu 88. 170. 228. oberhalb der Böden wie oben.

Das Heydelbergische Faß hat am Boden 16 am Bauch 18 / das ist wie 8 gegen 9. darmit finde ich den 73 theil / nu ist droben No. 84 sein Eich gewest 2688 Oest. Emmer / das dividir mit 73 / kommen 37 Emmer ober den Böden stehend.

89. Etliche zusätze zu dem Ersten theil / vnnd vrsachen deß vorigen processes.

Schließlich vnd damit der Kunstliebende vnd Scharffsinnige Leser sich deß grundes zu dieser 88isten Lehr desto besser zuerholen habe / kan ich jhme nicht vngemeldet lassen / das eben dasjenige was im Lateinischen werck im dritten theil vnd dessen No. 4 zu end / Paragr: Rursum zufinden / auch hie im teutschen werck an seinem ort außgelassen vnd vberhupffet worden.

Setze derhalben droben zu No. 15. oder 17. dise ergentzung.

18) hüelte

Gerechte vnnd ablenge Circkelschnitze gesellet.

Wie es sich nun verhelt zwischen den Feldern eines gantzen gerechten vnnd vnderschidlicher gantzer ablenger Circkel / wann sie alle in einander gesetzt / vnnd die Ablenge mit jhren güpffeln an dem gerechten anstreichen: Nicht anderst ist es auch mit den Feldern in ihren Schnitzen / abgeschnitten durch eine gerade lini / welche winckelrecht auff ihre gemeine Axlini eintrifft / dann dise Felder correspondirn vnd thailen sich mit den trümmern von dieser jhren vnderzognen linien / oder auch mit dem lengern vnnd den kürtzern diametris.

Setze ferners zu No. 18 dises vor dem Paragr. Am Circkel / dises.[1]

89 ## Parabolae gesellet.

Hierauß dann folget / wann allerhand Parabolae kleine vnd grosse mit jhren güpffeln in der Axlini zusamen streichen / vnd es wirdt ein gerade grundlini winckelrecht durch die Axlini vnd durch alle Parabolas gezogen / das alsdann die Felder in disen Kegelschnitten sich mit denen trümmern der durchschneidenden lini thailen / auff welchen sie stehen.

Also zu No. 34. setze diß.

Parabolica Conoidea so alle ein höch haben / halten sich zusamen / wie die Felder an jhren Boden Circkeln / nicht anderst dann wären es gleich hohe Kegel No. 48.

Ferners zu No. 40. setze diß.

Gerechte vnnd Ablenge Kugelschnitze gesellet.

Wann ein Ablenge Kugel oder Ay in einer gerechten Kugel drinnen stehet / mit baiden güpffeln anstreichend / vnd es geschicht ein schnitt durch baide / winckelrecht auff die Ax zu / so halten sich die gemachte Trümmer oder Schnitze zusamen / wie die Circkelfelder durch den schnit gemacht / nicht anders als wären es gerade viereckte oder runde Seülen No. 24. vnnd 44.

Auß disem grund hat der Spitzfindige Leser zu sehen / warumb droben bei No. 63. vnnd 67. (darauff wir vns hie bey No. 88 fundirt haben) es fast gleich gegolten / man habe gleich durch linien gehandlet / oder durch Felder deren Circkelschnitze / die auff den linien gestanden / vnnd warumb es doch nicht gar gleich gegolten. Dann wann es nicht weren Circkelschnitze gewesen / sondern eintweder Schnitze von Parabolischen Kegelschnitten / oder von ablengen Circkeln / wie jetzo beim ersten zusatz gemeldet worden / so hette es allerdings gleich gegolten.

Dieweil es aber lauter Circkelschnitze seind / die alle beim Beihel zusamen streichen / so fangen die schnitze der kleinern Circkeln / etwas mehrers vom Feld / dann von der gemeinen Bodenlini: vnd wurde die kleine Citronenrundung grösser / wann man sie nach dem Feld an jhrem mittelschnitt rechnen wolte. Es geschähe aber auch der sachen zuvil / dann sie laufft beiderseits auff einen spitz hinauß wie ein Kegel / dahingegen der Kugelschnitz / auß welchem sie gerechnet wirdt / auff eine runde schneide hinauß lauffet.

Ferners ist auß disem grund zusehen / wie es sich halte mit der eintheilung vnnd zwifachen rechnung deß grössern Citronen= oder Faßschnitzes: dann diser schnitz laufft auch auff ein runde schneide hinauß / wie der Kugelschnitz / derhalben / vnnd weil er am schnitt in der mitte einen schnitz von einem kleinern Circkel / alß der Kugelschnitz / machet vnnd abzwacket / wirt er billich nach desselben seines schnitzes Feld gerechnet / als welches jhme / wie billich / mehr gibt / dann die Bodenlini: vnnd wirt ferners billich durch dises Feldes nebenspitzlein / in die höch deß ablauffenden Weins eingetheilt.

Anlangend sein zwifache rechnung No. 67. ist hie abermal zusehen / wann er auß der kleinen Citronenrundung gerechnet wirdt / daß es eben soviel wäre / als ob er eins thails durch die gerade Bodenlini (wie diese kleine Citronenrundung selber) auß dem Kegel gerechnet wäre worden / darmit würde er vertheilet / dann er artet sich nicht also wie die Citronenrundung / nach dem mageren Kegel / sondern nach dem braitten Kugelschnitz. Hingegen vnd so er stracks wegs auß dem Kugelschnitz gerechnet wirdt / nach dem Feld seines schnitts: mag es sein / daß er etwas zuviel bekomme. Dann ob er wol auch auff ein braitte schneid hinauß lauffet / wie der Kugelschnitz / ist diese schneide doch nicht so braitt wie jene / sonder verleurt sich allgemach / vnd artet sich je mehr vnnd mehr nach dem spitz der kleinen Citronenrundung.[1]

Entlich zu No. 28. fol. 25. setze diß. *90*

Zu wissen wie groß ein jede Kugel deren diameter bekant ist / gegen dem Würffel oder Cubo desselben diameters: Multiplicir disen Cubum inn das Circkelfeld durch hülff deß Täfelins fol. 10. was kompt / dividir mit 6. Oder zum widerspil / dividir den Cubum mit 6. was kompt / das Multiplicir in das Circkelfeld.

90. Wie man ohne schwäre Rechnung / nur allein durch den gebrauch der Visierruthen / ReißCirckels / vnd eines Täfelins / erfahren möge / wieviel Achteringe abgehen von jedem Emmer der ins Faß gehet.

Weil ein jedes Faß / nach offt widerholter erinnerung zwen scheinbarliche theil hat / den Wein so zwischen den Böden / vnnd den Wein / so drumb herumb / vndern Taufeln vnnd Reiffen stehet / so lesset sich dieses Werck auff ein mal nicht abentrichten: sondern du must notwendig Walger vnnd Gürtl von einander scheiden / vnd von einem jeden die gebür nemen.

Die scheidung geschicht also durch die Visierruthen.

Auff einen flachen breitten Tisch bringe vnnd ordne zwen diametros vom Faßboden / vnnd zwo halbe Faßlengen (nach dem Wein) in ein viereckete winckelrechtes Feld zusamen / so das dessen beide zwerlinien oder Diagonij von einem eck zum andern gleich lang seyen / Visier solche zwerlini mit dem Oest. Visierstab / nach der 83. 84. 85. vnnd 87. Lehr: so findestu wievil Emmer zwischen den Böden stehen. Hernach visiere das Faß selber / vnd erlehrne / wievil Emmer ins gantze Faß gehen.

3) Kugelschnitze 25) Refsi Circkels

Zeuch darvon ab was zwiſchen den Böden ſtehet / ſo bleibt dir / wievil Emmer oder Achteringe vndern Taufeln oder in der Gürtel ſtecken.

Die gepür aber von jedem theil nimbt man alſo.

Theile deß Bodens höhe in 5 / ein jedes fünfftheil wider in 5 / ſo werden der theil 25 / halbier ſie / ſo werden jhr 50 / halbir noch ein mal / ſo haſtu 100 / halbir zum dritten mal / ſo ſeind es 200 / die zehle von oben vnderſich.

Darnach zaichne an diſem außgetheilten diametro deß Bodens / wie weit der Wein gehe / das geſchicht alſo / wann du meſſeſt die höch deß Bauches vnnd deß Weins / vnnd die halbe Bauchshöch von deß Weins höch (oder diß von jenem) abzieheſt: was bleibt / ſol vom Centro deß Faßbodens gerad vberſich oder vnderſich geſtrecket werden. Dann wo diſe Lini hinreichet / dahin reicht auch der Wein inwendig.

Man kan auch ein lang durchſichtig Ror von glaß vnden an einen Laßzapffen richten / ſo mercket man ohne meſſen oder rechnen / wie hoch der Wein drinnen auffſteiget / dann ſo hoch iſt er auch im Faß / thut jhme ſelber nicht vnrecht: Alſo auch der Heber / laufft ſo lang biß er das Faß ſo tieff erſchöpffet / als tieff er mit ſeinem Außguß gehenckt iſt / hernach ſetzet er auß.

Da mercke nun / wievil theil vom diametro (in 200 zertheilt) zwiſchen den oberſten güpffel deß Bodens vnd zwiſchen diſe Lini fallen / die ſuch in beygefügtem Täfele / da findeſtu im erſten fach / wievil Achteringe von jedem Emmer / der zwiſchen den Böden ſtehet / abgehen: Im andern aber / wievil Achteringe von jedem Emmer der in der Gürtel ſtecket / abgehen. Multiplicir dieſe gefundene zahlen der Achteringen / jede in jhr anzahl der Emmern im Walger vnd in der Gürtel / vnnd bring beide Summen zuſamen.[1]

91 Nimb das vorige Exempel / vnnd ſetze / man hab durch die Viſier gefunden im Walger 9 Emmer / inn der Gürtel 2 Emmer / wann dann der diameter am Faßboden von oben vnderſich in 200 gehet / vnd man miſſet mit einem Stab die Weinshöhe / nimmet auch die halbe Bauchstüeffe darvon / ſo raicht das vberige trum vom Centro deß Faßbodens biß an den 54 theil vnnd 6 ailfftheil vom 55ſten (das weiß ich jetzo vngemeſſen daher / dieweil ich droben geſetzt / von 22 ſeyen die 6 lähr) ſuch zur lincken deß Täfelins 54 mit dem Bruch / da findeſtu 9 Achteringe / vons Walgers Emmern / ſuchs auch zu der rechten / ſo findeſtu 14 s Achteringe von der Gürtel Emmern. Neun mal 9 iſt 81 Achteringe / vnd 14(5 mal 2 iſt 29. Summa 110 Achteringe: ſovil wer auß dem Faß / vnd gar ein wenig mehr / wegen deß obern Faßſchnitzes / ſo dißmals nicht zuſchätzen / wie bey No. 88 zu end erwiſen iſt.

Wann es aber ein gar groſſes Faß wäre / vnd die Böden wären noch nicht angewendet / zuwiſſen durch die Viſierruthen vngefahrlich / wieviel Weins auff die Füll gehe / oder wieviel auß dem Bauchſchnitz kommen / ohne die rechnung No. 88 / in deß dritten weges erſten Fall.

Wann das Faß nicht tüeffer iſt am Bauch dann der Viſierſtab / ſo nimb einen ſtab kürtzer dann die Faßtüeffe / ſenck jhne in den Wein gerad vnderſich biß ſein euſſeriſtes jnnen am Beihel anſtehet / vnd miſſe die höch deß lähren theils / dieſe † lenge Viſier mit der Viſierruten / ſo auch die gantze vberhöhung deß Beyhels vber

40) nicht *fehlt*

Täfelin wievil Achteringe von jedem Emmer auß dem Walger vnd auß der Gürtel kommen.

Wann die höhe von oben am Boden / biß auff den Wein ist	So gehen ab von jedem Emmer der zwischen die Böden mag	Wann die höhe von oben am Boden / biß auff den Wein ist	So gehen ab von jedem Emmer der vnder die Taufeln mag	
o	o	o	Der gantze Bauch=schnitz	
12 —	1	o(3	1	Vnnd etwas vom obern Bauchschnitze.
19 +	2	1(1	2	
25 +	3	2(6	3	
31 —	4	4(7	4	
36 —	5	7(2	5	
41 —	6	10(3	6	
45 +	7	14	7	
50 —	8	18(2	8	
54 +	9	22(9	9	
59 —	10	27(8	10	
63 —	11	33(3	11	
67 —	12	39(3	12	
71 —	13	45(6	13	
75 —	14	52	14	
79 —	15	58(5	15	
83 —	16	66(1	16	
87 —	17	73(4	17	
90 +	18	80(9	18	
94 +	19	88(3	19	
98 +	20	96	20	
102 —	21	104	21	Weniger etwas vom obern Bauchschnitz.
106 —	22	111(7	22	
110 —	23	119(1	23	
113 +	24	126(6	24	
117 +	25	133(9	25	
121 +	26	141(5	26	
125 +	27	148	27	
129 +	28	154(4	28	
133 +	29	160(7	29	
137 +	30	166(7	30	
141 +	31	172(2	31	
146 —	32	177(1	32	
150 +	33	181(8	33	
155 —	34	186	34	
159 +	35	189(6	35	
164 +	36	192(8	36	
169 +	37	195(3	37	
175 —	38	197(4	38	
181 —	39	198(9	39	
188 +	40	199(7	40	
200	41	200	41	
	Achtering		Achtering	

die Böden / die du allererst hast lernen † nemen / was du nun beider orten auff der Cubischen thailung an der Visierruthen findest / das setze mit sambt der Eich deß Bauchschnitzes (auß dem Täfelin No. 88. genommen) in die Regel detri, so kommet dir wievil auß dem Faß kommen.

Lasse dich aber nicht jrren / das dieser process nicht allerdings richtig / wann man jhme nachraitten / vnd das Facit gegen dem obern process halten wolte / dann der Visierstab mit seinem Nutzen gehört vnder die handgriffe / die bedürffen keiner solchen Subtilitet, wie die Rechnungen.

Wann aber das Faß so tieff ist das die Visierruthen nicht auff den Boden reichen mag / so sencket man jhr hinders theil hinunder / stellet die fordere schneid inwendig an das Beihel / vnnd bedarff man also hie keins andern stäblins.[1]

Zum Exempel / das Heydelbergische 92
Faß hat 18 schuh an der Bauchstieffe / vnnd 16 an deß Bodens diametro / gehet also der Bauch vmb einen Schuh vber die Böden auß: der zeigt auff der Oesterreichischen Visierruthen 12. Achteringe / bedeuttet aber den gantzen Bauchschnitz / oder allen den Wein der oberhalb der Böden stehet / wanns Faß voll ist / der ist nun droben auß dem Täfelin No. 88 gefunden worden 37 Emmer. Setze nun das Faß were vmb drey Zoll außgeähret / das will ich von gewißheit wegen tripliren, wie droben No. 84 gelehret worden / thut 9 Zölle / die zeigen auff der Visierruthen 5 Achteringe / darvon gehört auff die 3 Zölle der 27 theil / vnnd also nicht gar ein fünfftheil einer Achteringe / nun sprich durch detri, 12 Achteringe auff der Visier gelten 37

13) Visirestab mit seinen 14/15) bedürffe

Emmer im gantzen Bauchschnitze / wievil gelten die fünff 27 theil einer Achteringe / folgt 185. 324 theil / das ist beynahe 23 Achteringe. Sovil weins muß man haben / das Heydelbergische Faß außzufüllen / wann es 3 Zöll wahn oder lehr stehet.

Nicht anderst thut man jhme auch dannzumal / wann der Wein die Böden nicht mehr berühret: allein bedarff es alda keines stäbleins / sondern man nimpt die Visierruthen selbsten (wann sie lang gnug ist / wo nicht / so erlengert man sie mit anbindung einer stangen) sencket sie gerad vndersich / mit deren vorderem theil oder zugespitzter schneide.

Vnnd were hiemit für dißmal gnugsam gehandlet von dem Visierstab / wöllen jhne auff ein seitt legen / vnnd darfür den Heber brauchen / dann ich mit endung dises theils durstig worden bin. Aber hinweg mit dem letztern vndern Bauchschnitze / der † Heber möcht nicht gereichen: auß dem vorigen obern Bauchschnitz ist leichter zuheben.[1]

Von dem Oesterreichischen Gewicht / Elen vnd Maaß zu Wein vnd Traid / vnnd vergleichung aller Sorten vnder einander vnd einer jeden absonderlich gegen etlichen Außlendischen alten vnnd newen / jtem von Metallen vnnd allerhand wagmässigen Wahren.

91. Vrsprung deß Gewichts.

Ob wol das lange Maaß dem Menschen von ersten zur Hand gehet / vnd mit den Gliedern deß Leibs gezeigt wirdt / dahero die Namen der Maassen auffkommen / Finger / Daum / Hand / Spanne / Schuch / Schritt / Elen / Claffter oder Lachter; dann Elen hat den namen vom Elenbogen / vnd wirdt gemessen nach dem außgestreckten Arm / doch vnderschidlich / Claffter aber nach baiden außgestreckten Armen / oder nach eins Manns höhe: so seind doch diese lange maasse gar vnderschidlich / vnd verendern sich nach der zeit vnnd Ort; weil die Menschen am Leib einander nicht gleich groß seind.

Warum man auff zehne zehle.

Dann es ist hiermit nicht also versehen wie mit dem zehlen / da ein jeder recht formirter Mensch zehen Finger hat / derhalben alle Menschen auff zehne zehlen / vnd hernach von eins wider vorn anfahen. Dergleichen ist nichts / das vns die Natur zu einem gewissen langen Maaß fürstellete / das in bestendiger grösse blibe / außgenommen Sonn / Mond / vnd Sterne / die vns aber zu hoch / vnnd den Erdboden / der vns zu groß vnd vntauglich ist / vnsere Maaß notdurfften durch jhne zuverrichten.

Wann dann alle Meßsorten nach dem langen Maaß zubestellen wären / möchte es leichtlich gar vmb viel fählen. Zum Exempel sey die Visierruthen: da helt die Visier einer Achtering 100 puncten / wann man von diser Leng nicht mehr dann den fünfften thail hinweg thut / verleurt man darmit schon das halb thail an der Eych / dann 80 puncten thun droben im Visiertäfele nur 2 seidl.

Seind derowegen die Menschen mit den langen Maaß nicht versehen geweßt / sondern haben nach dem volleibigen Maaß selber trachten / vnd jhnen da ein gewisses Maaß außerwöhlen müssen.

Demnach aber der leibhafften Creaturen zwo Sorten seind / selbstendige harte Stucke / vnd Flüssige Materien / als seind auch der volleibigen oder raumlichen Meßsorten zweyerley / die Gefässe vnd Eych zum Wein vnd Wasser / das Gewicht aber zun gantzen stucken. Vnd weil man nicht nur Wein / sondern auch andere kleine törichte truckene Materien hat / als Mehl / Traid vnnd dergleichen / vnnd der Wein † vom Staub / das Traid aber von der Nässe gesichert sein wil / haben auch baiderley Gefesse müssen von einander abgeschaiden sein.

Wann dann vnder Eich vnd Gewicht die wahl zu nemen / welches bestendiger vnd gewisser / findet sich hierzu das Gewicht / dann je dasjenige daurhaffter vnd besser

24) halb htail

auff zubehalten / auch besser zu mercken ist / das da hart ist vnd beysamen bleibt / dann das da zerfleußt. Sonderlich weil ein Zeug schwärer dann der ander / da kan man viel füglicher ein klein vnnd schweres ding zum Gewicht brauchen vnd auffbe-
94 halten / vnnd nach demselben ein theil Weins oder Wassers ab|wegen / das da ein Achtering oder Emmer haissen sol / vnd demselben ein gerechtes Gefässe zurichten: dann das man zum gegenspil / das Gewicht auß der Maaß hernemen wolte.

Also haben nun vorzeiten etliche glehrte / die gern jhre Maaßsorten mit den abwesenden vnnd Nachkommen communicirt hetten / sich vmb natürliche bestendige Gewicht Sorten vmbgesehen / etliche ein Hennenay / andere ein Nuß / ein Bonen / ein Waitzen- oder Gerstenkörnlein erwöhlet. Als aber auch hie grosser vnderschaid fürgefallen / hat man endtlich die natürlich formirte dinge fahren lassen / vnnd auß Stain / endtlich auß den Metallen / die schwärer vnnd harter seind / etwas formirt / welches den namen eins Gewichts haben solte: darzu seind am aller tauglichsten geweßt die Müntzen. Zwar haben die Römer anfangs als noch nicht viel Silbers vnd

Alt Römer Müntz.

Goldes in Italia geweßt / nur küpfferne grobe pfündige Müntzen geschlagen / pondo genennet / dannen vnser teutsches Wort pfund abfolget / vnnd die weise zureden / ein

Pfund.

pfund Pfenning / ein pfund Häller. (Nota es ist bey vns noch weitter kommen / das / weil vorzeiten ein pfund Gelts in dem werth geweßt / wie heutigs tags der Gulden vom Gold also genennet / der Gulden aber 240 pfenning hat: wir auch 240 Haupt kraut oder häufflen Nusse / ein pfund zu nennen pflegen.) Dise Müntz / pondo, haben

Ein pfunt Kraut.

sie gehaissen ein libram aeris, welches vom Wägen den namen hat / als ob jhr Müntz pondo, das kleineste vnd erste wagwürdige stuck wäre. Haben also Müntz vnd Gewicht beyeinander gehabt / als wann wir heut zu tag kein anderes caementirtes Gewicht hetten / dann den Taler.

Als aber das Kupffer bald gmein vnnd vnachtsam worden / weil es zum Haußrath / Waffen vnnd Wehren verbraucht worden / auch im Fewr verzehret wirdt / so wol als Zin vnnd Bley / in der Erden oder im Wetter verwesen kan / ist es endtlich bey reinem Silber vnnd Gold verbliben / die seind schön an Farben / das Silber gleichet den Sternen / das Gold der Sonnen / baide bleiben im Fewr beständig / baide seind

Gold vnd Sylber die edelste Metallen.

seltzam vnd weniger zusehen / dann andere Metallen / derowegen man sie werth helt / vnd gar nicht zu Pflug- vnd Roßeisen verbrauchet: das also ein gewisses stuck Silber oder Gold gepräget gleichsam das gantze Menschliche geschlecht zu hütern hatt / also daß es etlich tausent Jar bleiben vnd vndern Menschen vmbgehen mag. Vnd billichens die Obrigkeiten keins wegs / das man gerechte guldene vnd Silberne Müntzen brichet vnnd Geschirre drauß machet (wiewol auch dise nur zu ehren vnd gepräng auffbehalten werden) es hat auch der jüngstabgeleibte König in Franckreich / auff lang zuvor beschehenes anhalten (wie Bodinus dessen gedenckt) seiner Stende / bey hoher straff verbotten / das kein Gold zu Borten / Gulden stucken / Eisen vnnd Kupffer zu vbergulden / für einigen Menschen zutragen verschmirt werde.

Apotecker gewicht.

So bald nun ein bestendige Silberne vnd guldine Müntz auffkommen / haben die Medici jhr Apotecker gewicht darauff gericht / vnnd jhre Ayer vnnd Gerstenkörner fahren lassen. Darauß dann endtlich erfolgt / das solches alte Müntzgewicht zum Apotecker gewicht worden / auch dem namen nach; dann was sie drachmam haissen /

Drachma.

das ist vom Gewicht vnnd Namen vor zeiten ein alte Griechische Müntz geweßt / vnnd ſeind zur ſelben zeit gleich 96 drachmae auff ein Römiſches pfund gegangen: Jhren Silbernen denarium aber haben ſie zu zeiten der drachmae gleich zu zeiten ſchwärer geſchlagen / alſo das deren nicht 96 ſondern 84 auff ein Römiſches pfund gangen.

Denarius.

Wiewol nun hernach die Müntz verendert worden / iſt doch das Gewicht alſo bey den Apoteckern gar biß auff vns geblieben / vnnd gehet heutiges tages wie | die Apotecker 95 einhellig bezeugen / durch die gantze Welt in gleicher ſchwäre: wie dann Villalpandus vnder einer drachma, die jhme auß Hiſpania nach Rom geſchicket worden / vnnd vnder deren ſo er zu Rom gefunden / nicht den wenigſten vnderſchaid vermerckt.

92. Daß das heutige Apotecker Gewicht einerley ſey mit dem Alt Römiſchen: jtem vom Gewicht etlicher alter guldiner Müntzen: vom Loth / Karath vnd Grän im Gehalt.

Diß zuerweiſen ſeind mehrerley wege / behelffen ſich aber alle der alt Römiſchen thailung: da anfangs zubehalten / das jhnen alles das ſo da gantz iſt / vnd ſich thailen leſſet / AS geheiſſen / das Pfund / die Kandel / der Schuch / das Joch Ackers / der tag / die ſtund / etc. deren ſie ein jedes in 12 gleicher thail gethailt / Vnciae genennet. Weil dann anfangs 96 drachmae auff jhr Pfund oder Assem gegangen / als iſt drauß erfolgt / das ſie ein Vnciam haben in 8 drachmas (quintlein) getheilt / ſonſten thailen ſie die Apotecker inn 2 Loth / die Römer auch in 3 duellas, in 4 Siciliquos oder didrachmos (ſeind halbe lot) in 6 sextulas, in 18 Tremisses. Der siciliquus hat widerumb ein kleiner As, oder Assarius gehaiſſen / vnd iſt gleichsfals inn 12 Obolos gethailet worden. Ein drachma hat 3 scriptulos oder scrupeln, ein scrupel 2 Obolos, jtem 6 siliquas oder Ceratia, ein Ceratium (Karath) vier Grana, vnd alſo ein scrupel 24 Grana gehabt. Warumb aber die Apotecker heutiges tages den scrupel nur in 20 Grana thailen / findet man in praxi Medica Heurnij. †

Röm. Gewicht AS.

Mina Attica ferè.

Weil dann diſe alte Römiſche thailung maiſten thails noch heutigs tags bey dem Apotecker Gewicht gehalten wirt; alß iſt gleich anfangs vermütlich / es werde auch noch die alte Römiſche ſchwäre haben.

Nicht weniger haben ſie auch jhren Sextarium (Schöpplin / Köpfflin / oder Kandl) auch in zwelff Vntzen / oder Cyathos vnciales, Becherlin oder Trüncklein getheilet / verſtehe Römiſche / dann wir Teutſche haben weitere Hälſe / theilen vnſere halbkandlen nicht gern kleiner dann in zwey Seydlen. Doch haben ſie auch Becher oder Cryſtalline Gleſer einander nach gehabt wie die Orgelpfeiffen / von einer Vntz oder zoll Becherlein biß auff den Zwelffer / der einem gantzen Assi oder Sextario gleich geweſt / deren Namen geweſt / Vncialis, sextans, quadrans, triens, quincunx, semissalis, septunx, Bessalis, dodrans, decunx, deunx. Diſe vnciae bleiben auch noch theils bey den Apoteckern. Sonſten hat auch ein Sextarius gehalten 8 Acetabula, ein Acetabulum 6 Ligulas, vnd alſo ein Cyathus 4 Ligulas. Sextarius aber hat dahero den Namen gehabt weil deren 6 haben geben einen Congium, wie vnſere Achtering den namen dahero hat / weil vor 80 Jahren 8 derſelben ein Viertl geben haben. Vier Congij haben gemacht eine Vrnam, hat den namen vom Tauchen / vnd ſo

Röm. Maaß.

Semissalis. Hemina, Griechiſch Cotyle.

9) 93. *statt* 92. 20) Assarium 34/35) semissis *statt* semissalis 35) *(Randnote)* Semissis, al. Hemi-

haissen wir heutzutag den Aimer am Schöpffbrunnen / helt auch fast soviel / zwo Vrnae haben gemacht ein Amphoram, vnd hat das ansehen / als wann diser Nam also von der Römer zeit hero / damal sie noch Herren vber dise Länder / nämlich vber Noricum Ripense vnd Pannonias gewesen / gebliben seye. Entlich haben 20 Amphorae gemacht einen Culleum, oder Faß.

96 Endtlich / ob wol der Römische Schuch ist geschätzet worden zu 4 Hand|braitten / oder zu 16 Fingerbraitten / haben sie jhne doch nebens auch wie ein Assem, in 12 Vncias oder Zölle abgetheilet. Röm. Schuch Theillung.

Es seind aber jhr Schuch vnnd jhr Amphora also künstlich auffeinander gerichtet geweßt (innmassen ich zu eingang deß Büchlins bey No. 3. meldung gethan) daß ein Gefeß oder Geschirr / jhres Schuchs lang braitt vnd hoch / vnd also Würffelrecht (dahero sie jhm den namen geben Quadrantal) gerad ein Amphoram, vnd gerad drey Modios oder Traidmaß gehalten. Damit aber dise jhr Amphora nicht verfälschet werde / haben sie die mit Brunnwasser angefüllet / vnd solches gewegen / das hat jhnen gewogen jhrer Stattpfund 80 / darauff sie jhr amphoram vnnd andere deren anhengige Gefesse bestättiget / vnnd also mit dem Gewicht geeichet haben: Dann alle Brunn- Cistern- Regen- oder süsse Trinckwasser seind am Gewicht gleich / also das Villalpandus bey einer Oesterreichischen Halben oder 20 Vntzen nicht vber ein drachmam vnderschaids auffs höchst vermercken könden. Röm. quadrantal.

Dieweil aber / als obgemeldet / so wol jhr Schuch vnnd Pfund / als auch jhr Kandel in 12 Vntzen gethailt worden / vnnd man offt irr worden / was für ein Vntz Weins oder Wassers man gemeint haben wölle / ein Vntz nach dem Gewicht / oder ein Vntz nach der Maaß: haben etliche nachgesunnen / wie sie dise dreyerley Vntzen in runden zahlen / die wol zubehalten / zusamen richten möchten / also / das ein Vntz von einem Sextario, gerad zwo Vntzen am Gewicht mache / vnnd drey Würffelgerechte Gefesse / jedes einer Vntzen oder Zolls lang brait vnd hoch / anfülle. Darmit kämen nicht 80 sondern 96 pfund auff ein Amphoram (soviel drachmae inn eim pfund seind) vnnd würde der Schuch lenger / vnnd mehr dem Altgriechischen Schuch gleich / der vmb einen halben Zoll lenger geweßt sein sol / dann der Römische. Röm. quadrantal anderst.

Wann man nu dise der Römer alte Thailung / Gewicht vnd Maaß also in acht nimbt / gibt es vnderschidliche gewisse nachrichtungen / daß es nicht nur vermuthlich vnnd glaublich / sondern warhafftig war / das jhr Gewichtsschwäre bey den Apoteckern gebliben. Apotecker haben alt Römer Gewicht.

Zwar solte der erste vnnd gewisseste weg sein / durch die alte Müntzen / weil das Apotecker Gewicht erstlich auß dem Müntz gewicht hergenommen worden / wann noch heutiges tags ein Griechische Müntz gefunden wurde / die vorzeiten ein drachma † geheissen / oder soviel gewogen hette: Wie dann Antonius Augustinus ein solche alte Griechische Müntz beschreibet / das darauff gestanden das Wort ΔΡΑΧΜΗ, vnnd Bodinus berichtet / daß der Kaiser Augustus habe didrachmos aureos, oder halblöttige guldene Pfenning gemüntzet / die man noch heut zu tag finde / dem vergleicht er den alten staterem Atticum, auß den heutigen / ein Spannische Philippische Doppelcronen / item einen Englischen Rosenobl. Es berichtet aber Villalpandus darneben / daß er vnder diesen Guldenen Pfenningen Augusti ein grosse vngleichheit Alte Müntzen. Villalpandus setzet einen staterem gleich zweyen didrachmis vnnd gleich einem Siclo Hebraeorum.

43) *(Randnote)* Haebraeorum

am Gewicht gefunden. Weil dann vom König in Taprobane geſchriben worden / er hab ſich darumb vber Keyſer Augusto ſo hoch verwundert / daß er (zum widerſpil deß Villalpandi fürgeben) geſehen / das Augusti Müntzen alle gleiches Gewicht gehalten: geb ich erfahrnen Alchimisten zubedencken / ob nicht der Zuſatz an Silber oder Kupffer / inn 1600 Jahren zu Gold / vnnd alſo die Pfenninge ſchwerer worden / einer mehr dann der ander / nach dem jeder inn einem Erdreich vergraben gelegen / lang oder kurtz. Dahin auch diß andeuttung gibt / das Bodinus meldet / ein Müntzmeiſter vnnd die Goldſchmide zu Paris haben eine guldene Müntz Kaiſers Vespasiani ſo hoch | am Gold befunden / daß derſelben nicht mehr dann der 788 thail fein 97
abgangen: auch ſonſten faſt alle alte guldene Müntzen reicher am Gold ſeyen / dann dieſer zeit Müntzen / vnd nicht vber den 100iſten theil zuſatzes haben / da den vnſern ſelten weniger dann 24 thail fein abgehe: vnd die Müntzer für vnmüglich fürgeben / ſo hoch Gold zu müntzen.

So berichtet auch ferners Bodinus, die alte Guldene Müntz ſey von Augusti zeiten biß auff Constantinum Magnum jnnerhalb 400 Jahren am Gewicht nach vnd nach / vnd entlich gar biß auffs dritte theil verringert worden / alſo das deß Keyſers Constantini guldene Müntz nicht mehr 2 drachmas, ſondern nur noch 4 scriptulos oder 24 Ceratia gewogen. Diſe meinen die alte Medici, wann ſie ſagen / das 6 aurei auff ein Vntz gehen. Dieſe ſchwäre ſagt Bodinus ſey vor zeiten in Franckreich gar gmein geweßt: vnd ſoll einem Engellotten gleich ſein; diſe ſchwäre meint er auch / wann er ſagt / das der Niderlendiſchen Reichsducaten 6 auff ein Vntz gehen: kämen 72 auff ein Apotecker pfund. Dahero es meins erachtens kommen / das man in der Teutſchen / auß Niderland her erfolgten Müntzrechnung / die fein am Gold abſonderlich / biß auff 24 Karath zehlet; wie ſonſten die fein an Silber vnd Gold ins gemein biß auff 16 lot gezehlet wirdt; dieweil nämlich / wie 16 lot eine gantze Marck / alſo 24 Karath damahlen einen gantzen Ducaten gemacht. Wann vnd wie offt diſe ſchwäre deß Guldens in nachfolgenden zeiten in Franckreich geändert worden / findet man bey Bodino. Dahero die Medici vor diſer zeit / thails auch noch heut zu tag / den Ducaten dem alten Röm. Denario gleich / vnd 7 auff ein Vntz ſchätzen / kämen 84 auff ein pfund. Noch geringer iſt die heutige Frantzöſiſche Sonnencrone / wigt ein drachmam, wie Bodinus vnnd Heurnius anzeigen / wie auch ein Spaniſcher Silberner Real, gehen 8 auff ein Vntz / vnnd 96 auff ein Apotecker pfund. Widerumb iſt vnder Kayſ. Carl dem V. inhalt der Reichsmüntzordnung / der Ducaten vor 50 vnd 60 Jaren geringer worden / alſo das nahend 9 auff ein Vntz / vnd 102 + auff ein Apotecker pfund gehen: die gmeine Frantzöſiſche Crone iſt noch geringer am Gewicht. Iſt alſo diſer Weg vngewiß.

Warum die fein am Gold auff 24. Karath geſchätzet.

Den andern weg ſeind gangen der löbliche Churfürſt zu Cöllen / Herr / Herr Ernſt / Hertzog in Bairn ſel. g. in einem geſchribnen Buch / ſo jhre Churf. Durchl. †
mir Anno 1605 zu Praag communicirt, vnd Ioh. Baptista Villalpandus, Com. in Ezechielem: baide processe ſeind zwar vnderſchiden / treffen aber wunderbarlich zuſamen. Villalpandi process iſt einfältiger / der hat fol. 501. deß erwehnten Buchs in einem Kupfferſtuck fürgeſtellt die form eins ehrenen Congij Romani, der vnder Kaiſer Vespasiano in Capitolio mit zehen pfund Brunnwaſſers geeicht worden /

11) dem vnſern 37) Churſtfürſt

welches die drauff geſtempffte vnnd gegoſſene ſchrifft außweiſet. Diſen hat er mit dem
heutigen Apotecker gewicht examinirt, vnd das Brunnwaſſer / ſo drein gegangen /
gleichsfals 10 pfund ſchwär gefunden; vnd von gwißheit wegen / hat er deren Ge-
ſchirr zwey zur hand gebracht. Vnd wirdt ſonſten auß Plinio vnnd Galeno, ſo baide
nach Vespasiano gelebt / erwiſen / das ein Congius 10 pfund / vnnd ein Amphora
80 pfund gewogen habe. Darneben vnd damit auch ein anderer diß probiren könde /
hat Villalpandus darbey gezeichnet / wie lang braitt vnnd hoch ein würffelrechtes
Gefeſſe ſeye / darein diſe ſeins Congij 10 pfund Waſſers gehen: nämlich meiner
puncten 116 / gibt für er habe diſe lenge dreymal am Congio ſelber gefunden.
Weil dann der Cubus von 116 / das iſt 1560896 / vor zeiten gewogen hat 5760
† Obolos, ſo kämen auff mein halbkandel mit Waſſer 1133 alt Röm. Oboli. Nun hab
ichs im abwegen befunden 1130 Obolos Apot. Gewicht / nur 2 s. scr. weniger:
darauß augenſcheinlich / das Vespasianus, Plinius, Galenus, vnd heut zu tag Villal-
98 pandus zu Rom vnd in Spania / ich aber zu Lintz bey den [1] Apoteckern einerley Ge-
wicht gefunden vnnd gebraucht / dann das ſüſſe Waſſer iſt vberal einerley.
Der ander process diß zu practicirn, iſt deß Churfürſtens / vnd verhelt ſich alſo.
Erſtlich hat er als ein Liebhaber deß Teutſchen Vatterlands (in dem Er gern ein
durchgehende gleichheit geſtifftet hette im Gewicht / Elen vnd Maaß) ſich der Latei-
niſchen Wörter Libra vnd pondo abgethan / vnd dafür gebraucht das Teutſche Wort
Marck / das lautet ein Gemerck / oder ein gezeichneter vnd caementirter Gewichtſtein.
Vnnd weil vnſer brauch in Teutſchland iſt / die Marck in 2. 4. 8. 16. zuthailen / vnnd
das 16 thail ein Lot zunennen / dahero wir ein jedes Gold vnd Silber ſo vnnd ſoviel
löttig / vnnd das fein Gold oder Silber / löttig nennen / verſtehe 16 löttig: vnd aber
die Apotecker 2 lot für ein Vntz zehlen: hat ers von der Cubiczahl wegen alſo ſein
laſſen / das ein Marck 8 Vntzen habe / wie die Römiſche Vntzen hat 8 drachmas:
derohalben er auch 8 Marck Waſſers genommen / damit es (von ſeines beſondern
hochwichtigen fürhabens wegen) vberal mit 8 zugehe: diſe nach dem Apotecker ge-
wicht abgewegene 8 Marck oder 512 drachmas Waſſers hat er in ein hohes winckel-
rechtes gar glat außpolirtes Gefäſſe gegoſſen / vnnd mit groſſem fleiß gezeichnet / wie
hoch es in demſelben geſtigen. Demnach hat er die lenge oder braitte am Boden nach
der Hand in ſoviel gleicher thail außgetheilt / als jhme müglich geweßt / welches am
ſicheriſten geſchicht / wann man erſtlich in 2 / darnach ein jedes wider in 2 / vnd alſo
fort vnd fort thailet: Mit diſer ſo zugerichten thailung hat er die höch deß Waſſers
im Gefeſſe außgemeſſen / Länge Braitte vnd Höhe in einander multiplicirt, vnd die
Cubicwurtzel geſucht: was nun die außgeſagt / dasſelbig in ein lenge abgezeichnet /
welche mit groſſem fleiß vnd ſubtilitet in ſein Buch eingezeichnet geweßt / die hab ich
befunden meiner puncten 95 lang.
† Er hat auch als ein liebhaber der Geometri, den Mesolabum Platonis gebraucht /
dardurch zwey media proportionalia geſucht / zwiſchen der inneren leng oder braitte
am Boden / vnd zwiſchen der höch deß Waſſers / vnd befunden daß das kleinere me-
dium mit der vorigen lenge eintreffe: damit er vergwiſt geweßt / daß er weder zuvor
im rechnen / noch jetzo im handgriff / nirgend verſtoſſen. Es iſt noch nicht genug ge-
weſt / er hat mit diſer Leng auch ein würffelrecht Gefeſſe oder Cubum zurichten laſſen /
mit höchſtem fleiß; hat die 512 drachmas Waſſers drein gegoſſen / vnd befunden /

Churfürſtens process.

Was ein Marck vnnd ſein thailung.
Was lot haiſſe im Gehalt oder Korn.

daß es darmit gerad angefüllet worden: das hat nach meiner thailung halten müssen den Cubum von 95/das ist 857375. Er aber hat das latus gethailt in 8 gleicher theil / deren jeder einen Würffel gibt zu einer drachma Wassers / dann Radix von 512. ist 8.

Demnach hat er auß Glareano vnd Budaeo den Alt Römischen Schuch auffgesucht / welcher soll ein quadrantal gegeben haben zu 96 pfund Wassers oder 9216 drachmis, davon besser oben. Wann aber 9261 (vnd also vmb 45 mehr) die Cubiczahl ist zu 21 / also solte der 21 thail desselben Römischen Schuchs den Würffel zu einer Röm. drachma gegeben haben / so doch / das deren nicht gar gerad 21 / sondern vmb ein dreissigistes thail weniger seyen; dann diß ist die Wurtzel von 9216. Er hat aber befunden das sein Würffel zu der Apotecker drachma, vnnd jener zu der Alt Römischen / so gar genaw zusamen treffen / das seiner 21 / (deren Er 8 gehabt in seim latere) gleich das dreyssigste thail von einem / vber solchen Alt Römischen grössern Schuch außgangen. Darmit abermals offenbar / das der / so vor zeiten inn dem grössern quadrantal 96 pfund gewegen / vnnd jetzo der Apotecker / so dem Churfürsten das Gewicht zugestelt / durchauß einerley drachmas gehabt.

Nicht ohn ist es / daß der Churfürst hie nicht aller dings mit Villalpando | vnnd 99
mit mir einstimme. Dann wann sein Wasser 857375 / hat gewegen 512 drachmas, das ist 3072 Obolos, so solte deß Villalpandi Wasser 1560896 / vnnd das mein 307055 in gleicher proportion gewogen haben / 5592 / vnd 1102: wir haben aber baide mehr gefunden / nämlich 5760 vnnd 1128. Es ist aber diser vnderschaid der red nicht werth / dann die communication deß Gefässes ist geschehen / wie der process außweiset / durch die lenge / also das der Churfürst auß seinem Gefeß die lenge gesucht / die ich vbernommen / vnd drauß widerumb sein Gefesse gerechnet: Wie leicht kan aber geschehen / das an der lenge jedesmals vmb einen halben puncten verfählet worden. Vnnd wann dann die lenge die der Churfürst angibt / nicht 95 sondern 94 meiner puncten geweßt wäre / so käm das Gefeß 830584 / vnd träffe also mit vns baiden vberein. Was dem Villalpando widerfahren / sol hernach gemeldet werden: was auch mir widerfahren könden / anlangend dise so genaue subtiliteten, ist droben No. 81 zufinden / wiewol ich nicht gern von dem abweiche / was ich gefunden / allweil ich zwischen jenen beiden ein mitteles troffen.

93. Lintzer Schuch vnnd Eich mit einander / vnd baide mit dem Alt Römischen vnnd etlichen außländischen verglichen.

Mit der einthailung der Römischen Amphora inn 8 Congios hat es ein besondere glegenheit / dann wann ein halber Römischer Schuch Vespasiani, das Gefesse gibt zu einem Congio, so folgt daß derselbe Schuch gantz / das Gefesse gebe zu einer Amphora.

Wann nu vnser viertel noch acht Achteringe hielte / wie vor 80 Jahren / hetten wir auch disen vortl. Weil aber heutigs tags 41 Achteringe auß einem Emmer gemacht werden / so lasset vns besehen / was 41 halbe geben. Multiplicir 307055 mit 41 / kommen 12589255 / darvon die Cubische Wurtzel ist 232 vnd 5 achtl / so groß Villalpandus

14) pfung

den Römischen Schuch gibt. Sihe da wie nahe unser Oesterreichischer halber Emmer / nach Villalpandi Congio gerechnet / einer Alt Römischen Amphorae gleich seye. Das sol einem nicht unbillich die gedancken machen / als ob die Eich / nicht weniger dann droben das wort Emmer / von der Römer zeiten her in disen Landen gebliben / zusambt der verknüpffung der Eich mit dem Schuch / ob wol der Schuch auß unachtsamkeit umb 4 oder 5 puncten / das ist ein viertl oder ein fünfftl Zolls kürtzer worden.

Lintzer Eych mit der alt Römischen.

Die blosse Oest. Achteringe für sich allein gibt kein anmahnung (nach dem Würffel) zu dem Schuch / dann die Cubic Wurtzel von 614110/ ist beynahe 85 / das wären nicht gar fünffthalbe Zölle. Aber nach der Visierruthen gibt es schöne verknüpffungen. Anderthalben Lintzer Schuch geben die Visier zu eim kleinen Emmer von 40 Achteringen / drey Schuch zu deren 8 / unnd 6 Schuch oder ein Klaffter die Visier zu 64 kleinen oder zu 62 s mittern Landt Emmern. So man dann den Zoll thailt in 19 puncten / so geben deren puncten 50 ein halbs seidl / 100 ein Achtering / 200 acht Achteringe / 300 / 27 Achteringe.

Lintzer Eich mit dem Lintzer schuch verglichen.

Es mag aber ein jede Nation sich besinnen / ob sie / wie deß vor obvermelten Churfürstens meinung geweßt / iren Schuch (weil deren doch vil und mancherley / und der Lintzer schuch nicht uber 4 puncten zu kurtz) endern / und nach jhrer Eich würffelrecht richten könde oder wölle / oder alle nach dem Alt Römischen schuch und Eich; darvon jetzo mehrers. |

Churfürstens fürschlag.

100 Dann weil unser halber Emmer oder 41 halbe Achteringe so nahend eine Römische Amphoram geben / als folgt / das unser Viertl einer Röm. Vrna gleich sey / unnd 5 halbe einem Congio §, ein halbe grösser sey dann ein Römischer Sextarius*: Endtlich zehen Emmer einen Römischen Culleum machen.

So nu dem Würtenbergischen würffelrechten Eichgefässe zu trawen / das mir newlich communicirt worden / und ein Weinvisierer zu Stutgarten gemacht haben sol: hat dasselbig gehalten meiner puncten 95 / weniger ein drittheil / welches ich mit verwunderung ersehen / das solche Eychmaß mit deß Churfürstens gefässe so nahe zutreffen solle / der doch nicht nach der Maaß / sondern nach dem Gewicht der 8 Marcken gegangen: und wäre also unser heutige Lintzer Achtering gegen der Würtemb. Eychmaaß wie 614110 gegen 850000 / nämlich weniger dann drey Würtemb. Viertelen oder Schöpplin.

Hin. Hebr. unser 5 Achteringe. Gomor, Assaron unser 3 Achteringe.
§ Chus Graece.
* Hebr. Log. Griech. Xestes 4 Cori, machen 3 Culeos. Ein Medimnus gleich unserm Emmer. Hebr. Ephi, oder Bath minor unnd Griech. Metreta unser 3 viertl Emmers.

Wann dann zu Eßlingen 10 Maaß ein Jme / 16 Jme einen Aimer machen / als kämen auff den Aimer 136000000 / das dividir mit dem Lintzer halben Emmer 12589255 / kommen nicht gar sechßthalb Emmer Oesterreichisch / auff den Würtenb. Aimer. Und weil 6 Aimer ein Fuder machen / giengen 32 unnd ein halber Oesterreichischer Emmer auff ein Eßlinger Fuder: soviel passirt man auff einen grossen Dreyling: wiewol die gemeine Schiffdreylinge zu 30 Emmern halten: aber in den Rechenbüchern Anno 1531 zu Straßburg getruckt / nicht weniger im Vergleich der 5 N. O. Länder Anno 1542 / werden 24 Wiener Emmer für einen Dreyling geschätzet / unnd darauff / wie dann auch auff den Wiener Emmer durch alle 5 Lande die Anlagen inn den Gültbüchern gestellet. Es wirt mir nebens auch von dem vorgemelten Visierer zu Stutgarten angezeigt / das er 14 Würtembergische Eichmasse auff ein Würffelrecht Gefässe / eines Würtenbergischen Werckschuchs lang brait und

Was ein Dreyling.

7) Dei *statt* Die 13) ein Achteringe ... acht Achtering 24) *(Randnote)* Xeste 34) 2589255

hoch / schätzen solle. Nimb 850000. 14 mal / das gibt 11900000 / darauß die Cubicwurtzel ist 228 vnnd ein Viertel / gar genaw so groß als vnser Lintzer Schuch. Wie aber diß bewant / kan ich nicht wissen / dann der Würtenb. Werckschuch ist mir auff einem Schreibpapir communicirt worden / meiner puncten 217 / fast so lang *Franckf. Schuch. Würten. Schuch.* Hulsius den Franckforter angibet / nämlich 218. Wär also der Würtenbergische Schuch vmb 11 kürtzer / dann vnser Lintzer / dessen Cubus 10218313 / helt nur 12 Würtenb. Eichmasse / da doch der Visierer 14 angibet. Die Würtenb. Schenck- oder Zapffenmaß zwar / ist vmb ein ailfftheil weniger / nämlich 772727: diß 14 mal genommen / macht 10818178 / dannen die Wurtzel 221 ein achtl: das wär der Bairische *Beyrische Schuh.* schuch / den Specklin setzt 220 s, vnd käm nähener zu dem Würtenb. Schuch 217.

Es ist gleichwol nichts seltzams / das einer Statt vnderschidliche Schuch zugemessen werden / auß vnfleissiger vbernemung / da einer den andern verführt. In Frantz *Nürnberger schuh.* Jochim Brechtlers Bürenmeisterey / ist der Nürnberger Stattschuch nach dem Druckpapir 228 / vnd also vnserm Lintzer allerdings gleich / welches auch die hiesige Werck- *Saltzburger schuh.* leute bestättigen / vnd den Saltzburger auch darzu ziehen. Aber Specklins Kupfferstuck fol. 13. gib jne nur 226 / zwen puncten kürtzer. Hulsius hats gar versehen / gibt das Viertl Nürnberger Schuchs 64 meiner puncten / da wäre der gantze 256 / so lang ist der alt Römische nicht. Auch ist allda der Werckschuch 16 meiner puncten kürtzer dann der Stattschuch / vnnd also nur 212 / bey Brechtlern vnd anderswa: fast gleich *Straßburger Schuh.* dem Straßburger / den Specklins Kupfferstuck gibt 213 lang. [1]

Wiener schuh. Den Wiener Schuch machen die Maaßstäbe vnserer Werckleute / die bey Steir ge- 161 macht worden / meiner puncten 242 lang: Andere Werckleute vnd jhrer Mst. Baw- *Prager schuh.* meister geben jne 240: so lang der Prager schuch mir von jhrer Mst. Geometrischer Instrumentmachern communicirt worden / nämlich 240 s: widerumb jhrer Mst. Güesser Hillinger nur 237: Specklin im Kupfferstuck nur 233. Mag sein das man auch alda vnderschidliche Schuch habe.

Alt Röm. schuh ist mancherley. So haben wir auch von dem Alt Römischen Schuch in diesem vnd vorigen No. gleiches vernommen / das jhrer mehrerley geweßt. Mathaeus Hostius vnd andere sollen jhne nicht gar so lang setzen / nach Crugeri Dantzigischen Mathematici bericht / *Culmische Schuh.* als den Culmischen / den er angibt meiner puncten 224 / oder 223 lang. In Ioannis Myritij Malteser Ritters Cosmographi cap.16. fol.34 / stehet auß Leonhardo de Portis vbersetzt Pes antiquus nur 198 meiner puncten lang: der sol auch nebens berichten / der gemeine Werckschuch sey mehr dann vmb einen Zoll lenger geweßt. Sol zu Rom gefunden worden sein in Angeli Colotij Lustgarten / daher Villalpandus jhne pedem Colotianum nennet.

Hingegen hat jetzermelter Myritius den pedem Romanum auß Glareano vbersetzt / der helt nach dem Druckpapir meiner puncten 247 / Glareanus aber hat disen pedem auß Gulielmo Budaeo genommen / der inn den Römischen Meßsorten trefflich wol erfahrn geweßt / vnnd soll mit dem Parisischen Königlichen Werckschuch allerdings eintreffen / vnd von den Römern / wie viel anders mehr / in Franckreich ge- *Parisische Schuh.* bracht worden sein. Wie dann Specklin diesen Parisischen Schuch gibt 248 lang.

Diß ist nun meines wissens der jenige Schuch / den der Churfürst gebraucht / der die grosse Amphoram gibt / helt meiner puncten nahend 249 / oder nach obangedeu-

8) sechs *statt* ein 9) 1081818 13) Brechters 19) Brechlern

ter mässigung auffs wenigist 247. Vnnd weiland Kays. Rudolffs Geometrischer Instrumentmacher zu Praag / Erasmus Habermeel sel. hat disen pedem Romanum gleicher leng / oder gar 250 meiner puncten lang auff seine Instrumenta gestochen / mir auch gesagt / das weilend H. Iacobus Curtius Reichs Vice Cantzler sel: solchen mit sonderm fleiß von Rom abholen lassen / vnd jhme communicirt.

Derowegen dann Pes Colotianus, als gar zu kurtz / in den vorigen processen keinen platz nicht hat / sondern Villalpandus wirt einen andern gmeinen Werckschuch am Congio Vespasiani gefunden haben / nach welchem vnzweifel Vespasianus den Tempel deß Fridens bawen lassen / wie dann Villalpandus den Colotianum mit außtrücklichen Worten verwirfft.

Nota. Vnnd sol der Leser sich deß eingelegten abtrucks auff ein vngenetztes schreibpapir halten / vnnd dasselb zetelin nicht Planiren oder netzen lassen.

Die vrsachen / das soviel vnderschidliche Römische Schuch angeben werden / ja auch der einige Pes Colotianus, wie Villalpandus fol. 448 meldet / anderst bey † Georgio Agricola, anderst bey Gulielmo Philandro, anderst bey Luca Peto, anderst bey Stanislao Grsepsio zufinden / seind mehrerley / sonderlich aber hie zumelden / das ich befunden / daß das Druckpapir / wann es genetzet / vnd drauff wider trucken wirt / eingehe / also das droben fol. 73. mein Lintzer halber Schuch vmb 2 puncten kürtzer auff dem Druckpapir / dann auff dem Holtz. Dergleichen viel mehrers bey den Kupffertrucken fürgehet / dann alda muß das Papir mehr genetzt werden vnd mehr gewalt leyden. Diß achte ich die vrsach sein / das Villalpandus in seinem Buch den Römischen Schuch / den er fürbringt / dreymal vnd zwar in einem einigen Kupfferstuck zweymal verendert. Dann fol. 501 an der höch deß Congij ist er meiner puncten
102 232 lang / solte | doch nach deß Churfürstens process 234 halten / da ich anstehe ob er nicht vmb 2 puncten eingangen. Stracks darneben Fol. 502 ist der halbe Schuh zweimal am Congio, helt meiner Puncten nur 114 / ist also dem Lintzer gleich / dieser wirt vom vorigen (auß dem eingangnen Kupfferstuck) abgenommen vnd selber auch eingangen sein. Der dritte findet sich fol. 316. 317. im kunstlichen Kupfferstuck oder proportional Instrument, helt meiner puncten nur 224 vnnd ein halben / wirdt doch auch selbigen orts für das latus Cubicum Congij berühmbt: dannenhero offenbar daß er auß dem eingangnen Papir fol. 502 vbernommen / vnd selber auch eingangen sey.

Villalpandi schuch auß dem papir verfelscht.

Weil dann noch heut zu tag hin vnd her grössere Werckschuche im brauch seind / dann vor 1500 Jahren der Römische geweßt / vnd noch der kleinest vnder allen nicht vmb eins Zolls kürtzer: als ist hierauß vnschwer abzunemen / was von Bodini fürgeben zuhalten / der in seim Buch de Rep. auß alten Poëten zuerweisen vermeint / das die Menschen an der grösse abnemen / vnnd vor zeiten alle ins gemein gegen den † jetzigen Leutlen Risenmässig geweßt seyen. Besihe hievon auch Marquardi Freheri schrifft von der lenge Caroli Magni deß ersten Teutschen Kaysers / der vor 800 Jahren gelebt hat.

Ob die Menschen an der lenge von einem tausent Jahr zum andern abnemen.

94. Andere lange Maassen mit dem Lintzer schuch verglichen: Item Alt Römisches vnnd anderer Orten gebräuchiges Feldmessen.

Die Lintzer Klaffter vnnd Elen werden inn Keysers Maximiliani General von Anno 1570 dem gantzen Land auffgesetzt / desthalben ich das Caement von der Ob-

* Nota. auff beigelegtem zedelin vom Schreibpapir / den das Truckpapir ist wegen der netzung eingangen.

Calamus Hebr. Lintzer Elen mit dem schuh. Wiener Ellen. Prager Elen.

Feld-Maaß.

rigkeit abgeholet / vnd das zwölffte theil einer Lintzer Klaffter / das ist / einen halben Schuch droben No. 80* / neben die Visierruthen drucken lassen: dann sie wirdt getheilet in 6 Schuch / item inn neun viertel einer Elen: das also drey viertl einer Elen zwen Schuch / vnnd die gantze Elen zwen Lintzer Schuch vnnd acht Zoll helt. Die Wiener Elen sol vmb meiner 6 puncten / das ist vmb ein dritthail Zolls / die Prager aber vmb ein gantzes viertel / vnd zwey drittheil eins Zolls kürtzer sein.

Dises Claffermaaß achte ich nicht nur zum Hey / Holtz / Steinen / Gebäuen / Grüben / Schachten vnd Stollen vnder der Erden / sondern auch zum Feldmessen bequemlich sein.

Dann ich auff fleissiges nachfragen sovil befunden / das man im Land ob der Ens die Tagwercke vnd Gwandtn / nicht nach einem gewissen bestendigen vnd kenlichen Maaß (wie bey den Römern gewest die Pertica oder decempeda zehen Schuh / vnd zu Nürmberg vnd in Würtenberg die Ruthe 16 Schuh lang / zu Franckfurt 12 s, nach Hulsij anzeigen) sondern nur schlecht dahin nach zweyer Roß arbeit anschlage: oder so man sich schon der Stangen gebraucht / nimbt man sie doch nur nach der Hand: es werden auch die Acker oder Bifinge (Bettlin anderswo genennet) an der braitte oder anzahl der Fürchen vnd an der lenge sehr vngleich gemachet.

Die vrsach achte ich sein / weyl das Land meisten theils bürgig / die Güter / Baurnhöffe / vnnd Gründe hin vnd her in die Leitnen zerstrewet / oder sonsten auch auff der Ebne mit Friden / Gräben / Gstettnen / hohen Gehägen eingefangen vnnd gleichsam verschantzet: darneben fast alle grundstucke ein-| vnd zugehörungen seind zu den *103* dienstbarn Güetern vnd Höfen / vnnd mögen nicht durch verkauff oder Erbfall zu ledigen Grundtstucken gemacht werden / desthalben es deß außmessens nicht bedarff.

Wann aber doch vnderweillen Spän vnd Stritte fürfallen / die nicht wol ohne das ordenliche Feldmessen zu entscheiden / gebraucht man sich billich eines gewissen masses.

Röm. Feldmessen.

Würtenbergisches Feldmessen.

Die Römer haben ein Iugerum oder Joch ackers geheissen / das 12 Perticas oder Stangen breitt / vnd 24 lang gewest: das seind nun 120 schuch breitt vnd 240 lang / vnnd machen am Feld 28800 gevierter schuch. In Würtenberg rechnet man 150 gevierter ruthen in einen Morgen / deren jede 16 schuch lang vnnd breitt ist / vnd also 256 gevierter schuch begreifft: das wären 38400 gevierter schuch: dann so rechnet man anderthalb Morgen für ein Jauchart / Nemlich 57600 gevierter schuch / das ist gerad zweimal sovil landes als bey einem Iugero Romano.

Zu Nürmberg thut ein Stuck Ackers / 200 schuch lang vnnd breitt (das ist / 40000 gevierter Schuch groß) ein Iugerum. Zu Franckfurt sollen / nach Hulsij anzeig / 160 gevierter Ruthen / die da machen 25600 gevierter Schuch / ein Joch Acker geben.

Demnach so könten auch wir deren Maassen eines brauchen / vnnd die 28800 gevierte schuch Römischen Maasses in vnser Claffter (die an der leng 6 schuch / vnnd also am Feld 36 gevierter Schuch hat) eintheilen / kämen 800 gevierter Klaffter für ein Römisches Joch 40 in die leng vnnd 20 inn die breitte / oder 1600 für ein Würtembergisches Jauchart / 40 inn die lenge vnd breitte / wanns recht vierecket.

Der eussere vmbkraiß treugt.

Das aber der einfältige sich hütten solle / das er nicht bloß nach dem eussern Zaun / Frid oder Gehäg gehe / dessen ist Er No. 69 notdürfftig erinnert: alda zu sehen / das ein Römisches Joch von 800 Claffter / zwey mal so lang als breitt einen Zaun habe von 120 Clafftern: diſer Zaun 120 Clafter lang / kan gar 1145 gevierter Clafter einfangen / wann er anderſt geordnet wirt / er kan auch nur 224 / vnnd entlich gar nichts einfangen / wann man jhne ſo weit verziehet.

Wie aber auß dem euſſerlichen gecirck / vmbzeunung / oder Pianta, zurechnen ſeye / wieviel Feldes darinen begriffen / findet ſich von No. 12 biß No. 23 / ſonderlich No. 16.

Land oder Raiß Maaß iſt wie aller orten / vnd behelt man den Röm. brauch / das 5 ſchuch auff einen ſchrit / 1000 ſchritt auff ein wellſche Meilen gezehlet werden / vnnd vnſere Teutſche Meylen von 4 § in 5 Wellſche mache bißweilen auch weniger dann 4* / oder mehr dann 5 / nach dem es bürgecht oder eben / vnnd die Plätze / Flüſſe / Krümmen / Dörffer / Schlöſſer / Stätt / oder Märcke anlaittung zum zehlen geben.

Meilen.

§ Parasangae Persarum.

* Leucae Gallorum.

95. Oeſt. Gewicht mit der Eich / vnd etlichen außlendiſchen gewichten verglichen.

Obwol in gantz Teutſchland / meines wiſſens / die Marck in 16 Lot getheilet wirdt / auß vrſachen die droben No. 92 außgeführet / dahero vnd weil ſich etwa vorzeiten befunden / das zway Teutſche Marck auff ein Römiſches Pondo gehen / wir Teutſche
104 jetzo das pfund in 32 Lot theilen /| vnnd nicht inn 12 Vntzen oder 24 Lot / wie die Apotecker vnd alte Römer: ſo trifft man doch gar ſelten an einem ort ein ſolches pfund an / das 12 oder 16 Apotecker Vntzen halte / ſondern ſovil Ort / ſovil Gewichte / vnd geſchicht vielmals / das an einem ort vnderſchiedliche Gwichte ſeind / eines auff diſe / das ander auff ein andere Wahr.

Warum vnſer pfund 32 lot halte

Vnſer Lintzer Gewicht iſt in Europa nahend das ſchwäreſte / wirdt in mehr berührtem General von Anno 1570. dem Wiener gleich geachtet / vnnd dem gantzen Land auffgeſetzet / das ſchätzen die Apotecker auff Neunzehendhalb Vntzen / aber crassa Minerva, dann von 19 gantzen Vntzen gehen nicht mehr ab / dann dritthalben scrupel, wigt alſo 907 Obolos. Ein Lintzer lot aber wigt nicht gar 5 drachmas, dann ein Lintzer quintlein wigt 71 Gran. Doch findet ſich bißweilen auch zimlicher vnfleiß bey den Gewichten auff den kauff gerichtet alſo das mir ein Vntz fürkommen ein halben scrupel ſchwärer dann ſonſten alle.

Ein Apoteckerpfund hat 576 Obolos. Ein drachma 6 Obolos oder 60 Grana.

Anlangend die außlendiſche Gewichte / weil im Müntzweſen die Cölniſche Marck in Teutſchen Landen den maiſten ruff hat / deſthalben ſie in der Reichsmüntzordnung dem gantzen Reich zur nachrichtung fürgeſtellet wirdt / als iſt zu melden das Anno 1560 ein Keyſerlich General außgangen / darinnen Kayſ. Ferdinand als Ertzhertzog in Oeſterreich die Cölniſche Marck ſeinen Erblanden gegen jhrer Wieneriſchen (vnd alſo auch Lintzeriſchen) alſo verglichen / das auff ein Cölniſche gehen ſollen zehenthalbe / auff die Wieneriſche ailff vnnd 2 fünfftl ſtuck Reichsgulden / deren jeder 60 kr. gelten / vnnd am Korn 14 Lot vnnd 16 Gran fein halten ſoll: derentwegen 100 Wieniſche gerad 120 Cölniſche pfund machen. In gleichem ſollen 67 Ducaten wegen ein Cölniſche / vnd 80 ſampt 2 fünfftheil ein Wieniſche Marck / das gibt auch diſe proportion. Vnd weil alſo 160 Ducaten / ſampt 4 fünfftheil auff ein pfund

Cölniſch Müntz gewicht.

Lintzer lot wievil Ducaten.

2) 424

kommen / so gefallen beynahe 5 Ducaten auff ein lot / nämlich ein viertzigstthail drüber; vnd also werden heut zu tag die eingesetzte Ducaten gewichter zugerichtet.

Vnser Ducaten wigt nahend 17 Karath.

Hierauß achte ich auch diß erfolgt sein / das vnsere Goldschmide das 16 thail vom Ducatengewicht ein Karath nennen / wann sie diamanten wegen. Dann 3 Römische Ceratia gehen auff einen Obolum, 907 Oboli Apotecker Gewicht / als kurtz zuvor gesetzt / auff ein Lintzer pfund: also finden sich in einem Lintzerpfund / oder 160 Ducaten sampt vier 5 thailen 2721 Römische Ceratia, vnd kommen also auff jeden Ducaten vber 16 / vnd nahend 17 Ceratia, das lassen die Goldschmide / von der gefüegen thailung wegen / gerad 16 Karath sein. Vnnd das sie gewißlich das Römische meinen/ erscheinet dahero / weil sie jhr Karath in 4 Grän thailen / wie die Römer jhr Ceratium in 4 Grana. Diß ist nach dem Goldschmidgewicht der diamanten zuverstehen: dann bey der Müntzrechnung hat es ein andere meinung mit dem Karath vnd Grän; die wil ich auß anleittung Lasari Erckers probationbuch / so deutlich vnd klar als †
es müglich / im folgenden Täfelin für Augen stellen.

Hochteutscher Müntzbrauch	Gemischter Brauch auff Silber vnd Gold	Gemischter Brauch Auff Gold allein	Niderländischer Müntzbrauch	Alt Röm. Brauch
1. Marck	1. Stuck	1. Stuck	1. Marck	1. Semuncia
16. Lot 1	16. Lot 1	24. Carat 1	12. Pfenning 1	12. Scrupula 1
256. Pfenning 16	288. Grän 18	288. Grän 12	288. Grän 24	288. Grana 24
Zum Gewicht oder Schrott	Zum gehalt oder Korn		Zum Gewicht vnd Gehalt	Zum gewicht

Seind also die Pfenninge / deren in Kays. Carls deß fünfften Müntzordnung meldung geschicht / Niderländische vnnd nicht Hochteutsche gewichtpfenninge. Warumb aber das Stuck in 24 Karath getheilt worden / ist besser oben fol. 97. gemeldet.[1]

Augspurger müntz gewicht.

Demnach aber wir am Donawstrom viel mehr mit Augspurg dann mit Cölln 105
zuthun haben / alß ist daselbsten Anno 1601 bey Hans Schultes ein Büchlein im Truck außgangen / dessen Author Martin Kauffman Rechenmeister / verlegts Niclas Leiß / Goldschmid Handelsman vnnd Mitburger daselbsten / darinen 26 Augspurger Marck zu Wien thuen 21 Marck 14 lot / 1 pf. vnd 2999 von 4867 theilen eines pfennings. Vnd hinwiderumb 34 Wiener Marck thuen zu Augspurg 40 Marck / 6 lot 1 quint. 2 pfen. vnd 3 Achtl eins pf. das ist 100 Lintzer pfund machen zu Augspurg 118 vnnd nahend 3 vierdung.

Diß ist zuverstehen vom Gewicht auff Silber vnd Gold zu Cöln vnnd Augspurg; sonsten erscheint auß offt angezogner Frantz Jochim Brechtlers Büxenmeysterey / zu Nürnberg außgangen / das selbiger orten auch andere gewichte breuchig. Dann 90 pfund Wiener / Lintzer / Saltzburger / so zu Nürnberg wegen 100 / sollen zu Cöllen wegen 102 / zu Augspurg 104. Dise vngleichheit ist in Oesterreich nit / sondern man hat einerley Gewicht auff Silber Gold vnd allerhand wagmässige waren.

Vnd hab ich auß erwehnter Büxenmeysterey / vnnd auß Bodino de Rep. auch anderer Müntzmeister / Giesser / vnd Instrumentmacher aussag folgendes Gewichttäfelin zusamen gezogen / vnd auff den Lintzer Centner gerichtet.

	Pfund				
Zu Genff (Bodi.)	99. f.	—	Lunden (Brecht.)	124	+
Lintz / Krembs			Leon (Bodi.)	129 f.	—
Wien / Saltzburg	100.		(Brecht.)	133	+
Praag	102. f.	+	Tolosa / Mompelier		
Roan	107	+	Avenion	134	+
Chur. Basel (Br.)	109. f.	+	Dantzig	136	—
Pariß / Bisantz /			Massilia	137	
Bern / Basel (Bod.)			Crackaw	140	+
Straßburg (Bod.)			Lüblin / Preßlau	142	+
Franckfort / Nürn-			Neapoli	150	
berg / Botzen	111. f.	+	Bolonia	155	
Cöln (Brech.)	113	+	Florentz / Luca	158	—
Augspurg (Br.) Straß-			Hie ist das pfund dem		
burg (Brech.)	116	—	Apotecker pfund oder		
Venedig groß Gewicht			12 Vntzen Apotecker		
(Brech.)	118	—	gewicht gleich.		
Apotecker Gewicht nach			Ferrara	160	
der Vntz	118	+	Ancona	164	+
Turon	118 s		Dietrichsbern		
Augspurg Müntzg.	119	—	oder Verona	167	—
Costnitz / Vlm / Antorff /			Genua (Brech.)	170	cir.
Lubeck / Cölnisch müntz-			Genua (Bodin.)		
gewicht:	120		Meyland	172	+
Lunden (Bod.)	122	—	Catalonia	178	—
Leipzig / Thessalonica	122	+	Parma	179 f.	
Genff (Brecht.)	123	circ.	Venedig (Bod.)	185	
Brüssel (Coign.)	123	—			

Nota. zwey lot Augspurger machen gar ein wenig mehr dann ein Apotecker vntz.

Gewicht vnd Eich verglichen.

Mit der Eych findet sich ein solche vergleichung deß gewichts / das weil die Wein theils leichter seind theils schwärer / dann Wasser / doch nicht vmb vil / in massen auch die alte vnd Villalpandus eins für das ander genommen ohn vnderscheid: hab auch ich in die Lintzer halbkandel von Brunwasser gewegen 23 Vntz 13 scr. oder 565 sc. komen also auff die Achtering dritthalb Lintzer pfund vnd gar ein wenig drunder / nicht gar 4 scrupula: vnd ein Emmer wigt ein Lintzer Centner vnd 2 pf. aber 40 Achteringe einen Centner weniger 11 lot. An schmaltz schätzet man die Achtering zu 2 pfunden / were der Emmer 82 pfund. Vor 70 Jahren in dem vergleich der 5 N. O. Lande werden 4 alte Maaß oder ein Achtl Emmers zu 10 pfunden schmaltz geschätzet / ist also die alte Maaß zu 25 pfunden vnnd der Emmer zu 80 pfund geschätzet. [1]

96. Ein behendigkeit mit wenig Steinen vil vnderschiedliche Gewichte zuwegen. 106

Weil die Schnellwag nicht jedermans ding / auch offt betrüglich ist / vnd leichtlich verderbt werden mag / Also haben etliche Rechenmeister einen fund erdacht / mit 5 Steinen alle pfund / oder mit fünff gewichtlein alle grän nach einander biß auff einhundert ein vnd zwainzige auff einer Schalwag zu wegen: die müessen aber also beschaffen sein / der erste solle ein gerechtes pfund oder grän wegen / der ander drey / der dritte neune / der vierte Siben vnd zwaintzig / der fünffte ein vnd achzig. zaichne sie von gedechtnuß wegen mit den Buchstaben A. I. S. T. V.

1. 3. 9. 27. 81.

Weil aber nicht ein jeder sich gleich besinnen kan / welchen Stein er gegen dem andern legen solle / so hab ich ein Täfelin hierauff gemacht vnd beygefügt.

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
0		AS	ITAS	IT	AIST	VAIT	SVIT	AVIS	VA	SV	ATVS	ITVA	ISTV
1	A	ISA	ITS	AIT	VAIST	VIT	ASVIT	AVS	V	ASV	ITVAS	ITV	AISTV
2	IA	IS	AITS	STAI	VIST	AVIT	SVAT	VS	AV	ISVA	ITVS	AITV	
3	I	AIS	TAI	STI	AVIST	VTA	SVT	VSA	IVA	ISV	AITVS	ASTVI	
4	AI	TAIS	TI	ASTI	VAST	VT	ASVT	IVAS	IV	AISV	TVAI	STVI	
5	SAI	TIS	ATI	STA	VST	AVT	ISVAT	IVS	AIV	TVAIS	TVI	STVAI	
6	SI	ATIS	TA	ST	AVST	IVAT	ISVT	AIVS	SVAI	TVIS	ATVI	STVA	
7	ASI	TAS	T	AST	IVAST	IVT	AISVT	VAI	SVI	ATVIS	TVA	STV	
8	SA	TS	AT	ISTA	IVST	AIVT	VISA	VI	ASVI	TVAS	TV	ASTV	
9	S	ATS	ITA	IST	AIVST	SVAIT	VIS	AVI	SVA	TVS	ATV	ISTVA	

†

Merck den gebrauch dises Täfelins / wo die Buchstaben nicht nach einander gesetzet werden nach ihrer ordnung / da muß man die gwichte gegen einander legen / nimb dessen etliche Exempla.

Jch soll haben 95 pfund / such oben 90. zur lincken 5 / so finde ich im Creutzwege das wort TVAIS. Das bedeut das ich die begerte 95 pfund auff den zwayen Steinen T. V. haben möge / wann ich die drey A. I. S. dargegen lege / dann V ist hie der letzte nach dem Alphabet, vnd bedeuttet den grössesten Stein von 81 pfunden: was aber hie nach V folget / nemblich A. I. S. gehet sonsten im abc vorher / vnnd bedeutten alle drey klainere gewichte / nemlich 1. 3. 9.

Jch hette gern 40 pfund. Such 40 oben vnd 0 zur lincken / so findestu AIST, bedeuttet du sollest A. I. S. T. zusamen in ein schalen legen / vnnd nichts dargegen in die andere / dann T ist der grösseste Stein / vnd folget keiner nacher: vnnd stehen die Buchstaben nach jhrer ordnung / die sie im Alphabet haben.

Ein Wagmeister kan mit dem sechßten Stain / der da 243 pfund wigt / auff 364 pf. kommen / mit dem sibenden / der 729 pf. hette / käm er auff Ailff Centner / also daß er nicht eins einigen Gewichts mangelte von einem an / biß auff 1093 pfund.

97. Oest. Traidmaaß mit der Eich / Gewicht / vnd außländischen verglichen.

Der Statt Steyr Metzen ist die Landtmaaß.

In mehrerwehntem Keys. General von Anno 1570. wirt der Statt Steir alte gupffte Metzen / zu einer durchgehenden Landmetzen geordnet / doch das solche gupffte Metzen inn ein new gestrichen caement verwandelt vnd füraus nur gestrichen verkaufft werde: die hab ich von dem geschwornen Außmesser zu Lintz entlehnet / mit Wasser angefüllet / das hat gewegen 129 Lintzer pfund / vnd ist gewest 52 Achteringe / weniger vmb ein Seidl oder halbs seidl / dann es kan mir an der halbkandel innen soviel behangen sein / indem ichs 100mal außgossen. Also sihestu das / als vil pfund wassers in einem Emmer seind / gleich sovil halbe Achteringe gehen inn ein Metzen. Ferners ist zusehen / das die Metzen gerad fünff viertel eines Emmers / oder *107* 4 Metzen 5 Em|mer halten / nach dem Raum / vnd mag also das Traid in eim Faß auch mit dem Visierstab erkundigt werden / wann man die Visier deß Fasses multiplicirt mit 4 / vnnd was kompt / mit 5 dividirt / so findet sich die anzahl deren Metzen so ins Faß gehen.

Traid zu visieren vnd messen.

So aber du einen runden Traidhauffen / der wol auffgupfft / auß No. 25 / oder so er nider gesessen vnd stumpff / nach No. 35 / oder einen Sack mit Traid so einem Kasten gleich hoch angeschüttet / nach No. 24 / oder wie es die gelegenheit mit deß hauffens Figur erfordert / messen woltest / so brauche die gleiche puncten am Visierstab / vnd rechne den Leib / den dividir hernach durch 31440000 / dann sovil gehet in ein Lintzer Metzen.

Traid mit dem Visierstab zu messen.

Weil dann nun ein Oesterreichischer Emmer zwoen Römischen Amphoris oder † sechs Modijs gleichet / als wirdt ein Oest. Metzen oder Strichmaß achthalben Modios machen / vnd hingegen ein Modius Romanus ist ein wenig mehr dann vnser halbes viertl.

Der Praager strich aber / so vor einem Jahr im gantzen Königreich Böheim bestettigt worden (deren mir einer zukommen) thut drey / vnser Obder-Enserische vier Metzen: vnd ist diese Traidmaaß in Oesterreich vnnd Vngern noch viel mehr vnderschidlich / wie auß folgendem Täfelin zusehen / das ich auß einer mir von dem Kays. Proviant Ampt beschehenen communication gezogen vnd auff die Lintzer Metzen (deren alda / wie auch im Land vnder der Ens / 30 für eine Muth / gerechnet werden) nicht weniger auff die Wiener Muth (zu 31 Metzen gerechnet) gerichtet habe.

Ein Metzen fast ein Artaba. 6 Metzen geben ein Corum Hebr. Ein Satum ein viertel Emmers vnd 5 sata ein Metzen. Ein Ephi nicht gar ein Emmer. Ein Gomor oder Assaron drey Achtering. Ein Cab oder Choenix weniger dan 2 Achtering / 5 Cori ein Muth.

†	Auff ob der Enser	Auff Wiener	Auff vnder Enser Landmaß
Wiener	54.3 viertl	31 Metzen oder ein Mut	43 ein halb
Vnter Enser Landmaß	37.1 halb	21 drei achtel	30 Metzen oder ein Mut
Preßburg	37.1 viertl	21 ein viertl	29 fünff sechstl
Comarn	34.1 viert	19 ein halbe	27 drey Achtel

21) Linster 23) Modies *statt* Modios 27) thun 32) gerechdet 35) 93 *statt* 43

	Auff ob der Enser	Auff Wiener	Auff vnder Enser Landmaß
Hungarisch			
Altenburg	33.1 drittl	19	26.2 drittl
Stain am Anger	31.5 achtel	18	25 ein viertl
Raab / Günß			
Genßdorff	30.3 viertl	17 ein halbe	24.5 achtel
Ob der Enser	Ein Mut oder		
Landmaaß	30 Metzen	17 ein achtl	24
Oedenburg	29.3 achtel	16.5 achtel	23 ein 3 theil
Rackerspurger			
Görtz / Grätzer			
viertel	25.5 achtel	14.5 achtel	20 neun 16 theil
Prager strich	22.1 halb	12.7 achtel	18 ein 16 theil

Traid schwäre.

Die Römische oder Griechische Medici haben vor zeiten ihr Traid viel gewegen / das ist aber von mehrerley vrsachen / ein betrüglich Gewicht / wie meniglich bewußt. Jedoch / vnd damit ich auch diß nicht vmbgehe / sonderlich wegen der Fuhr zu Land vnd Wasser; hab ich ein Traid / fünff Monat alt / im trucknen 1615ten Jar jenseit der Donaw / nicht weit von Lintz gewachsen / nach dem Metzen gewegen 92 pfund / Waitzen 97 pfund / das Wasser aber in der Metzen 129 pfund / darauß volgt / das ein Schiffdreyling / oder 30 Emmer Weins so schwär sey / als 42 Metzen Traid / oder 40 Metzen Waitz.

Traid fuhr.

Hierauff beruhet nun die Schiffrechnung / dann ein Schiffherr den vberschlag leichtlich machen kan / was es mit Wein vnd Traid / Zillen vnd Rosse / für einen Absatz gebe. Was ich diß orts für berichtung eingenommen / findet sich inn nachfolgendem Täfelin.

Schiffrechnung. Scheff vnd Clozillen werden von einer gewissen Form vnd zubereitung verstanden / nicht aber von einer bestimmten grösse.

108

Schiffzillen	Dreyling			Lintzer Muth Waitzen			Roß		
Ein fünfferin	8.	9.	10.	11.	12.	13.	4.	5.	
Sechserin	11.	13.	15.	14.	17.	20.	6.	7.	
Gmainstetnerin	16.	17.		21.	22.	23.		8.	
Sibnerin	18.	21.	24.	24.	28.	32.	9.	10.	
Irrerin	25.	28.	31.	33.	38.	42.	11.	12.	
Achterin	32.	36.	40.	43.	48.	53.	13.	15.	
Hohe Naue	80.	90.	100.	107.	120.	133.	30.	33.	36.

35) Nane *statt* Naue

Wann man dann ſcheittert / fragt es ſich was die Fäſſer halte / das ſie nicht ſincken. Antwort / nur das Holtz machet ſie ein wenig herfür gucken / oder ſo eins wahn ligt / ſtehet es vmb ſovil empor. Das nemen die Schiffleute wol in acht / vnd bauen der gefahr zeitlich für: beſſer außtruncken dann verſuncken. Sonſten hat der Wein faſt gleiche ſchwäre mit dem Waſſer / blibe für ſich allein / ſo bald vnden als oben im Fluß / nach dem in der Schwal truege.

Sol alſo / diſer Rechnung nach / ein trenckt Schiff mit lauter Wein geladen / nicht gar verſincken.

Mit der Traidfuhr hat es gröſſere gefahr / dann obwol das Traid droben leichter befunden worden dann der Wein / iſt es doch allein von ſolchem Traid zuverſtehen / das mit ſampt dem lufft / der zwiſchen den Kernlin platz hat / in einem Schiff oder Geſeß eingefangen iſt / alſo das kein Waſſer darzu kan / wann aber das Waſſer darzu kan / ſo ſincket ein jedes Kernlin für ſich darinnen / vnd alſo auch die gantze Laſt / dann das Waſſer treibt die lufft auß.

98. Gewicht vnd bewerung der Metallen vnnd anderer wagmäſſiger Sorten.

Wie nun droben No. 13. gemeldet worden / das Gewicht vnd Leib oder Raum mit einander gehen / als iſt hie anfenglich vnd ferners zu mercken / das ſolches nur dann-zumahl gelte / wann man vberal in der Regel detri von nur einerley Zeug handelt.

Es ſeind aber die Metalla vnnd andere flüſſige oder truckene harte zeuge ſehr vn-gleich / einer ſchwärer vnd gedigener als der ander. Vnd wann man dann von zweyer-ley Zeugen auff einmal handelt / ſo merck fürs ander / das Raum vnd Gewicht ein-ander außwechßlen / vnd die proportion gerad vmkehren.

Zum Exempel / wann ich hette deß Waſſers vnd deß Queckſilbers jedes ein ſeidl / ſo iſt das Queckſilber 15 mal ſchwärer / vnnd hingegen wann ich baiderley Zeug inn gleicher ſchwäre nimb / ſo iſt deß Waſſers 15 mal mehr nach dem Leib oder Raum.

Diſem nach haben auch die Authores, welche alles abgewegen / vnderſchidliche be-richte gethan / wie ein Zeug oder Metall ſich gegen dem andern verhalte / etliche nach dem Gewicht / etliche nach dem Raum / etliche auch nach den diametris ehnlicher Kugeln / welche wie bey No. 13. gelehret worden / nur das drittheil ſo weit von ein-ander ſeind als die Leiber.

Weyland Laſarus Ercker probation Meiſter in Böheim / in ſeinem andern Buch Gleiche Dräte gewegen.
vom Gold probiren am 60 Blat lehret fein Gold vnd Silber durch ein loch zu drä-ten zu ziehen / vnd dann gleich lange trümmer abzuzwicken / vnnd auff der probir wag (die er mit jhrer gebürlichen Subtiligkeit vnnd zurüſtung nach aller notdurfft be-
109 ſchreibt) abzuwegen. Hie werden nun alle dräte gleicher dick vnd lenge / ſeind | der-halben am leib oder raum gleich / vnd gewinnen vngleiche gewichter: dann das fein Silber hat jhme gewogen 227 Marck 4 lot / das Gold 405 Marck 8 lot / auff dem ver-jüngten probation gewicht. Solte jhme / als einem probation Meiſter billich zu trauen ſein / wann gewiß wäre / das die dräte einander allerdings gleich / nicht krumb getriben / auch das ziehen ſie ſo gedigen gemacht / als das gepräg.

32) *(Randnote)* Drääde 35) Subtligkeit

In ein Fischbein ab bossiren ein giessen vnd wegen.

Bodinus de Rep. am VI. Buch vnd Theatro Naturae lib. II. fol. 261 berufft sich † auff Franciscum Fuxaeum Candalam, nennet jhn Gallicum Archimedem, dieser hat auch dräte gemacht auß allen 6 Metallen: hernach einen draat in ein Fischbain gedruckt / vnd die Form mit Queckſilber angefüllet / der sol auch berichtet haben / das es sich nicht thun lasse / das man die Metalla schmeltzen / vnd ein sonderliche darzu gemachte Flasche von einem jeden voll angiessen wolte / dann wann sie erkalten / sollen sie sich setzen / eins mehr denn das andere: das wil Bodinus mit dem Eiß bestettigen / irret sich aber / dann wann ein wasser zu Eiß wirt / ist es nicht kleiner / sonder grösser worden / sonsten wurde es nicht obschwimmen / nicht die Krüge vnnd Gläser zutreiben / nicht in den beschlossnen Tragbutten vbersich quellen. Er selber Bodinus hat Erden / Saltz / Aschen / Oel / Wein / Meer vnnd süeß Wasser mit einem gefesse gemessen vnd gewegen. Es ist aber vil ein anders / Erden Saltz vnnd Aschen trucken zuwegen / wie ein Traid in eim gehüben Gefesse / vnnd dasselbe seiner gedignen substantz nach / vnnd mit außschliessung deß zwischen eingemischten Luffts abwegen / welches nicht ohne wasser geschehen kan.

Mit kandeln eichen vnd wegen.

Gleiche würffelmachen vnd abwegen.

Johannes Baptista Villalpandus, ein guter fleissiger Mann / der doch auch Christophorum Grüenbergern Matheseos Professorem zu Rom auß seiner societet zu sich gezogen / hat auß 6 Metallen gleiche würffel oder Cubos gemacht / eines Lintzer zolls / oder doch 20 puncten / lang breit vnd hoch / die flüssige sorten aber mit gefessen / so inwendig disem Cubo gleich geformirt gewest / angefüllet: das wasser so drein gangen / (doch auß einem grössern gefeß herab getheilt) hat jhme gewogen 148 hochteutscher pfenning / das ist nahend 14 ſc. Apotecker gewicht. Oel / Hönig / vnd dergleichen hat er von den alten Medicis vbernommen. Beclagt sich doch der vermischung der Metallen / so auch deß Traidgewichts / vngleichheit halben.

Thomas Hariotus ein fürtrefflicher Philosophus in Engelland / hat vor 7 Jahren † mit mir Briefe gewechßlet / vnnd mir die gewichte nur der durchsichtigen Materien communicirt, von einer sehr tieffen speculation wegen / setzet auch das gewicht. Wie er aber gewegen / hat er nicht beygefügt / wie auch die folgende nicht.

Zu gleichen diametris vngleiche gewicht setzen.

Brechtler Büxenmeister / vnd Hillinger Güesser / haben zwar die diametros der Kugeln gleicher schwäre (auff die 3 oder 4 schießlötige zeuge) gesetzt / sie haben aber auch zu den gleichen lengen der diametrorum gegen einander vber beygesetzt / wievil jeder zeug (einer solchen Kugel groß) wege. Vnd achte ich / deß Brechtlers angab werde auß Georgio Hartman Mathematico genommen sein / der vmb das Jar 1540 den Maßstab auff die Büxen erstlich (wie Hulsius fürgibt) erfunden. Brechtelern wigt ein Kugel / die 138 meiner puncten am diametro hat / am Stein 14 / Eysen 50 / Bley 75 Nürnberger pfundt / darzu mir jhrer Mst. Müntzmeister Lasantz den diametrum zu 4 Nürnb. pfund Zin / meiner puncten 61 s lang / communicirt, wäge also die vorige größ an Zin / 45 vnd ein 5thail pfunds.

Hillinger aber gibt der Kugel / so meiner puncten 84 hat (nahend das latus cubicum zu einer Oesterreichischen Achteringe / das ist 85) an Stein 3 / Eisen 10 / Meß 12 / Bley 16 Wiener pfund / waiß nicht was für Meß er meinet.

Vngleiche diametri auff gleich gewichter.

Anderst helt es sich mit Michaëlis Coigneti Ertzh. Mathematici zu Brüssel Pro- † portional Circkeln (dessen Frantzösische instruction drüber / mir nur schrifftlich zusehen worden) so auch mit den Paduanischen vnnd andern: dann da setzet man nur die diametros der Kugeln / so gleich wegen: derowegen ich sie gar genaw in 2. 4. 8. 16. 32. vnd so fortan getheilt / vnd auß Clavij Tabula Cubica die Cubos auff jede zahl / so ich gefunden / außgeschriben / auß diesen hernach das Gewicht auff jede von gleicher größ gerechnet. Doch gibt Coignetus auch den diameter einer Eisenen Kugel / so zu Brüssel 10 Pfund wigt / meiner puncten 83 s lang. Träffe nahend mit Hillingern zu / wann sie einerley pfund gehabt hetten. |

110 Weil dann ein zimlicher vnderschaid zwischen den authoribus, wie auß folgendem Täfelin zuersehen / hab auch ich mich dahinter gemacht / in sonderlichem bedencken / das ein Philosophus auß fleissiger betrachtung deß Gewichts an einem jeden Zeug trefflich viel / vnd offtermals mehr erlernen könde / dann ein Alchimist auß dem Fewr/ vnd laß ich mich beduncken / die Tinctur auff 100 M. wie es die filij Sapientiae fürgeben / könde nur durch das blosse gewicht jhres lapidis Philosophici widerlegt werden. Gleichwol hab ich nur angefangen / wil derhalben meine processe sampt den Materien / dem Leser zur nachfolg vnd verbesserung / beschreiben.

Das Gewicht lehret viel dings.

Erstlich Wasser / Wein vnd Oel hab ich in meiner Oest. halbkandel gewegen. Schmaltz nur nach der gemeinen schatzung geschätzt / weil vil am leutern glegen / vnd desthalben nicht alles so genaw gleicher schwäre ist. Wachs schwimmet im Oel / fellt im Wasser zu Boden. Eis schwimmet im Wasser. Augstein schwimmet inn einer gar starcken Laugen von Waidaschen / fellt in einer linderen zu Boden. Diese Sorten hab ich nur nach gutachten gegen einander verglichen.

Ein grosse Steinkugel von hartem Grawgesprecklelten Ob der Ensischen Werckstain / am diametro meiner puncten 312 / hat sich nicht schicken wöllen in ein Wasser zusencken / die hab ich nach dem Leib gerechnet / durch den Zusatz fol. 90. ist geweßt 15902390 / vnd hat gewegen 162 pfund 12 lot Lintzer gewicht: so auch zwo Marmelsteinene Kugeln / meiner puncten 55. 42. vnnd 2. 3thail: vnnd damit das Werck desto besser bezeuget sey / hab ich auch auß jhren gewichten 415 sc. vnd 197 sc. (oder erlengert 415000000 vnd 197000000) die Wurtzeln auß Clavij tabula gesucht / vnd gefunden 746 / 582. Summa 1328 gibt summam baider gemeßner diametrorum 97 vnd 2 dritthail / folgen die diametri corrigirt 54 vnnd 4 fünfftheil / 42 vnd 4 fünfftheil / ist genaw genug.

Also hab ich auch Zin vnnd Bley in ein gedrät messen Gewichtschüsselin gegossen / vnnd oben abgeriben / hernach das Schüsselin mit Wasser / vnnd wider mit Quecksilber angefüllet / vnd mit einer fläche oben drauff getruckt / damit was sich zuviel vber die Schüssel außgeschwiblet / darvon gesprungen: vnd hab jedes gewegen. Ich hab auch baide Zinn vnd Bley / wie Kegelstöcke / nach meinen puncten gerechnet / vnd mit dem Leib vnd Gewicht meiner Halbkandel verglichen / dieweil deß Wassers im Schüsselin wenig geweßt. Das Zinn ist von Schlackewald geweßt / vorn vom Gatter / da er gezeichnet / das Bley auß Poln durch Krembs allhero gebracht / das Quecksilber auß Idria / dem Hauß Oesterreich zustendig.

Also kan man jhme thun mit allen Regularischen Figuren nach außweisung deß ersten thails.

Ich hab aber der Figur allein nicht getrawet / ob sie etwa nicht wol gemacht vnd nicht gar Regular wäre / sondern hab baide Marmel Kugeln / zwen Magnetstein /

28) 582 s. Summa 1320 ... 96 *statt* 97 29/30) 54 vnnd 1 dritttheil / 42 vnd 1 drittheil

ein schwachen vnnd ein kleinen sterckern / das Zinn / das Bley (vnd dessen mehrerley stucke) einhundert zu Steir newgeschmitte eisene Nägel / deß Zeugs auß dem Eisenärtzt / messene Gewichtstein von Nürnberg / Kupffer Zänd auch auß dem Eisenärtzt / Viertzig alte Schlickische Jochims Taler / fünffzehen löttig (zuvor wol mit Laugen abgewaschen) Gold Zänd 60 Ducaten schwär / so dann auch Queckfilber etliche pfund / eins nach dem andern in ein hohes enges Glaß (das doch die Taler hinein gemöcht) gestrichen voll Wassers / eingesenckt / das Wasser so jedesmals herraußgelauffen / gegen seiner grösse Metallen vnd Zeug / mit dem Apotecker gewicht gewegen.

Wassers weise bey disem abwegen. Spil mit der guldenen Ketten vnd einem Glaß voll Weins.

Das Wasser hab ich bey diser subtilitet kennen lehrnen / wie es sich inn seiner zächheit ob dem Glaß geschwüblet / dahero die vexation erfolgt / als ob das Gold Wein zu sich ziehe / also das ein guldene Ketten inn ein Glaß gestrichen voll Weins eingehen solle / so das doch der Wein nicht vbergehe. Ja wol / wann das Glaß weit / vnd die Ketten klein ist / auch niemand das Glaß rüttelt / so thut es nicht allein Gold / sondern Stain vnd Bain / im Wasser vnd Wein: Ob ich nun wol grossen fleiß angewendet / daß das Glaß jedes mahls gleich ge|strichen voll seye / achte ich doch der 111 sachen besser gerathen sein / so man ein Gefesse nimmet / das oben glatt abgerichtet / vnnd ein gerades blat drein getruckt wirdt / also daß das vberige Wasser etwa zu einem löchlin außspritzen möge.

Vnnd weil das Saltz / trucken gewegen / vil luffts in sich hat / hab ich ein gewisses Gewicht von Wasser in ein Glaß gegossen / widerumb ein gewisses Gewicht klein geriben Saltz gemählich drein geröhret / endtlich auß einem gewegnen Wasser das Glaß vollend angefüllet / das vberige Wasser wider gewegen / das Glaß außgelähret / mit frischem Wasser voll angefüllet vnnd auch gewegen.

Mit dem Gold aber hab ich auch diesen process gebraucht / das ich 25 stuck außerlesner alter / thails Haidnischer 2000 Järiger Schaupfenninge / an Gewicht 29 Vntzen / in ein Glaß halb voller Wasser (so auch zuvor gewegen) gesencket / das Wasser vor vnd nach gezeichnet / wie hoch es zu baiden malen gegangen / hernach das Gold herauß genommen / das Glaß wider biß zum obern zeichen angefüllet vnnd gewegen.

Vnnd hette den vnterschaid deß Wassers in einem Regular Gefesse nur nach den vnderschidlichen höhen / auch ohne Wag rechnen könden / wieviel es wegen müsse.

Künstliche Wasserwag.

Meß hab ich gegen Eisen vnd Kupffer gewegen / nach deren Kunst die Lasarus Ercker lehret in seim probationbuch am 60. blat / nämlich hab ich die schalen weg gethon / baide gewichte an blosse Fäden geknüpffet / vnnd die Wag gleich instehen machen / hernach gemählich in ein Schaff mit Wasser gesencket / da dann das Meß für dem Eisen fürzogen: ob aber Kupffer dem Meß etwas fürziehe / hab ich nicht für gewiß außzugeben.

Vnd hat der besagte Author nicht vergebliche hoffnung gehabt / das dise Kunst zu erhöhen sey / darzu soll der Leser von mir dißmals disen Zusatz behalten. Wann also im Wasser dem fürziehenden Metall soviel genommen wirdt / biß es wider gleich instehet: so schwär Gewichts man jhme abnimbt / sovil wigt der vberschuß Wassers / welchen das leichtere mehr außtreibet / dann das schwärere geminderte. In gleichem auch so man dem leichteren zulegt.

Auß disem einigen griff kan man die Metalla auch ohne ein Glaß gegen einander vergleichen / welches aber ein ander mal von mir geschehen soll. Anjetzo wil ich aller

Authorum meinung in einem Täfelin gegen einander inn einerley Zahlordnung vergleichen: dabey mercke / wa ich deß Authoris Namen gantz gesetzet / da hab ich desselben meinung angefangen / vnd jhme dieselbige Zahl mit fleiß geben.

99. Wasserprob auff Silber / Gold / Zin vnnd Bley / auch Bergärtz / wieviel eins jeden vnder dem andern.

Dise Kunst hat Archimedes erfunden. Dann als ein Goldschmid mit einer guldenen Cron grossen betrug begangen / vnnd König Hiero inn Sicilia gern gewußt hette / wie groß der Abtrag wäre / darüber sich Archimedes besinnen sollen / ist er mit disen Gedancken ins Bad gangen: vnder deß er nun den Leib in ein Wannen gesencket /

112 **Täfelin von vergleichung allerhand Wagmässiger Sorten.**

	196160. C.		75000. V. Fuxeus,	Scharffe Laugen.	K.
	193875. F.		Coignetus, Paduanisch	Augstein / Gummi	10744. Ha
Gold	187500. V.	Zin	Instrument.		
	185308. K.		74727. K.	Linde Laugen.	K.
	183964. K.		72309. Br		
	180000. Ercker	Marcasiten	Bo	Brunnwasser	10000. Villalpan.
	177778. P.			Rotwein	10000. Bo Hariotus
Quecksilb.	150000. V.	Magnet	45851. K.	Regenwas.	9997. Ha Kepplerus
	144750. F.		45714. K.	Distilirter	
	136114. K.			Essig	9973. Ha
	133900. K.	Marcasiten	Bo	Essig / Bier /	
				Purgir-	
Bley	128000. Hi	Marmelst.	29384. C.	tränckel	Heurnius
	124750. F.		27955. P.	Span. wein	9946. Ha
	120000. Br		26266. K.	Oest. wein	9946. K.
	118272. C.		26100. K.		9876. K.
	116500. V.	Crystall.	26505. Ha	Weißwein	9757. Bo
	114598. P.	sal. Gemm.	26208. Ha	Aschen	9757. Bo
	111692. K.	Glaaß.	25760. Ha	Eis	K.
	107431. K.		26481. C.	Wax	9583. K.
Silber	116125. F.		26190. P.	Oliven Oel	9462. Bo
	112084. E.	Stein	25168. K.		9166. K.
	105174. P.		24000. Hi		9154. Ha
	104464. C.		22400. Br		9000. V. Gal.
	104000. V.	Saltz	23453. K.	Oel / Blut	Heurnius
	102692. K.		14375. Bo	Terpentin	8704. Ha
Kupffer	95479. C.	Erden	16875. F.	Brandt-	
	91125. F.		12432. Bo	wein	8394. Ha
	91000. V.	Hönig	15000. V. Galenus	Aqua vitae	
	89213. P.	Syrup	Heurnius	Spiritus Vi-	
	86267. K.	Meer / oder	12162. Bo	ni, Blut	Heur.
Meß	96000. Hi	Saltzwas.	12017. Ha		
	85333. K.	Eben Holtz / Buxbaum Brasi-		Schmaltz	8026. K.
	80943. C.	liens. / Guaiacum.	Bo		8000. K.
	80875. V.			Petroleum	
Eisen	80362. K.			rectificatum	7971. Ha
	80000. Brechtler/Hillinger				
	79535. P.				
	79250. F.				

vnd war genommen / wie hoch das Waſſer geſtigen / iſt jhme mit dieſer glegenheit der griff eingefallen / darüber Er nackend herauß geſprungen / vnd für frewden auff⸗geſchrien / Gefunden.

Bodinus zwar würfft dem Archimedi recht für / das diſe Kunſt vnvollkommen / dieweil auch dreier vnnd mehrerley Sorten (als Gold / Silber vnnd Kupffer) vnder⸗einander gemengt werden könden: vnnd diß iſt war / die Kunſt hat hie nicht aller⸗dings ſtatt / ſondern thut mehrerley außſprüche / wie man in Regula Alligationis lehrnet: doch ſeind auch hie etliche nutzliche Regeln zubehalten.

1. Wann das Metall durch No. 98 wirdt gefunden ſo ſchwär als Zin oder Gold / ſo iſt es lautter Zin oder Gold.

2. Wann es hat Silber⸗ oder ſonſt eins Metals ſchwäre / das da zwiſchen Zin vnd Gold wigt / ſo iſt es eintweder deſſelben Metalls gantz / oder es iſt nicht allein von einem leichtern / ſondern auch von einem oder mehr ſchwärern etwas drunter.

3. Wann es zwiſchen zweyen benachbarten Metallen das mittel helt / ſo hat es auch von baiden etwas / oder von andern / die eins theils noch ſchwärer / andern thails noch leichter ſeind.

So aber gewiß / das nur zweyerley vndereinander / ſo erkundige durch No. 98 / was baide / ſo groß als das fürhabende ſtuck / fein wegen / vnd merck den vnderſchaid zwiſchen allen dreyen gewichten / vnnd handel nach detri.

Nimb ein Exempel / Es wär ein Ketten fürhanden / die ſo viel oder ſo ſchwär Waſ⸗ſers auffſteigen machete (oder ſo groß wäre) als 1875 Gran fein Goldes / oder als 910 Gran rein Kupffers (nach Villalpandi proportion) ſie aber wäge 1500 Gran. Zeuch ab 910 von 1875 / vnnd von 1500 / bleibt 965 vnnd 590. Wann dann 965 gibt alle 1875 Gran fein Gold / ſo wirdt 590 geben 1151 s Gran fein Gold / vnd alſo die vberige 723 s Gran Kupffer. [1] †

Laſarus Ercker lehret diß erkundigen ohne rechnung / nur mit zulegung feinen Golds / vnnd mit abnemung feinen Silbers / wann es im Waſſer empor ſtehet / oder das gegen ſpil / wann es im waſſer für ziehet / vnd diß ſo lang / biß die Wag / baids in⸗ vnnd auſſer halb deß Waſſers jnnen ſtehet / damit alſo gleich ſoviel ge⸗ſöndertes fein Silber vnd Gold in die eine Schalen komme / als viel in der andern eines jeden vermiſcht lige. Es gehet aber langſam zu / ſonderlich mit dem offtmahligen abtrücknen. 113

100. Wie der Viſierſtab auch auff das Geſchütze vnnd Kugeln von Bley / Eiſen / Stein vnd Marmeln zugebrauchen.

Wie der Gaſt / alſo der Becher vnnd der Trunck / ein ſchlechter Kellner / der ſich nicht waißt nach eins jeden Gaſts humor zu accommodirn. Derhalben auch dem Viſierſtab nicht für vbel zu haben / ob er ſich ſchon bißweilen auſſerhalb des Kellers vnnd Weinfaſſes auch zum ernſt brauchen leſſet / vnd auß einem groſſen Canon einen Ob der Enſeriſchen Märtinsberger / Spitaler / Eiſenärtzter zu Steir abgezogen / oder auch einen Edlen Polniſchen Trunck einſchenckt.

Weil dann die gemeine Regel iſt / das ſo ſchwär ein jede Kugel iſt / halb ſo ſchwär pulvers auff die Ladung gehörig / ſo meſſe mit dem Viſierſtab den diameter am

Mundloch deß Geschützes. Dann was anlangt die gemeine gleiche puncten am Staab / ist zu wissen / wann ich neme den Cubum von der obermelten Steinkugel diametro 312 / nämlich 30371328 / vnd jne thaile mit dem Gewicht der 162 pf. vnd 12 lot / so kommt 187044 / darauß die Cubische wurtzel ist 57 vnd ein fünfftl / das seind 3 Lintzer zölle / die geben den diameter zu eim Lintzer pfund harten Lintzerstains / allerdings wie Brechteler den diameter eines Pfundstains Nürnberger Gewicht / 3 Nürnberger oder Lintzer Zölle lang gibt. Wirdt also sein Stein waich / vnd soviel leichter geweßt sein dann der vnserige / als viel das Nürnberger Gewicht leichter ist / dann das Lintzer.

Diameter von Zöllen	Stain Kugel Pfund
3.	1.
6.	8.
9.	27.
12.	64.
15.	125.
18.	216.

Was da anlanget die Wein Eichthailung auff dem Visierstab / findet sich ein schöne vergleichung / das die Visier auff anderthalb Achteringe nämlich 114 s oder 6 seidlen / geben den diameter auff 8 pfund Stein. Also magstu sicherlich allwegen 3 seidlen für 4 pfund Stein nehmen / vnnd vom Marmelstein nach meinem Gewicht / das 26 pfund mehr. Vom Eisen aber nimpt man allwegen 16 pfund für 5 / vnd machen also allwegen 15 seidlen 64 pfund Eisen / ein jedes seidl mehr dann 4 pfund. Entlich vom Bley nimbt man 4 vnd einhalbs oder ein dritthail pfund für jedes pfund Stain / darmit gäbe die visier eins jeden seidls den diameter zu einer Kugel von 6 pfund Bley nach meinem Gewicht. Anderer Authorum droben No. 98. angegebene proportiones, weil sie doch sehr different, laß ich einen jeden / der lust hat die weil zu kürtzen / selber außforschen / vnd auff das Oesterreichische gewicht reducirn.

Seidlen vnd gewichte der Kugeln gehen mit einander.

7) Lintz 20) Oesterreiche

ENDE

Erclärung der gebrauchten Geometriſchen Wörter vnd Terminorum.

Saag / Crena.

Taufeln / Tafeln / Taugen. Tabulae.

Fröſche / Belgen. Margines tabularum, Apsides.

Bauch / Venter dolij.

Beyhel / Spontloch. Orificium infusorium.

Emmer / Amphora.

Dreyling / Dolium magnum.

Eych / Mensuratio, Capacitas mensurata, Character capacitatis index, Locus exactae mensurae.

Hemſtab / Viſierruthen. Virga mensoria cubica, bacillus, Specillum exploratorium.

Strich / Riß / zug. Linea.

Strecke / Geräde. Recta.

Grundſtrich / Bodenlini. Basis figurae planae.

Schrancke / Zaun / Vmbzeununge. Perimetros.

Seitte / latus plani.

Langes Eck / Scherffe / Reiffen. latus solidi.

Lenge / longitudo.

Breitte / latitudo.

Höhe / altitudo.

Tieffe / profunditas.

Lähn / acclivitas, planum acclive.

Dicke / diameter solidi.

Zwerlini / querlini / Durchzug. Diagonios, vel quasi. Transversalis ab orificio ad fundum dolij.

Platz / Feld / Feldung. Superficies, area.

Wand / Solidi planum vel hedra.

Boden / Basis plana solidi.

Tiſch / Planum superius parallelum Horizonti.

Fläche / plana superficies.

Kraiß / Circkel. Circularis linea.

Vmbkraiß / Circumferentia.

Circkelfeld / Circuli planum.

Circkels durchzug / Breitte / höhe. Diameter circuli pro ratione situs.

Weitte / diameter circuli: etiam longitudo circumferentiae circuli.

Ablenger Circkel / Ellipsis.

Eylini / circumferentia Elliptica, ovalis.

Bogen / Arcus.

Senne / Vnderzug. Chorda, Subtensa.

Halbe Senne / Sinus.

Boltz / sinus versus, Sagitta.

Circkelzaan / Sector Circuli.

Circkelſchnitz / Segmentum Circuli.

Anſtreicher / Tangens.

Durchſchneider / Secans.

Anſtehen / inscriptum esse.

Rundung / Curva superficies.

Geviert / quadratus.

Vierung / quadratum.

Ablenge vierung / parallelogrammum rectangulum longum.

Fürgehend / continuatus.

Geſellet / Conjugati.

Gleichlauffend / lineae parallelae.

Winckel / Spitz. Angulus.

Scharff / Acutus.

Stumpff / Obtusus.

Seiger / höch. perpendiculum.

Rautten / Rhombus.

Spießeckich / Trapezium.

Geordnet / Regularis.

Gleich / aequalis.

Enlich / Similis.

Schick / Ratio, proportio.

Schnit / sectio.

Schnitz / segmentum.

Leib / Fülle / Griff. Corpulentia, soliditas.

Volle / Volleibige / Leibhaffte / beſchloſſene Figur. Corpus, Solidum.

Raum / Spacium, capacitas.

Gewicht / Schwäre. Pondus.

Würffel / Cubus.

Gewürffelt / würffelrecht / würffelgantz. Cubicus.

Wurtzel / Radix, quadrati per numerum expressi latus numero expressum.

Cubic wurtzel / Cubi numeralis latus numerale.

Quaderſtuck / viereckte / gevierte Seulen. Parallelepipedum.

Gerade Seulen / parallelepipedum rectangulum.

Zwerſtuck / Speidel / Kegel / Wecken. prisma.

Zugeſpitzte ſeule / Pyramis.

Runde Seule / Welle / Walger / Waltzen. Cylinder.

Täller / Rad. Cylinder humilis latus.

Kugel / Globus, Sphaera.

Ablenge kugel / Ay. Sphaeroides longum.

Gedruckte kugel / Linſe. Sphaeroides latum.

Kugelzaan / Sector globi.

Kegel / Conus.

Kegelſchnit / Sectio Conica, Parabola vel Hyperbole.

Schnitz / Segmentum solidum.

Kegelſchnitz / segmentum Coni interminatum deorsum.

Stumpff / Residuum.

Güpffel / Wüpffel / Wirbel. Vertex.

Graat / Axlini. Axis.

Gürtel / Zona tornatae figurae.

Hütlein / Segmentum superficiei Globi.

Trum / Apotome.

Stock / Truncus.

Rinden / Limbus Cylindri, Coni.

Rock / Tunica.

Rucken / Margo rotundatus longus.

Lehr / Norma in torno.

Ring / Annulus.

Bſchloſſner ring / Annulus strictus.

Apfelrund / Malum.

Citronenrund / Citrium.

Heyſchober / Conoides Parabolicum.

Berg / Arbishauff. Conoides Hyperbolicum.

Kegel darauß diſer geſchelet / Conus Asymptoton.

Olivenrund / Oliva.

Zweſpenrund / Prunum.

Spuelrund / Fusum.

Register aller Numerorum vnnd fürnemister Lehren inn disem Buch begriffen.

Erster Theil. No. 1. Von Notwendigkeit deß Visierens. 2. Vnderschaid deß gmeinen vnd deß Oest. Weinvisierens. 3. Inhalt deß gantzen Büchlins. 4. Von eusserlicher gestalt eins Weinfasses. 5. Von kunstlichem Messen allerhand runder sachen. 6. Deß Circkels vmbkraiß vnd diametern, eins auß dem andern zurechnen. 7. Vom vmbkraiß der Aylini. 8. Wie das Maaß zuverstehen. 9. Was Sennen / Boltz / Anstreicher / Durchschneider haisse / wa zu finden / Item vom Canone sinuum. 10. Zurechnen die Sennen / den Boltz oder den diameter. 11. Erklärung der dreyerley Maßsorten oder quantiteten. 12. Wieferne die vnderschidliche Sorten sich zusamen schicken inn die Regel detri. Item fol. 10. ein nutzlichs Täfele zu den Bögen / Feld / Zänen vnd Schnitzen im Circkel / so auch zum Feld vnd Zänen der Kugel. 13. Das die Sorten vndereinander vermenget / sich nicht allwegen zusamen in detri schicken / sondern in decinque vnnd desept. Schneiderrechnung fol. 12. Geschütz⸗ Faß⸗ vnd Goldschmid⸗rechnung fol.13. 14. Von der Feldung in einem Circkel. 15. Feldung deß Ablengen Circkels / vnnd mit dem gerechten verglichen. 16. Allerhand Felder von geraden strichen eingeschlossen. Feldmessen. Item geordnete Figuren im Circkel vnd vmb den Circkel. 17. Vom Feld im Circkelzaan / vnd im Circkelschnitz / auch darzu fol. 17. ein nutzliches Täfele. Hieher gehört auß No. 89. Gerechte vnnd Ablenge Circkel⸗schnitze gesellet. 18. Feldung im Kegelschnit. Hieher gehört auß No. 89. Parabolae Gesellet. 19. Vom runden Feld oder Dach am Kegel. 20. Vom gantz runden Feld an der Kugel. 21. 22. Vom runden Feld am Kugelschnitz. 23. Feld am Cylindro oder Wellen. 24. Vom raum der Seulen vnnd Wellen. 25. Vom raum der zu⸗gespitzten Seulen vnnd Kegeln. Hieher gehört auß No. 89. der Zusatz am 90. Blat / Zuwissen / etc. 29. Was Kegelschnitte oder Walgerschnitte seyen / vnd wievil der⸗ † selben. 30. Ordnung vnd aigenschafft deroselben. 31. Die Aylini vnnd andere Kegel⸗schnitte behend auffzureissen. 32. Was für volleibige Figuren auß den Kegelschnitten kommen / biß auff die Figur eines Fasses. Item fol. 29. wie die vngestalte stucke nach jrem raum zumessen. 33. Vom Ay oder Ablengen Kugel. 34. Vom Hewschober. Hieher gehört ein Zusatz auß No. 89. Parabolica Conoidea. 35. Vom Berg oder Arbishauffen. 36. Vom Kugelzaan. 37. Vom Kugelschnitz. 38. Mehr hiervon vnd fol. 34. ein nutzliches Täfelin zu den Kugelschnitzen. Das exempel verstehe auß der Bruchrechnung fol.48. 39. Was die gerechte vnd ablenge Kugeln für schnitte ge⸗winnen. 40. Von Ablengen Kugelschnitzen / darzu gehört auß No. 89. ein Zusatz / Gerechte vnd Ablenge Kugelschnitze gesellet. 41. Von Schnitzen deß Conoidis Parabolici. 42. Von Spältlen. 43. Der Kugel Gürtel oder Riemen. 44. Von Spälten oder Scheittern auß der Wellen / Item von Röhren: Wasserrechnung fol. 36. 45. Von Trümmern der Seulen vnd Wellen. 46. Von Zwerstucken oder halben Seulen / vnd Wasserabgraben: Schütt⸗ Schantz⸗ vnd Maurrechnung. 47. Von kleinern

21) Tach   35) 41. Von Schnitzen deß Conoidis Parabolici *fehlt*   36) 41. *statt* 42.

Walgerspältlin. 48. Vom Kegelspalt. 49. 50. 51. 52. Vom Kegeltrumm vnd Stock. 53. 54. Walgers vnd Kegels Rinden vnd Rock. 55. Kegelschnitze / davon besihe auch fol. 55. etwas. 56. Von Ringen. 57. Vom bschloßnen Ring vnd Kugel drinnen. 58. Von Apffel- Quitten- vnd Kürbisrundungen. 59. Von der Citronenrundung vnd rechten aigentlichen fundament der Faßrechnung. 60. Dise abgestutzt wie ein Faß / fol. 46. Eine behende* Bruchrechnung vnd völliges Exempel zur Faßrechnung. 61. Kegel gesellet. 62. Ablänge / gedruckte vnd gerechte Kugeln gesellet. 63. Kugelschnitze mit Citronenrundungen gesellet / vnd darbey ein kürtzere rechnung der Faßform. 64. Von Oliven- Zwespen- Kriechen- vnd Spulrundungen / auch zun Fässern gehörig. 65. Weß geschlechts ein jede rundung oder Faßform sey. 66. Welche grösser vnd fähiger dann die andere. 67. Einen Schnitz von disen Rundungen zurechnen.

* Besihe auch fol. 51. ein Notam.

Ander thail.

68. Inhalt vnd weß geschlechts ein jedes Faß sey nach dem Bauch. 69. Wann die Zäune gleiche weite haben / welches Feld alsdann am grössisten. 70. Wann deß Feldes an den eussern Wänden gleichviel ist / welche Figur alßdann am maisten raum beschliesse. 71. Welche vnder allen Figuren vnderschidlicher arten / so in einer holen Kugel anstehen / am fähigsten. 72. Welche auß allen viereckten Seulen vnd Platten so in einer Kugel / am fähigsten: sammt einem Täfelin auff den Halt einer jeden. 73. Welche Wellen / so miteinander ein zwerlini von einem Boden zum andern haben / am fähigsten sey. 74. Zurechnen wie lang ein jedes Faß zwischen baiden Böden jnnerlich / oder vom Beyhel / biß oben oder vnden an Boden / nach der gerädе. 75. Was ein Oest. Faß haisse / wie es zugerichtet werde / vnd wie es nach dem Boden / Taufeln oder Zwerlini zurechnen. 76. Erste wunderbarliche aigenschafft eines Oest. Wein Fasses / nach der lenge: vnd warumb dise weise zu visiern nur allein in Oest. so gemein sey / vnd sonsten in keinem andern Land. 77. Die andere noch mehr wunderbarliche aigenschafft eines Oest: Weinfasses vor andern außlendischen / nach dem Bauch. 78. Wieviel die Oest. Visierruten an einem jeden vngewohnlichen Faß / das doch sonsten mit dem Oest: nach dem Bauch einerley geschlecht ist / zuviel oder zuwenig sage / sampt einem Täfelin. 79. Vergleichung allerhand Fässer / die auch an den Bäuchen vngleich geartete rundungen haben / welches vnder jhnen die Oest. Visierruthen am besten halte / sampt eim Täfele.

Eigenschafft eines Oest. Fasses.

Dritter Thail.

80. Von zubereittung vnnd probirung einer gerechten Oest. Visierruthen auff Emmer vnd Achteringe / sampt einem Täfelin hierzu. 81. Was für einen Bauch das erste Faß gehabt haben müsse / auß welchem die Oest. Visierruthen caementirt worden. 82. Wie das Faß gestaltet sein müsse / damit die Visierruthen dich nicht verführe. 83. Gebrauch der Visierruthen an Fässern vnnd Böttungen. 84. Wann kein zugerichte Visierruthen zur hand / wie die Oest. Fässer nichts minder behend zumessen / Item das grosse Faß zu Heydelberg. 85. Wann das Faß nicht müßte auffgebeihelt werden / wie jhme alsdann mit der Oest. Visierruthen vnd Täfelin bey zukommen. Item Visier auff Pergamen. Item grosse stucke Geschützes nach der schwäre zu visieren. 86. General instruction vnd Widerholung / ein jedes Faß auß seinem rechten grund zurechnen. Item ein notwendig Instrument zu deß Bauchs krümme. 87. Wie durch die Oest. Visierruthen auch andere außländische Fässer / Item Lägeln vnnd Stäntner zu visieren / vnd hiermit der grössiste thail der verdrieß-

42) 85. *statt* 87.

lichen raittungen vbertragen werden möge. 88. Rechnung wieviel Weins auß einem Faß kommen / oder noch drinnen ſey / wann es nicht gehebt iſt / ſondern gerad auffligt / ſampt verkürtzung deß proceß vnd einem Täfelin / wievil Weins oberhalb der Böden ſtehe. 89. Etliche Zuſätze zum erſten thail / ſeind droben im Regiſter eingetragen. Vnd darauß der grund der vorgehenden rechnung. 90. Durch die Viſierruthen vnd Reiß Circkel ſampt einem Täfelin zuerfahren / wieviel Achteringe abgehen von jedem Emmer der ins Faß gehet / ſampt einem Täfelin.

Anhang. 91. Vrſprung aller Meßſorten / deß Apoteckergewichts vnnd Pfunds auß der Müntz: was ein drachma vnd denarius. 92. Alt Römiſches Gewicht vnnd Eich. Wie Gewicht / Eich vnd Schuch aneinander gehengt. Gewicht der Guldenen Müntz alt vnd new / auch nach der Medicorum ſchatzung. Vnd warumb die fein an Gold zu 24. Karath gezehlet werde. Daß das alte Röm. Gewicht bey den Apoteckern gebliben / beweiß durch Brunnwaſſer. Was ein Marck / was löttig Silber vnd Gold. 93. Lintzer Schuch vnnd Eich miteinander / vnnd baide mit dem Alt Römiſchen Hebräiſchen vnnd etlichen außlendiſchen verglichen. 94. Andere lange maſſen mit dem Lintzer ſchuch verglichen. Item alt Röm: vnnd anderer orten gebreuchiges Feldmeſſen. 95. Oeſt. gewicht mit dem Apotecker gewicht verglichen / warumb das pfund 32 lot habe. Cölniſches Niderlendiſches / vnd hochteutſches müntzgewicht / Ducaten zu 17 Carat am gewicht / zu 24 Carat am gehalt. Gewichttäfelin durch gantz Europa. Oeſt. gewicht mit der Eych verknüpfft. 96. Ein behendes Wegen viler gewichte mit wenig Steinen / vnnd Täfelin darzu. 97. Oeſt. Traidmaaß mit der Wein Eich verknüpfft: ſambt der Traid viſierung: mit alt Römiſcher Vngariſcher / vnnd außlendiſcher Traidmaaß verglichen durch ein Täfelin / Schiff fuhr zu Traid vnd Wein / durch ein Täfelin. 98. Gewicht vnd bewährung der Metallen vnd andrer wagmäſſiger ſorten / Täfelin darzu / nach vnderſchiedlicher Authorum meinung. 99. Waſſerprob auff Silber / Gold / Zin vnd Bley auch Bergertz wievil eines jeden vnder dem andern. 100. Viſierung der Steinenen / Eyſenen vnd Bleyenen Schießkugeln.

25) Täfeln

CHILIAS LOGARITHMORVM

Joannis Kepleri

IMP. CÆS. FERDINANDI II.
MATHEMATICI

CHILIAS
LOGARITHMORUM

AD TOTIDEM NUMEROS
ROTUNDOS,

Præmissâ

DEMONSTRATIONE LEGITIMA

Ortus Logarithmorum eorumq; usus

QUIBUS

NOVA TRADITUR ARITHMETICA, SEU
COMPENDIUM, QUO POST NUMERORUM NOTITIAM
nullum nec admirabilius, nec utilius ſolvendi pleraq; Problemata
Calculatoria, præſertim in Doctrina Triangulorum, citra
Multiplicationis, Diviſionis, Radicumq; extractio-
nis, in Numeris prolixis, labores mole-
ſtiſſimos.

AD

Illuſtriſſ. Principem & Dominum,

Dn. PHILIPPUM

Landgravium Haſſiæ, &c.

Cum Privilegio Authoris Cæſareo.

(*)

MARPURGI,
Excuſa Typis CASPARIS CHEMLINI.
cIɔ Iɔc XXIV.

Ad

Illustrissimum Principem et Dominum,

DN. PHILIPPVM

Landgravium Hassiae, Comitem Chattimelibocci, Sigenae, Ditii, et Niddae,

DOMINVM MEVM CLEMENTISSIMVM.

De Munere ejus Celsit. amplissimo, deque usitata Cels. suae allusione et alliteratione ad Nomen

Philips / Villiebs.

† Triginta expensis vendit φίλα πολλὰ Philippis
Princeps PHILIPPUS Hassiae.
Sed facies rerum versa est; pauperculus emptor
Mercemque pretium retulit.
Triginta acceptis sed vendidit ille Magistrum
Mortalium immanissimus.
I nunc et dubita, Tharsensi interprete, num sit
Dare quàm accipere beatius.
Triginta tamen en penso totidem ἄργυρα *verbis *Propositionibus.
φίλα πολλὰ penso Chiliade.
Corde, manu promis redolentia munera fontes:
Mentemque redolent quae accipis.
Corde φιλεῖς, manibus πλουτεῖς, sed Mente θεωρεῖς;
Tibi cor, manus, mentem dico.

Illustr. Cels. T.

Subjectissimus Cultor Gratusque Hospes

JOHAN. KEPLERVS.

Postulatum I

Omnes proportiones inter se aequales, quacunque varietate binorum unius, et binorum alterius terminorum, eadem quantitate metiri seu exprimere.

Axioma I

Si fuerint quantitates quotcunque ejusdem generis, quocunque ordine sibi invicem succedentes, ut si ordine magnitudinis sibi invicem succedant: proportio extremarum composita esse intelligitur ex omnibus proportionibus intermediis binarum, et binarum inter se vicinarum.

Seu, quod eodem redit, proportio minuitur aucto minori termino, vel diminuto majori; augetur rationibus contrariis.

I. Propositio

Medium proportionale inter duos terminos dividit proportionem terminorum in duas proportiones inter se aequales.

Nam si sunt duo termini, eorumque medium proportionale: est ergò inter tres quantitates Analogia seu Proportionalitas.

At Analogia definitur aequalitate τῶν λόγων proportionum: quare proportiones sectione constitutae, utpote partes proportionis totius, propositae sunt inter se aequales.

Axioma seu Notitia communis II

Si fuerint Quantitates quotcunque crescentes ordine: proportio extremarum divisa est per intermedias in partes unâ plures quàm sunt intermediae, divisionem facientes.

Sic quatuor interstitia digitorum arguunt quinque digitos. Sic quinque corpora regularia sibi invicem inserta ordine interpositis orbibus inscriptis et circumscriptis arguunt orbium talium sex esse.

Postulatum II

Proportionem inter datos duos terminos quoscunque dividere in partes quotcunque (ut in partes numero continuè multiplici progressionis binariae) et eousque, donec partes oriantur minores quantitate proposita.

Proportio enim est etiam una ex quantitatibus continuis in infinitum dividuis.

Vide hic typum divisae proportionis inter 10. 7. per triginta proportionales medias.

EXEMPLUM SECTIONIS

in quâ proportio, quae est inter 10. et 7. tricesimo actu in partes aequales 10737 41824. secatur, per totidem (unâ minus) medias proportionales classis tricesimae, ubi ex unaqualibet classe sola maxima, et termino proportionis majori vicinissima, hic exprimitur.

Denominatio per Numeros sectionum mediae proportionalis, quae est omnium in qualibet sectione maxima.

Numeri partium proportionis aequalium, quas unius cujuslibet classis mediae proportionales constituunt.

	100000	00000	00000	00000	
30 ae.	99999	99996	67820	56900	1073741824.
29 ae.	99999	99993	35641	13801	536870912.
28 ae.	99999	99986	71282	27702	268435456.
27 ae.	99999	99973	42564	55589	134217728.
26 ae.	99999	99946	85129	12883	67108864.
25 ae.	99999	99893	70258	38590	33554432.
24 ae.	99999	99787	40516	88629	16777216.
23 ae.	99999	99574	81034	22452	8388608.
22 ae.	99999	99149	62070	25698	4194304.
21 ae.	99999	98299	24147	74542	2097152.
20 ae.	99999	96598	48324	51665	1048576.
19 ae.	99999	93196	96764	73647	524288.
18 ae.	99999	86393	93992	28474	262144.
17 ae.	99999	72787	89835	81819	131072.
16 ae.	99999	45575	87076	62114	65536.
15 ae.	99998	91152	03773	10068	32768.
14 ae.	99997	82305	26024	99026	16384.
13 ae.	99995	64615	25959	97766	8192.
12 ae.	99991	29249	47518	67706	4096.
11 ae.	99982	58574	77102	11873	2048.
10 ae.	99965	17452	79822	51100	1024.
9 ae.	99930	36118	40985	14780	512.
8 ae.	99860	77086	38438	31172	256.
7 ae.	99721	73557	52112	10274	128.
6 ae.	99444	24546	13234	50059	64.
5 ae.	98891	57955	37194	96652	32.
4 ae.	97795	44506	62963	20009	16.
3 ae.	95639	49075	71498	12386	8.
2 ae.	91469	12192	28694	43920	4.
1 a.*	83666	00265	34075	54820	2.
	70000	00000	00000	00000	

* Haec unica prima in suâ seu primâ classe fit etiam una eaque media trium secundarum; et tres secundae istae sunt etiam inter septem tertias, mediae scilicet inter alias quatuor accedentes: et hae septem tertiae, insertis aliis octo, fiunt quindecim quartae, et sic consequenter.

Hic numerus unitate superat numerum mediarum proportionalium cujusque classis.

Hic Typus sic intelligatur:

Inter Terminos, majorem 100 etc. et minorem 70 etc. quaeratur media proportionalis, haec erit $83\frac{2}{3}$ etc. Sunt ergò proportionis inter dictos terminos constitutae partes duae, una inter 100. et $83\frac{2}{3}$, altera inter $83\frac{2}{3}$ et 70. Hae per 1. prop. sunt inter se aequales. Quaeratur secundò, media proportionalis inter 100. et $83\frac{2}{3}$ etc. haec erit $91\frac{1}{2}$ etc. rursumque erunt partes inter se aequales, una inter 100 etc. et $91\frac{1}{2}$ etc. altera inter $91\frac{1}{2}$ etc. et $83\frac{2}{3}$ etc. Ita prior semissis proportionis totius hic est divisus in duas quartas partes ejusdem totius. Et intelligitur semissis alter, qui erat inter $83\frac{2}{3}$ et 70, per sociam ipsius $91\frac{1}{2}$, seu secundarum trium minimam (quae in hoc typo non exprimitur) similiter divisus esse in alias duas quartas totius. Quaeratur tertiò media proportionalis inter 100 etc. et $91\frac{1}{2}$ etc. haec erit $95\frac{2}{3}$ etc. determinans cum 100. partem totius octavam, quod indicat numerus illi ad dextram exterius respondens. Et sic deinceps.

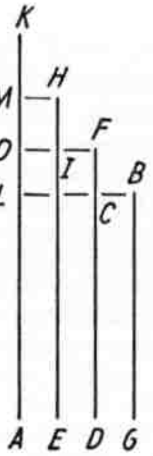
etc.
Quindec. Quartae
Septem Tertiae
Tres Secundae
* Vnica Prima

Hic differentia maxima ex tricesimis mediis proportionalibus à termino sectae proportionis majori, est ista 00000.00003.32179.43100. Haec igitur differentia constituitur ex arbitrio pro mensurâ hujus minimi elementi sectae proportionis, seu pro Logarithmo dictae Tricesimarum maximae. Hic igitur Logarithmus multiplicatus in numerum partium, quas constituunt illae tricesimae, producit sequentem Logarithmum 35667.49481.37222.14400. Hic est Logarithmus termini minoris, scilicet 70000. 00000.00000.00000.

Postulatum III

Minimum proportionis elementum quantulum pro minimo placuerit, metiri seu signare per quantitatem quamcunque; ut per excessum terminorum hujus Elementi.

II. Propositio



Cùm fuerint tres continuè proportionales, quae est | proportio 6 *primae ad secundam, vel secundae ad tertiam, eadem est proportio differentiae priorum, ad differentiam posteriorum.*

Sint continuè proportionales AK, EH, DF, differentia priorum KM, posteriorum HI: Dico, ut est AK ad EH, sic esse KM ad HI. Est enim HE ad FD, ut KA ad HE ex hypothesi. Sed HE est aequalis ipsi MA, et FD aequalis ipsi IE, rursum ex hypothesi. Quare etiam MA erit ad IE, ut KA ad HE; quare per 17. quinti EVCL. etiam residua KM, ad residuam HI, erit ut tota KA, ad totam HE.

III. Propositio

Cùm fuerint aliquot quantitates in proportione continua, minimarum minima erit differentia, maximarum maxima.

Nam per 2. Prop. sicut est maxima ad vicinam minorem, sic est differentia inter maximas ad differentiam succedentium. Minor igitur est quaelibet differentiarum succedentium, quàm antecedens. Minima igitur est ultima differentia, quae scilicet est inter minimas.

IV. Propositio

Cùm fuerint aliquot quantitates in proportione continuâ: si differentia maximarum statuitur mensura proportionis illarum: differentiae quarumcunque duarum deinceps erunt minores mensurâ proportionis illarum justâ.

Nam quia ponuntur continuè proportionales, igitur aequalis est proportio inter duas maximas, et proportio inter quascunque duas minores deinceps sitas per 1. Prop. Major verò est differentia inter maximas differentiis inter quascunque alias deinceps sitas per 3. Si ergò major differentia statuitur mensura pro|portionis inter duas maximas per 3. Postu- 7 latum: tunc eadem duarum maximarum differentia statuitur etiam mensura proportionis inter duas minores deinceps sequentes. At differentia inter duas minores minor etiam est differentiâ inter maximas per 3. Prop. quare etiam minor est, quàm ut suorum terminorum proportionem metiatur.

22) qua

V. Propositio

In continuè proportionalibus si differentia maximarum statuitur mensura proportionis illarum: omnes reliquae proportiones, quae sunt inter maximam et unamquamlibet reliquarum minorum, sortientur mensuras, majores differentiis suorum terminorum.

Nam proportio maximae AK ad minimam GB componitur ex proportionibus binarum et binarum deinceps usque ad minimam, per Axioma 1. At omnes binarum deinceps sitarum proportiones inter se sunt aequales per 1. Prop. Mensuras igitur etiam aequales habent per Postulat. 1. Quare quot sunt Elementa proportionis inter maximam AK et minimam GB, toties differentia KM maximarum KA, HE, vel MA, continetur in mensurâ proportionis maximae KA, ad minimam BG.

Jam verò maximae KA, et minimae BG differentia KL componitur ex differentiis KM, MO, OL binarum et binarum deinceps sitarum omnibus.

Sed quaelibet differentia MO, OL, binarum deinceps seorsim minor est differentia KM maximarum per 3. Prop. quare etiam totidem junctae differentiae binarum deinceps, id est, differentia KL maximae KA, et minimae BG erit minor quàm multiplex ipsius KM differentiae maximarum, secundum numerum elementorum proportionis sectae. Sed multiplex ista est mensura proportionis inter maximam KA, et minimam
8 BG, ut jam o|stensum. Ergò differentia KL maximae et minimae non aequat mensuram proportionis earum, positis quae sunt posita.

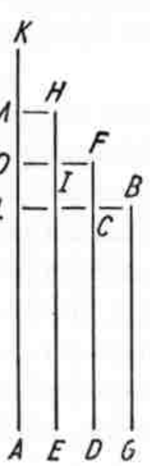
In numeris sic. Sint numeri 1000. 900. 810. 729. continuè proportionales. Maximi sunt 1000. 900. Eorum differentia est 100. Sit haec mensura arbitraria proportionis 1000. 900. Erit igitur etiam mensura haec proportionis 900. 810. et proportionis 810. 729. Composita igitur proportionis inter 1000. et 729. mensura erit 300. quia elementa aequalia proportionis tria sunt, per duas medias proportionales per Axioma 2. Atqui terminorum hujus proportionis, scilicet 1000. et 729. differentia est 271 multò minor quàm 300, triplum ipsius 100.

VI. Propositio

In continuè proportionalibus, si differentia maximae et unius minorum non deinceps sequentis statuitur mensura proportionis illarum: reliquae proportiones, quae quidem sunt inter maximam et unam prius ascitâ majorem, sortientur mensuram minorem differentiâ suorum terminorum: quae verò proportiones sunt inter quantitatem maximam et unamquamlibet, prius ascitâ minorem, nanciscentur mensuram majorem, quàm est differentia suorum terminorum.

29) duos medios

Sint proportionales AK, EH, DF, GB, et assumantur maxima quidem AK, et una minorum non deinceps DF, sitque illarum differentia KO, et KO mensuret quantitatem proportionis inter AK et DF. Et sint aliae



quantitates, EH quidem major prius ascitâ DF; GB verò illâ minor: et sit MK differentia ipsarum AK, EH; sic HI, vel MO sit differentia ipsarum EH, DF; denique FC sit differentia ipsarum DF, GB. Dico primò mensuram proportionis AK, EH fore minorem differentiâ terminorum MK.

Nam quia proportio AK, DF mensuram accipit KO, eadem | verò proportio habet partes aequales constitutas 9
per mediam proportionalem EH, per 1. Prop. Proportionis igitur AK, EH mensura erit dimidia ipsius KO per 1. Postul. (vel pars alia aliquota, secundum numerum interjectarum EH). At differentia MK major est quàm MO residua de KO per 3. Prop. major igitur quàm dimidium ipsius KO. Ergò et major, quàm ut possit esse mensura proportionis inter KA et HE majorem prius ascitâ FD.

Dico secundò Mensuram proportionis AK, GB fore majorem differentiâ LK. Rursum enim proportionis EH, DF, quae semissis est ipsius AK, DF, mensura erit semissis ipsius KO per 1. Postul. vel pars alia aliquota, etc. At differentia HI, vel MO minor est quàm MK residua de KO per 3. Prop. Minor igitur HI, quàm dimidium ipsius KO. Ergò minor quàm mensura proportionis EH, DF. Sed differentia FC vel OL rursum minor est, quàm differentia MO per 3. Prop. Plus igitur deficit OL mensura proportionis DF, GB quàm MO, à mensura proportionis EH, DF. Est verò proportio DF, GB, aequalis proportioni EH, DF, quia hac quidem vice ipsi DF aequè propinqua est GB versus minora, atque EH versus majora, et si haec non esset, alia sumi posset, quippe inter continuè proportionales. Deficit igitur OL à mensurâ proportionis DF, GB, sed KO statuitur esse ipsa mensura proportionis AK, DF.

Cùm ergò proportio AK, GB composita sit ex proportione AK, DF, et proportione DF, GB, per Ax. 1. Mensura etiam illius composita erit ex mensuris harum; ut si proportio DF, GB semissis est ipsius proportionis AK, DF, et proportio AK, GB sesquialtera ipsius AK, DF; erit etiam ipsius KO, susceptae mensurae, sesquialtera pro ipsius AK, GB proportionis mensura habenda.

Similiter verò et KL componitur ex KO, OL; OL verò demonstrata est esse minor dimidiâ ipsius KO: Tota igitur KL | minor est quàm sesquial- 10
tera ipsius KO, minor igitur quàm mensura proportionis suae inter AK, GB.

29) possit

Per numeros sic: Sint continuè proportionales 100000. 90000. 81000. 72900. 65610. 59049. Eligantur 100000. 72900, earumque differentia 27100 statuatur mensura proportionis terminorum. Cùm igitur haec proportio habeat partes tres aequales, quarum una 100000. 90000, cum differentiâ 10000: altera 90000. 81000, cum differentia 9000: tertia 81000. 72900, cum differentia 8100. Quaelibet vero proportionum harum sit pars tertia suae totius, valebit etiam tertiam partem mensurae illius, scilicet $9033\frac{1}{3}$, haec vero mensura Elementorum proportionis minor quidem est, quàm primorum terminorum differentia 10000, major vero quam secunda differentia 9000, major etiam multo quam tertia 8100. Consequenter etiam major quam differentia 7290 numerorum 72900, 65610: quam et differentia 6561 numerorum 65610. 59049. Ac proinde proportionis 100000. 90000 terminorum differentia 10000, excedit mensuram susceptam $9033\frac{1}{3}$. Nec minus etiam proportionis 100000. 81000 differentia 19000 excedit mensuram suam, scilicet duplum ipsius $9033\frac{1}{3}$, scilicet $18066\frac{2}{3}$, quia termini minores 90000, et 81000 adhuc stant ante primò adjunctum 72900. E contrario proportionis 100000, 65610 differentia 34390 minor est, quam illius mensura $36133\frac{1}{3}$ quadruplum scilicet ipsius $9033\frac{1}{3}$. Sic etiam proportionis 100000. 59049 differentia 40951 minor est quintuplo ipsius $9033\frac{1}{3}$, scilicet $45166\frac{2}{3}$, quia termini minores 65610 et 59049 stant post primo adjunctum 72900 utpote minores illo.[1]

Proportionales	Differentiae
100000.	
	− 10000
90000.	
	− 9000
81000.	
	− 8100
72900.	
	− 7290
65610.	
	− 6561
59049.	

11

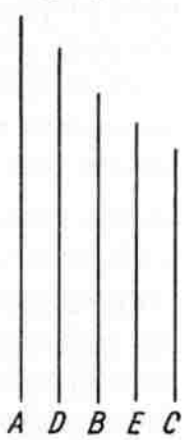
VII. Propositio

Si quantitates aliquot ordine magnitudinis deinceps collocentur, binae deinceps proportiones aequales facientes, ipsae quantitates continuè proportionales erunt.

Collocentur deinceps A, D, B, E, C, hoc ordine minores à primâ, sintque A B, et B C proportiones aequales, dico B esse mediam proportionalem inter A, C. Si enim non: erit vel major, vel minor mediâ proportionali; sit major illâ, et sit verbi causa E ipsa media proportionalis. Erit igitur A E proportio major quam A B, per 1. Ax. quare E C minor quam A E. At si E media proportionalis, tunc A E et E C proportiones sunt aequales per 1. Prop. Non igitur minor erit media proportionalis quam B.

Sit major, et sit D, rursum idem absurdum sequetur.

Si ergo A B, B C aequales proportiones, ipsa B est media proportionalis, etc.



38) media proportionis,

VIII. Propositio

Si quantitates quaecunque deinceps collocentur ordine magnitudinis, quarum, quae intermediae, non sint inter proportionales medias proportionis cujuscunque, sive actu continuatae, sive potestate continuandae interpositione omissarum: intermediae tales proportionem extremarum non dividunt in commensurabilia.

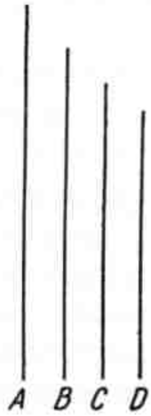
Definitiones. 1. Commensurabilia enim ex eo dicuntur, quod habeant unam communem mensuram, quam quodlibet contineat secundum certum numerum aliquoties exactè, sic ut nihil, quod eâ mensurâ minus sit, restet residuum. 2. Jam vero mensura proportionum communis est et ipsa aliqua proportio, minor utrâque mensurandâ. 3. Omnis vero proportio est inter duos terminos. 4. Et Proportio repetitione sui mensurans aliam proportionem, | incipit ab uno mensurandae termino, eique *12* sociat alium, pro ratione quantitatis suae minoris: tum illo jam pro antecedenti sumpto, statuit alium consequentem, hoc identidem, quoadusque permeatur proportionis mensurandae quantitas: non aliter, quam cum intervallo pedum Circini metimur lineam, fixo pede Circini in unâ lineae extremitate, pede altero punctum signamus, deinde pede priore in hoc punctum translato, punctum aliud altero pede metamur, versus ulteriora, donec emensi fuerimus totam lineam. 5. Et Proportio proportionem exactè mensurare dicitur, quando in hâc continuâ terminorum interpositione et coaptatione tandem ultimus terminus proportionis mensurantis, cum secundo termino mensuratae coincidit in quantitate. Igitur identitas illa proportionis mensurantis continuè repetitae efficit, terminos continuè proportionales per 7. Prop. Ergo si proportio aliqua duas proportiones exactè metitur, necesse est, ut termini, quos ipsa mensurans interponit, sint cum ipsius mensurandae terminis continuè proportionales. Si ergò nulla unquam, quantumvis parva proportio potest inveniri, quae repetitione sui terminos ultimos assequatur proportionum mensurandarum, sic ut tam major communis terminus, quàm duo minores proportionum mensurandarum sint cum mensurantis terminis interpositis continuè proportionales: proportiones illae sunt inter se incommensurabiles.

IX. Propositio

Cum duae longitudines effabiles non fuerint ad invicem, ut duo Numeri ejusdem speciei figurativae, verbi causa, duo quadrati, aut duo Cubi: non cadent inter illas longitudines aliae effabiles mediae proportionales, numero tot, quot ipsa species postulat, verbi causa, Quadrati unam, Cubi duas, Biquadrati tres, etc.

24) mensurandis

13 Sint enim duae longitudines A, D habentes se quidem ad in'vicem, ut numerus ad numerum, at non ut numerus Cubicus ad Cubicum: et quia de Cubo agimus, de duabus igitur mediis proportionalibus erit dicendum, sint eae B et C. Dico B et C non esse longitudine effabiles.



Si enim quis contendat esse effabiles, esto hoc positum. Sunt igitur ut Numeri. Sunt autem simul mediae proportionales inter A, D, ex hypothesi. Et quia etiam A, D sunt ut numeri, quippe effabiles et ipsae supponuntur, habent verò duas medias B, et C, ut numeros, quare per 21. octavi EVCL. A et D similes erunt solidi: quare per 27. ejusdem erunt ad invicem, ut numerus Cubicus ad numerum Cubicum. Hoc verò est contra primam propositionis hypothesin. Falsum igitur positum fuit, B et C esse longitudine effabiles. Vera igitur est negatio in propositione comprehensa.

Eodem modo etiam de quadratis, et de unâ mediâ proportionali ratiocinari possumus, deductione ad impossibile: nec minus et de caeteris speciebus, post quadratum et cubum sequentibus.

X. Propositio

Si ex aliquot quantitatibus effabilibus ordine magnitudinis invicem sequentibus duae extremae non fuerint ad invicem, ut duo numeri quadrati, aut duo cubi, aut duo alii ejusdem speciei: intermediarum nulla dividet proportionem in commensurabilia.

Nam nisi duae quantitates effabiles recipiant media proportionalia effabilia, earum proportio non dividetur per effabilem intermediam in commensurabilia per 8. Prop. At si duae quantitates non fuerint inter se, ut duo numeri ejusdem speciei figurativae, non recipiunt media proportionalia effabilia, per 9. Prop. Quare illae intermediae quas propositio admittit, cum sint effabiles, non erunt ex proportionalibus mediis. Non igitur dividunt proportionem extremarum in commensurabilia. '

14

XI. Propositio

Omnes proportiones deinceps ordinatae, quae sunt inter terminos effabiles aequalitate Arithmetica se invicem excedentes, inter se sunt incommensurabiles

Nam termini extremi effabiles, vel recipiunt effabilem mediam proportionalem quantitatem unam pluresve, vel non recipiunt. Si non recipiunt, nulla igitur effabili, et sic neque medio Arithmetico dividitur eorum proportio in commensurabilia per. 8. Prop. Recipiant verò

4) longitudines 12) Cubicus *fehlt*

effabile medium proportionale, ut termini 8 et 18, recipiunt enim 12 effabilem, cum sint ut 4 ad 9, quadratus ad quadratum. Est verò inter 8. 18 medium Arithmeticum 13, ideo proportio 8. 13 major est quàm 8. 12, et 13. 18 minor quàm 12. 18, quantitate utrinque parvae proportionis inter terminos 12. 13. sed proportio 12. 13 nulli reliquarum est commensurabilis. Nam termini 8. 13, quia non sunt ad invicem, ut numerus figuratus ad alium ejusdem figurationis per 10. Prop. non capiunt mediam vel medias proportionales effabiles, quare numerus 12 non est unus ex iis numeris, qui inter 8 et 13 intercidunt in continua proportione: non est igitur commensurabilis proportio 8. 13 proportioni 12. 13 vel 8. 12. Sic ex iisdem fundamentis, quia termini 12. 18 non capiunt effabilem mediam proportionalem: ergo 12. 13 et 13. 18 sunt incommensurabiles, ad commensurabilem igitur 8. 12 ipsi 8. 18, est apposita incommensurabilis 12. 13. Tota ergo 8. 13 est ipsi 8. 18 incommensurabilis. Sic in 13. 18 de commensurabili 12. 18 dempta est pars incommensurabilis 12. 13. residua ergo 13. 18 est incommensurabilis ipsi 12. 18. At neque proportio inter 8. 13 est commensurabilis ipsi proportioni inter 13. 18, quia tota inter 8. 18 alterutri parti inter 8. 13 est incommensurabilis, ergo et partes invicem per 16. decimi EVCL. Item si essent partes commensurabiles, mensuram utraque communem haberet, | atque *15* illa etiam compositam inter 8. 18 emetiretur, et sic partes cum tota commensurabiles essent. Atqui jam demonstratum est, neutram partem toti esse commensurabilem. Non sunt igitur partes, quas hîc facit medium Arithmeticum, inter se commensurabiles.

XII. Propositio

Si quantitates quaecunque deinceps collocentur ordine magnitudinis, proportionis verò inter maximas mensura statuatur differentia inter eas, differentia inter quascunque alias, ex positis, minor erit mensurâ suae proportionis; et si proportionis inter minimas mensura statuatur differentia minimarum: differentiae reliquae erunt majores mensurâ proportionis suorum terminorum.

Aut enim continuè proportionales sunt quantitates collocatae actu, vel potestate supplendi omissas, et tunc patet propositum per VI. et per III. Aut non sunt in proportione continua, sic ut partes constituant incommensurabiles: et tum conceptione mentis in infinitas particulas aequales secari intelligerentur per interpositas infinitas medias proportionales: ita redigentur cum iis, quae actu sunt continuè proportionales ad eandem vim demonstrationis.

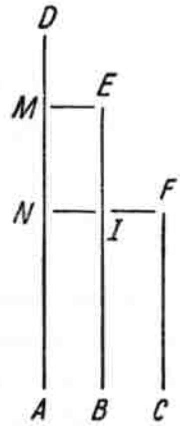
35) intelligeretur

Corollarium

Quod si superet mensura proportionis inter maximas differentiam earum: hujus mensurae ad hanc differentiam proportio minor erit, quàm sequentis mensurae ad differentiam suam: cum proportionalium eadem sit ratio.

XIII. Propositio

Si quantitates tres ordine magnitudinis se insequantur, proportio minimarum duarum in proportione extremarum continebitur rarius, quàm differentia
16 *minimarum in differentiâ extremarum: et vicissim propor|tio maximarum in proportione extremarum continebitur saepius, quàm differentia illarum in differentiâ harum.*



Contineatur enim in adjecto diagrammate differentia minimarum EI, vel MN, in differentia DN extremarum aliquoties, licet non exactè: et capiat proportio minimarum BE, CF mensuram differentiam MN, erit igitur proportionis AD, CF mensura minor quàm differentia DN per 12. rarius igitur continebitur MN in mensura ipsius AD, CF proportionis, quàm in ND longiore; rarius igitur et ipsa proportio in proportione. Vicissim contineatur DM differentia in DN aliquoties: et sit DM mensura proportionis AD, BE. Erit proportionis AD, CF mensura major quàm DN, saepius igitur erit DM in mensura ipsius AD, CF, quàm in DN. Ergo, etc.

Corollarium

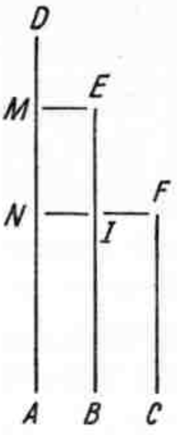
Differentiâ eâdem inter terminos binos hinc majores, inde minores existente: proportio inter majores minor erit, inter minores major.

XIV. Propositio

Si quantitates tres ordinentur deinceps, aequalibus differentiis invicem excedentes: proportio inter extremas est major quàm dupla proportionis maximarum.

Sint tres quantitates, AD maxima, BE media, CF minima, et sit excessus primae super secundam DM, aequalis excessui secundae super tertiam EI, vel MN. Dico, proportionem inter AD, CF majorem esse quàm duplam ipsius inter AD, BE. Mensuretur enim proportio AD,

34) inter AD ad BE.



BE per differentiam DM per 3. Postul. Erit igitur mensura proportionis BE, CF major quàm differentia IE, vel NM per 12. Sed MN aequat DM mensuram proportionis inter AD, BE. Ergo mensura proportionis BE, CF | est 17 major mensura proportionis AD, BE; et sic ipsa proportio BE, CF major est proportione AD, BE. Sed proportio AD, CF componitur ex proportione AD, BE et ex proportione BE, CF per Axioma 1. Ergo proportio AD, CF partes habet AD, BE, et eâ majorem BE, CF, major igitur est duplâ ipsius AD, BE.

Corollarium

Hinc sequitur, semissem proportionis extremarum esse majorem proportione maximarum, minorem proportione minimarum.

XV. Propositio

Si duae quantitates proportionem constituerint, dimidium verò quantitatis majoris dematur de quantitate utrâque, residuae quantitates proportionem constituent majorem duplâ prioris. †

Sint quantitates 10. 9. et ablato dimidio ipsius 10. hoc est 5. ex utraque, relinquantur 5. 4. Dico, proportionem inter 5. 4. duplâ ipsius 10. 9. majorem esse. Duplicentur enim 5. 4. fient 10. 8. eritque proportio eadem 5. 4. quae et 10. 8. Differentia vero 10. 8. hoc est 2, dupla erit differentiae 5. 4. hoc est differentiae 10. 9. scilicet 1.

Si vero tres quantitates ordinentur 10. 9. 8. quarum prima 10. excedat tertiam 8. duplo ejus, quo excedit secundam 9. seu in quibus aequales sunt excessus 10. 9. et 9. 8. proportio extremarum 10. 8. (id est 5. 4.) major est dupla ipsius 10. 9. maximarum per 14. Ergo.

XVI. Propositio

Incommensurabilium proportionum partes aliquotae sunt inter se incommensurabiles.

Nam pars aliquota est suae toti commensurabilis, at tota illa perhibetur toti sociae incommensurabilis, ergo et pars unius toti | alteri 18 erit incommensurabilis per 14. decimi EVCL. et pro eadem et parti aliquotae alterius.

9) et eam 10) igitur dupla ipsius 24) quod 30) sui

XVII. Propositio

Si mille numeri invicem succedant ordine naturali, differentes bini unitate, initio facto à maximo 1000, deinde proportio inter maximos 1000. 999. bisectione continuâ secetur in partes minutiores, quàm est excessus proportionis inter proximos 999. 998. super proportionem inter maximos 1000. 999: minimum verò illud Elementum proportionis inter 1000. 999. capiat mensuram differentiam inter 1000, et proportionalem illam mediam, quae alter elementi terminus est: ulterius si proportio inter 1000. 998. seorsim secetur in partes duplo plures, quàm prior proportio inter 1000. 999, et hujus separatae divisionis minimum elementum seorsim capiat mensuram suorum terminorum (quorum alter sit 1000.) differentiam, eodemque modo quaelibet proportio ipsius 1000. ad sequentes numeros, ut 997, etc. bisectione continuâ secetur in particulas tantae magnitudinis, ut versentur inter sesquiplum et dodrantem elementi, quod emerserat ex sectione proportionis primae inter 1000 et 999. singulisque elementis mensura detur à suorum terminorum differentiâ, maximo existente 1000, et si hoc facto, cuicunque ex mille proportionibus, mensura constituatur ex tanto numero mensurarum elementi sui, in quot elementa ipsa divisa fuit: proportiones omnes, ad omnem calculi subtilitatem, emendatas exactasque habebunt mensuras.

Nam succedant invicem numeri 1000. 999. 998. etc. ordine naturali,
19 differentes unitate: erit inter maximos 1000. | 999. minima proportio: major inter proximos 999. 998: hâc iterum major proxima inter 998. et 997. sic semper, et hoc per 14. Prop. donec 500. 499. fiat major quàm dupla ipsius 1000. 999. per Prop. 15. Dico secundò excessum secundae super primam fore minimum: sic ut semper excessus sequentis super praecedentem sit major priore excessu: ut quoties sequens proportio duplo longius distiterit à prima, quàm aliqua praecedentium, toties excessus sequentis super primam amplius quàm duplo major sit excessu praecedentis. Fiat enim ut 1000 ad 999, sic 999 ad 998$\frac{001}{1000}$. Igitur pro-
† portio 999 ad 998$\frac{1}{1000}$ est eadem quae 1000 ad 999. Aufer illam à proportione 999. 998. relinquitur excessus 998001. 998000.

Fiat etiam ut 1000 ad 999, sic 998 ad 997$\frac{002}{1000}$. Igitur proportio 998 ad 997$\frac{2}{1000}$ est eadem quae 1000 ad 999. Aufer illam à proportione 998. 997. relinquitur excessus proportio inter 997002 et 997000. At in priori excessu proportionis 998001. 998000 termini differebant per 1. in hoc verò excessu termini 997002. 997000 differunt per 2. Atqui si aequales fuissent majores termini hîc et illîc, proportio sequens, ubi dupla differentia prioris, fuisset major dupla ipsius per 14. Multò igitur major erit proportio, ubi etiam minor fuerit terminus, qui proportioni sequenti est loco majoris scilicet 997002.

20) maximas 21) haec iterum major proximâ 30) 998010 *statt* 998001
34) 998010 *statt* 998001

Lucis causa sint numeri minores et pauciores, et qui etiam unitate differant, ut: 10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1. Dico excessum proportionis 8. 7. super proportionem 10. 9. amplius quàm duplo majorem esse quàm excessum proportionis 9. 8. super eandem 10. 9. Reducatur enim ut prius prima proportio inter 10. 9. cum singulis sequentium, quas bini deinceps
numeri constituunt, reducantur, | inquam, ad communem terminum 20
maximum. Hic etiam excessuum termini differunt magis magisque, ut quia 72. 70. est loco secundo, differentia 2 (ut prioris 1, inter 81. 80, dupla) indicat excessum 72. 70. esse majorem duplo ipsius 81. 80. Sic 54. 50. loco quarto major duplo est ipsius 72. 70. loco secundo. Sic 18. 10. loco octavo major duplo ipsius 54. 50. indice differentia 8, dupla ipsius 4, inter terminos minores.

	Est	At proportio inter 10. 9. valet	Excessus illarum
10. 9.	100. 90.	100. 90.	
9. 8.	90. 80.	90. 81.	81. 80.
8. 7.	80. 70.	80. 72.	72. 70.
7. 6.	70. 60.	70. 63.	63. 60.
6. 5.	60. 50.	60. 54.	54. 50.
5. 4.	50. 40.	50. 45.	45. 40.
4. 3.	40. 30.	40. 36.	36. 30.
3. 2.	30. 20.	30. 27.	27. 20.
2. 1.	20. 10.	20. 18.	18. 10.

Cùm igitur in priori exemplo mille numerorum, minimus excessus sit 998001. 998000. facilè secamus proportionem primam 1000. 999. in partes aequales minores, posito excessus numero. Reducatur enim ille excessus ad terminum minorem dividendae, fiat scilicet ut 998000 ad 998001, sic 999000000000 ad 999001002004. etc. unde apparet † differentiam terminorum fieri 1002004. etc. quae est paulò major quàm millesima pars de differentia terminorum proportionis primae. Ergò per 13. non totupla pars proportionis 1000. 999 est in excessu proportionis sequentis 999. 998. |

Quaeratur ergò medium proportionale inter 1000. 999. Id secabit 21
proportionem terminorum in aequales duas partes, per 1. Prop. Quaeratur secundò inter hanc inventam mediam et 1000. alia media proportio-

27) excessu

nalis, ut ita prior media intelligatur, circumdata duabus mediis proportionalibus aliis, quarum tamen unius solum, versus terminum 1000. investigatione opus est. Per has igitur tres medias (ut est in Ax. 2) secabitur proportio in partes 4. Sic proportionalis tertia inter prius inventam et 1000. secabit in partes 8. quarta in 16. et sic consequenter (per Postul. 2.) in 32. 64. 128. 256. 512. 1024. quod fit actu decimo. Hic itaque numerus 1024. certò constituit particulas proportionis 1000. 999. minores supra investigato excessu: quia proportio capit hujus excessus minus quàm mille; hic verò constituuntur mille viginti quatuor particulae. Hic igitur particula millesima vicesima quarta capiat loco mensurae differentiam termini sui minoris, seu mediae proportionalis decimae à termino majore 1000. per 3. Postulat.

Pergimus ad similem sectionem proportionis inter 1000. 998. Haec igitur est incommensurabilis priori 1000. 999. Nam per 11. Prop. proportio 999. 998. est incommensurabilis proportioni 1000. 999. quia termini bini differunt unitate aequaliter, sed proportio 1000. 998. componitur ex illis inter se incommensurabilibus per Axiom. 1. Cum verò totum in incommensurabilia secatur, ipsum singulis est incommensurabile per 17. decimi EVCL.

Est verò haec proportio 1000. 998. major quàm dupla prioris 1000. 999. excessu incommensurabili, ut supra allegatione praemissae 14. † indicatum. Pars igitur ejus millesima vigesima quarta plus quàm duplo major est minimo elemento prioris; bisecetur igitur, ut totius fiant partes 2048. per inquisitionem undecimae proportionalis. Tunc sanè 22 elementum hoc ejus erit proximè aequale [1] elemento minimo prioris, majus tamen illo etiamnum, et illi incommensurabile per 16. praemissam.

Si ergò illud accepit mensuram differentiam suorum terminorum, hoc jam elementum proportionis, quippe majus illo, mensuram habebit majorem differentiâ suorum terminorum, per 12. Prop. Ac proinde si prioris elementi terminorum differentia multiplicetur 1024$^{\text{ies}}$ pro mensurâ proportionis inter 1000. 999. tunc posterioris elementi terminorum differentia, multiplicata 2048$^{\text{ies}}$, adhuc minor erit mensurâ proportionis inter 1000. 998.

Veruntamen si attendamus ad quantitatem hujus defectus, illa est omninò subtilissima, et nullâ calculi diligentiâ observabilis. Quia enim proportio inter 1000. et 999 secta est in particulas plus quàm mille, et elementi tam parvi mensura constituta est differentia terminorum 1000000. et 999999. scilicet 1. et major adhuc certè proportio proxima inter 999999. 999998. major priori per 12. Prop. mensuram habebit,

15) qui   39) minor *statt* major

quae excedat terminorum differentiam primam vix millies millesimâ sui. Ac proinde composita proportio 1000000. 999998. major est dupla prioris vix millies millesimâ prioris particulâ. At jam elementum secundae proportionis inter 1000. 998. in superioribus constitutum, nequaquam est majus duplo prioris proportionis elemento; sed ob id ipsum factae sunt partes non 1024. sed 2048. ut esset pars ista proximè aequalis priori, quo modo excedit illam rursum vix millesima parte illius, si ergò totum superadderet differentiae suae millies millesimam, ad constituendam proportionis mensuram, pars utique millesima totius non plus addet, quàm millies millesimae prioris elementi millesimam.

Transeamus ad sectionem sequentis Proportionis inter 1000. 997. Haec verò est paulò major quàm tripla primae inter 1000.| 999. Quare si *23*
secetur in aequales 1024. particulas: particula talis etiam erit paulò major quàm tripla elementi primi. Sin ulterius illae bisecentur per undecimam proportionalem, existent numero 2048. eritque unaquaelibet major quàm sesquialtera primi elementi. Nam triplae dimidia est ipsa sesquialtera totius. Quia ergò superant primum elementum plus quàm dimidio ipsius, bisecentur denuò constitutione duodecimae proportionalis, ut fiant partes 4096: quaelibet major dodrante prioris elementi, quia sesquialteri dimidium est dodrans. Satis igitur appropinquat elemento priori. Si igitur huic elemento proportionis tertiae mensura seorsim ponatur differentia terminorum ipsius, peccabit quidem illa excessu, per 12. praemissam, at peccato nunquam aestimabili, ob causas in secundae sectione dictas.

Hoc pacto proportio inter 1000. 996. per sectionem in 4096. paulò majus sortitur elementum, quàm est elementum primae, et proportio inter 1000. 995. paulò majus quinque quartis primi elementi. At proportio inter 1000. 994. jam per tredecimam proportionalem capere debet partes 8192. ut sint rursum paulò majores dodrante primi elementi. Et proportio inter 1000. 993. paulò majores habebit septem octavis primi, et proportio inter 1000. 992. rursum paulò majores primo elemento.

Hoc igitur tantisper obtinet, quoad numeri ordinis millenarii proximi invicem appropinquaverint magis ipsi 500. dimidio primi, quàm ipsi primo 1000.

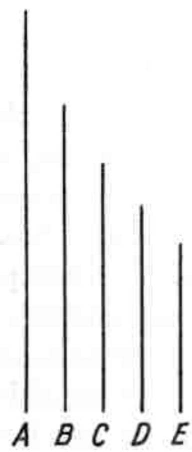
Nam quia proportio inter 500. 499. major est quàm dupla proportionis inter 1000. 999. per 15. praemissam: Jam igitur excessus ipsius 500. 499. super ipsam 1000. 999. superat ipsam 1000. 999. quare in sectione proportionum, quae proximè antecedunt proportionem inter 500. et 499. per unam superabundantem bisectionem, vel etiam quadrisectio-

27) quantis *statt* quartis

24 nem, redigendum | est elementum emergens ad propinquitatem elementi prioris in Propositione praefinitam. At in iis quae sequuntur proportionem inter 501. et 500. sectione porrò non est opus. Nam quia proportio inter 500. 499. eadem est quae inter 1000. 998. iccirco si fuerit notificata 1000. 998. et 1000. 500. noscetur etiam composita ex utraque 1000. 499. sine sectione laboriosa. Igitur inquisitio proportionalium desinit in proportione dupla, scilicet inter 1000. et 500.

XVIII. Propositio

Cognitâ proportione numeri cujuscunque ad primum 1000: simul cognoscitur etiam numerorum reliquorum continuae ejus-
† *dem proportionis ad eundem primum 1000. proportio.*



Nota sit mensura proportionis inter A et B. Et sit ut A ad B, sic B ad C, et C ad D, et D ad E. Erunt igitur aequales mensurae proportionum harum singularum ei, quae est primò notae A ad B per 1. Postul. Iam verò proportio A ad C componitur ex proportionibus A ad B, et B ad C, per 1. Ax. quare et mensura proportionis A. C componetur ex duarum proportionum A. B, et B. C mensuris. Id est, mensura ipsius A. B duplicata, dat mensuram ipsius A. C, triplicata ipsius A. D, quadruplicata ipsius A. E.

Hoc pacto cognitâ proportione inter 1000. 900. cognoscitur etiam ipsius 1000. ad 810, et ad 729.

Et ex 1000. ad 800. etiam 1000. ad 640. et ad 512.

Et ex 1000. ad 700. etiam 1000. ad 490. et ad 343.

Et ex 1000. ad 600. etiam 1000. ad 360. et ad 216.

Et ex 1000. ad 500. etiam 1000. ad 250. et ad 125.

Corollarium

Hinc oritur praeceptum quadrandi, cubicè multiplicandi, etc. et vi-
25 cissim radicem quadratam, cubicam, etc. extrahendi in primis | numerorum figuris. Est enim ut Maximus Chiliadis tanquam denominator ad Numerum propositum tanquam numeratorem, sic hic ad fractionis quadratum, et hoc ad cubum.

XIX. Propositio

Cognita proportione numeri ad primum 1000: si duo alii in eâdem inter se proportione fuerint: eorum unius proportione ad 1000. cognitâ, noscetur etiam reliqui proportio ad eundem 1000.

Sit A 1000, et nota mensura proportionis A ad B. Sit verò ut A ad B, sic C ad D, et sit nota mensura proportionis A ad C. Dico, etiam innotescere mensuram proportionis A ad D. Quia enim nota est mensura ipsius A.B proportionis, nota etiam erit ipsius C.D proportionis, ut quae illi ponitur aequalis, per 1. Postul. Nota verò est etiam A.C, et A.D est composita ex A.C et C.D, per 1. Ax. quare etiam mensura ipsius A.D componetur ex mensurâ ipsius A.C, ut ex mensurâ ipsius C.D, id est, ipsius A.B.

Corollarium I

Hoc pacto ex notificatis proportionibus quindecim, prop. 18. praemissis, noscentur aliae centum viginti numerorum intra millenarium ad ipsum millenarium. †

Quoties enim datae fuerint proportiones ad 1000. duorum numerorum talium, in quibus, vel ambobus, duos ultimos locos habuerint cyphrae, ut 900. 800, vel in eorum altero quidem duos, in reliquo verò unum, ut 700. 810, vel ut 700. 10. vel si unum solum, eumque ultimum in utroque numero locum ex tribus obtinuerit cyphra: quae tamen hanc cyphram antecedit figura in altero numero, ex paribus in reliquo quinarius fuerit, ut 620. 950. sic | 620. 50. sic 20. 950. vel si alter quidem *26* cyphrâ in ultimo loco caruerit, ex paribus tamen fuerit ut 512. 12. vel 2. reliquus fuerit 500. Omnibus hisce casibus institutâ multiplicatione numerorum, proveniunt in fine tres cyphrae, quibus abjectis formatur numerus, unus ex mille ordinis naturalis, seu progressionis Arithmeticae.

Corollarium II

Hinc oritur praeceptum tractandi regulam trium, quando uno loco occurrit rotundus 1000.

Nam si ille occurrit primo loco in tali situ: A 1000. dat B, quid C?

Tunc additur mensura proportionis A.B ad mensuram proportionis A.C, ita fit mensura proportionis A.D. Sin autem 1000. occurrat loco secundo vel tertio, in tali situ: B dat A 1000, quid C? vel tali: B dat C, quid A 1000?

Tunc aufertur mensura proportionis A.B, à mensura proportionis A.C, vel ejus multiplicis proximè majoris, ita relinquitur mensura vel ipsius proportionis A.D, vel ejus aequè multiplicis.

XX. Propositio

Quando fuerint ut primus ad secundum, sic tertius ad quartum, notae verò fuerint proportiones ipsius 1000. ad tres priores, innotescet etiam proportio ejusdem 1000. ad quartum.

Sit enim A 1000, et sit ut B ad C, sic D ad E. Notae verò sint proportiones A.B, A.C, A.D; dico innotescere etiam proportionem A.E. Nam
27 quia ut B ad C, sic D ad E, aequalis est igitur | mensura proportionis B.C, mensurae proportionis D.E. Sed B.E est composita ex B.D, D.E per 1. Axiom. Aequalis igitur erit proportio B.E, proportionibus B.D, B.C simul sumptis. Sed et A.E est composita ex A.B, B.E: sic A.D ex A.B, B.D, sic A.C ex A.B, B.C per 1. Axioma. Si ergò pro B.D, B.C sumantur proportiones notae A.D, A.C, tunc A.B bis accessit. Vicissim si pro B.E sumatur A.E proportio quaesita, tunc A.B semel tantum accessit. Si ergò à junctis A.D, A.C notis abstuleris A.B notam semel, relinquitur A.E proportio quaesita.

Corollarium I

Hâc methodo praeterquam quod superiorum Chiliadis multae iteratò exquiruntur, accedunt illis insuper aliquot aliae.

Corollarium II

Hinc oritur praeceptum tractandi Regulam trium, quando nuspiam occurrit rotundus 1000, ut si sic collocentur tres: B dat C, quid D?

Nam additur mensura proportionis AC, mensurae proportionis AD, et à summâ aufertur mensura proportionis AB, vel ejus aliqua pars aliquota: ita relinquitur mensura proportionis AE, vel ejus aequè multiplex.

Definitio

Mensura cujuslibet proportionis inter 1000. et numerum eo minorem, ut est definita in superioribus, expressa numero, apponatur ad hunc numerum minorem in Chiliade, dicaturque LOGARITHMUS ejus, hoc est, numerus (ἀριθμὸς)
28 *indicans proportionem* (λόγον) *quam | habet ad 1000. numerus ille, cui Logarithmus apponitur.*

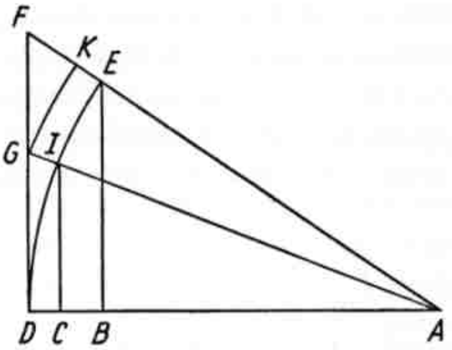
XXI. Propositio

Si primus numerus fit semidiameter Circuli seu Sinus totus: omnis numerus minor, ut Sinus complementi alicujus arcus, Logarithmum habet majorem sagittâ arcus, minorem verò excessu secantis arcus supra radium seu semidiametrum, excepto unico proximo post semidiametrum, quia illius Logarithmus ex hypothesi est aequalis sagittae.

Sit A centrum circuli, AD semidiameter, DI, DE arcus, eorumque Sinus IC, EB, Sinus verò complementorum sint CA, BA, sagittae CD, BD. Sit autem ut AD ad AC, sic AC ad AB. Amplius sint eorundem

9) quaesitae

arcuum secantes AG, AF, per terminos I, E in tangentes DG, DF educti, et ipsi AG aequalis abscindatur ab AF, quae sit AK, denique fit CD mensura proportionis CA, AD, ut minimi elementi arbitrarii. Dico, mensuram proportionis BA ad AD, hoc est, Logarithmum ipsius BA majorem esse quàm BD, minorem verò quàm EF. Quod major sit quàm BD, demonstratum est suprà propositione duodecima. Quod verò minores sint mensurae proportionum harum IG. EF sic probatur. Primum de CA, cum ipsa CD sagitta, utpote in mi|nimo propor- 29
tionum elemento ponatur esse Logarithmus ipsius CA: CD sanè est minor quàm IG. Vt enim CA ad AD, sic IA, hoc est, DA ad AG, quia DG et CI parallelae. Est igitur AD media proportionalis inter CA et AG. Vt igitur CA ad AD, sic differentia CA, AD, hoc est, CD ad differentiam sequentem DA, AG, hoc est, ad IG. Sed CA est minor quàm AD, ergò et CD est minor quàm IG. Sed CD est Logarithmus ipsius CA, Sinus complementi arcus ID, et IG est excessus secantis ejusdem arcus. Ergò Logarithmus minor est hoc excessu.



Transeamus ad BA: cujus Logarithmus major est quàm BD. Demonstrandum est, illum non esse tantò majorem ipsâ BD, quin interim maneat minor ipso EF. Rursum igitur AD est media proportionalis inter BA et AF. Et quia posita est ut BA ad AC, sic CA ad AD: quare etiam ut EA ad AG, vel AK, sic KA, vel GA ad AF. Sunt igitur continuè proportionales istae AB, AC, AD, AK, vel AG et AF. In eâdem igitur proportione sunt etiam BC, CD, IG, vel EK et KF. Minor verò est CD, quàm IG, ut prius ostensum, minor igitur erit etiam IG vel EK, quàm KF. Tota igitur EF major est quàm dupla ipsius IG, multò magis igitur EF major erit quàm dupla ipsius CD minoris. At proportionis inter BA, AD, ut quae dupla est ipsius BA, AC per 1. Propositionem, mensura seu Logarithmus ipsius BA, est praecisè duplus ipsius CD per 1. Postul. Minor est ergo Logarithmus ipsius BA excessu secantis EF. Erat autem major sagittâ BD. Patet ergo propositum.

XXII. Propositio

Iisdem positis, sagitta arcus cum excessu secantis superat duplum Logarithmi ad Sinum complementi apponendi.[1]

1) EF *statt* AF 10) CF *statt* EF 30) KE *statt* KF

30 Sit enim primo Sinus complementi longissimus, aut longissima mediarum proportionalium, quibus aliqua proportio dividitur in partes arbitrario numero multas; sic ut ejus, verbi causa, AC residuum CD, seu sagitta arcus ID sit ipsissima mensura arbitraria proportionis CD, Logarithmus igitur ipsius CA est CD. At IG est major ipsâ CD. Juncti igitur excessus secantis IG et sagitta CD plus efficiunt, quàm duplum ipsius CD.

Sit deinde alia quaecunque minor linea proportionis continuae, ut AB, et educta ex B perpendiculari in circumferentiam E, connexisque AE et DG continuatis in F, sit EF excessus secantis, et BD sagitta ejusdem scilicet arcus ED. Dico junctos EF et BD facere plus quàm duplum Logarithmi ad BA apponendi, seu mensurae ipsius BA, AD proportionis.

Quia est ut BA ad AD, sic DA ad AF, et CA media proportionalis inter BA, AD, ut igitur BA ad AC, sic GA ad AF, quare per 25. quinti EVCL. BA, AF junctae sunt longiores junctis CA, AG, sive quia, ut BA ad AD, sic DA ad AF, quare BA, AF junctae, superant DA, AD duas medias. Vt verò BA ad AC, sic etiam BC ad CD, et IG ad KF per 2. Prop. quare etiam BC et KF junctae, superant CD et IG junctas. At CD, IG plus sunt quàm duplum ipsius CD. Ergò BC, KF junctae multò plus sunt, quàm duplum ipsius CD. Et sic BD, EF plus sunt quàm quadruplum ipsius CD. Sed duplum ipsius CD est Logarithmus seu mensura proportionis BA, AD per 1. Postul. Ergò BD, EF junctae plus sunt quàm duplum Logarithmi ipsius BA, seu mensurae proportionis BA, AD.|

31 Sit tertiò proportio BA, AC minor vel major quàm CA, AD, demonstrabitur nihilominus, quod junctae BC, KF superent duplum tantae portionis de CD, quanta portio est proportio BA, AC, proportionis CA, AD.

Corollarium

Logarithmus Sinus complementi est minor medio Arithmetico inter sagittam et excessum secantis.

Praeceptum

Sinus inventi in Canone Sinuum residuum ad totum adde excessui secantis complementi, summae dimidium superat Logarithmum, sagitta ipsa proximè minor est Logarithmo.

28) partitionis *statt* portionis

Esto Sinus	99970.1490	Arcus complementi
Ejus residuum ad sin. totum	29.8510	Sagitta arcus complementi minor Logarithmo
	29.8599	Excessus secantis
	59.7109	Summa
	29.8555	Dimidium majus Logarithmo
Ergò Logarithmus est inter	29.8510 29.8555	

Praeceptum aliud

Invento Sinus Logarithmo, invenies etiam proximè Logarithmum Numeri rotundi, qui sinu tuo scrupuloso proximè minor est, si sinus scrupulosi excessum supra numerum rotundum adjeceris Logarithmo Sinus invento. †

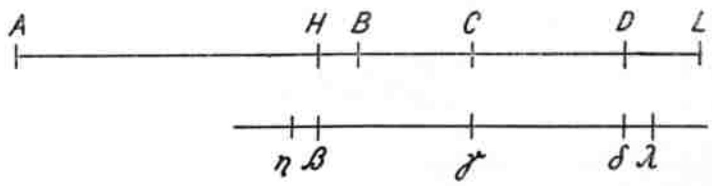
Vt quia sinus 99970.149 Logarithmus inventus est 29.854 circiter, si jam vis scire Logarithmum rotundi 99970.000. vides excessum tui Sinus scrupulosi esse 149. hunc adde ad inven|tum Sinus Logarithmum, *32* observato puncto. Sic 29.854.

$$\begin{array}{r} 29.854. \\ .149. \\ \hline 30.003. \end{array}$$

Hic est Logarithmus rotundi numeri 99970.000. proximè.

XXIII. Propositio

Si tres quantitates invicem successerint, aequalibus excessibus differentes, mensura proportionis inter maximam et mediam, cum mensurâ alterius inter mediam et minimam constituet proportionem, majorem quidem proportione majorum, minorem verò proportione minorum.



Sint tres quantitates AD, AC, AH, aequalibus excessibus DC, CH; sit autem mensura proportionis DA, AC linea δγ, mensura verò proportionis CA, AH, linea γη. Dico, proportionem ipsius δγ ad γη majorem † quidem esse proportione ipsius CA ad AD, minorem verò proportione ipsius HA ad AC. Fiat enim ut DA ad AC, sic CA ad AB. Vt igitur DA ad AC, sic DC ad CB per 2. Prop. Sed longior est DA, quàm AC, longior igitur DC, quàm CB, longior igitur et CH, quàm CB, differentia BH.

1) complementi *fehlt* 11) scrupulato *statt* scrupuloso

Cum igitur aequales sint proportiones DA, AC et CA, AB, per 1. Prop. mensura verò ipsius DA, AC sit linea δγ, habebit et CA, AB mensuram aequalem ipsi δγ, per 1. Postul. Et cum proportio CA, AH sit composita ex proportione CA, AB et proportione BA, AH; major igitur erit proportio CA, AH, quàm proportio DA, AC, aequalis ipsi CA, AB. Major igitur etiam mensura ejus γη, quàm γδ. Abscindatur à γη aequalis ipsi γδ,
33 quae sit γβ, resi'dua igitur βη mensura erit residuae proportionis BA, AH. Erit autem proportio γβ ad CB minor quam βη ad BH per 12. Coroll. id est, major est βη respectu βγ vel γδ, quam HB respectu BC. Compositis igitur terminis, illic γβ et βη in γη, hic CB et BH in CH, major erit γη respectu γβ, vel ejus aequalis γδ, quam CH respectu CB. Major igitur est proportio inter δγ, γη, quam inter BC, CH, id est, CD.

Vt verò BC ad CD, sic CA ad AD per 2. Prop. major igitur proportio inter δγ, γη, quàm inter CA, AD. Sed δγ et γη sunt mensurae, illa quidem proportionis inter DA, AC majores, haec verò proportionis inter CA, AH minores. Ergò proportio mensurarum major est proportione terminorum majorum.

Rursum fiat ut HA ad AC, sic CA ad AL. Vt igitur HA ad AC, sic HC ad CL, per 2. Sed brevior est HA, quàm AC, brevior igitur HC, hoc est DC, quam CL, differentia DL. Cum igitur aequales sint proportiones HA, AC, et CA, AL, per 1. Prop. mensura verò ipsius HA, AC sit linea ηγ, habebit et CA, AL mensuram aequalem ipsi ηγ, per 1. Postul. Esto γλ. Minor verò erat proportionis CA, AD mensura, puta γδ, minor igitur est γδ, quàm γλ. Excessus igitur δλ erit mensura proportionis inter DA, AL, appositae ad proportionem inter CA, AD. Et quia termini DA, AL sunt longiores quàm CA, AD, quare per 12. Coroll. minor est δλ respectu λγ, vel γη, quàm DL respectu LC, major igitur residua γδ respectu γλ, vel γη, quàm CD, vel HC, respectu CL. Et quia proportio minuitur aucto minori termino, per Ax. 1. minor igitur est proportio inter δγ, γη, quàm inter HC, CL. Vt verò HC ad CL, sic termini trium minores HA ad AC, per 2. conversam. Minor est igitur proportio inter δγ, γη mensuras proportionum, quarum
34 unam' facit major terminus cum medio, alteram medius cum minimo, quam inter terminos minores.

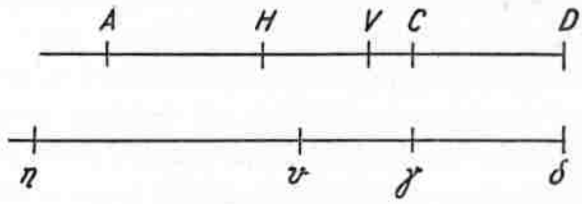
XXIV. Propositio

Dicta proportio inter duas mensuras est minor dimidiâ proportione inter
† *terminos extremos.*

Sint enim termini extremi, ut prius AH, AD, Media duo, Arithmeticum AC, Geometricum AV, sit proportionis DA, AC mensura δγ,

17) minorum *statt* majorum 29) cuncto *statt* aucto

vel aequalis ipsi DC, vel etiam major per Postul. 3. et applicetur ipsi δγ, alia γυ, quae sit mensura justa proportionis CA, AV, ut sic tota δυ mensuret proportionem DA, AV, residuae igitur proportionis VA, AH



mensura erit priori δυ aequalis per. 1. Postul. et 1. Prop. sit ea υη: Quia igitur δγ est vel aequalis, vel major quàm DC, sequentis γυ proportio ad CV erit major quàm proportio ipsius γδ ad CD, et tertiae υη proportio ad VH rursum erit major quàm secundae γυ ad secundam CV. Et per compositionem totius ηδ ad totam HD major erit proportio, quàm partis υγ ad partem VC. Permutatim igitur major erit proportio totius ηδ termini majoris in priori, ad υγ majorem in posteriori, quàm totius HD termini minoris, in priori proportione, ad VC terminum minorem in posteriori. Sed tota ηδ constat ex terminis ηγ, γδ, quorum differentia γυ, similiter DH, constat ex terminis DV, VH, quorum differentia VC: Major igitur est proportio terminorum ηγ, γδ junctorum ad suam differentiam γυ, quàm terminorum DV, VH ad differentiam VC. At verò auctâ proportione summae terminorum, ad suam differentiam, minuitur ipsorum inter se terminorum[1] seorsim positorum proportio, per Coroll. Prop. 13. et communem notitiam, quod proportionalium eadem sit ratio: Minor est itaque proportio inter ηγ, γδ, quàm inter DV, VH. Sed proportio DV ad VH est aequalis proportioni DA ad AV per 2. Haec verò DA ad AV proportio est dimidia ipsius DA ad AH per 1. Prop. Minor est ergò proportio inter ηγ, γδ, mensuras proportionum HA, AC et CA, AD, quàm dimidia inter terminos HA, AD.

Exemplum hic est. †

Numeri	Numerorum differentiae	Logarithmi	Logarithmorum differentia, seu mensura proportionis
1000.		00.	
	250.		28768.21.
750.		28768.21.	
	250.		40546.51.
500.		69314.72.	

14/15) junctarum 18) Coroll. 4. 13. 28/29) mensurae proportio

Si verò fiat ut 1000. ad medium proportionale inter terminos extremos 1000. et 500. (id est, ad 70710.68.) sic mensura proportionis prioris, quae est 28768.21. ad aliquem, is prodibit 40684.40, major quàm mensura proportionis posterioris.

Si verò fiat ut Medium proportionale inter 1000. et 360. (id est, ut 600.) ad 1000. sic mensura proportionis posterioris 63598.86. ad aliquem, is prodibit 38159.32. minor quàm mensura proportionis prioris inter 1000. et 680.

Aliud Exemplum.

1000.		0.	
	320.		38566.25.
680.		38566.25.	
	320.		63598.86.
360.		102165.11.	

36

Corollarium

Cum igitur medium Arithmeticum dispescat proportionem in partes inaequales, quarum una major est semisse totius, altera minor, si quaeratur, quae ergò sit ipsarum proportionum proportio inter se, respondetur, quod ea sit paulò minor semisse dicto.

Exemplum inquirendi proximè majus, et proximè minus aliquid, mensurâ proportionis propositae.

Nota sit mensura proportionis inter 1000. 900. quae sit 10536.05. quaeritur mensura proportionis 900. 800. ut sint aequales differentiae inter 1000. 900. et inter 900. 800.

Est igitur ut 9. ad 10. sic 10536.05 ad 11706.72. Mensura verò proportionis 9. 8. est major. Rursum ut medium proportionale inter 8. 10. (quod est 89442.719) ad 10. sic 10536.05 ad 11779.66. At mensura proportionis inter 9. et 8. est minor, scilicet 11778.30.

Notitia communis

Omnis Numerus quantitatem exprimit effabilem.

XXV. Propositio

Si numeri mille succedant invicem ordine naturali, bini differentes unitate; suscipiantur verò bini quicunque, deinceps ordinati, tanquam termini proportionis alicujus: erit hujus proportionis mensura ad mensuram proportionis inter

4) prioris *statt* posterioris 8) 600 *statt* 680 22) 10536.15 25) 9. ad 8. sic ... ad 10706.72. 27) 89.442719) ... ad 10779.66.

duos maximos Chiliadis, in proportione majore quidem, quàm quantam habet maximus ipse 1000. ad majorem ex terminis susceptis; minore verò quàm quantam habet idem 1000. ad minorem ex susceptis. Minore etiam, quàm quantam habet 1000. ad medium proportionale inter susceptos. †

Suscipiantur enim ex mille duo quicunque deinceps, puta 501. | et 500. *37* Et sit Logarithmus prioris 69114.92. posterioris 69314.72. Horum Logarithmorum differentia est 199.80. Quare per definitionem proportionis inter 501. et 500. mensura est 199.80. Eodem modo, quia maximi 1000. Logarithmus est 0. proximi verò 999. Logarithmus est 100.05, et horum duorum Logarithmorum differentia itidem 100.05, mensura igitur proportionis inter 1000. 999. (vel inter 100000.00. et 99900.00.) est 100.05. copuletur jam maximus 1000. cum utroque susceptorum, scilicet cum 501. et cum 500. copuletur etiam mensura 199.80. cum mensurâ 100.05, dico proportione inter 1000. et 501. majorem esse proportionem inter 199.80. et 100.05, minorem verò eandem proportione inter 1000. 500.

Demonstratum est enim in Prop. 23. mensuras duarum proportionum deinceps ordinatarum comprehendere proportionem majorem minore earum, quae sint deinceps. Vt si sint tres termini deinceps 1000. 999. 998. quorum priores quidem 1000. 999. faciant proportionem praecedentem, posteriores 999. 998. sequentem, praecedentis quidem proportionis mensura ut prius erit 100.05. sequentis verò mensura erit 100.15. Hae duae mensurae 100.15. et 100.05. constituunt proportionem majorem, quàm termini 1000. et 999. †

Jam verò duae mensurae, altera quidem proportionis inter 1000. et 999. hoc est, 100.05. altera verò proportionis inter 501. et 500. hoc est, 199.80. hae, inquam, duae mensurae ut termini consideratae, proportionem inter se constituunt compositam ex proportionibus omnibus omnium binarum, et binarum deinceps mensurarum, intercedentium per Axiom. 1. Similiter verò etiam termini ipsi 1000. et 501. proportionem inter se constituunt compositam ex totidem, hoc est, omnibus proportionibus omnium binorum, et binorum deinceps numerorum inter 1000. et 501. intercedentium per idem Ax. 1. |

Compositorum verò ex partibus aequè multiplicibus proportionalibus *38* eadem est proportio, quae partium inter se singularum, hinc et inde combinatarum per 1. quinti EVCL. Ergò etiam hae non deinceps sitae, sed longè distantes mensurae 100.05. et 199.80. proportionem facient majorem quàm termini non deinceps siti, sed distantes longè scilicet 1000. et 501. Eodem tenore rursum incipiendo syllogismum eundem inferemus duas mensuras deinceps 100.15. et 100.05. constituere pro-

1) quantum 14) 1000. et 50. 33) intercedentem

portionem minorem quàm duos terminos deinceps 999. et 998. Mensurarum verò 100.05. et 199.80. proportionem componi ex omnibus interjectis, et similiter terminorum 999. et 500. proportionem componi ex totidem interjectis, quare etiam proportionem inter 100.05. et 199.80. minorem esse quàm inter 999. et 500. multò igitur minorem quàm inter 1000. et 500. ut quae ad proportionem 999. 500. addit proportionem 1000. 999.

Tertio per eadem Syllogismi vestigia euntes, sic colligemus ex Prop. 24. praemissâ.

Mensurarum deinceps sitarum, scilicet 100.15. et 100.05. proportio est minor quàm ea, quae est inter 1000. et medium proportionale Terminorum 1000. 998. vel quàm ea, quae est inter hoc medium proportionale Terminorum 1000. 998. et terminum 998. Mensurarum verò non deinceps, ut 100.05. et 199.80. proportio componitur ex interjectis omnium binarum, et binarum deinceps proportionalibus; et terminorum, quorum unus est medium proportionale inter 1000. et 998. id est, $\sqrt{998{,}000}$. alter 500: vel quod idem est unus 1000. et alter medium proportionale inter 501. et 500. seu $\sqrt{250500}$; haec, inquam, proportio componitur ex proportionibus, quas constituunt totidem interjectae binorum, et binorum numerorum mediae proportionales lineae, accensito termino 39 1000. Quare etiam men|surae non deinceps sitae, scilicet 100.05. et 199.80. proportionem exhibent minorem quàm 1000. cum medio proportionali inter susceptos 501. et 500.

Corollarium I

Proposito numero quocunque infra 1000. ejusque Logarithmo, quaecunque differentiae Logarithmorum antecedunt propositum versus initium Chiliadis, sunt ad ultimum Logarithmum (qui scilicet ad 999. apponitur) in proportione majore, quàm 1000. ad propositum; quaecunque sequuntur versus ultimum Logarithmum, sunt ad eum in proportione minore.

Corollarium II

Hoc adjumento facilè implentur loca Chiliadis, quae per superiores propositiones nondum sunt sortita suos Logarithmos.

XXVI. Propositio

Differentia binorum Logarithmorum, qui sunt adscripti ad numeros deinceps, est ad eorumdem numerorum differentiam in proportione majori quidem quàm

4) 100. et 999.80. 10) 1000.15. et 1000.05.

est 1000. ad numerorum majorem; minore verò quàm idem 1000. est ad numerorum minorem. †

Facilè demonstratur per antecedentem ejusque Corollarium. Nam ex unâ parte differentia duorum deinceps numerorum perpetuò est unitas (seu in prolongatis perpetuò 100.00). Jam verò ultimus Logarithmus est 100.05. idem, qui et mensura ultimae et minimae proportionis. Nulla igitur differentia numerorum deinceps differt à mensurâ ultimae proportionis plus quàm quinque unitatibus numerorum prolongatorum. Ex alterâ verò parte mensura proportionis duorum deinceps numerorum nihil est aliud, quàm differentia duorum ad illos numeros positorum Logarithmorum, per definitionem. Si igitur inter mensuram susceptae proportionis, et inter mensuram | proportionis ultimae est major pro- *40* portio, quàm inter 1000. et terminum susceptae majorem, erit etiam inter differentiam Logarithmorum deinceps, et inter differentiam numerorum, ad quos sunt Logarithmi, proportio major quàm inter 1000. et terminum susceptae majorem. Nam quod majori majus est, ipsius quoque multo est majus. Sed proportio inter differentiam Logarithmorum deinceps, (verbi causa) inter 199.80. et 100.00. differentiam perpetuam numerorum deinceps, est major quàm proportio inter 199.80. et 100.05. excessus enim est proportio inter 100.05. et 100.00. Et inter 199.80. et 100.05. proportio major fuit demonstrata in praecedenti quàm inter 1000. et 501. Ergò multò est major proportio inter 199.80. et 100.00. quàm inter 1000. et (verbi causa) 501. terminum susceptae majorem. Est verò eadem proportio inter 199.80. differentiam Logarithmorum, et 100.00. differentiam numerorum, etiam minor quàm proportio inter 1000. et 500. terminum susceptae minorem, quod sic probo.

Proportio inter 199.80. et 100.05. est minor quàm proportio inter 999. et 500. per demonstrata 25. praecedente; similiter verò etiam proportio inter 100.05. et 100.00. seu inter 20.01. et inter 20.00. est minor quàm proportio inter 1000. et 999. per Coroll. ad 13. quia scilicet eadem est differentia numerorum majorum, 2001. et 2000. quae minorum 1000. et 999. utrobique scilicet unitas.

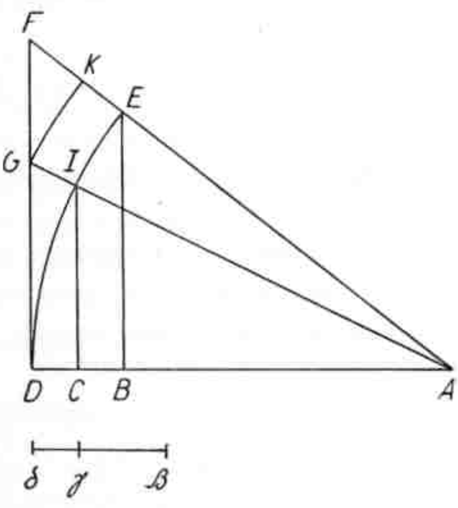
Componitur verò proportio inter 199.80. et 100.00. ex utraque suae societatis minore, scilicet ex proportione 199.80. ad 100.05. et ex proportione 100.05. ad 100.00. Sic etiam proportio 1000. ad 500. componitur ex utrâque suae societatis majore, scilicet ex proportione 999. ad 500. et ex proportione 1000. ad 999. Ergò etiam ipsa composita prior erit minor, et composita posterior erit major. |

6) mensurae 18) et 1000.00. 21/22) quàm inter 1000. et 501. *fehlt*

41 ## XXVII. Propositio

Si numeri succedant invicem ordine naturali, bini deinceps differentes unitate: ad singulos verò apponantur Logarithmi indices, seu mensurae proportionum, quas constituunt absoluti illi et rotundi numeri cum eorum maximo 1000, incrementa seu differentiae horum Logarithmorum se habent ad Logarithmum elementi minimi proportionum, sicut secantes ipsi toti arcuum, quorum complementis absoluti bini numeri ut Sinus competunt, sese habent ad numerum maximum, seu radium circuli: sic ut ex duobus secantibus duorum numerorum, inter quorum Logarithmos differentia proponitur, minor quidem minorem constituat proportionem cum radio, quàm differentia proposita cum omnium primâ, major majorem, atque etiam medium proportionale inter secantes majorem itidem.

In Schemate Prop. 21. sint aequales DC, CB differentiae numerorum absolutorum DA, CA, BA, quorum maximus DA. Et quia DC, CB aequales: major igitur est proportio BA, AC terminorum minorum, minor CA, AD majorum per Corollar. ad 13. Major igitur et mensura proportionis BA, AC, quàm proportionis CA, AD, hoc est differentia Logarithmorum ipsis CA, et BA absolutis respondentium est major primo Logarithmo per CD repraesentato. Sit δγ Logarithmus ipsius CA, et δβ
42 in eas|dem lineae partes, sit Logarithmus ipsius BA, et respondeat ipsi CA, secans GA, et ipsi BA, secans FA. Dico, proportionem βγ ad γδ majorem esse quàm proportionem GA ad AD, minorem verò quàm FA ad AD, minorem etiam quàm
† AD ad medium proportionale inter FA et GA. Nam per 25. praeced. major est proportio DA ad AB, quàm βγ ad γδ, major etiam DA ad medium inter BA, CA: sed FA ad AD proportio aequalis est proportioni DA ad AB, quia DA est medium proportionale inter BA, AF: sic etiam medii Geometrici inter FA, GA ad DA proportio aequalis est proportioni DA ad medium Geometricum inter CA, AB. Major igitur etiam FA ad AD, major etiam medii proportionalis inter FA, AG ad AD quàm βγ ad γδ. Sic per eandem minor est DA ad AC, et sic etiam GA ad AD quàm βγ ad γδ.



13/14) absolutorum CA, BA, 24/25) quàm medium 29) inter BA, DA: 36) inter DA, AB

Corollarium I

Idem obtinet etiam tunc, si duo termini differunt, non solâ unitate elementi minimi, sed aliâ unitate, quae sit illius decupla, centupla, millecupla.

Corollarium II

Hinc differentiae satis justae, praesertim ubi absoluti numeri satis magni sunt, extrui possunt, sumpto medio Arithmetico inter duos secantes parvos, vel etiam (si placet labor) medio Geometrico inter secantes majores, exque differentiis continuè additis, accumulari Logarithmi.

Corollarium III. Praeceptum

Divide sinum totum per utrumque proportionis susceptae terminum, quotientis utriusque medium Arithmeticum est quaesitum incrementum, hoc adde ad Logarithmum termini majoris, prodit Logarithmus † termini minoris.

Exemplum

Propius et omninò proximum vero est MediumGeometricum, at non est precium operae tam operosae, quando unus solus vel alter Logarithmus est constituendus.

Datus esto Logarithmus ad 700. scilicet 35667.4948. | quaeritur *43* Logarithmus ad 699. Divide ergò Radium per 700, prodit 142857. 142857.142857.142857. etc. divide etiam per 699, prodit 1430615. etc.

Medium Arithmeticum est . . .	142.959.
Adde hoc ad	35667.4948.
Prodit Logarithmus ad 699 . . .	35810.4538.

Corollarium IV. Praeceptum de Logarithmis sinuum

Incrementum Logarithmorum inter duos sinus sic inquires: inter † secantes complementorum constituatur medium Geometricum, dividaturque per differentiam sinuum, prodit differentia Logarithmorum.

Exemplum

Sit Sin. Gr.	o. 1. 29. 09.	Sec. compl.	343774682.
	o. 2. 58. 18.	Sec. compl.	171887348.
Diff.	29. 09.	Medium Geom.	2428. circiter 2909.

Quotiens 80000. est major quaesito incremento Logarithmorum, quia secantes admodum magni sunt.

19) 1430672. 20) 142.962. 22) 35810. 4568.

Appendix

Eodem ferè modo posset etiam demonstrari, differentias secundas esse in duplâ proportione primarum, tertias in duplâ secundarum. Verbi causâ, cum in ipso principio Logarithmorum differentia prima sit 100.00000. aequalis scilicet ipsi differentiae numerorum 100000.00000. et 99900.00000. secunda seu differentiarum differentia 10000. Tertia 100. Postquam ad numerum 50000.00000. ventum fuerit, Logarithmi 44 qui|dem proximi differentiam faciunt 200.00000. quae sic se habet ad differentiam primam, sicut numerus 50000.00000 ad maximum 100000.00000. Secunda verò differentia est 40000, in qua 10000. continetur 4^{ter}, Tertia 328. in qua 20. continetur 16^{ies}. At cùm in re insolitâ laboremus penuriâ vocabulorum: quare ne nimium obscura propo- † namus, demonstratio dimittatur intentata.

XXVIII. Propositio

Nullus numerus exactè exprimit mensuram proportionis inter binos unius Millenarii numeros, methodo superiori constitutam.

Nam quia termini uniuscujusque proportionis extremi non sunt ad invicem, ut duo numeri ejusdem speciei figurativae, tam multorum graduum, quot vices arbitrariae sunt assumptae ad secundam proportionem in minima elementa arbitraria: mediae ergò proportionales elementa constituentes sunt ineffabiles per 9. Prop. Differentia igitur inter mediarum proportionalium maximam et terminum per 1000. significatum est et ipsa ineffabilis. Sed mensura proportionis inter 1000. et terminum minorem effabilem in Chiliade est multiplex hujus differentiolae, id est, et commensurabilis est illi. Ergò mensura haec est terminis incommensurabilis, hoc est, ineffabilis. At nullus ergò numerus, et sic neque Logarithmus exactè exprimit hanc mensuram.

Admonitio

Interest igitur observare, quousque sese proferat hoc vitium. Nam si proportio 999. 1000. secatur in particulas 1677216. per 24^{tas} proportionales medias, et in particulae unius mensurâ numero expressâ peccetur semisse unitatis: multiplicatus hic error cum ipsâ mensurâ Elementi in numerum Elementorum proportionis, efficiet 8000000. unitates. |

8) se *fehlt* 17) ab *statt* ad

XXIX. Propositio 45

Si mensurae proportionum omnium exprimantur numeris seu Logarithmis: non omnes proportiones sortientur legitimam suam mensurae portionem ad omnem minutiarum scrupulositatem.

Nam per 11. Prop. proportiones numerorum Chiliadis inter se sunt incommensurabiles, omnes verò eorum Logarithmi sunt effabiles per Postul. 3. et sic indicant mensuras inter se commensurabiles: injustâ igitur partitione, si ad minima veniatur.

Nota

Locum idem habet etiam in sinubus, inque proportione circuli ad circumferentiam, et passim; et interest animadvertere, à quâ figurâ numeri vitium incipiat, ne in numeris eâ posterioribus frustrà impendamus operam.

XXX. Propositio

Si ad Numerum 1000. Chiliadis maximum referantur aliqui majores, ipsi verò 1000. sit applicatus Logarithmus 0. Logarithmi majoribus competentes erunt privativi.

Referatur ad 1000. major 1024. fiatque ut 1024. ad 1000. sic hic ad 97656. 25, sit etiam mensura proportionis inter 100000. 00. et 97656.25, Logarithmus 2371.6526. Cùm ergò proportio inter 1024. et 1000. sit aequalis proportioni inter 100000.00. et 97656.25. erit eadem mensura ejus. Et si ad 1024. apponeretur Logarithmus 0. tunc ad 1000. apponendus esset Logarithmus 2371.6526. ad numerum verò 97656.25. duplum hujus Logarithmi, quia proportio 102400.00. ad 97656.25. est dupla proportionis 1024. ad 1000. Sed quia ad 1000. in Chiliade apponitur Log. 0. deterso Logarithmo 2371.6526, et à duplo hujus etiam apud 97656.25. simplum est detersum in Canone Chiliadis, ergò etiam à Logarithmo ipsius 1024, cui applicaveramus Logarithmum 0, detergendum est tantundem. Si verò à 0 auferas 2371.6526. relinquitur 2371.6526. privativum cum signo Cossico. |

7) Ax. *statt* Postul. 24) 10240000. 26) Logarithmo, et 2371. 6526,

46 # METHODVS COMPENDIOSISSIMA CONSTRVENDI CHILIADA LOGARITHMORVM

Principio inquiratur Logarithmus, qui metitur proportionem inter 100000.00. et 97656.25. quaesitâ mediâ proportionali maximâ vicesimarum quartarum inter hos terminos, ejusque et numeri totalis prolongati differentiâ toties duplicatâ: emerget autem Logarithmus 2371.6526. qui idem est etiam numeri 1024. defectivus per 30. Secundò idem fiat etiam cum proportione inter 1000. et 500: emerget autem Logarithmus ad 500. iste 69314.7193, qui idem etiam duplicationis Logarithmus dicitur.

Jam quia ut 1000. ad 500. sic 1024. ad 512. et hic ad 256. et hic ad 128. et hic ad 64. et hic ad 32. et hic ad 16. et hic ad 8. et hic ad 4. et hic ad 2. et hic ad 1.

Decupla est igitur proportio 1024. ad 1. proportionis 1000. ad 500. Quare Logarithmus ad 1. tunc quidem erit decuplus Logarithmi ad 500. cum numerus 1024. acceperit Logarithmum 0. sed ubi ei privativus 2371.6526. fuerit applicatus, etiam ipsius 1. Logarithmus erit di-
47 minuendus tanto. Diminuatur decuplum | duplicantis

	693147.1928.
	2371.6526.
† Hic est Logarithmus unitatis in Chiliade nostrâ seu 100.00.	690775.5422.
Est igitur 10.00.	921034.0563.

Et quia ut 1. ad 10. sic hic ad 100. et hic ad 1000. tripla est itaque proportio 1000. ad 1. proportionis 1000. ad 100. tertia igitur pars Logarithmi ad 1. est apponenda pro Logarithmo ad 100. puta 230258.5141. et hic etiam est Logarithmus decuplicationis, duae verò tertiae sunt Logarithmus ad 10. scilicet 460517.0282. Quod si duplicantem abstuleris à Logarithmo ad 1. emergit Logarithmus ad 2. si ab hoc abstuleris Logarithmum ad 10. restat Logarithmus quinduplicationis.

Logar. ad 1.	690775.5422.
Duplicans	69314.7193.
Logar. ad 2.	621460.8229.
Logar. ad 10.	460517.0281.
Quinduplicans	160943.7948.

Hisce sic praeparatis jam construantur Logarithmi centum maximorum, initio facto à 999. hâc methodo. Totalis 1000. prolongatus 7. cyphris dividatur per singulos ordine; quotientes referantur in Tabellam, sunt enim secantes illorum arcuum, quorum complementa habent divisores istos pro sinubus, ut si divisor seu sinus complementi 999. quotiens seu secans erit 100.10010. sin dividat 901. quotiens erit 110.98779. sin 900. quotiens erit 111.11111. Divisio autem continuatur propterea usque ad octavam figuram, ut constet nobis quantum differat medium Arithmeticum à Geometrico, ubi maximè. Vt si, multiplicatis in se duobus ultimis quotientibus, radix quaeratur, ea erit 111. 04942. At medium Arithmeticum inter duos quotientes est 111. 04945.[1]

In structurâ igitur centum minimorum Logarithmorum media haec 48 duo inter se sunt aequalia, usque ad septimam figuram inclusivè: in octavâ oritur differentia ternarii. Pone in omnibus centum mediis esse tantam. Si ergò centum media Arithmetica ordine accumules, peccarent illa excessu non majore quàm 00300. ternarii scilicet in tertiâ figurâ post punctum. At verò non est in omnibus centum tanta differentia: in initialibus enim penitus evanescit, ut inter 100.00000. et 100.10010. Hic enim utrumque medium est 100. 05005. et differentia occultatur in figuris ulterioribus, si quis illas erueret. Quare centum minimos Logarithmos tutissimè constituimus per accumulationem mediarum proportionalium inter quotientes per 27. Prop. Semper enim additis duobus secantibus ad Logarithmi prioris duplum, conflatur duplum Logarithmi † posterioris.

Constructis his Logarithmis eligatur Logar. ad 960. qui erit 4082. 2001. ferè. Huic si continuè adjeceris duplicantem, emergent Logarithmi ad 480.240.120.60.30.15. Quia proportio 960. ad 15. est sextupla proportionis 1000. ad 500. ita emerget Logarithmus ad 15. qui est 419970.5159. et ad 30. Log. 350655. 7965. Hunc si abstuleris à Logar. ad 10. scilicet 460517.0281.

Restabit 109861.2316. Triplicans Logarithmus.

Hunc ergò aufer à Logar. ad 1. 690775.5422.

Restat Logar. ad 3. 580914.3106.

Idem etiam ex Log. ad 900. elici potest, probationis causa. Nam hujus Logar. est 10536.0535. etsi jam hic est nimius ob causam dictam. Nam ut 1000. ad 900. sic 9000. ad 8100. et ut 10000. ad 8100. sic hic ad 6561. Quadruplum ergò Logarithmi[1] ad 900. respondet numero 6561. (seu 49 90000.00. numero 65610.00.) scilicet 42144.2140. Atqui numerus 65610.00. est ternarii de 10.00. continuè multiplex. Ecce 6561. 2187. 729. 243. 81. 27. 9. 3. 1. Ergò proportio 6561. ad 1. est octupla proportionis 3. ad 1.

5) constat 13) acumules 19) acumulationem 34) 1000. *statt* 10000. 37) 1000. *statt* 10.00.

Ergò Logarithmo ad 10.00. scilicet 921034.0563.
Aufer Log. ad 65610.00. scilicet 42144.2140.
Residui 878889.8423.
Pars octava 109861.2303. Est paulò minor quàm prius.

Scilicet, quia Logarithmus ad 900. et sic etiam ejus quadruplum justo majus fuit, id verò subtractum à justo Logar. ad. 1. relinquit justo minus. Et sanè etiam bisectio continua proportionis inter 10. et 9. ostendit ultimas hujus Logar. ad 900. figuras, non 0535. sed 0513. per 22. minus, cujus quadruplum est 88. peccatum residui, et hujus pars octava 11. ad 2303. addita facit 2314. planè ut in priori processu invenimus 2316.

Idem etiam ex priori Logar. ad 960. aliâ viâ, quia 1000. ad 960. est ut 9600. ad 9216. et cum Logarithmus 960. sit 4082. 2001. erit Logar. ad 9216. duplus prioris scilicet 8164. 4002. At verò proportio 9216. ad 9. est decupla proportionis 1000. ad 500. Ecce: 9216. 4608. 2304. 1152. 576. 288. 144. 72. 36. 18. 9. et proportio 9. ad 1. est dupla proportionis 3. ad 1.

Ergò ad decuplum duplationis 693147.1928.
adde Logar. ad numerum 92160.00. scilicet 8164.4002.
701311.5930.
Aufer à Logar. ad 10.00. summam, quae est Logar. ad 90.00. scilicet 921034.0563.
Restat 219722.4633.
Hujus dimidium 109861.2316.
est Triplicans ut prius.[1]

Sic ex Log. ad 990. (vel 99000.00.) qui est 1005.0331. vel sine decuplicante, vel per eum perveniemus ad Logarithmum ad 11. (vel 1100.00.) Nam ad 98010.00. erit Logarithmus duplus
scilicet 2010.0675.
Hic additur ad quadruplum triplicantis, 439444.9256.
Facit 441454.9931. Log. ad 1210.00.
Hoc aufer à Log. ad 10.00. 921034.0563.
Restat 479579.0632.
Hujus dimidium 239789.5316. Vndecuplat.
Aufer à Logar. ad 1. 690775.5422.
Restat 450986.0106. Log. ad 1100.00.

Sic quia ut 1000. ad 980. sic hic est ad 9604. Duplus igitur Logarithmi ad 980. est Logarithmus ad 9604. scil. 4040. 5422. Et verò proportio

4) Et *statt* Est 28) 100.00.) 33) 439579.4632. 36) 450986.0100.

9604. ad 2401. est dupla proportionis 1000. ad 500. et proportio 24010.00. ad 10.00. est quadrupla proportionis 70.00. ad 10.00. Adde igitur

duplum duplicantis scilicet	138629.4386.	
ad	4040.5422.	
Summam	142669.9808.	Log. ad 2401.
Aufer à Log. 10.00.	921034.0563.	
Residui	778364.0775.	†
Pars quarta	194591.0194.	Septuplat.
Hoc igitur aufer à Log. ad 100.	230258.5141.	
Restat Logar. ad 700. vel 70000.00.	35667.4947.	

Atque hic idem ad 700. per continuam bisectionem proportionis 10.7. *51* per maximam tricesimarum proportionalium exactissimè tantus prodiit. Vide hanc suprà in Tabellâ. Sic quia ut 1000. ad 950. sic 9500. est ad 9025. Ergò Logarithmus ad 9025. est illius duplus scilicet

	10258.6606.	
Adde duplum quinduplicantis sc.	321887.5896.	
Consurgit	332146.2502.	Log. ad 3610.00.
Hunc aufer à Log. ad 10.00.	921034.0563.	
Residui	588887.8061.	
Dimidium	294443.9030.	Novemdecuplat.
Aufer id à Logar. ad 1. vel ad 100.00.	690775.5422.	
Restat	396331.6392.	Log. ad 1900.00.

Eundem derivabimus etiam ex 912. cujus Logar. 9211. 5306. et quia proportio 912. ad 57. est quadrupla proportionis 1000. ad 500. Duplicantis adde quadruplum, scilicet 277258. 8771. Consurgit 286470.4077.

Huic adde Triplicantem	109861.2316.	
Prodit	396331.6393.	Log. ad 1900.00.

Eundem ex 950. derivabimus aliâ viâ:

Logar. ad 95000.00.	5129.3303.
Decuplans	230258.5141.
Logar. ad 9500.00.	235387.8444.
Quinduplicans	160943.7948.
Logar. ad 1900.00.	396331.6392.
Sic ad Logar. ad 988.	1207.2583. *52*
Adde duplicantis duplum	138629.4386.
Venit Logar. ad 247.	139836.6969.

6) 10.10000. 12) exactissimi 14) Logarithmus ad 9015. 17) 332146.2402. 27) Restat *statt* Prodit

Novemdecuplicans addatur	294443.9030.	
Prodit Logar. ad 13.	434280.5999.	
Auferatur à Logarith. ad 1.	690775.5422.	
Restat	256494.9423.	Tridecuplans.
Sic ad Logar. ad 969.	3149.0672.	
Adde triplicantem	109861.2316.	
Venit Log. ad 323.	113010.2988.	
Adde Novemdecuplum	294443.9030.	
Venit Log. ad 17.	407454.2018.	Aufer hunc
à Logarith. ad 1.	690775.5422.	
Restat Septemdecuplans	283321.3404.	
Sic ad Logar. ad 986.	1409.8927.	
Adde duplicantem	69314.7193.	
Et Septemdecuplum	283321.3404.	
Venit Logar. ad 29.	354045.9524.	Auferatur
à Logar. ad 1.	690775.5422.	
Restat	336729.5898.	Vndetrigintuplans.
Et ad Log. ad 966.	3459.1450.	
Adde duplicantem	69314.7193.	
Et Triplicantem	109861.2316.	
Et Septuplicantem	194591.0194.	
Venit Log. ad 23.	377226.1153.	qui ablatus
à Logar. ad 1.	690775.5422.	
Relinquit	313549.4269.	Vigintitriplicans.

Eundem ex Log. 920. Quia ut 1000. ad 920. sic 9200. ad 8464. Ergò

Logar. ad 920. duplum	16676.3247.	
Adde ad quadruplum duplicantis	277258.8771.	
Consurgit	293935.2018.	Aufer
à Logar. ad 1. de 10000	921034.0563.	
Restat	627098.8545.	
Dimidium	313549.4272.	

Eundem ex Logar. ad 920. jam abundanti sic extruo:

Ad Logar. ad 920.	8338.1624.
Adde duplicantis duplum	138629.4386.
Et decuplicantem	230258.5141.
Venit Logar. ad 23.	377226.1151.

3) à *fehlt* 16) à Logar. o. 17) Vndetriginduplans. 23) ad 10.00. 24) Viginticuplans. 29) ad *fehlt*

Sic ad Logar. ad 930.	7257.0706.	majusculum
Adde triplicantem	109861.2316.	
Et decuplicantem	230258.5141.	
Venit Logar. ad 31.	347376.8163.	majusculus autem
	8149.	verior. Aufer
à Logar. ad 1.	690775.5422.	
Relinquit	343398.7259.	undetrigintuplicans minusculus. |

Eundem ex Log. ad 961. elicio sic. Nam quia ut 961. ad 31. sic hoc ad 1. Ergò. *54*

Aufer Logarithmum ad 961.	3978.0876.	
à Logar. ad 1.	690775.5422.	
Restat	686797.4546.	
Hujus dimid.	343398.7273.	Vndetrigintuplicans. Hic est justior.

Jam quia intra millenarium quadratus major non est quàm 961. non igitur opus nobis erit multiplicationibus aliis secundum primos majores ipso 31. Nam omnis primi majoris multiplex infra 1000. secundum aliquem numerum minorem, quàm 31. est multiplex: ut 979. est undecuplus primi 89.

Vbi notandum, quod Logarithmus alicujus proportionis multiplicis sit differentia inter Logarithmum unitatis in Chiliade, et inter Logarithmum numeri, qui multiplicitate proportionis prodit. Is igitur Logarithmus Multiplicator additus Logarithmo cujusque numeri, constituit Logarithmum partis, abstractus Logarithmum multiplicis. Idem verum est de Logarithmis proportionum non multiplicium, qui sunt nihil aliud quàm differentiae, vel Multiplicantium Logarithmorum, vel appositorum ad numeros multiplicium denominatores: ut eadem est differentia inter septuplicantem et triplicantem, quae est inter Logar. ad 7. et Logar. ad 3. Haec igitur addita Logarithmo numeri tertii constituit Logarithmum Numeri proportionalis tertio minoris, ablata constituit Logar. Numeri proportionalis tertio majoris.

Hoc modo plerorumque Primorum infra 500 Logarithmi eruuntur ex uno centum positorum: nam in primo centenario nullus superest, in secundo soli quinque, 127. 149. 167. 173. 179. in tertio undecim, 211. 223. 251. 257. 263. 269. 271. 277. 281. | 283. 293. in quarto undecim, *55*
337. 347. 349. 353. 359. 367. 373. 379. 383. 389. 397. in quinto novem, 401. 409. 419. 421. 431. 433. 439. 443. 449. Summa 36.

12) 69077.5422. 14) Vndetrigintupla.

Restant ii qui sunt inter 500. et 900. primi 59. numero, praetereaque etiam multiplices jam expressorum triginta sex totidem scilicet dupli; ex iis minorum sedecim tripli, primorum septem quadrupli, et ex his priorum quinque quintupli, duorum 127. et 149. sextupli, unius 127. septuplus.

Vt igitur etiam ad hos, et ad primos supra 500. numero 59. Logarithmi habeantur, considerandae sunt differentiae Logarithmorum positorum ad interspersos hisce: et quâ methodo differentiae prius sunt constitutae Logarithmorum 100. minorum serie continua, eadem nunc etiam per Prop. 27. Coroll. 3. et maximè per ejus appendicem, si quis ea dextrè utatur, interrupta serie, et quidem longè facilius hae differentiae sunt supplendae, quia plerunque vel unus solus, vel bini deinceps, raró tres deinceps Logarithmis suis carebunt, ita ut in accumulatione differentiarum crebrò reversio fiat, ad Logarithmum jam antea certum.[1]

CHILIAS LOGARITHMORVM

JOH. KEPLERI

Mathematici Caesarei

SINUS seu Numeri absoluti	LOGARITHMI cum differentiis	SINUS seu Numeri absoluti	LOGARITHMI cum differentiis	H
1	1611809. 60	1. 00	1151292. 57	
	69314. 72		69314. 72	
2	1542494. 88	2. 00	1081977. 85	
	40546. 51		40546. 51	
3	1501948. 37—	3. 00	1041431. 34	Hv
	28768. 21		28768. 21	
4	1473180. 16	4. 00	1012663. 13	
	22314. 35		22314. 35	
5	1450865. 80+	5. 00	990348. 78—	
	18232. 16		18232. 16	
6	1432633. 65	6. 00	972116. 62	
	15415. 07		15415. 07	
7	1417218. 58	7. 00	956701. 55	
	13353. 14		13353. 14	
8	1403865. 44	8. 00	943348. 41+	
	11778. 30		11778. 30	
9	1392087. 14—	9. 00	931570. 11—	
	10536. 05		10536. 05	
10	1381551. 08+	10. 00	921034. 06—	
	69314. 72		69314. 72	
20	1312236. 37—	20. 00	851719. 34—	
	40546. 51		40546. 51	
30	1271689. 85+	30. 00	811172. 82+	
	28768. 21		28768. 21	
40	1242921. 65—	40. 00	782404. 62	
	22314. 35		22314. 35	
50	1220607. 29	50. 00	760090. 27	
	18232. 16		18232. 16	
60	1202375. 13+	60. 00	741858. 11—	
	15415. 07		15415. 07	
70	1186960. 07—	70. 00	726443. 04—	
	13353. 14		13353. 14	
80	1173606. 93—	80. 00	713089. 90	
	11778. 30		11778. 30	
90	1161828. 62	90. 00	701311. 59+	
	10536. 05		10536. 05	

	ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*
	— 3. 26			10536. 05	
	0. 3. 26	100.00	0. 1. 26	690775. 54	0. 4
	3. 27			69314. 72	
	0. 6. 53	200.00	0. 2. 53	621460. 82-+	0. 7
	— 3. 26			40546. 51	
	0. 10. 19	300.00	0. 4. 19	580914. 31	0. 11
	3. 26			28768. 21	
	0. 13. 45	400.00	0. 5. 46	552146. 10-+	0. 14
	— 3. 27			22314. 35	
H2	0. 17. 12	500.00	0. 7. 12	529831. 75—	0. 18
	3. 26			18232. 16	
	0. 20. 38	600.00	0. 8. 38	511599. 59	0. 22
	— 3. 26			15415. 07	
	0. 24. 4	700.00	0. 10. 5	496184. 52-+	0. 25
	3. 26			13353. 14	
	0. 27. 30	800.00	0. 11. 31	482831. 38-+	0. 29
	— 3. 26			11778. 30	
	0. 30. 56	900.00	0. 12. 58	471053. 08	0. 32
	3. 27			10536. 05	
	0. 34. 23	1000.00	0. 14. 24	460517. 03	0. 36
	— 3. 26			9531. 02	
	0. 37. 49	1100.00	0. 15. 50	450986. 01	0. 40
	3. 26			8701. 14	
	0. 41. 15	1200.00	0. 17. 17	442284. 87	0. 43
	— 3. 27			8004. 27	
	0. 44. 42	1300.00	0. 18. 43	434280. 60	0. 47
	3. 26			7410. 80	
	0. 48. 8	1400.00	0. 20. 10	426869. 80-+	0. 50
	— 3. 26			6899. 28	
	0. 51. 34	1500.00	0. 21. 36	419970. 52—	0. 54
	3. 26			6453. 85	
	0. 55. 0	1600.00	0. 23. 2	413516. 67—	0. 58
	— 3. 27			6062. 47	
	0. 58. 27	1700.00	0. 24. 29	407454. 20	1. 1
	3. 26			5715. 84	
	1. 1. 53	1800.00	0. 25. 55	401738. 36	1. 5
	— 3. 27			5406. 72	
	1. 5. 20	1900.00	0. 27. 22	396331. 64	1. 8
	3. 26			5129. 33	
	1. 8. 46	2000.00	0. 28. 48	391202. 31	1. 12
	— 3. 26			4879. 02	
	0. 12. 12	2100.00	0. 30. 14	386323. 29	1. 16
	3. 26			4652. 00	
	1. 15. 38	2200.00	0. 31. 41	381671. 29	1. 19
	— 3. 27			4445. 17	
	1. 19. 5	2300.00	0. 33. 7	377226. 12—	1. 23
	3. 26			4255. 97	
	1. 22. 31	2400.00	0. 34. 34	372970. 15-+	1. 26
	— 3. 26			4082. 20	
H2v	1. 25. 57	2500.00	0. 36. 0	368887. 95-+	1. 30
	3. 27			3922. 07	
	1. 29. 24	2600.00	0. 37. 26	364965. 88	1. 34
	— 3. 26			3774. 03	
	1. 32. 50	2700.00	0. 38. 53	361191. 85—	1. 37
	3. 26			3636. 77	
	1. 36. 16	2800.00	0. 40. 19	357555. 08-+	1. 41
	— 3. 27			3509. 13	
	1. 39. 43	2900.00	0. 41. 46	354045. 95	1. 44
	3. 26			3390. 15	
	1. 43. 9	3000.00	0. 43. 12	350655. 80—	1. 48
	— 3. 26			3278. 99	

ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*
3. 26			3278. 99	
1. 46. 35	3100.00	0. 44. 38	347376. 81+	1. 52
3. 27			3174. 86	
1. 50. 2	3200.00	0. 46. 5	344201. 95—	1. 55
3. 26			3077. 17	
1. 53. 28	3300.00	0. 47. 31	341124. 78	1. 59
3. 27			2985. 29	
1. 56. 55	3400.00	0. 48. 58	338139. 49+	2. 2
3. 26			2898. 76	
2. 0. 21	3500.00	0. 50. 24	335240. 73	2. 6
3. 26			2817. 08	
2. 3. 47	3600.00	0. 51. 50	332423. 65—	2. 10
3. 26			2739. 90	
2. 7. 13	3700.00	0. 53. 17	329683. 75—	2. 13
3. 27			2666. 83	
2. 10. 40	3800.00	0. 54. 43	327016. 92	2. 17
3. 27			2597. 55	
2. 14. 7	3900.00	0. 56. 10	324419. 37+	2. 20
3. 26			2531. 78	
2. 17. 33	4000.00	0. 57. 36	321887. 59	2. 24
3. 26			2469. 26	
2. 20. 59	4100.00	0. 59. 2	319418. 33	2. 28
3. 27			2409. 75	
2. 24. 26	4200.00	1. 0. 29	317008. 58—	2. 31
3. 26			2353. 05	
2. 27. 52	4300.00	1. 1. 55	314655. 53—	2. 35
3. 27			2298. 95	
2. 31. 19	4400.00	1. 3. 22	312356. 58—	2. 38
3. 26			2247. 29	
2. 34. 45	4500.00	1. 4. 48	310109. 29—	2. 42
3. 27			2197. 89	
2. 38. 12	4600.00	1. 6. 14	307911. 40—	2. 46
3. 26			2150. 62	
2. 41. 38	4700.00	1. 7. 41	305760. 78—	2. 49
3. 26			2105. 34	
2. 45. 4	4800.00	1. 9. 7	303655. 44—	2. 53
3. 27			2061. 93	
2. 48. 31	4900.00	1. 10. 34	301593. 51—	2. 56
3. 27			2020. 27	
2. 51. 58	5000.00	1. 12. 0	299573. 24—	3. 0
3. 27			1980. 27	
2. 55. 25	5100.00	1. 13. 26	297592. 97+	3. 4
3. 26			1941. 81	
2. 58. 51	5200.00	1. 14. 53	295651. 16+	3. 7
3. 27			1904. 81	
3. 2. 18	5300.00	1. 16. 19	293746. 35—	3. 11
3. 27			1869. 22	
3. 5. 45	5400.00	1. 17. 46	291877. 13+	3. 14
3. 26			1834. 91	
3. 9. 11	5500.00	1. 19. 12	290042. 22—	3. 18
3. 27			1801. 85	
3. 12. 38	5600.00	1. 20. 38	288240. 37	3. 22
3. 26			1769. 96	
3. 16. 4	5700.00	1. 22. 5	286470. 41	3. 25
3. 27			1739. 17	
3. 19. 31	5800.00	1. 23. 31	284731. 24—	3. 29
3. 27			1709. 45	
3. 22. 58	5900.00	1. 24. 58	283021. 79	3. 32
3. 26			1680. 71	
3. 26. 24	6000.00	1. 26. 24	281341. 08	3. 36
3. 27			1652. 93	

	ARCUS Circuli cum differentiis	SINUS seu Numeri absoluti	Partes vicesimae quartae	LOGARITHMI cum differentiis	Partes sexagenariae
	— 3. 27			1652. 93	
	3. 29. 51	6100.00	1. 27. 50	279688. 15	3. 40
	3. 26			1626. 05	
	3. 33. 17	6200.00	1. 29. 17	278062. 10—	3. 43
	— 3. 27			1600. 04	
	3. 36. 44	6300.00	1. 30. 43	276462. 06-+	3. 47
	3. 27			1574. 83	
	3. 40. 11	6400.00	1. 32. 10	274887. 23	3. 50
	— 3. 26			1550. 42	
H3v	3. 43. 37	6500.00	1. 33. 36	273336. 81—	3. 54
	3. 27			1526. 75	
	3. 47. 4	6600.00	1. 35. 2	271810. 06	3. 58
	— 3. 26			1503. 79	
	3. 50. 30	6700.00	1. 36. 29	270306. 27-+	4. 1
	3. 27			1481. 50	
	3. 53. 57	6800.00	1. 37. 55	268824. 77-+	4. 5
	— 3. 27			1459. 88	
	3. 57. 24	6900.00	1. 39. 22	267364. 89	4. 8
	3. 26			1438. 88	
	4. 0. 50	7000.00	1. 40. 48	265926. 01	4. 12
	— 3. 27			1418. 46	
	4. 4. 17	7100.00	1. 42. 14	264507. 55	4. 16
	3. 27			1398. 62	
	4. 7. 44	7200.00	1. 43. 41	263108. 93—	4. 19
	— 3. 26			1379. 33	
	4. 11. 10	7300.00	1. 45. 7	261729. 60—	4. 23
	3. 27			1360. 57	
	4. 14. 37	7400.00	1. 46. 34	260369. 03—	4. 26
	— 3. 27			1342. 31	
	4. 18. 4	7500.00	1. 48. 0	259026. 72-+	4. 30
	3. 27			1324. 52	
	4. 21. 31	7600.00	1. 49. 26	257702. 20	4. 34
	— 3. 26			1307. 21	
	4. 24. 57	7700.00	1. 50. 53	256394. 99-+	4. 37
	3. 27			1290. 34	
	4. 28. 24	7800.00	1. 52. 19	255104. 65-+	4. 41
	— 3. 27			1273. 90	
	4. 31. 51	7900.00	1. 53. 46	253830. 75	4. 44
	3. 27			1257. 88	
	4. 35. 18	8000.00	1. 55. 12	252572. 87	4. 48
	— 3. 27			1242. 25	
	4. 38. 45	8100.00	1. 56. 38	251330. 62	4. 52
	3. 27			1227. 01	
	4. 42. 12	8200.00	1. 58. 5	250103. 61	4. 55
	— 3. 26			1212. 14	
	4. 45. 38	8300.00	1. 59. 31	248891. 47-+	4. 59
	3. 27			1197. 61	
	4. 49. 5	8400.00	2. 0. 58	247693. 86—	5. 2
	— 3. 27			1183. 45	
H4	4. 52. 32	8500.00	2. 2. 24	246510. 41	5. 6
	3. 27			1169. 60	
	4. 55. 59	8600.00	2. 3. 50	245340. 81—	5. 10
	— 3. 27			1156. 09	
	4. 59. 26	8700.00	2. 5. 17	244184. 72-+	5. 13
	3. 27			1142. 86	
	5. 2. 53	8800.00	2. 6. 43	243041. 86—	5. 17
	— 3. 27			1129. 96	
	5. 6. 20	8900.00	2. 8. 10	241911. 90	5. 20
	3. 28			1117. 33	
	5. 9. 48	9000.00	2. 9. 36	240794. 57—	5. 24
	— 3. 27			1104. 99	

ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*	
3. 27			1104. 99		
5. 13. 15	9100.00	2. 11. 2	239689. 58-+	5. 28	
3. 27			1092. 90		
5. 16. 42	9200.00	2. 12. 29	238596. 68	5. 31	
3. 27			1081. 09		
5. 20. 9	9300.00	2. 13. 55	237515. 59	5. 35	
3. 27			1069. 53		
5. 23. 36	9400.00	2. 15. 22	236446. 06—	5. 38	
3. 27			1058. 21		
5. 27. 3	9500.00	2. 16. 48	235387. 85—	5. 42	
3. 28			1047. 13		
5. 30. 31	9600.00	2. 18. 14	234340. 72—	5. 46	
3. 27			1036. 28		
5. 33. 58	9700.00	2. 19. 41	233304. 44—	5. 49	
3. 27			1025. 65		
5. 37. 25	9800.00	2. 21. 7	232278. 79—	5. 53	
3. 27			1015. 24		
5. 40. 52	9900.00	2. 22. 34	231263. 55—	5. 56	
3. 28			1005. 03		
5. 44. 20	10000.00	2. 24. 0	230258. 52—	6. 0	
3. 27			995. 04		
5. 47. 47	10100.00	2. 25. 26	229263. 48-+	6. 4	
3. 28			985. 23		
5. 51. 15	10200.00	2. 26. 53	228278. 25-+	6. 7	
3. 28			975. 61		
5. 54. 43	10300.00	2. 28. 19	227302. 64	6. 11	
3. 27			966. 20		
5. 58. 10	10400.00	2. 29. 46	226336. 44-+	6. 14	
3. 28			956. 94		
6. 1. 38	10500.00	2. 31. 12	225379. 50	6. 18	*H 4v*
3. 27			947. 87		
6. 5. 5	10600.00	2. 32. 38	224431. 63—	6. 22	
3. 27			938. 98		
6. 8. 32	10700.00	2. 34. 5	223492. 65-+	6. 25	
3. 28			930. 24		
6. 12. 0	10800.00	2. 35. 31	222562. 41-+	6. 29	
3. 27			921. 66		
6. 15. 27	10900.00	2. 36. 58	221640. 75	6. 32	
3. 28			913. 25		
6. 18. 55	11000.00	2. 38. 24	220727. 50—	6. 36	
3. 27			904. 99		
6. 22. 22	11100.00	2. 39. 50	219822. 51-+	6. 40	
3. 28			896. 86		
6. 25. 50	11200.00	2. 41. 17	218925. 65	6. 43	
3. 28			888. 90		
6. 29. 18	11300.00	2. 42. 43	218036. 75	6. 47	
3. 27			881. 06		
6. 32. 45	11400.00	2. 44. 10	217155. 69	6. 50	
3. 28			873. 37		
6. 36. 13	11500.00	2. 45. 36	216282. 32	6. 54	
3. 28			865. 80		
6. 39. 41	11600.00	2. 47. 2	215416. 52—	6. 58	
3. 27			858. 38		
6. 43. 8	11700.00	2. 48. 29	214558. 14	7. 1	
3. 28			851. 07		
6. 46. 36	11800.00	2. 49. 55	213707. 07	7. 5	
3. 28			843. 88		
6. 50. 4	11900.00	2. 51. 22	212863. 19—	7. 8	
3. 27			836. 83		
6. 53. 31	12000.00	2. 52. 48	212026. 36	7. 12	
3. 28			829. 88		

ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*
— 3. 28			829. 88	
6. 56. 59	12100.00	2. 54. 14	211196. 48	7. 16
3. 28			823. 05	
7. 0. 27	12200.00	2. 55. 41	210373. 43	7. 19
— 3. 28			816. 33	
7. 3. 55	12300.00	2. 57. 7	209557. 10	7. 23
3. 27			809. 72	
7. 7. 22	12400.00	2. 58. 34	208747. 38—	7. 26
— 3. 28			803. 22	
7. 10. 50	12500.00	3. 0. 0	207944. 16	7. 30
3. 28			796. 82	
7. 14. 18	12600.00	3. 1. 26	207147. 34+	7. 34
— 3. 28			790. 51	
7. 17. 46	12700.00	3. 2. 53	206356. 83—	7. 37
3. 28			784. 32	
7. 21. 14	12800.00	3. 4. 19	205572. 51	7. 41
— 3. 28			778. 22	
7. 24. 42	12900.00	3. 5. 46	204794. 29+	7. 44
3. 28			772. 20	
7. 28. 10	13000.00	3. 7. 12	204022. 09—	7. 48
— 3. 29			766. 29	
7. 31. 39	13100.00	3. 8. 38	203255. 80	7. 52
3. 28			760. 46	
7. 35. 7	13200.00	3. 10. 5	202495. 34	7. 55
— 3. 28			754. 72	
7. 38. 35	13300.00	3. 11. 31	201740. 62	7. 59
3. 28			749. 07	
7. 42. 3	13400.00	3. 12. 58	200991. 55+	8. 2
— 3. 28			743. 50	
7. 45. 31	13500.00	3. 14. 24	200248. 05+	8. 6
3. 28			738. 00	
7. 48. 59	13600.00	3. 15. 50	199510. 05+	8. 10
— 3. 29			732. 61	
7. 52. 28	13700.00	3. 17. 17	198777. 44	8. 13
3. 28			727. 27	
7. 55. 56	13800.00	3. 18. 43	198050. 17	8. 17
— 3. 28			722. 03	
7. 59. 24	13900.00	3. 20. 10	197328. 14	8. 20
3. 28			716. 85	
8. 2. 52	14000.00	3. 21. 36	196611. 29	8. 24
— 3. 28			711. 74	
8. 6. 20	14100.00	3. 23. 2	195899. 55—	8. 28
3. 29			706. 72	
8. 9. 49	14200.00	3. 24. 29	195192. 83	8. 31
— 3. 28			701. 76	
8. 13. 17	14300.00	3. 25. 55	194491. 07+	8. 35
3. 28			696. 86	
8. 16. 45	14400.00	3. 27. 22	193794. 21—	8. 38
— 3. 29			692. 05	
8. 20. 14	14500.00	3. 28. 48	193102. 16	8. 42
3. 28			687. 28	
8. 23. 42	14600.00	3. 30. 14	192414. 88—	8. 46
— 3. 28			682. 61	
8. 27. 10	14700.00	3. 31. 41	191732. 27+	8. 49
3. 29			677. 96	
8. 30. 39	14800.00	3. 33. 7	191054. 31—	8. 53
— 3. 28			673. 41	
8. 34. 7	14900.00	3. 34. 34	190380. 90+	8. 56
3. 29			668. 90	
8. 37. 36	15000.00	3. 36. 0	189712. 00+	9. 0
— 3. 29			664. 45	

ARCUS Circuli cum differentiis	SINUS seu Numeri absoluti	Partes vicesimae quartae	LOGARITHMI cum differentiis	Partes sexagenariae	
3. 29			664. 45		
8. 41. 5	15100.00	3. 37. 26	189047. 55	9. 4	
3. 28			660. 07		
8. 44. 33	15200.00	3. 38. 53	188387. 48	9. 7	
3. 29			655. 74		
8. 48. 2	15300.00	3. 40. 19	187731. 74	9. 11	
3. 29			651. 47		
8. 51. 31	15400.00	3. 41. 46	187080. 27+	9. 14	
3. 28			647. 25		
8. 54. 59	15500.00	3. 43. 12	186433. 02+	9. 18	
3. 29			643. 09		
8. 58. 28	15600.00	3. 44. 38	185789. 93+	9. 22	
3. 29			638. 98		
9. 1. 57	15700.00	3. 46. 5	185150. 95+	9. 25	
3. 29			634. 92		
9. 5. 26	15800.00	3. 47. 31	184516. 03	9. 29	
3. 29			630. 92		
9. 8. 55	15900.00	3. 48. 58	183885. 11+	9. 32	
3. 30			626. 96		
9. 12. 25	16000.00	3. 50. 24	183258. 15	9. 36	
3. 29			623. 06		
9. 15. 54	16100.00	3. 51. 50	182635. 09+	9. 40	
3. 29			619. 19		
9. 19. 23	16200.00	3. 53. 17	182015. 90	9. 43	
3. 29			615. 38		
9. 22. 52	16300.00	3. 54. 43	181400. 52	9. 47	
3. 29			611. 63		
9. 26. 21	16400.00	3. 56. 10	180788. 89	9. 50	
3. 30			607. 90		
9. 29. 51	16500.00	3. 57. 36	180180. 99—	9. 54	I2
3. 29			604. 24		
9. 33. 20	16600.00	3. 59. 2	179576. 75+	9. 58	
3. 29			600. 60		
9. 36. 49	16700.00	4. 0. 29	178976. 15+	10. 1	
3. 29			597. 01		
9. 40. 18	16800.00	4. 1. 55	178379. 14—	10. 5	
3. 29			593. 48		
9. 43. 47	16900.00	4. 3. 22	177785. 66	10. 8	
3. 29			589. 97		
9. 47. 16	17000.00	4. 4. 48	177195. 69	10. 12	
3. 30			586. 51		
9. 50. 46	17100.00	4. 6. 14	176609. 18—	10. 16	
3. 29			583. 09		
9. 54. 15	17200.00	4. 7. 41	176026. 09—	10. 19	
3. 29			579. 72		
9. 57. 44	17300.00	4. 9. 7	175446. 37	10. 23	
3. 29			576. 37		
10. 1. 13	17400.00	4. 10. 34	174870. 00+	10. 26	
3. 30			573. 07		
10. 4. 43	17500.00	4. 12. 0	174296. 93+	10. 30	
3. 29			569. 79		
10. 8. 12	17600.00	4. 13. 26	173727. 14—	10. 34	
3. 30			566. 58		
10. 11. 42	17700.00	4. 14. 53	173160. 56	10. 37	
3. 30			563. 38		
10. 15. 12	17800.00	4. 16. 19	172597. 18	10. 41	
3. 30			560. 23		
10. 18. 42	17900.00	4. 17. 46	172036. 95	10. 44	
3. 29			557. 10		
10. 22. 11	18000.00	4. 19. 12	171479. 85—	10. 48	
3. 30			554. 02		

	ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*
	— 3. 30			554. 02	
	10. 25. 41	18100.00	4. 20. 38	170925. 83	10. 52
	3. 30			550. 97	
	10. 29. 11	18200.00	4. 22. 5	170374. 86—+	10. 55
	— 3. 30			547. 94	
	10. 32. 41	18300.00	4. 23. 31	169826. 92—	10. 59
	3. 30			544. 96	
	10. 36. 11	18400.00	4. 24. 58	169281. 96—	11. 2
	— 3. 29			542. 01	
I2v	10. 39. 40	18500.00	4. 26. 24	168739. 95	11. 6
	3. 30			539. 08	
	10. 43. 10	18600.00	4. 27. 50	168200. 87	11. 10
	— 3. 30			536. 20	
	10. 46. 40	18700.00	4. 29. 17	167664. 67	11. 13
	3. 30			533. 33	
	10. 50. 10	18800.00	4. 30. 43	167131. 34	11. 17
	— 3. 30			530. 51	
	10. 53. 40	18900.00	4. 32. 10	166600. 83	11. 20
	3. 30			527. 70	
	10. 57. 10	19000.00	4. 33. 36	166073. 13—	11. 24
	— 3. 31			524. 94	
	11. 0. 41	19100.00	4. 35. 2	165548. 19	11. 28
	3. 30			522. 19	
	11. 4. 11	19200.00	4. 36. 29	165026. 00—	11. 31
	— 3. 30			519. 49	
	11. 7. 41	19300.00	4. 37. 55	164506. 51—+	11. 35
	3. 30			516. 79	
	11. 11. 11	19400.00	4. 39. 22	163989. 72—	11. 38
	— 3. 30			514. 15	
	11. 14. 41	19500.00	4. 40. 48	163475. 57—+	11. 42
	3. 31			511. 50	
	11. 18. 12	19600.00	4. 42. 14	162964. 07—	11. 46
	— 3. 30			508. 91	
	11. 21. 42	19700.00	4. 43. 41	162455. 16	11. 49
	3. 30			506. 33	
	11. 25. 12	19800.00	4. 45. 7	161948. 83—	11. 53
	— 3. 30			503. 78	
	11. 28. 42	19900.00	4. 46. 34	161445. 05	11. 56
	3. 31			501. 25	
	11. 32. 13	20000.00	4. 48. 0	160943. 80—	12. 0
	— 3. 30			498. 76	
	11. 35. 43	20100.00	4. 49. 26	160445. 04—+	12. 4
	3. 31			496. 28	
	11. 39. 14	20200.00	4. 50. 53	159948. 76—+	12. 7
	— 3. 31			493. 83	
	11. 42. 45	20300.00	4. 52. 19	159454. 93—+	12. 11
	3. 30			491. 40	
	11. 46. 15	20400.00	4. 53. 46	158963. 53—+	12. 14
	— 3. 31			489. 00	
I3	11. 49. 46	20500.00	4. 55. 12	158474. 53—+	12. 18
	3. 31			486. 61	
	11. 53. 17	20600.00	4. 56. 38	157987. 92	12. 22
	— 3. 31			484. 26	
	11. 56. 48	20700.00	4. 58. 5	157503. 66—	12. 25
	3. 31			481. 94	
	12. 0. 19	20800.00	4. 59. 31	157021. 72—+	12. 29
	— 3. 30			479. 61	
	12. 3. 49	20900.00	5. 0. 58	156542. 11—	12. 32
	3. 31			477. 33	
	12. 7. 20	21000.00	5. 2. 24	156064. 78	12. 36
	— 3. 31			475. 06	

ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*	
— 3. 31			475. 06		
12. 10. 51	21100.00	5. 3. 50	155589. 72—	12. 40	
3. 31			472. 81		
12. 14. 22	21200.00	5. 5. 17	155116. 91—	12. 43	
— 3. 31			470. 59		
12. 17. 53	21300.00	5. 6. 43	154646. 32—	12. 47	
3. 31			468. 39		
12. 21. 24	21400.00	5. 8. 10	154177. 93+	12. 50	
— 3. 31			466. 20		
12. 24. 55	21500.00	5. 9. 36	153711. 73	12. 54	
3. 32			464. 04		
12. 28. 27	21600.00	5. 11. 2	153247. 69+	12. 58	
— 3. 31			461. 89		
12. 31. 58	21700.00	5. 12. 29	152785. 80	13. 1	
3. 31			459. 77		
12. 35. 29	21800.00	5. 13. 55	152326. 03	13. 5	
— 3. 31			457. 67		
12. 39. 0	21900.00	5. 15. 22	151868. 36	13. 8	
3. 32			455. 58		
12. 42. 32	22000.00	5. 16. 48	151412. 78—	13. 12	
— 3. 31			453. 52		
12. 46. 3	22100.00	5. 18. 14	150959. 26	13. 16	
3. 31			451. 47		
12. 49. 34	22200.00	5. 19. 41	150507. 79+	13. 19	
— 3. 32			449. 43		
12. 53. 6	22300.00	5. 21. 7	150058. 36—	13. 23	
3. 31			447. 43		
12. 56. 37	22400.00	5. 22. 34	149610. 93	13. 26	
— 3. 32			445. 44		
13. 0. 9	22500.00	5. 24. 0	149165. 49	13. 30	*13v*
3. 32			443. 46		
13. 3. 41	22600.00	5. 25. 26	148722. 03	13. 34	
— 3. 32			441. 50		
13. 7. 13	22700.00	5. 26. 53	148280. 53	13. 37	
3. 32			439. 56		
13. 10. 45	22800.00	5. 28. 19	147840. 97	13. 41	
— 3. 32			437. 64		
13. 14. 17	22900.00	5. 29. 46	147403. 33+	13. 44	
3. 33			435. 73		
13. 17. 50	23000.00	5. 31. 12	146967. 60	13. 48	
— 3. 32			433. 84		
13. 21. 22	23100.00	5. 32. 38	146533. 76	13. 52	
3. 32			431. 96		
13. 24. 54	23200.00	5. 34. 5	146101. 80—	13. 55	
— 3. 32			430. 11		
13. 28. 26	23300.00	5. 35. 31	145671. 69	13. 59	
3. 32			428. 27		
13. 31. 58	23400.00	5. 36. 58	145243. 42	14. 2	
— 3. 33			426. 44		
13. 35. 31	23500.00	5. 38. 24	144816. 98	14. 6	
3. 32			424. 63		
13. 39. 3	23600.00	5. 39. 50	144392. 35	14. 10	
— 3. 32			422. 83		
13. 42. 35	23700.00	5. 41. 17	143969. 52	14. 13	
3. 32			421. 05		
13. 46. 7	23800.00	5. 42. 43	143548. 47—	14. 17	
— 3. 33			419. 29		
13. 49. 40	23900.00	5. 44. 10	143129. 18—	14. 20	
3. 32			417. 54		
13. 53. 12	24000.00	5. 45. 36	142711. 64	14. 24	
— 3. 32			415. 80		

	ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*
	3. 32			415. 80	
	13. 56. 44	24100.00	5. 47. 2	142295. 84	14. 28
	3. 33			414. 08	
	14. 0. 17	24200.00	5. 48. 29	141881. 76	14. 31
	3. 33			412. 37	
	14. 3. 50	24300.00	5. 49. 55	141469. 39	14. 35
	3. 32			410. 68	
	14. 7. 22	24400.00	5. 51. 22	141058. 71	14. 38
	3. 33			409. 00	
I 4	14. 10. 55	24500.00	5. 52. 48	140649. 71	14. 42
	3. 33			407. 33	
	14. 14. 28	24600.00	5. 54. 14	140242. 38	14. 46
	3. 33			405. 68	
	14. 18. 1	24700.00	5. 55. 41	139836. 70	14. 49
	3. 33			404. 04	
	14. 21. 34	24800.00	5. 57. 7	139432. 66—	14. 53
	3. 32			402. 42	
	14. 25. 6	24900.00	5. 58. 34	139030. 24	14. 56
	3. 33			400. 80	
	14. 28. 39	25000.00	6. 0. 0	138629. 44	15. 0
	3. 33			399. 20	
	14. 32. 12	25100.00	6. 1. 26	138230. 24—	15. 4
	3. 33			397. 62	
	14. 35. 45	25200.00	6. 2. 53	137832. 62+	15. 7
	3. 33			396. 04	
	14. 39. 18	25300.00	6. 4. 19	137436. 58+	15. 11
	3. 33			394. 47	
	14. 42. 51	25400.00	6. 5. 46	137042. 11—	15. 14
	3. 34			392. 93	
	14. 46. 25	25500.00	6. 7. 12	136649. 18—	15. 18
	3. 33			391. 39	
	14. 49. 58	25600.00	6. 8. 38	136257. 79	15. 22
	3. 33			389. 87	
	14. 53. 31	25700.00	6. 10. 5	135867. 92+	15. 25
	3. 34			388. 35	
	14. 57. 5	25800.00	6. 11. 31	135479. 57+	15. 29
	3. 33			386. 84	
	15. 0. 38	25900.00	6. 12. 58	135092. 73—	15. 32.
	3. 34			385. 36	
	15. 4. 12	26000.00	6. 14. 24	134707. 37—	15. 36
	3. 33			383. 88	
	15. 7. 45	26100.00	6. 15. 50	134323. 49	15. 40
	3. 34			382. 41	
	15. 11. 19	26200.00	6. 17. 17	133941. 08	15. 43
	3. 34			380. 95	
	15. 14. 53	26300.00	6. 18. 43	133560. 13	15. 47
	3. 33			379. 51	
	15. 18. 26	26400.00	6. 20. 10	133180. 62	15. 50
	3. 34			378. 07	
I 4v	15. 22. 0	26500.00	6. 21. 36	132802. 55	15. 54
	3. 34			376. 65	
	15. 25. 34	26600.00	6. 23. 2	132425. 90	15. 58
	3. 35			375. 23	
	15. 29. 9	26700.00	6. 24. 29	132050. 67—	16. 1
	3. 34			373. 84	
	15. 32. 43	26800.00	6. 25. 55	131676. 83+	16. 5
	3. 34			372. 43	
	15. 36. 17	26900.00	6. 27. 22	131304. 40	16. 8
	3. 35			371. 07	
	15. 39. 52	27000.00	6. 28. 48	130933. 33+	16. 12
	3. 34			369. 67	

ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*	
— 3. 34			369. 67		
15. 43. 26	27100.00	6. 30. 14	130563. 66—	16. 16	
3. 34			368. 33		
15. 47. 0	27200.00	6. 31. 41	130195. 33—	16. 19	
— 3. 35			366. 98		
15. 50. 35	27300.00	6. 33. 7	129828. 35	16. 23	
3. 34			365. 63		
15. 54. 9	27400.00	6. 34. 34	129462. 72	16. 26	
— 3. 35			364. 30		
15. 57. 44	27500.00	6. 36. 0	129098. 42+	16. 30	
3. 34			362. 97		
16. 1. 18	27600.00	6. 37. 26	128735. 45	16. 34	
— 3. 35			361. 67		
16. 4. 53	27700.00	6. 38. 53	128373. 78	16. 37	
3. 35			360. 36		
16. 8. 28	27800.00	6. 40. 19	128013. 42	16. 41	
— 3. 34			359. 07		
16. 12. 2	27900.00	6. 41. 46	127654. 35	16. 44	
3. 35			357. 78		
16. 15. 37	28000.00	6. 43. 12	127296. 57	16. 48	
— 3. 35			356. 51		
16. 19. 12	28100.00	6. 44. 38	126940. 06+	16. 52	
3. 35			355. 23		
16. 22. 47	28200.00	6. 46. 5	126584. 83—	16. 55	
— 3. 35			353. 98		
16. 26. 22	28300.00	6. 47. 31	126230. 85+	16. 59	
3. 35			352. 74		
16. 29. 57	28400.00	6. 48. 58	125878. 11	17. 2	
— 3. 36			351. 50		
16. 33. 33	28500.00	6. 50. 24	125526. 61+	17. 6	K
3. 35			350. 26		
16. 37. 8	28600.00	6. 51. 50	125176. 35+	17. 10	
— 3. 35			349. 04		
16. 40. 43	28700.00	6. 53. 17	124827. 31	17. 13	
3. 35			347. 82		
16. 44. 18	28800.00	6. 54. 43	124479. 49—	17. 17	
— 3. 36			346. 63		
16. 47. 54	28900.00	6. 56. 10	124132. 86	17. 20	
3. 35			345. 42		
16. 51. 29	29000.00	6. 57. 36	123787. 44	17. 24	
— 3. 35			344. 24		
16. 55. 4	29100.00	6. 59. 2	123443. 20+	17. 28	
3. 36			343. 04		
16. 58. 40	29200.00	7. 0. 29	123100. 16—	17. 31	
— 3. 35			341. 89		
17. 2. 15	29300.00	7. 1. 55	122758. 27	17. 35	
3. 36			340. 72		
17. 5. 51	29400.00	7. 3. 22	122417. 55+	17. 38	
— 3. 36			339. 55		
17. 9. 27	29500.00	7. 4. 48	122078. 00—	17. 42	
3. 35			338. 41		
17. 13. 2	29600.00	7. 6. 14	121739. 59—	17. 46	
— 3. 36			337. 27		
17. 16. 38	29700.00	7. 7. 41	121402. 32	17. 49	
3. 36			336. 14		
17. 20. 14	29800.00	7. 9. 7	121066. 18+	17. 53	
— 3. 36			335. 01		
17. 23. 50	29900.00	7. 10. 34	120731. 17+	17. 56	
3. 37			333. 89		
17. 27. 27	30000.00	7. 12. 0	120397. 28+	18. 0	
— 3. 36			332. 78		

	ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*
	— 3. 36			332. 78	
	17. 31. 3	30100.00	7. 13. 26	120064. 50-+	18. 4
	3. 36			331. 67	
	17. 34. 39	30200.00	7. 14. 53	119732. 83	18. 7
	— 3. 37			330. 58	
	17. 38. 16	30300.00	7. 16. 19	119402. 25	18. 11
	3. 36			329. 49	
	17. 41. 52	30400.00	7. 17. 46	119072. 76	18. 14
	— 3. 37			328. 41	
Kv	17. 45. 29	30500.00	7. 19. 12	118744. 35-+	18. 18
	3. 37			327. 33	
	17. 49. 6	30600.00	7. 20. 38	118417. 02	18. 22
	— 3. 36			326. 26	
	17. 52. 42	30700.00	7. 22. 5	118090. 76—	18. 25
	3. 37			325. 21	
	17. 56. 19	30800.00	7. 23. 31	117765. 55-+	18. 29
	— 3. 37			324. 15	
	17. 59. 56	30900.00	7. 24. 58	117441. 40-+	18. 32
	3. 37			323. 10	
	18. 3. 33	31000.00	7. 26. 24	117118. 30-+	18. 36
	— 3. 37			322. 06	
	18. 7. 10	31100.00	7. 27. 50	116796. 24	18. 40
	3. 37			321. 03	
	18. 10. 47	31200.00	7. 29. 17	116475. 21-+	18. 43
	— 3. 37			320. 00	
	18. 14. 24	31300.00	7. 30. 43	116155. 21-+	18. 47
	3. 38			318. 98	
	18. 18. 2	31400.00	7. 32. 10	115836. 23-+	18. 50
	— 3. 37			317. 96	
	18. 21. 39	31500.00	7. 33. 36	115518. 27	18. 54
	3. 37			316. 96	
	18. 25. 16	31600.00	7. 35. 2	115201. 31	18. 58
	— 3. 37			315. 96	
	18. 28. 53	31700.00	7. 36. 29	114885. 35-+	19. 1
	3. 38			314. 96	
	18. 32. 31	31800.00	7. 37. 55	114570. 39-+	19. 5
	— 3. 37			313. 97	
	18. 36. 8	31900.00	7. 39. 22	114256. 42-+	19. 8
	3. 38			312. 99	
	18. 39. 46	32000.00	7. 40. 48	113943. 43	19. 12
	— 3. 38			312. 01	
	18. 43. 24	32100.00	7. 42. 14	113631. 42	19. 16
	3. 38			311. 05	
	18. 47. 2	32200.00	7. 43. 41	113320. 37-+	19. 19
	— 3. 38			310. 07	
	18. 50. 40	32300.00	7. 45. 7	113010. 30	19. 23
	3. 39			309. 12	
	18. 54. 19	32400.00	7. 46. 34	112701. 18	19. 26
	— 3. 38			308. 17	
K2	18. 57. 57	32500.00	7. 48. 0	112393. 01	19. 30
	3. 38			307. 21	
	19. 1. 35	32600.00	7. 49. 26	112085. 80	19. 34
	— 3. 38			306. 29	
	19. 5. 13	32700.00	7. 50. 53	111779. 51-+	19. 37
	3. 39			305. 34	
	19. 8. 52	32800.00	7. 52. 19	111474. 17	19. 41
	— 3. 38			304. 41	
	19. 12. 30	32900.00	7. 53. 46	111169. 76—	19. 44
	3. 38			303. 49	
	19. 16. 8	33000.00	7. 55. 12	110866. 27—	19. 48
	— 3. 39			302. 58	

ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*
— 3. 39			302. 58	
19. 19. 47	33100.00	7. 56. 38	110563. 69+	19. 52
3. 38			301. 66	
19. 23. 25	33200.00	7. 58. 5	110262. 03+	19. 55
— 3. 39			300. 75	
19. 27. 4	33300.00	7. 59. 31	109961. 28	19. 59
3. 38			299. 85	
19. 30. 42	33400.00	8. 0. 58	109661. 43+	20. 2
— 3. 39			298. 95	
19. 34. 21	33500.00	8. 2. 24	109362. 48	20. 6
3. 39			298. 06	
19. 38. 0	33600.00	8. 3. 50	109064. 42—	20. 10
— 3. 39			297. 18	
19. 41. 39	33700.00	8. 5. 17	108767. 24—	20. 13
3. 39			296. 30	
19. 45. 18	33800.00	8. 6. 43	108470. 94	20. 17
— 3. 40			295. 42	
19. 48. 58	33900.00	8. 8. 10	108175. 52	20. 20
3. 39			294. 55	
19. 52. 37	34000.00	8. 9. 36	107880. 97	20. 24
— 3. 39			293. 69	
19. 56. 16	34100.00	8. 11. 2	107587. 28+	20. 28
3. 40			292. 82	
19. 59. 56	34200.00	8. 12. 29	107294. 46	20. 31
— 3. 39			291. 97	
20. 3. 35	34300.00	8. 13. 55	107002. 49—	20. 35
3. 39			291. 12	
20. 7. 14	34400.00	8. 15. 22	106711. 37—	20. 38
— 3. 40			290. 28	
20. 10. 54	34500.00	8. 16. 48	106421. 09	20. 42
3. 40			289. 44	
20. 14. 34	34600.00	8. 18. 14	106131. 65	20. 46
— 3. 39			288. 60	
20. 18. 13	34700.00	8. 19. 41	105843. 05+	20. 49
3. 40			287. 77	
20. 21. 53	34800.00	8. 21. 7	105555. 28+	20. 53
— 3. 40			286. 94	
20. 25. 33	34900.00	8. 22. 34	105268. 34	20. 56
3. 41			286. 13	
20. 29. 14	35000.00	8. 24. 0	104982. 21+	21. 0
— 3. 40			285. 30	
20. 32. 54	35100.00	8. 25. 26	104696. 91	21. 4
3. 40			284. 49	
20. 36. 34	35200.00	8. 26. 53	104412. 42—	21. 7
— 3. 40			283. 70	
20. 40. 14	35300.00	8. 28. 19	104128. 72+	21. 11
3. 41			282. 88	
20. 43. 55	35400.00	8. 29. 46	103845. 84	21. 14
— 3. 40			282. 09	
20. 47. 35	35500.00	8. 31. 12	103563. 75	21. 18
3. 41			281. 29	
20. 51. 16	35600.00	8. 32. 38	103282. 46—	21. 22
— 3. 41			280. 50	
20. 54. 57	35700.00	8. 34. 5	103001. 96—	21. 25
3. 41			279. 73	
20. 58. 38	35800.00	8. 35. 31	102722. 23	21. 29
— 3. 42			278. 94	
21. 2. 20	35900.00	8. 36. 58	102443. 29	21. 32
3. 41			278. 16	
21. 6. 1	36000.00	8. 38. 24	102165. 13—	21. 36
— 3. 41			277. 39	

K2v

	ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*
	— 3. 41			277. 39	
	21. 9. 42	36100.00	8. 39. 50	101887. 74—	21. 40
	3. 41			276. 63	
	21. 13. 23	36200.00	8. 41. 17	101611. 11	21. 43
	— 3. 42			275. 86	
	21. 17. 5	36300.00	8. 42. 43	101335. 25	21. 47
	3. 41			275. 11	
	21. 20. 46	36400.00	8. 44. 10	101060. 14+	21. 50
	— 3. 42			274. 34	
K3	21. 24. 28	36500.00	8. 45. 36	100785. 80—	21. 54
	3. 41			273. 60	
	21. 28. 9	36600.00	8. 47. 2	100512. 20—	21. 58
	— 3. 42			272. 86	
	21. 31. 51	36700.00	8. 48. 29	100239. 34	22. 1
	3. 41			272. 10	
	21. 35. 32	36800.00	8. 49. 55	99967. 24	22. 5
	— 3. 42			271. 38	
	21. 39. 14	36900.00	8. 51. 22	99695. 86+	22. 8
	3. 42			270. 63	
	21. 42. 56	37000.00	8. 52. 48	99425. 23	22. 12
	— 3. 41			269. 90	
	21. 46. 37	37100.00	8. 54. 14	99155. 33—	22. 16
	3. 42			269. 18	
	21. 50. 19	37200.00	8. 55. 41	98886. 15	22. 19
	— 3. 42			268. 46	
	21. 54. 1	37300.00	8. 57. 7	98617. 69	22. 23
	3. 42			267. 74	
	21. 57. 43	37400.00	8. 58. 34	98349. 95	22. 26
	— 3. 43			267. 02	
	22. 1. 26	37500.00	9. 0. 0	98082. 93—	22. 30
	3. 42			266. 31	
	22. 5. 8	37600.00	9. 1. 26	97816. 62	22. 34
	— 3. 43			265. 61	
	22. 8. 51	37700.00	9. 2. 53	97551. 01	22. 37
	3. 43			264. 90	
	22. 12. 34	37800.00	9. 4. 19	97286. 11	22. 41
	— 3. 43			264. 20	
	22. 16. 17	37900.00	9. 5. 46	97021. 91	22. 44
	3. 44			263. 50	
	22. 20. 1	38000.00	9. 7. 12	96758. 41—	22. 48
	— 3. 43			262. 82	
	22. 23. 44	38100.00	9. 8. 38	96495. 59+	22. 52
	3. 43			262. 12	
	22. 27. 27	38200.00	9. 10. 5	96233. 47	22. 55
	— 3. 44			261. 44	
	22. 31. 11	38300.00	9. 11. 31	95972. 03	22. 59
	3. 43			260. 75	
	22. 34. 54	38400.00	9. 12. 58	95711. 28—	23. 2
	— 3. 44			260. 08	
K3v	22. 38. 38	38500.00	9. 14. 24	95451. 20	23. 6
	3. 43			259. 41	
	22. 42. 21	38600.00	9. 15. 50	95191. 79+	23. 10
	— 3. 44			258. 73	
	22. 46. 5	38700.00	9. 17. 17	94933. 06	23. 13
	3. 44			258. 06	
	22. 49. 49	38800.00	9. 18. 43	94675. 00—	23. 17
	— 3. 43			257. 40	
	22. 53. 32	38900.00	9. 20. 10	94417. 60	23. 20
	3. 44			256. 75	
	22. 57. 16	39000.00	9. 21. 36	94160. 85+	23. 24
	— 3. 44			256. 07	

ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*
— 3. 44			256. 07	
23. 1. 0	39100.00	9. 23. 2	93904. 78—	23. 28
3. 44			255. 43	
23. 4. 44	39200.00	9. 24. 29	93649. 35—	23. 31
— 3. 45			254. 78	
23. 8. 29	39300.00	9. 25. 55	93394. 57	23. 35
3. 44			254. 13	
23. 12. 13	39400.00	9. 27. 22	93140. 44	23. 38
— 3. 45			253. 49	
23. 15. 58	39500.00	9. 28. 48	92886. 95-+	23. 42
3. 45			252. 84	
23. 19. 43	39600.00	9. 30. 14	92634. 11—	23. 46
— 3. 45			252. 21	
23. 23. 28	39700.00	9. 31. 41	92381. 90	23. 49
3. 44			251. 57	
23. 27. 12	39800.00	9. 33. 7	92130. 33	23. 53
— 3. 45			250. 94	
23. 30. 57	39900.00	9. 34. 34	91879. 39	23. 56
3. 45			250. 31	
23. 34. 42	40000.00	9. 36. 0	91629. 08—	24. 0
— 3. 45			249. 69	
23. 38. 27	40100.00	9. 37. 26	91379. 39	24. 4
3. 45			249. 07	
23. 42. 12	40200.00	9. 38. 53	91130. 32-+	24. 7
— 3. 46			248. 45	
23. 45. 58	40300.00	9. 40. 19	90881. 87	24. 11
3. 45			247. 83	
23. 49. 43	40400.00	9. 41. 46	90634. 04-+	24. 14
— 3. 46			247. 22	
23. 53. 29	40500.00	9. 43. 12	90386. 82-+	24. 18
3. 46			246. 61	
23. 57. 15	40600.00	9. 44. 38	90140. 21-+	24. 22
— 3. 46			246. 00	
24. 1. 1	40700.00	9. 46. 5	89894. 21-+	24. 25
3. 45			245. 40	
24. 4. 46	40800.00	9. 47. 31	89648. 81-+	24. 29
— 3. 46			244. 79	
24. 8. 32	40900.00	9. 48. 58	89404. 02—	24. 32
3. 46			244. 21	
24. 12. 18	41000.00	9. 50. 24	89159. 81-+	24. 36
— 3. 46			243. 60	
24. 16. 4	41100.00	9. 51. 50	88916. 21	24. 40
3. 47			243. 01	
24. 19. 51	41200.00	9. 53. 17	88673. 20	24. 43
— 3. 47			242. 43	
24. 23. 38	41300.00	9. 54. 43	88430. 77	24. 47
3. 46			241. 83	
24. 27. 24	41400.00	9. 56. 10	88188. 94—	24. 50
— 3. 47			241. 26	
24. 31. 11	41500.00	9. 57. 36	87947. 68	24. 54
3. 47			240. 68	
24. 34. 58	41600.00	9. 59. 2	87707. 00-+	24. 58
— 3. 47			240. 09	
24. 38. 45	41700.00	10. 0. 29	87466. 91	25. 1
3. 46			239. 52	
24. 42. 31	41800.00	10. 1. 55	87227. 39—	25. 5
— 3. 47			238. 95	
24. 46. 18	41900.00	10. 3. 22	86988. 44—	25. 8
3. 47			238. 38	
24. 50. 5	42000.00	10. 4. 48	86750. 06	25. 12
— 3. 47			237. 81	

K 4

ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*
— 3. 47			237. 81	
24. 53. 52	42100.00	10. 6. 14	86512. 25—	25. 16
3. 48			237. 25	
24. 57. 40	42200.00	10. 7. 41	86275. 00—	25. 19
— 3. 47			236. 69	
25. 1. 27	42300.00	10. 9. 7	86038. 31+	25. 23
3. 48			236. 12	
25. 5. 15	42400.00	10. 10. 34	85802. 19—	25. 26
— 3. 48			235. 57	
25. 9. 3	42500.00	10. 12. 0	85566. 62—	25. 30
3. 48			235. 02	
25. 12. 51	42600.00	10. 13. 26	85331. 60—	25. 34
— 3. 49			234. 47	
25. 16. 40	42700.00	10. 14. 53	85097. 13	25. 37
3. 48			233. 92	
25. 20. 28	42800.00	10. 16. 19	84863. 21+	25. 41
— 3. 48			233. 37	
25. 24. 16	42900.00	10. 17. 46	84629. 84	25. 44
3. 48			232. 83	
25. 28. 4	43000.00	10. 19. 12	84397. 01	25. 48
— 3. 48			232. 27	
25. 31. 52	43100.00	10. 20. 38	84164. 74—	25. 52
3. 49			231. 77	
25. 35. 41	43200.00	10. 22. 5	83932. 97+	25. 55
— 3. 48			231. 21	
25. 39. 29	43300.00	10. 23. 31	83701. 76—	25. 59
3. 49			230. 68	
25. 43. 18	43400.00	10. 24. 58	83471. 08	26. 2
— 3. 49			230. 15	
25. 47. 7	43500.00	10. 26. 24	83240. 93	26. 6
3. 49			229. 62	
25. 50. 56	43600.00	10. 27. 50	83011. 31	26. 10
— 3. 50			229. 10	
25. 54. 46	43700.00	10. 29. 17	82782. 21+	26. 13
3. 49			228. 57	
25. 58. 35	43800.00	10. 30. 43	82553. 64	26. 17
— 3. 49			228. 05	
26. 2. 24	43900.00	10. 32. 10	82325. 59	26. 20
3. 50			227. 53	
26. 6. 14	44000.00	10. 33. 36	82098. 06—	26. 24
— 3. 49			227. 02	
26. 10. 3	44100.00	10. 35. 2	81871. 04	26. 28
3. 50			226. 50	
26. 13. 53	44200.00	10. 36. 29	81644. 54	26. 31
— 3. 50			225. 99	
26. 17. 43	44300.00	10. 37. 55	81418. 55+	26. 35
3. 50			225. 48	
26. 21. 33	44400.00	10. 39. 22	81193. 07+	26. 38
— 3. 51			224. 97	
26. 25. 24	44500.00	10. 40. 48	80968. 10	26. 42
3. 50			224. 46	
26. 29. 14	44600.00	10. 42. 14	80743. 64—	26. 46
— 3. 51			223. 97	
26. 33. 5	44700.00	10. 43. 41	80519. 67	26. 49
3. 51			223. 46	
26. 36. 56	44800.00	10. 45. 7	80296. 21	26. 53
— 3. 50			222. 97	
26. 40. 46	44900.00	10. 46. 34	80073. 24	26. 56
3. 51			222. 47	
26. 44. 37	45000.00	10. 48. 0	79850. 77	27. 0
— 3. 51			221. 97	

ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*	
— 3. 51			221. 97		
26. 48. 28	45100.00	10. 49. 26	79628. 80—	27. 4	
3. 51			221. 49		
26. 52. 19	45200.00	10. 50. 53	79407. 31	27. 7	
— 3. 51			220. 99		
26. 56. 10	45300.00	10. 52. 19	79186. 32	27. 11	
3. 52			220. 51		
27. 0. 2	45400.00	10. 53. 46	78965. 81	27. 14	
— 3. 51			220. 02		
27. 3. 53	45500.00	10. 55. 12	78745. 79	27. 18	
3. 52			219. 54		
27. 7. 45	45600.00	10. 56. 38	78526. 25	27. 22	
— 3. 52			219. 06		
27. 11. 37	45700.00	10. 58. 5	78307. 19	27. 25	
3. 52			218. 58		
27. 15. 29	45800.00	10. 59. 31	78088. 61+	27. 29	
— 3. 52			218. 10		
27. 19. 21	45900.00	11. 0. 58	77870. 51	27. 32	
3. 53			217. 63		
27. 23. 14	46000.00	11. 2. 24	77652. 88	27. 36	
— 3. 52			217. 15		
27. 27. 6	46100.00	11. 3. 50	77435. 73—	27. 40	
3. 53			216. 69		
27. 30. 59	46200.00	11. 5. 17	77219. 04	27. 43	
— 3. 52			216. 21		
27. 34. 51	46300.00	11. 6. 43	77002. 83—	27. 47	
3. 53			215. 75		
27. 38. 44	46400.00	11. 8. 10	76787. 08—	27. 50	
— 3. 53			215. 29		
27. 42. 37	46500.00	11. 9. 36	76571. 79	27. 54	*Lv*
3. 53			214. 82		
27. 46. 30	46600.00	11. 11. 2	76356. 97	27. 58	
— 3. 54			214. 36		
27. 50. 24	46700.00	11. 12. 29	76142. 61—	28. 1	
3. 53			213. 91		
27. 54. 17	46800.00	11. 13. 55	75928. 70	28. 5	
— 3. 54			213. 45		
27. 58. 11	46900.00	11. 15. 22	75715. 25+	28. 8	
3. 53			212. 99		
28. 2. 4	47000.00	11. 16. 48	75502. 26	28. 12	
— 3. 54			212. 54		
28. 5. 58	47100.00	11. 18. 14	75289. 72	28. 16	
3. 54			212. 09		
28. 9. 52	47200.00	11. 19. 41	75077. 63	28. 19	
— 3. 54			211. 64		
28. 13. 46	47300.00	11. 21. 7	74865. 99	28. 23	
3. 54			211. 19		
28. 17. 40	47400.00	11. 22. 34	74654. 80	28. 26	
— 3. 55			210. 75		
28. 21. 35	47500.00	11. 24. 0	74444. 05	28. 30	
3. 54			210. 30		
28. 25. 29	47600.00	11. 25. 26	74233. 75—	28. 34	
— 3. 55			209. 87		
28. 29. 24	47700.00	11. 26. 53	74023. 88	28. 37	
3. 54			209. 42		
28. 33. 18	47800.00	11. 28. 19	73814. 46—	28. 41	
— 3. 55			208. 99		
28. 37. 13	47900.00	11. 29. 46	73605. 47	28. 44	
3. 55			208. 55		
28. 41. 8	48000.00	11. 31. 12	73396. 92	28. 48	
— 3. 55			208. 12		

	ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*
	— 3. 55			208. 12	
	28. 45. 3	48100.00	11. 32. 38	73188. 80-+	28. 52
	3. 56			207. 68	
	28. 48. 59	48200.00	11. 34. 5	72981. 12	28. 55
	— 3. 55			207. 25	
	28. 52. 54	48300.00	11. 35. 31	72773. 87—	28. 59
	3. 56			206. 83	
	28. 56. 50	48400.00	11. 36. 58	72567. 04	29. 2
	— 3. 55			206. 40	
L 2	29. 0. 45	48500.00	11. 38. 24	72360. 64	29. 6
	3. 56			205. 97	
	29. 4. 41	48600.00	11. 39. 50	72154. 67	29. 10
	— 3. 56			205. 55	
	29. 8. 37	48700.00	11. 41. 17	71949. 12	29. 13
	3. 56			205. 13	
	29. 12. 33	48800.00	11. 42. 43	71743. 99	29. 17
	— 3. 57			204. 71	
	29. 16. 30	48900.00	11. 44. 10	71539. 28	29. 20
	3. 56			204. 29	
	29. 20. 26	49000.00	11. 45. 36	71334. 99	29. 24
	— 3. 57			203. 87	
	29. 24. 23	49100.00	11. 47. 2	71131. 12—	29. 28
	3. 57			203. 46	
	29. 28. 20	49200.00	11. 48. 29	70927. 66	29. 31
	— 3. 57			203. 05	
	29. 32. 17	49300.00	11. 49. 55	70724. 61-+	29. 35
	3. 58			202. 63	
	29. 36. 15	49400.00	11. 51. 22	70521. 98	29. 38
	— 3. 57			202. 23	
	29. 40. 12	49500.00	11. 52. 48	70319. 75-+	29. 42
	3. 57			201. 81	
	29. 44. 9	49600.00	11. 54. 14	70117. 94—	29. 46
	— 3. 58			201. 41	
	29. 48. 7	49700.00	11. 55. 41	69916. 53—	29. 49
	3. 57			201. 01	
	29. 52. 4	49800.00	11. 57. 7	69715. 52	29. 53
	— 3. 58			200. 60	
	29. 56. 2	49900.00	11. 58. 34	69514. 92	29. 56
	3. 58			200. 20	
	30. 0. 0	50000.00	12. 0. 0	69314. 72	30. 0
	— 3. 58			199. 80	
	30. 3. 58	50100.00	12. 1. 26	69114. 92	30. 4
	3. 59			199. 40	
	30. 7. 57	50200.00	12. 2. 53	68915. 52—	30. 7
	— 3. 58			199. 01	
	30. 11. 55	50300.00	12. 4. 19	68716. 51-+	30. 11
	3. 59			198. 61	
	30. 15. 54	50400.00	12. 5. 46	68517. 90-+	30. 14
	— 3. 59			198. 21	
L 2v	30. 19. 53	50500.00	12. 7. 12	68319. 69	30. 18
	3. 59			197. 83	
	30. 23. 52	50600.00	12. 8. 38	68121. 86-+	30. 22
	— 4. 0			197. 43	
	30. 27. 52	50700.00	12. 10. 5	67924. 43	30. 25
	3. 59			197. 04	
	30. 31. 51	50800.00	12. 11. 31	67727. 39—	30. 29
	— 4. 0			196. 66	
	30. 35. 51	50900.00	12. 12. 58	67530. 73—	30. 32
	4. 0			196. 27	
	30. 39. 51	51000.00	12. 14. 24	67334. 46—	30. 36
	— 4. 0			195. 89	

ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*	
— 4. 0			195. 89		
30. 43. 51	51100.00	12. 15. 50	67138. 57	30. 40	
4. 1			195. 50		
30. 47. 52	51200.00	12. 17. 17	66943. 07	30. 43	
— 4. 0			195. 12		
30. 51. 52	51300.00	12. 18. 43	66747. 95	30. 47	
4. 0			194. 75		
30. 55. 52	51400.00	12. 20. 10	66553. 20+	30. 50	
— 4. 1			194. 36		
30. 59. 53	51500.00	12. 21. 36	66358. 84	30. 54	
4. 0			193. 99		
31. 3. 53	51600.00	12. 23. 2	66164. 85+	30. 58	
— 4. 1			193. 61		
31. 7. 54	51700.00	12. 24. 29	65971. 24+	31. 1	
4. 1			193. 23		
31. 11. 55	51800.00	12. 25. 55	65778. 01—	31. 5	
— 4. 1			192. 87		
31. 15. 56	51900.00	12. 27. 22	65585. 14	31. 8	
4. 1			192. 49		
31. 19. 57	52000.00	12. 28. 48	65392. 65—	31. 12	
— 4. 2			192. 12		
31. 23. 59	52100.00	12. 30. 14	65200. 53—	31. 16	
4. 1			191. 76		
31. 28. 0	52200.00	12. 31. 41	65008. 77	31. 19	
— 4. 2			191. 39		
31. 32. 2	52300.00	12. 33. 7	64817. 38	31. 23	
4. 2			191. 02		
31. 36. 4	52400.00	12. 34. 34	64626. 36	31. 26	
— 4. 2			190. 65		
31. 40. 6	52500.00	12. 36. 0	64435. 71—	31. 30	*L 3*
4. 3			190. 30		
31. 44. 9	52600.00	12. 37. 26	64245. 41	31. 34	
— 4. 2			189. 94		
31. 48. 11	52700.00	12. 38. 53	64055. 47+	31. 37	
4. 3			189. 57		
31. 52. 14	52800.00	12. 40. 19	63865. 90	31. 41	
— 4. 3			189. 21		
31. 56. 17	52900.00	12. 41. 46	63676. 69—	31. 44	
4. 3			188. 86		
32. 0. 20	53000.00	12. 43. 12	63487. 83	31. 48	
— 4. 4			188. 50		
32. 4. 24	53100.00	12. 44. 38	63299. 33	31. 52	
4. 3			188. 15		
32. 8. 27	53200.00	12. 46. 5	63111. 18	31. 55	
— 4. 4			187. 79		
32. 12. 31	53300.00	12. 47. 31	62923. 39	31. 59	
4. 4			187. 44		
32. 16. 35	53400.00	12. 48. 58	62735. 95—	32. 2	
— 4. 4			187. 10		
32. 20. 39	53500.00	12. 50. 24	62548. 85+	32. 6	
4. 4			186. 74		
32. 24. 43	53600.00	12. 51. 50	62362. 11+	32. 10	
— 4. 5			186. 38		
32. 28. 48	53700.00	12. 53. 17	62175. 73+	32. 13	
4. 4			186. 05		
32. 32. 52	53800.00	12. 54. 43	61989. 68	32. 17	
— 4. 5			185. 71		
32. 36. 57	53900.00	12. 56. 10	61803. 97	32. 20	
4. 5			185. 36		
32. 41. 2	54000.00	12. 57. 36	61618. 61+	32. 24	
— 4. 5			185. 00		

	ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*
	— 4. 5			185. 00	
	32. 45. 7	54100.00	12. 59. 2	61433. 61	32. 28
	4. 5			184. 67	
	32. 49. 12	54200.00	13. 0. 29	61248. 94—	32. 31
	— 4. 6			184. 34	
	32. 53. 18	54300.00	13. 1. 55	61064. 60	32. 35
	4. 5			183. 99	
	32. 57. 23	54400.00	13. 3. 22	60880. 61—	32. 38
	— 4. 6			183. 66	
L.3v	33. 1. 29	54500.00	13. 4. 48	60696. 95	32. 42
	4. 6			183. 32	
	33. 5. 35	54600.00	13. 6. 14	60513. 63	32. 46
	— 4. 6			182. 98	
	33. 9. 41	54700.00	13. 7. 41	60330. 65	32. 49
	4. 7			182. 65	
	33. 13. 48	54800.00	13. 9. 7	60148. 00	32. 53
	— 4. 6			182. 31	
	33. 17. 54	54900.00	13. 10. 34	59965. 69	32. 56
	4. 7			181. 99	
	33. 22. 1	55000.00	13. 12. 0	59783. 70+	33. 0
	— 4. 7			181. 65	
	33. 26. 8	55100.00	13. 13. 26	59602. 05+	33. 4
	4. 7			181. 32	
	33. 30. 15	55200.00	13. 14. 53	59420. 73	33. 7
	— 4. 8			181. 00	
	33. 34. 23	55300.00	13. 16. 19	59239. 73	33. 11
	4. 7			180. 67	
	33. 38. 30	55400.00	13. 17. 46	59059. 06	33. 14
	— 4. 8			180. 34	
	33. 42. 38	55500.00	13. 19. 12	58878. 72	33. 18
	4. 8			180. 02	
	33. 46. 46	55600.00	13. 20. 38	58698. 70	33. 22
	— 4. 8			179. 70	
	33. 50. 54	55700.00	13. 22. 5	58519. 00	33. 25
	4. 9			179. 37	
	33. 55. 3	55800.00	13. 23. 31	58339. 63	33. 29
	— 4. 8			179. 05	
	33. 59. 11	55900.00	13. 24. 58	58160. 58	33. 32
	4. 9			178. 73	
	34. 3. 20	56000.00	13. 26. 24	57981. 85	33. 36
	— 4. 9			178. 41	
	34. 7. 29	56100.00	13. 27. 50	57803. 44	33. 40
	4. 9			178. 10	
	34. 11. 38	56200.00	13. 29. 17	57625. 34+	33. 43
	— 4. 10			177. 77	
	34. 15. 48	56300.00	13. 30. 43	57447. 57	33. 47
	4. 9			177. 46	
	34. 19. 57	56400.00	13. 32. 10	57270. 11—	33. 50
	— 4. 10			177. 16	
L.4	34. 24. 7	56500.00	13. 33. 36	57092. 95+	33. 54
	4. 10			176. 82	
	34. 28. 17	56600.00	13. 35. 2	56916. 13+	33. 58
	— 4. 11			176. 53	
	34. 32. 28	56700.00	13. 36. 29	56739. 60+	34. 1
	4. 10			176. 21	
	34. 36. 38	56800.00	13. 37. 55	56563. 39	34. 5
	— 4. 11			175. 90	
	34. 40. 49	56900.00	13. 39. 22	56387. 49—	34. 8
	4. 11			175. 60	
	34. 45. 0	57000.00	13. 40. 48	56211. 89+	34. 12
	— 4. 11			175. 28	

ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*	
4. 11			175. 28		
34. 49. 11	57100.00	13. 42. 14	56036. 61	34. 16	
4. 12			174. 98		
34. 53. 23	57200.00	13. 43. 41	55861. 63+	34. 19	
4. 11			174. 67		
34. 57. 34	57300.00	13. 45. 7	55686. 96—	34. 23	
4. 12			174. 37		
35. 1. 46	57400.00	13. 46. 34	55512. 59	34. 26	
4. 12			174. 06		
35. 5. 58	57500.00	13. 48. 0	55338. 53—	34. 30	
4. 13			173. 76		
35. 10. 11	57600.00	13. 49. 26	55164. 77—	34. 34	
4. 12			173. 47		
35. 14. 23	57700.00	13. 50. 53	54991. 30+	34. 37	
4. 13			173. 16		
35. 18. 36	57800.00	13. 52. 19	54818. 14	34. 41	
4. 13			172. 86		
35. 22. 49	57900.00	13. 53. 46	54645. 28	34. 44	
4. 13			172. 56		
35. 27. 2	58000.00	13. 55. 12	54472. 72	34. 48	
4. 14			172. 27		
35. 31. 16	58100.00	13. 56. 38	54300. 45+	34. 52	
4. 13			171. 97		
35. 35. 29	58200.00	13. 58. 5	54128. 48+	34. 55	
4. 14			171. 67		
35. 39. 43	58300.00	13. 59. 31	53956. 81+	34. 59	
4. 14			171. 37		
35. 43. 57	58400.00	14. 0. 58	53785. 44—	35. 2	
4. 14			171. 09		
35. 48. 11	58500.00	14. 2. 24	53614. 35—	35. 6	L.4v
4. 15			170. 80		
35. 52. 26	58600.00	14. 3. 50	53443. 55	35. 10	
4. 14			170. 50		
35. 56. 40	58700.00	14. 5. 17	53273. 05—	35. 13	
4. 15			170. 22		
36. 0. 55	58800.00	14. 6. 43	53102. 83+	35. 17	
4. 15			169. 92		
36. 5. 10	58900.00	14. 8. 10	52932. 91	35. 20	
4. 16			169. 63		
36. 9. 26	59000.00	14. 9. 36	52763. 28—	35. 24	
4. 15			169. 35		
36. 13. 41	59100.00	14. 11. 2	52593. 93—	35. 28	
4. 16			169. 06		
36. 17. 57	59200.00	14. 12. 29	52424. 87—	35. 31	
4. 16			168. 78		
36. 22. 13	59300.00	14. 13. 55	52256. 09	35. 35	
4. 17			168. 49		
36. 26. 30	59400.00	14. 15. 22	52087. 60	35. 38	
4. 16			168. 21		
36. 30. 46	59500.00	14. 16. 48	51919. 39	35. 42	
4. 17			167. 93		
36. 35. 3	59600.00	14. 18. 14	51751. 46+	35. 46	
4. 17			167. 64		
36. 39. 20	59700.00	14. 19. 41	51583. 82	35. 49	
4. 18			167. 37		
36. 43. 38	59800.00	14. 21. 7	51416. 45+	35. 53	
4. 17			167. 08		
36. 47. 55	59900.00	14. 22. 34	51249. 37	35. 56	
4. 18			166. 81		
36. 52. 13	60000.00	14. 24. 0	51082. 56	36. 0	
4. 18			166. 53		

	ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*
	— 4. 18			166. 53	
	36. 56. 31	60100.00	14. 25. 26	50916. 03 -+	36. 4
	4. 19			166. 25	
	37. 0. 50	60200.00	14. 26. 53	50749. 78 -+	36. 7
	— 4. 19			165. 97	
	37. 5. 9	60300.00	14. 28. 19	50583. 81	36. 11
	4. 18			165. 70	
	37. 9. 27	60400.00	14. 29. 46	50418. 11	36. 14
	— 4. 19			165. 43	
M	37. 13. 46	60500.00	14. 31. 12	50252. 68 -+	36. 18
	4. 19			165. 15	
	37. 18. 5	60600.00	14. 32. 38	50087. 53	36. 22
	— 4. 20			164. 88	
	37. 22. 25	60700.00	14. 34. 5	49922. 65	36. 25
	4. 19			164. 61	
	37. 26. 44	60800.00	14. 35. 31	49758. 04	36. 29
	— 4. 20			164. 34	
	37. 31. 4	60900.00	14. 36. 58	49593. 70 -+	36. 32
	4. 20			164. 07	
	37. 35. 24	61000.00	14. 38. 24	49429. 63 -+	36. 36
	— 4. 21			163. 80	
	37. 39. 45	61100.00	14. 39. 50	49265. 83 -+	36. 40
	4. 20			163. 53	
	37. 44. 5	61200.00	14. 41. 17	49102. 30	36. 43
	— 4. 21			163. 26	
	37. 48. 26	61300.00	14. 42. 43	48939. 04—	36. 47
	4. 21			163. 00	
	37. 52. 47	61400.00	14. 44. 10	48776. 04—	36. 50
	— 4. 22			162. 74	
	37. 57. 9	61500.00	14. 45. 36	48613. 30 -+	36. 54
	4. 21			162. 47	
	38. 1. 30	61600.00	14. 47. 2	48450. 83 -+	36. 58
	— 4. 22			162. 20	
	38. 5. 52	61700.00	14. 48. 29	48288. 63	37. 1
	4. 22			161. 95	
	38. 10. 14	61800.00	14. 49. 55	48126. 68 -+	37. 5
	— 4. 23			161. 68	
	38. 14. 37	61900.00	14. 51. 22	47965. 00 -+	37. 8
	4. 22			161. 42	
	38. 18. 59	62000.00	14. 52. 48	47803. 58 -+	37. 12
	— 4. 23			161. 16	
	38. 23. 22	62100.00	14. 54. 14	47642. 42	37. 16
	4. 24			160. 90	
	38. 27. 46	62200.00	14. 55. 41	47481. 52	37. 19
	— 4. 23			160. 64	
	38. 32. 9	62300.00	14. 57. 7	47320. 88	37. 23
	4. 24			160. 39	
	38. 36. 33	62400.00	14. 58. 34	47160. 49 -+	37. 26
	— 4. 24			160. 12	
Mv	38. 40. 57	62500.00	15. 0. 0	47000. 37—	37. 30
	4. 25			159. 88	
	38. 45. 22	62600.00	15. 1. 26	46840. 49 -+	37. 34
	— 4. 25			159. 61	
	38. 49. 47	62700.00	15. 2. 53	46680. 88—	37. 37
	4. 24			159. 37	
	38. 54. 11	62800.00	15. 4. 19	46521. 51 -+	37. 41
	— 4. 25			159. 11	
	38. 58. 36	62900.00	15. 5. 46	46362. 40 -+	37. 44
	4. 25			158. 85	
	39. 3. 1	63000.00	15. 7. 12	46203. 55	37. 48
	— 4. 26			158. 61	

ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*	
— 4. 26			158. 61		
39. 7. 27	63100.00	15. 8. 38	46044. 94+	37. 52	
4. 27			158. 35		
39. 11. 54	63200.00	15. 10. 5	45886. 59	37. 55	
— 4. 27			158. 10		
39. 16. 21	63300.00	15. 11. 31	45728. 49	37. 59	
4. 27			157. 86		
39. 20. 48	63400.00	15. 12. 58	45570. 63+	38. 2	
— 4. 26			157. 60		
39. 25. 14	63500.00	15. 14. 24	45413. 03	38. 6	
4. 27			157. 36		
39. 29. 41	63600.00	15. 15. 50	45255. 67+	38. 10	
— 4. 27			157. 10		
39. 34. 8	63700.00	15. 17. 17	45098. 57—	38. 13	
4. 28			156. 87		
39. 38. 36	63800.00	15. 18. 43	44941. 70+	38. 17	
— 4. 27			156. 62		
39. 43. 3	63900.00	15. 20. 10	44785. 08+	38. 20	
4. 28			156. 37		
39. 47. 31	64000.00	15. 21. 36	44628. 71	38. 24	
— 4. 28			156. 12		
39. 51. 59	64100.00	15. 23. 2	44472. 59—	38. 28	
4. 29			155. 89		
39. 56. 28	64200.00	15. 24. 29	44316. 70	38. 31	
— 4. 29			155. 65		
40. 0. 57	64300.00	15. 25. 55	44161. 05+	38. 35	
4. 30			155. 40		
40. 5. 27	64400.00	15. 27. 22	44005. 65+	38. 38	
— 4. 29			155. 15		
40. 9. 56	64500.00	15. 28. 48	43850. 50—	38. 42	*M2*
4. 30			154. 92		
40. 14. 26	64600.00	15. 30. 14	43695. 58	38. 46	
— 4. 30			154. 68		
40. 18. 56	64700.00	15. 31. 41	43540. 90	38. 49	
4. 31			154. 44		
40. 23. 27	64800.00	15. 33. 7	43386. 46	38. 53	
— 4. 31			154. 20		
40. 27. 58	64900.00	15. 34. 34	43232. 26	38. 56	
4. 32			153. 97		
40. 32. 30	65000.00	15. 36. 0	43078. 29	39. 0	
— 4. 32			153. 73		
40. 37. 2	65100.00	15. 37. 26	42924. 56+	39. 4	
4. 33			153. 48		
40. 41. 35	65200.00	15. 38. 53	42771. 08	39. 7	
— 4. 32			153. 26		
40. 46. 7	65300.00	15. 40. 19	42617. 82	39. 11	
4. 33			153. 03		
40. 50. 40	65400.00	15. 41. 46	42464. 79+	39. 14	
— 4. 33			152. 79		
40. 55. 13	65500.00	15. 43. 12	42312. 00+	39. 18	
4. 33			152. 55		
40. 59. 46	65600.00	15. 44. 38	42159. 45	39. 22	
— 4. 33			152. 32		
41. 4. 19	65700.00	15. 46. 5	42007. 13—	39. 25	
4. 34			152. 09		
41. 8. 53	65800.00	15. 47. 31	41855. 04—	39. 29	
— 4. 33			151. 87		
41. 13. 26	65900.00	15. 48. 58	41703. 17+	39. 32	
4. 34			151. 62		
41. 18. 0	66000.00	15. 50. 24	41551. 55—	39. 36	
— 4. 35			151. 40		

	ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*
	— 4. 35			151. 40	
	41. 22. 35	66100.00	15. 51. 50	41400. 15—	39. 40
	4. 35			151. 18	
	41. 27. 10	66200.00	15. 53. 17	41248. 97+	39. 43
	— 4. 36			150. 94	
	41. 31. 46	66300.00	15. 54. 43	41098. 03	39. 47
	4. 35			150. 72	
	41. 36. 21	66400.00	15. 56. 10	40947. 31+	39. 50
	— 4. 36			150. 49	
M2v	41. 40. 57	66500.00	15. 57. 36	40796. 82	39. 54
	4. 36			150. 26	
	41. 45. 33	66600.00	15. 59. 2	40646. 56	39. 58
	— 4. 37			150. 03	
	41. 50. 10	66700.00	16. 0. 29	40496. 53—	40. 1
	4. 37			149. 82	
	41. 54. 47	66800.00	16. 1. 55	40346. 71+	40. 5
	— 4. 38			149. 58	
	41. 59. 25	66900.00	16. 3. 22	40197. 13—	40. 8
	4. 37			149. 37	
	42. 4. 2	67000.00	16. 4. 48	40047. 76	40. 12
	— 4. 38			149. 14	
	42. 8. 40	67100.00	16. 6. 14	39898. 62—	40. 16
	4. 38			148. 92	
	42. 13. 18	67200.00	16. 7. 41	39749. 70—	40. 19
	— 4. 39			148. 70	
	42. 17. 57	67300.00	16. 9. 7	39601. 00—	40. 23
	4. 39			148. 48	
	42. 22. 36	67400.00	16. 10. 34	39452. 52—	40. 26
	— 4. 39			148. 26	
	42. 27. 15	67500.00	16. 12. 0	39304. 26	40. 30
	4. 40			148. 04	
	42. 31. 55	67600.00	16. 13. 26	39156. 22	40. 34
	— 4. 40			147. 82	
	42. 36. 35	67700.00	16. 14. 53	39008. 40	40. 37
	4. 40			147. 60	
	42. 41. 15	67800.00	16. 16. 19	38860. 80	40. 41
	— 4. 41			147. 38	
	42. 45. 56	67900.00	16. 17. 46	38713. 42—	40. 44
	4. 41			147. 17	
	42. 50. 37	68000.00	16. 19. 12	38566. 25	40. 48
	— 4. 42			146. 95	
	42. 55. 19	68100.00	16. 20. 38	38419. 30	40. 52
	4. 42			146. 74	
	43. 0. 1	68200.00	16. 22. 5	38272. 56+	40. 55
	— 4. 43			146. 52	
	43. 4. 44	68300.00	16. 23. 31	38126. 04+	40. 59
	4. 42			146. 30	
	43. 9. 26	68400.00	16. 24. 58	37979. 74—	41. 2
	— 4. 43			146. 09	
M3	43. 14. 9	68500.00	16. 26. 24	37833. 65—	41. 6
	4. 43			145. 88	
	43. 18. 52	68600.00	16. 27. 50	37687. 77—	41. 10
	— 4. 43			145. 67	
	43. 23. 35	68700.00	16. 29. 17	37542. 10	41. 13
	4. 44			145. 45	
	43. 28. 19	68800.00	16. 30. 43	37396. 65—	41. 17
	— 4. 44			145. 25	
	43. 33. 3	68900.00	16. 32. 10	37251. 40+	41. 20
	4. 45			145. 03	
	43. 37. 48	69000.00	16. 33. 36	37106. 37	41. 24
	— 4. 45			144. 83	

ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*
— 4. 45			144. 83	
43. 42. 33	69100.00	16. 35. 2	36961. 54+	41. 28
4. 45			144. 61	
43. 47. 18	69200.00	16. 36. 29	36816. 93	41. 31
— 4. 46			144. 40	
43. 52. 4	69300.00	16. 37. 55	36672. 53—	41. 35
4. 46			144. 20	
43. 56. 50	69400.00	16. 39. 22	36528. 33+	41. 38
— 4. 47			143. 99	
44. 1. 37	69500.00	16. 40. 48	36384. 34+	41. 42
4. 47			143. 78	
44. 6. 24	69600.00	16. 42. 14	36240. 56+	41. 46
— 4. 48			143. 57	
44. 11. 12	69700.00	16. 43. 41	36096. 99	41. 49
4. 48			143. 37	
44. 16. 0	69800.00	16. 45. 7	35953. 62	41. 53
— 4. 48			143. 17	
44. 20. 48	69900.00	16. 46. 34	35810. 45+	41. 56
4. 49			142. 96	
44. 25. 37	70000.00	16. 48. 0	35667. 49+	42. 0
— 4. 49			142. 75	
44. 30. 26	70100.00	16. 49. 26	35524. 74	42. 4
4. 49			142. 55	
44. 35. 15	70200.00	16. 50. 53	35382. 19	42. 7
— 4. 50			142. 35	
44. 40. 5	70300.00	16. 52. 19	35239. 84+	42. 11
4. 50			142. 14	
44. 44. 55	70400.00	16. 53. 46	35097. 70—	42. 14
— 4. 51			141. 95	
44. 49. 46	70500.00	16. 55. 12	34955. 75—	42. 18 M3v
4. 51			141. 75	
44. 54. 37	70600.00	16. 56. 38	34814. 00+	42. 22
— 4. 52			141. 54	
44. 59. 29	70700.00	16. 58. 5	34672. 46	42. 25
4. 52			141. 34	
45. 4. 21	70800.00	16. 59. 31	34531. 12	42. 29
— 4. 52			141. 14	
45. 9. 13	70900.00	17. 0. 58	34389. 98—	42. 32
4. 53			140. 95	
45. 14. 6	71000.00	17. 2. 24	34249. 03	42. 36
— 4. 53			140. 74	
45. 18. 59	71100.00	17. 3. 50	34108. 29—	42. 40
4. 54			140. 55	
45. 23. 53	71200.00	17. 5. 17	33967. 74—	42. 43
— 4. 54			140. 35	
45. 28. 47	71300.00	17. 6. 43	33827. 39	42. 47
4. 54			140. 15	
45. 33. 41	71400.00	17. 8. 10	33687. 24—	42. 50
— 4. 55			139. 96	
45. 38. 36	71500.00	17. 9. 36	33547. 28—	42. 54
4. 55			139. 77	
45. 43. 31	71600.00	17. 11. 2	33407. 51	42. 58
— 4. 56			139. 57	
45. 48. 27	71700.00	17. 12. 29	33267. 94+	43. 1
4. 56			139. 37	
45. 53. 23	71800.00	17. 13. 55	33128. 57	43. 5
— 4. 57			139. 18	
45. 58. 20	71900.00	17. 15. 22	32989. 39	43. 8
4. 57			138. 98	
46. 3. 17	72000.00	17. 16. 48	32850. 41—	43. 12
— 4. 58			138. 79	

	ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*
	— 4. 58			138. 79	
	46. 8. 15	72100.00	17. 18. 14	32711. 61+	43. 16
	4. 58			138. 60	
	46. 13. 13	72200.00	17. 19. 41	32573. 01	43. 19
	— 4. 59			138. 41	
	46. 18. 12	72300.00	17. 21. 7	32434. 60	43. 23
	4. 59			138. 21	
	46. 23. 11	72400.00	17. 22. 34	32296. 39	43. 26
	— 4. 59			138. 03	
M 4	46. 28. 10	72500.00	17. 24. 0	32158. 36+	43. 30
	5. 0			137. 83	
	46. 33. 10	72600.00	17. 25. 26	32020. 53	43. 34
	— 5. 0			137. 65	
	46. 38. 10	72700.00	17. 26. 53	31882. 88	43. 37
	5. 1			137. 46	
	46. 43. 11	72800.00	17. 28. 19	31745. 42+	43. 41
	— 5. 1			137. 27	
	46. 48. 12	72900.00	17. 29. 46	31608. 15+	43. 44
	5. 1			137. 07	
	46. 53. 13	73000.00	17. 31. 12	31471. 08—	43. 48
	— 5. 2			136. 90	
	46. 58. 15	73100.00	17. 32. 38	31334. 18	43. 52
	5. 2			136. 70	
	47. 3. 17	73200.00	17. 34. 5	31197. 48—	43. 55
	— 5. 3			136. 53	
	47. 8. 20	73300.00	17. 35. 31	31060. 95	43. 59
	5. 3			136. 33	
	47. 13. 23	73400.00	17. 36. 58	30924. 62	44. 2
	— 5. 4			136. 14	
	47. 18. 27	73500.00	17. 38. 24	30788. 48	44. 6
	5. 5			135. 96	
	47. 23. 32	73600.00	17. 39. 50	30652. 52	44. 10
	— 5. 5			135. 78	
	47. 28. 37	73700.00	17. 41. 17	30516. 74	44. 13
	5. 6			135. 60	
	47. 33. 43	73800.00	17. 42. 43	30381. 14+	44. 17
	— 5. 6			135. 40	
	47. 38. 49	73900.00	17. 44. 10	30245. 74—	44. 20
	5. 7			135. 23	
	47. 43. 56	74000.00	17. 45. 36	30110. 51	44. 24
	— 5. 7			135. 04	
	47. 49. 3	74100.00	17. 47. 2	29975. 47	44. 28
	5. 7			134. 86	
	47. 54. 10	74200.00	17. 48. 29	29840. 61—	44. 31
	— 5. 8			134. 68	
	47. 59. 18	74300.00	17. 49. 55	29705. 93	44. 35
	5. 8			134. 50	
	48. 4. 26	74400.00	17. 51. 22	29571. 43	44. 38
	— 5. 9			134. 32	
M 4v	48. 9. 35	74500.00	17. 52. 48	29437. 11	44. 42
	5. 9			134. 14	
	48. 14. 44	74600.00	17. 54. 14	29302. 97	44. 46
	— 5. 10			133. 96	
	48. 19. 54	74700.00	17. 55. 41	29169. 01	44. 49
	5. 10			133. 78	
	48. 25. 4	74800.00	17. 57. 7	29035. 23	44. 53
	— 5. 11			133. 60	
	48. 30. 15	74900.00	17. 58. 34	28901. 63	44. 56
	5. 11			133. 42	
	48. 35. 26	75000.00	18. 0. 0	28768. 21—	45. 0
	— 5. 12			133. 25	

ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*	
— 5. 12			133. 25		
48. 40. 38	75100.00	18. 1. 26	28634. 96 -+	45. 4	
5. 13			133. 06		
48. 45. 51	75200.00	18. 2. 53	28501. 90	45. 7	
— 5. 13			132. 90		
48. 51. 4	75300.00	18. 4. 19	28369. 00 -+	45. 11	
5. 14			132. 71		
48. 56. 18	75400.00	18. 5. 46	28236. 29	45. 14	
— 5. 14			132. 54		
49. 1. 32	75500.00	18. 7. 12	28103. 75 -+	45. 18	
5. 15			132. 36		
49. 6. 47	75600.00	18. 8. 38	27971. 39	45. 22	
— 5. 15			132. 19		
49. 12. 2	75700.00	18. 10. 5	27839. 20 -+	45. 25	
5. 16			132. 01		
49. 17. 18	75800.00	18. 11. 31	27707. 19	45. 29	
— 5. 16			131. 84		
49. 22. 34	75900.00	18. 12. 58	27575. 35 -+	45. 32	
5. 17			131. 66		
49. 27. 51	76000.00	18. 14. 24	27443. 69 —	45. 36	
— 5. 18			131. 50		
49. 33. 9	76100.00	18. 15. 50	27312. 19	45. 40	
5. 18			131. 32		
49. 38. 27	76200.00	18. 17. 17	27180. 87 -+	45. 43	
— 5. 19			131. 14		
49. 43. 46	76300.00	18. 18. 43	27049. 73 —	45. 47	
5. 19			130. 98		
49. 49. 5	76400.00	18. 20. 10	26918. 75	45. 50	
— 5. 20			130. 81		
49. 54. 25	76500.00	18. 21. 36	26787. 94 -+	45. 54	*N*
5. 21			130. 63		
49. 59. 46	76600.00	18. 23. 2	26657. 31	45. 58	
— 5. 21			130. 46		
50. 5. 7	76700.00	18. 24. 29	26526. 85	46. 1	
5. 22			130. 29		
50. 10. 29	76800.00	18. 25. 55	26396. 56 —	46. 5	
— 5. 22			130. 12		
50. 15. 51	76900.00	18. 27. 22	26266. 43 -+	46. 8	
5. 23			129. 95		
50. 21. 14	77000.00	18. 28. 48	26136. 48	46. 12	
— 5. 24			129. 79		
50. 26. 38	77100.00	18. 30. 14	26006. 69 -+	46. 16	
5. 24			129. 62		
50. 32. 2	77200.00	18. 31. 41	25877. 07 -+	46. 19	
— 5. 25			129. 45		
50. 37. 27	77300.00	18. 33. 7	25747. 62 -+	46. 23	
5. 26			129. 28		
50. 42. 53	77400.00	18. 34. 34	25618. 34	46. 26	
— 5. 26			129. 11		
50. 48. 19	77500.00	18. 36. 0	25489. 23 —	46. 30	
5. 27			128. 95		
50. 53. 46	77600.00	18. 37. 26	25360. 28 —	46. 34	
— 5. 27			128. 79		
50. 59. 13	77700.00	18. 38. 53	25231. 49 -+	46. 37	
5. 28			128. 61		
51. 4. 41	77800.00	18. 40. 19	25102. 88	46. 41	
— 5. 28			128. 46		
51. 10. 9	77900.00	18. 41. 46	24974. 42 -+	46. 44	
5. 29			128. 29		
51. 15. 38	78000.00	18. 43. 12	24846. 13 -+	46. 48	
— 5. 30			128. 12		

ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*
— 5. 30			128. 12	
51. 21. 8	78100.00	18. 44. 38	24718. 01 -+	46. 52
5. 31			127. 95	
51. 26. 39	78200.00	18. 46. 5	24590. 06—	46. 55
— 5. 31			127. 80	
51. 32. 10	78300.00	18. 47. 31	24462. 26—	46. 59
5. 32			127. 63	
51. 37. 42	78400.00	18. 48. 58	24334. 63—	47. 2
— 5. 33			127. 47	
N1 51. 43. 15	78500.00	18. 50. 24	24207. 16	47. 6
5. 33			127. 31	
51. 48. 48	78600.00	18. 51. 50	24079. 85	47. 10
— 5. 34			127. 15	
51. 54. 22	78700.00	18. 53. 17	23952. 70 -+	47. 13
5. 34			126. 98	
51. 59. 56	78800.00	18. 54. 43	23825. 72	47. 17
— 5. 35			126. 82	
52. 5. 31	78900.00	18. 56. 10	23698. 90—	47. 20
5. 36			126. 67	
52. 11. 7	79000.00	18. 57. 36	23572. 23 -+	47. 24
— 5. 37			126. 50	
52. 16. 44	79100.00	18. 59. 2	23445. 73	47. 28
5. 38			126. 34	
52. 22. 22	79200.00	19. 0. 29	23319. 39—	47. 31
— 5. 38			126. 19	
52. 28. 0	79300.00	19. 1. 55	23193. 20 -+	47. 35
5. 39			126. 02	
52. 33. 39	79400.00	19. 3. 22	23067. 18	47. 38
— 5. 40			125. 86	
52. 39. 19	79500.00	19. 4. 48	22941. 32	47. 42
5. 41			125. 71	
52. 45. 0	79600.00	19. 6. 14	22815. 61	47. 46
— 5. 41			125. 55	
52. 50. 41	79700.00	19. 7. 41	22690. 06	47. 49
5. 42			125. 39	
52. 56. 23	79800.00	19. 9. 7	22564. 67	47. 53
— 5. 42			125. 24	
53. 2. 5	79900.00	19. 10. 34	22439. 43 -+	47. 56
5. 43			125. 07	
53. 7. 48	80000.00	19. 12. 0	22314. 36—	48. 0
— 5. 44			124. 93	
53. 13. 32	80100.00	19. 13. 26	22189. 43 -+	48. 4
5. 45			124. 76	
53. 19. 17	80200.00	19. 14. 53	22064. 67	48. 7
— 5. 46			124. 61	
53. 25. 3	80300.00	19. 16. 19	21940. 06	48. 11
5. 46			124. 46	
53. 30. 49	80400.00	19. 17. 46	21815. 60 -+	48. 14
— 5. 47			124. 30	
N2 53. 36. 36	80500.00	19. 19. 12	21691. 30	48. 18
5. 48			124. 15	
53. 42. 24	80600.00	19. 20. 38	21567. 15	48. 22
— 5. 49			123. 98	
53. 48. 13	80700.00	19. 22. 5	21443. 17—	48. 25
5. 50			123. 85	
53. 54. 3	80800.00	19. 23. 31	21319. 32 -+	48. 29
— 5. 51			123. 68	
53. 59. 54	80900.00	19. 24. 58	21195. 64—	48. 32
5. 52			123. 54	
54. 5. 46	81000.00	19. 26. 24	21072. 10 -+	48. 36
— 5. 52			123. 38	

ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*
5. 52			123. 38	
54. 11. 38	81100.00	19. 27. 50	20948. 72+	48. 40
5. 53			123. 23	
54. 17. 31	81200.00	19. 29. 17	20825. 49+	48. 43
5. 54			123. 07	
54. 23. 25	81300.00	19. 30. 43	20702. 42	48. 47
5. 55			122. 93	
54. 29. 20	81400.00	19. 32. 10	20579. 49+	48. 50
5. 56			122. 77	
54. 35. 16	81500.00	19. 33. 36	20456. 72—	48. 54
5. 57			122. 63	
54. 41. 13	81600.00	19. 35. 2	20334. 09+	48. 58
5. 58			122. 47	
54. 47. 11	81700.00	19. 36. 29	20211. 62—	49. 1
5. 58			122. 32	
54. 53. 9	81800.00	19. 37. 55	20089. 30—	49. 5
5. 59			122. 18	
54. 59. 8	81900.00	19. 39. 22	19967. 12	49. 8
6. 0			122. 03	
55. 5. 8	82000.00	19. 40. 48	19845. 09+	49. 12
6. 1			121. 87	
55. 11. 9	82100.00	19. 42. 14	19723. 22—	49. 16
6. 2			121. 73	
55. 17. 11	82200.00	19. 43. 41	19601. 49	49. 19
6. 3			121. 58	
55. 23. 14	82300.00	19. 45. 7	19479. 91	49. 23
6. 3			121. 43	
55. 29. 17	82400.00	19. 46. 34	19358. 48	49. 26
6. 4			121. 29	
55. 35. 21	82500.00	19. 48. 0	19237. 19	49. 30
6. 5			121. 14	
55. 41. 26	82600.00	19. 49. 26	19116. 05	49. 34
6. 6			120. 99	
55. 47. 32	82700.00	19. 50. 53	18995. 06	49. 37
6. 7			120. 84	
55. 53. 39	82800.00	19. 52. 19	18874. 22—	49. 41
6. 8			120. 71	
55. 59. 47	82900.00	19. 53. 46	18753. 51+	49. 44
6. 9			120. 55	
56. 5. 56	83000.00	19. 55. 12	18632. 96	49. 48
6. 10			120. 41	
56. 12. 6	83100.00	19. 56. 38	18512. 55	49. 52
6. 11			120. 27	
56. 18. 17	83200.00	19. 58. 5	18392. 28+	49. 55
6. 12			120. 12	
56. 24. 29	83300.00	19. 59. 31	18272. 16+	49. 59
6. 13			119. 97	
56. 30. 42	83400.00	20. 0. 58	18152. 19	50. 2
6. 14			119. 83	
56. 36. 56	83500.00	20. 2. 24	18032. 36	50. 6
6. 15			119. 69	
56. 43. 11	83600.00	20. 3. 50	17912. 67—	50. 10
6. 16			119. 55	
56. 49. 27	83700.00	20. 5. 17	17793. 12	50. 13
6. 18			119. 40	
56. 55. 45	83800.00	20. 6. 43	17673. 72—	50. 17
6. 19			119. 26	
57. 2. 4	83900.00	20. 8. 10	17554. 46—	50. 20
6. 20			119. 12	
57. 8. 24	84000.00	20. 9. 36	17435. 34	50. 24
6. 21			118. 98	

N 2v

	ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*
	6. 21			118. 98	
	57. 14. 45	84100.00	20. 11. 2	17316. 36+	50. 28
	6. 22			118. 83	
	57. 21. 7	84200.00	20. 12. 29	17197. 53—	50. 31
	6. 23			118. 70	
	57. 27. 30	84300.00	20. 13. 55	17078. 83	50. 35
	6. 24			118. 55	
	57. 33. 54	84400.00	20. 15. 22	16960. 28—	50. 38
	6. 25			118. 41	
N3	57. 40. 19	84500.00	20. 16. 48	16841. 87—	50. 42
	6. 26			118. 28	
	57. 46. 45	84600.00	20. 18. 14	16723. 59+	50. 46
	6. 27			118. 13	
	57. 53. 12	84700.00	20. 19. 41	16605. 46	50. 49
	6. 28			117. 99	
	57. 59. 40	84800.00	20. 21. 7	16487. 47—	50. 53
	6. 30			117. 86	
	58. 6. 10	84900.00	20. 22. 34	16369. 61+	50. 56
	6. 31			117. 71	
	58. 12. 41	85000.00	20. 24. 0	16251. 90—	51. 0
	6. 32			117. 58	
	58. 19. 13	85100.00	20. 25. 26	16134. 32	51. 4
	6. 33			117. 44	
	58. 25. 46	85200.00	20. 26. 53	16016. 88—	51. 7
	6. 35			117. 31	
	58. 32. 21	85300.00	20. 28. 19	15899. 57+	51. 11
	6. 36			117. 16	
	58. 38. 57	85400.00	20. 29. 46	15782. 41	51. 14
	6. 37			117. 03	
	58. 45. 34	85500.00	20. 31. 12	15665. 38	51. 18
	6. 39			116. 89	
	58. 52. 13	85600.00	20. 32. 38	15548. 49+	51. 22
	6. 40			116. 75	
	58. 58. 53	85700.00	20. 34. 5	15431. 74	51. 25
	6. 41			116. 62	
	59. 5. 34	85800.00	20. 35. 31	15315. 12	51. 29
	6. 42			116. 48	
	59. 12. 16	85900.00	20. 36. 58	15198. 64—	51. 32
	6. 44			116. 35	
	59. 19. 0	86000.00	20. 38. 24	15082. 29	51. 36
	6. 45			116. 21	
	59. 25. 45	86100.00	20. 39. 50	14966. 08—	51. 40
	6. 46			116. 06	
	59. 32. 31	86200.00	20. 41. 17	14850. 02—	51. 43
	6. 47			115. 95	
	59. 39. 18	86300.00	20. 42. 43	14734. 07+	51. 47
	6. 49			115. 82	
	59. 46. 7	86400.00	20. 44. 10	14618. 25+	51. 50
	6. 51			115. 68	
N3v	59. 52. 58	86500.00	20. 45. 36	14502. 57	51. 54
	6. 52			115. 53	
	59. 59. 50	86600.00	20. 47. 2	14387. 04—	51. 58
	6. 53			115. 41	
	60. 6. 43	86700.00	20. 48. 29	14271. 63	52. 1
	6. 54			115. 27	
	60. 13. 37	86800.00	20. 49. 55	14156. 36	52. 5
	6. 56			115. 14	
	60. 20. 33	86900.00	20. 51. 22	14041. 22	52. 8
	6. 57			115. 01	
	60. 27. 30	87000.00	20. 52. 48	13926. 21—	52. 12
	6. 59			114. 88	

ARCUS Circuli cum differentiis	SINUS seu Numeri absoluti	Partes vicesimae quartae	LOGARITHMI cum differentiis	Partes sexagenariae
6. 59			114. 88	
60. 34. 29	87100.00	20. 54. 14	13811. 33	52. 16
7. 1			114. 74	
60. 41. 30	87200.00	20. 55. 41	13696. 59	52. 19
7. 3			114. 72	
60. 48. 33	87300.00	20. 57. 7	13581. 87	52. 23
7. 4			114. 38	
60. 55. 37	87400.00	20. 58. 34	13467. 49+	52. 26
7. 6			114. 35	
61. 2. 43	87500.00	21. 0. 0	13353. 14	52. 30
7. 8			114. 22	
61. 9. 51	87600.00	21. 1. 26	13238. 92	52. 34
7. 9			114. 09	
61. 17. 0	87700.00	21. 2. 53	13124. 83+	52. 37
7. 10			113. 96	
61. 24. 10	87800.00	21. 4. 19	13010. 87	52. 41
7. 12			113. 83	
61. 31. 22	87900.00	21. 5. 46	12897. 04	52. 44
7. 13			113. 70	
61. 38. 35	88000.00	21. 7. 12	12783. 34—	52. 48
7. 15			113. 57	
61. 45. 50	88100.00	21. 8. 38	12669. 77—	52. 52
7. 16			113. 45	
61. 53. 6	88200.00	21. 10. 5	12556. 32	52. 55
7. 18			113. 31	
62. 0. 24	88300.00	21. 11. 31	12443. 01—	52. 59
7. 20			113. 19	
62. 7. 44	88400.00	21. 12. 58	12329. 82	53. 2
7. 22			113. 06	
62. 15. 6	88500.00	21. 14. 24	12216. 76+	53. 6
7. 24			112. 93	
62. 22. 30	88600.00	21. 15. 50	12103. 83+	53. 10
7. 26			112. 80	
62. 29. 56	88700.00	21. 17. 17	11991. 03	53. 13
7. 27			112. 68	
62. 37. 23	88800.00	21. 18. 43	11878. 35+	53. 17
7. 29			112. 55	
62. 44. 52	88900.00	21. 20. 10	11765. 80+	53. 20
7. 31			112. 42	
62. 52. 23	89000.00	21. 21. 36	11653. 38	53. 24
7. 33			112. 29	
62. 59. 56	89100.00	21. 23. 2	11541. 09—	53. 28
7. 35			112. 17	
63. 7. 31	89200.00	21. 24. 29	11428. 92—	53. 31
7. 37			112. 05	
63. 15. 8	89300.00	21. 25. 55	11316. 87	53. 35
7. 40			111. 92	
63. 22. 48	89400.00	21. 27. 22	11204. 95	53. 38
7. 42			111. 79	
63. 30. 30	89500.00	21. 28. 48	11093. 16—	53. 42
7. 44			111. 67	
63. 38. 14	89600.00	21. 30. 14	10981. 49	53. 46
7. 46			111. 55	
63. 46. 0	89700.00	21. 31. 41	10869. 94+	53. 49
7. 48			111. 42	
63. 53. 48	89800.00	21. 33. 7	10758. 52	53. 53
7. 50			111. 29	
64. 1. 38	89900.00	21. 34. 34	10647. 23—	53. 56
7. 52			111. 18	
64. 9. 30	90000.00	21. 36. 0	10536. 05	54. 0
7. 54			111. 05	

N 4

	ARCUS Circuli cum differentiis	SINUS seu Numeri absoluti	Partes vicesimae quartae	LOGARITHMI cum differentiis	Partes sexagenariae
	— 7. 54			111. 05	
	64. 17. 24	90100.00	21. 37. 26	10425. 00	54. 4
	7. 56			110. 92	
	64. 25. 20	90200.00	21. 38. 53	10314. 08—	54. 7
	— 7. 58			110. 81	
	64. 33. 18	90300.00	21. 40. 19	10203. 27-+	54. 11
	8. 1			110. 68	
	64. 41. 19	90400.00	21. 41. 46	10092. 59	54. 14
	— 8. 3			110. 56	
N4v	64. 49. 22	90500.00	21. 43. 12	9982. 03-+	54. 18
	8. 6			110. 43	
	64. 57. 28	90600.00	21. 44. 38	9871. 60	54. 22
	— 8. 9			110. 32	
	65. 5. 37	90700.00	21. 46. 5	9761. 28-+	54. 25
	8. 12			110. 19	
	65. 13. 49	90800.00	21. 47. 31	9651. 09	54. 29
	— 8. 14			110. 07	
	65. 22. 3	90900.00	21. 48. 58	9541. 02	54. 32
	8. 17			109. 95	
	65. 30. 20	91000.00	21. 50. 24	9431. 07	54. 36
	— 8. 19			109. 83	
	65. 38. 39	91100.00	21. 51. 50	9321. 24	54. 40
	8. 21			109. 71	
	65. 47. 0	91200.00	21. 53. 17	9211. 53	54. 43
	— 8. 24			109. 59	
	65. 55. 24	91300.00	21. 54. 43	9101. 94	54. 47
	8. 26			109. 47	
	66. 3. 50	91400.00	21. 56. 10	8992. 47	54. 50
	— 8. 29			109. 35	
	66. 12. 19	91500.00	21. 57. 36	8883. 12-+	54. 54
	8. 32			109. 23	
	66. 20. 51	91600.00	21. 59. 2	8773. 89-+	54. 58
	— 8. 35			109. 11	
	66. 29. 26	91700.00	22. 0. 29	8664. 78	55. 1
	8. 39			108. 99	
	66. 38. 5	91800.00	22. 1. 55	8555. 79	55. 5
	— 8. 42			108. 87	
	66. 46. 47	91900.00	22. 3. 22	8446. 92—	55. 8
	8. 46			108. 76	
	66. 55. 33	92000.00	22. 4. 48	8338. 16	55. 12
	— 8. 49			108. 63	
	67. 4. 22	92100.00	22. 6. 14	8229. 53—	55. 16
	8. 51			108. 52	
	67. 13. 13	92200.00	22. 7. 41	8121. 01—	55. 19
	— 8. 54			108. 40	
	67. 22. 7	92300.00	22. 9. 7	8012. 61—	55. 23
	8. 58			108. 29	
	67. 31. 5	92400.00	22. 10. 34	7904. 32	55. 26
	— 9. 1			108. 16	
O	67. 40. 6	92500.00	22. 12. 0	7796. 16—	55. 30
	9. 4			108. 05	
	67. 49. 10	92600.00	22. 13. 26	7688. 11—	55. 34
	— 9. 8			107. 94	
	67. 58. 18	92700.00	22. 14. 53	7580. 17-+	55. 37
	9. 13			107. 81	
	68. 7. 31	92800.00	22. 16. 19	7472. 36—	55. 41
	— 9. 15			107. 70	
	68. 16. 46	92900.00	22. 17. 46	7364. 66—	55. 44
	9. 20			107. 59	
	68. 26. 6	93000.00	22. 19. 12	7257. 07	55. 48
	— 9. 23			107. 47	

ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*	
— 9. 23			107. 47		
68. 35. 29	93100.00	22. 20. 38	7149. 60	55. 52	
9. 27			107. 35		
68. 44. 56	93200.00	22. 22. 5	7042. 25	55. 55	
— 9. 31			107. 24		
68. 54. 27	93300.00	22. 23. 31	6935. 01	55. 59	
9. 35			107. 12		
69. 4. 2	93400.00	22. 24. 58	6827. 89—	56. 2	
— 9. 39			107. 01		
69. 13. 41	93500.00	22. 26. 24	6720. 88—	56. 6	
9. 44			106. 90		
69. 23. 25	93600.00	22. 27. 50	6613. 98	56. 10	
— 9. 48			106. 78		
69. 33. 13	93700.00	22. 29. 17	6507. 20	56. 13	
9. 53			106. 67		
69. 43. 6	93800.00	22. 30. 43	6400. 53+	56. 17	
— 9. 57			106. 55		
69. 53. 3	93900.00	22. 32. 10	6293. 98	56. 20	
10. 3			106. 44		
70. 3. 6	94000.00	22. 33. 36	6187. 54	56. 24	
— 10. 7			106. 32		
70. 13. 13	94100.00	22. 35. 2	6081. 22—	56. 28	
10. 12			106. 22		
70. 23. 25	94200.00	22. 36. 29	5975. 00	56. 31	
— 10. 17			106. 10		
70. 33. 42	94300.00	22. 37. 55	5868. 90	56. 35	
10. 22			105. 99		
70. 44. 4	94400.00	22. 39. 22	5762. 91	56. 38	
— 10. 27			105. 87		
70. 54. 31	94500.00	22. 40. 48	5657. 04—	56. 42	Ov
10. 34			105. 77		
71. 5. 5	94600.00	22. 42. 14	5551. 27	56. 46	
— 10. 39			105. 65		
71. 15. 44	94700.00	22. 43. 41	5445. 62	56. 49	
10. 46			105. 54		
71. 26. 30	94800.00	22. 45. 7	5340. 08	56. 53	
— 10. 51			105. 43		
71. 37. 21	94900.00	22. 46. 34	5234. 65	56. 56	
10. 57			105. 32		
71. 48. 18	95000.00	22. 48. 0	5129. 33	57. 0	
— 11. 4			105. 21		
71. 59. 22	95100.00	22. 49. 26	5024. 12	57. 4	
11. 12			105. 09		
72. 10. 34	95200.00	22. 50. 53	4919. 03—	57. 7	
— 11. 18			104. 99		
72. 21. 52	95300.00	22. 52. 19	4814. 04	57. 11	
11. 24			104. 88		
72. 33. 16	95400.00	22. 53. 46	4709. 16	57. 14	
— 11. 31			104. 77		
72. 44. 47	95500.00	22. 55. 12	4604. 39+	57. 18	
11. 39			104. 65		
72. 56. 26	95600.00	22. 56. 38	4499. 74—	57. 22	
— 11. 47			104. 55		
73. 8. 13	95700.00	22. 58. 5	4395. 19	57. 25	
11. 54			104. 44		
73. 20. 7	95800.00	22. 59. 31	4290. 75	57. 29	
— 12. 3			104. 33		
73. 32. 10	95900.00	23. 0. 58	4186. 42	57. 32	
12. 13			104. 22		
73. 44. 23	96000.00	23. 2. 24	4082. 20	57. 36	
— 12. 22			104. 11		

	ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*
	12. 22			104. 11	
	73. 56. 45	96100.00	23. 3. 50	3978. 09	57. 40
	12. 30			104. 01	
	74. 9. 15	96200.00	23. 5. 17	3874. 08+	57. 43
	12. 41			103. 89	
	74. 21. 56	96300.00	23. 6. 43	3770. 19—	57. 47
	12. 50			103. 79	
	74. 34. 46	96400.00	23. 8. 10	3666. 40	57. 50
	13. 1			103. 68	
O 2	74. 47. 47	96500.00	23. 9. 36	3562. 72	57. 54
	13. 13			103. 57	
	75. 1. 0	96600.00	23. 11. 2	3459. 15—	57. 58
	13. 23			103. 47	
	75. 14. 23	96700.00	23. 12. 29	3355. 68	58. 1
	13. 37			103. 36	
	75. 28. 0	96800.00	23. 13. 55	3252. 32	58. 5
	13. 50			103. 25	
	75. 41. 50	96900.00	23. 15. 22	3149. 07—	58. 8
	14. 3			103. 15	
	75. 55. 53	97000.00	23. 16. 48	3045. 92	58. 12
	14. 16			103. 04	
	76. 10. 9	97100.00	23. 18. 14	2942. 88	58. 16
	14. 30			102. 93	
	76. 24. 39	97200.00	23. 19. 41	2839. 95	58. 19
	14. 45			102. 83	
	76. 39. 24	97300.00	23. 21. 7	2737. 12	58. 23
	15. 1			102. 72	
	76. 54. 25	97400.00	23. 22. 34	2634. 40	58. 26
	15. 18			102. 62	
	77. 9. 43	97500.00	23. 24. 0	2531. 78	58. 30
	15. 37			102. 51	
	77. 25. 20	97600.00	23. 25. 26	2429. 27	58. 34
	15. 55			102. 41	
	77. 41. 15	97700.00	23. 26. 53	2326. 86+	58. 37
	16. 17			102. 30	
	77. 57. 32	97800.00	23. 28. 19	2224. 56	58. 41
	16. 40			102. 20	
	78. 14. 12	97900.00	23. 29. 46	2122. 36+	58. 44
	17. 5			102. 09	
	78. 31. 17	98000.00	23. 31. 12	2020. 27	58. 48
	17. 31			101. 99	
	78. 48. 48	98100.00	23. 32. 38	1918. 28	58. 52
	17. 59			101. 88	
	79. 6. 47	98200.00	23. 34. 5	1816. 40—	58. 55
	18. 27			101. 78	
	79. 25. 14	98300.00	23. 35. 31	1714. 62—	58. 59
	18. 58			101. 68	
	79. 44. 12	98400.00	23. 36. 58	1612. 94	59. 2
	19. 34			101. 58	
O 2v	80. 3. 46	98500.00	23. 38. 24	1511. 36+	59. 6
	20. 12			101. 47	
	80. 23. 58	98600.00	23. 39. 50	1409. 89+	59. 10
	20. 53			101. 37	
	80. 44. 51	98700.00	23. 41. 17	1308. 52+	59. 13
	21. 42			101. 26	
	81. 6. 33	98800.00	23. 42. 43	1207. 26	59. 17
	22. 53			101. 17	
	81. 29. 26	98900.00	23. 44. 10	1106. 09+	59. 20
	24. 6			101. 06	
	81. 53. 32	99000.00	23. 45. 36	1005. 03+	59. 24
	25. 6			100. 96	

ARCUS *Circuli cum differentiis*	SINUS *seu Numeri absoluti*	*Partes vicesimae quartae*	LOGARITHMI *cum differentiis*	*Partes sexagenariae*
25. 6			100. 96	
82. 18. 38	99100.00	23. 47. 2	904. 07+	59. 28
26. 28			100. 85	
82. 45. 6	99200.00	23. 48. 29	803. 22—	59. 31
27. 54			100. 76	
83. 13. 0	99300.00	23. 49. 55	702. 46	59. 35
30. 20			100. 65	
83. 43. 20	99400.00	23. 51. 22	601. 81	59. 38
32. 40			100. 56	
84. 16. 0	99500.00	23. 52. 48	501. 25+	59. 42
36. 30			100. 45	
84. 52. 30	99600.00	23. 54. 14	400. 80	59. 46
41. 9			100. 35	
85. 33. 39	99700.00	23. 55. 41	300. 45	59. 49
48. 54			100. 25	
86. 22. 33	99800.00	23. 57. 7	200. 20	59. 53
1. 3. 42			100. 15	
87. 26. 15	99900.00	23. 58. 34	100. 05	59. 56
2. 33. 45			100. 05	
90. 0. 0	100000.00	24. 0. 0	000000. 00	60. 0

Joannis Kepleri,

IMP. CÆS. FERDINANDI II.
MATHEMATICI,

SUPPLEMENTUM CHILIADIS LOGARITHMORUM,

Continens

PRÆCEPTA DE EORUM USU,

AD

ILLUSTRISS. PRINCIPEM ET DOMINUM,

DN. PHILIPPUM LAND-
GRAVIUM HASSIÆ, &c.

MARPURGI,
Ex officina Typographica Casparis Chemlini.

cIↃ IↃ cXXV.

113 JOANNIS KEPLERI

SUPPLEMENTUM CHILIADIS LOGARITHMORUM,

CONTINENS

PRAECEPTA DE EORUM USU.

LECTORI S.

Cum anno 1621. venissem in Germaniam superiorem, passimque cum peritis rerum Mathematicarum de Logarithmis Neperianis contulissem: deprehendi eos, quibus aetas prudentiam addebat, promptitudinem minuebat, super hoc genere numerorum, loco Canonis Sinuum in usum recipiendo, cunctari: quod dicerent turpe esse Professori Mathematico, super compendio aliquo calculi pueriliter exultare, interimque sine demonstratione legitimâ formam calculi in usum recipere, quae olim, cùm minimè metueres, in erroris insidias te pertrahere posset. Querebantur NEPERI demonstrationem niti figmento motus cujusdam Geometrici, cujus lubricitas et fluxibilitas inepta esset, in quâ solidus ille stilus Rationis Demonstrationumque firmum poneret vestigium. Haec mihi causa fuit, statim tunc concipiendi rudimentum aliquod Demonstrationis legitimae; quod posterius, ut primùm Lincium reversus sum, excolui diligentius: maximè postquàm initio anni 1622. super ea re cum Illustri et Generoso D. D. PETRO HENRICO à STRA-
114 LENDORFF, S. Caes. | Majest. in consistorio Imperiali Aulico vice Praeside, etc. contulissem; qui ut est harum artium avidissimus, rogando plurium me rerum admonuit, quàm liber aliquis benè crassus praecipiendo admonere posset. Per illam igitur hyemem solennem rei demonstrationem sum aggressus; subjectum hujus speculationis, quodnam esset genuinum, descripsi; quodque id non esset verè sub genere vel linearum, vel motus fluxusque, aut cujusquàm alterius quantitatis sensilis, ut sic dicam, sed sub genere Relationum quantitatisque mentalis, evidentibus enunciationibus constitui: deinde cùm, ut omnes caeterae, sic etiam mentalis ista quantitas (λόγος Graecis dicta, quod Latini Rationem minus usitatè, crebrius Proportionem transferunt) divisionem in infinitum recipiat: metas etiam hujus divisionis congruas, ex eodem scilicet genere rerum constitui: Lineae enim punctis, motus articulis temporum dividi solet; at Proportionem dispescunt termini

20) supra 30) quantiatas

inter extremos magnitudine medii. Hisce sic constitutis feliciter, procedebat demonstratio: vera proportionum omnium communicantium communisque mensura facta est et ipsa de genere proportionum: locus est factus Arbitrio, in eligendo proportionis Elemento, quodnam deberet haberi pro minimo, proque mensura: demonstratum etiam est plerunque esse proportiones inter se incommunicabiles; eoque minimum unius Elementum quod placuisset, non posse esse mensuram genuinam proportionis cujuscunque alterius: semper enim peccari vel excessu, vel defectu. Ea de causa factus jam est hic alter locus Arbitrio, ut quinam defectus, quae minimorum Elementorum incommunicabilium differentia dissimulari posset, inque profundum insensibilitatis demergi, constitueretur, ut sic tandem in usum ipsum numerorum redundaret, absurda quidem demonstranti, sed utilissima computanti, *incommunicabilium proportionum communis mensura, Logarithmus dicta.*

Simul autem fuit ipso opere monendus Lector meus, Logarithmos non primum nasci cum Sinubus, seu rectis in Circulo, quod Neperiana descriptio incautius inspecta prae se ferre videtur, sed foris extra Geometriam Circuli constitui, tanquam intra metas libri quinti EVCLIDIS: inde verò transsumptos, applicari Sinubus, eoque concipiendam esse animo (quam ipse dudum descripseram in Tabula) Matricem quandam Logarithmorum, ex qua omnis per numeros expressa quantitas, etiam Sinus ipsi, suos Logarithmos peterent, ea ipsa numerorum fide, quâ Sinus ipsi sunt in Geometria Circuli definiti: ut si qui Sinus non legitimo numero sit expressus, idem etiam ex hac Matrice Logarithmum imperfectum hausurus sit, nullo Matricis, sed suo proprio vitio. Hoc igitur proposito et computata est à me Chilias Logarithmorum, et adornata etiam demonstra'tio; quae Ordinem praecipuè numerorum *115* Chiliadis est complexa, causasque ejus in lucem profert. De usu Chiliadis populari cogitatio aequalis quidem tempore, naturâ tamen fuit posterior. Chiliada cum demonstratione, ut primùm perfecta fuit, transmisi Lincio tanquam ad PHILIPPVM LANDGRAVIVM HASSIAE, sed per ambages itinerum, in quibus libellus haesit in tertium annum usque. Spes interdum affulsit mihi, libellum excusum iri curâ peritorum: sed ea subinde iterum extincta fuit. Itaque refrixit etiam apud me studium libelli exornandi. Tandem in manus Patroni sui Illustrissimi perlatus, me penitus ignaro, nec quicquam tale opinante, typis mandatus fuit; ut prius ex Catalogo Nundinarum Francofurtensium, quàm ex Literis Cels. suae (quas adhucdum in itinere esse nuper admodum rescivi) quid ageretur perceperim. Non dubito, quin Cels. sua in literis me moneat, si quid de usu Chiliadis conceperim, ut id subsidio mittam, quo commendatior et utilior libellus exeat. Nam illi jam superius commemorati fines scrip-

tionis, reconditiorem sensum habent, adque paucos pertinent. Et habet sanè ipsa Chilias tres columnas superadditas, quae totae se à subtilitate illa demonstrationum subducunt, adque usum conferunt. Vt igitur, quod in hac editione temporum et locorum culpâ fuit omissum, suppleatur, ut scilicet Chilias ista, è penetralibus illis speculationum et demonstrationum, quarum praecipuè causâ composita fuit, etiam ad populares usus educatur, prius sunt aliqua mihi praefanda de Titulo. Is profitetur Demonstrationem legitimam ortus Logarithmorum. Et spero fassuros esse Geometras, quod in chartis excusis hunc scopum sim consecutus. Profitetur verò etiam Demonstrationem usus Logarithmorum. Hic subsiste lector. Dum enim rei demonstrationem polliceor, rem ipsam praesuppono jam antea notam, vulgoque tritam. Quaenam verò res ista? quis usus Logarithmorum? Nimirum is ipse, qui jam ante decem annos à primo authore NEPERO fuit traditus, quique tribus verbis potest concipi: *Vbicunque occurrunt in Arithmetica communi, inque Regula Trium duo numeri inter se multiplicandi, ibi sunt eorum Logarithmi in unam summam addendi; ubi verò Numerus absolutus jubetur factum dividere, ibi Logarithmus illius est auferendus à Logarithmorum summâ: ut Logarithmus illic acervatus, hic residuus, monstret numerum in qualibet operatione quaesitum*. Hic, inquam, est usus Logarithmorum. Hujus usus demonstrationem habes in Propositionibus XVIII. XIX. XX. ut vides in earum Corollariis expressis verbis indicatum. Perpende rem, dices, scio nihil promissum esse in tituli verbis allegatis, quod non sit praestitum in his tribus Propositionibus. Quod verò pulli Arithmeticorum
116 implumes, facilitatum avi|di, rostra ad hanc usus mentionem in immensum pandunt, velut hausuri omnes praeceptiuncularum particularium bolos, quibus exsatientur: id equidem praestare in chartis istis, quae demonstrationi fundamentorum erant destinatae, non potui. At dixeris, sequentia verba Tituli de novâ Arithmeticâ omninò plura polliceri? Video equidem irritamenta cupiditatum talium, et rideo; mirorque non incidisse mihi, cum subito tabellarii discessu ad properandum compulsus, illud Elogium inventi Neperiani, quo Typographus aliquis illiceretur, titulo libelli mei subjungerem, fore ut in majus acciperetur, veluti propria mea gloriatio. Sed utcunque quis hoc meum consilium accipiat, de intentione saltem, me excusat constructio Grammatica. Non de Chiliadis libello, non de mea demonstratione usus dictum vides, sed de Logarithmis ipsis, invento scilicet Neperiano; quod iis nova tradatur Arithmetica. Nec ego haec sequentia praecepta de usu Chiliadis hujus in id submittenda libello jam excuso statui, ut hanc posteriorem tituli partem penitus ad ipsam meam Chiliada traducerem:

17) unum

segregetur ea pars tituli à labore meo, adque inventum ipsum Neperianum, et ad Canonem Logarithmorum Quadrantis referatur. Non titulus iste subitò conceptus, sed utilitas ipsa emptoris me monet, ut quomodo singulae Chiliadis columnae possint ad usum popularem referri et quatenus, pauculis praeceptis docerem. Ea verò referam in certa Capita. In primo paucula praemittam de Tabula Chiliadis. In secundum Caput referam comparationem Columnae arcuum, cum Columnâ Rotundorum. Tertio dicam de comparatione Columnae secundae Sinuum, cum tertia Quadrivicenaria, et quinta Sexagesimorum. Quarto comparabo Quadrivicenariam cum Sexagenariâ. In quinto Capite erit usus Quadrivicenariae, et Logarithmicae columnarum junctarum. In sexto Sexagenariae et Logarithmicae. In septimo comparabitur Columna prima arcuum, cum quartâ Logarithmorum. In octavo jungentur Columna secunda Absolutorum, et Quarta Logarithmorum. In nono denique Columna Logarithmorum jungetur duabus aliis columnis.[1]

121

PRIMUM CAPUT

DE TABULA CHILIADIS, EIUSQUE COLUMNIS

Primum sciat Lector, Exemplar meum in formâ folii scriptum, divisum fuisse in vestibulum Chiliadis, et in Chiliada ipsam. In vestibulum accensentur lineae 36. ut Chiliadis ipsius principium habeatur ibi, ubi est numerus 100.00. Hac monitione opus est. Nam vestibuli non est eadem proportionum sequela, quae Chiliadis ipsius, ut apparet ex ipsis Logarithmorum differentiis: quarum series quater ad idem revertitur initium. Quare nec potuit esse usus idem trium columnarum in vestibulo, qui in Chiliade, eaque de causa relictae sunt vacantes: denique totum vestibulum abesse posset, nisi capite octavo tribuendum id esset Analogiae cum Arithmeticâ communi, et integrationi Numerorum omnium.

Jam Columnas Chiliadis ipsius vides esse quinque, lineas mille. Prima est Columna arcuum Quadrantis, qui habent pro Sinubus Rotundos illos secundae Columnae numeros. Arcus isti sunt expressi ternis membris per puncta inter se discretis, in primo sunt gradus, in secundo scrupula prima, in tertio scrupula secunda, quae, cum suis tertiis et quartis careant, non possunt exacta esse, praeterquam in unico arcu 30. G. inque fine Quadrantis. Quanquam inepta est cura de parte unius
122 Secundi, cùm ipsa applicatio arcuum | horum ad suas lineas, rotundis numeris expressas, eoque effabiles, non sit secuta demonstrationis alicujus subtilitatem, sed solùm popularem inquisitionem partis proportionalis ex Canone Sinuum. Itaque fieri potest, praesertim circa finem quadrantis, ut scrupula secunda paucula passim vel deficiant, vel abundent. Inter lineas insertae sunt differentiae, quantae arcubus per singulas millesimas totius semidiametri accrescunt. Earum minima in principio quadrantis est $3'.\ 26''$ -+, maxima in fine quadrantis est $153'.\ 45''$. seu 2. G. $33'.\ 45''$. quadragecupla quintupla minimae.

Sequitur secunda Columna numerorum: ipsorum Rotundorum. Rotundos hic appello, qui continent exactè partes millesimas sui Maximi in fine positi scilicet 100000.00. hoc est: Rotundi habentur, qui terminantur in quatuor minimum Cyphras rotundas, Nullas dictas.

Vicissim Numeri scrupulosi habentur respectu Chiliadis hujus, qui desinunt in cyphras significativas, aut qui minus quàm quatuor Nullas habent in fine. Vt 96300.00. est rotundus, sic etiam 90000.00. At 96350.00. et 96357.00. et 96300.68. et 90000.05. sunt scrupulosi. Atque hi rotundi nostrae Chiliadis, respectu quidem arcuum ad latus sinistrum positorum, appellantur Sinus, respectu verò columnarum caeterarum ad dextram appellantur Absoluti, quia in caeteris columnis intelliguntur numeri significatione aliquâ certâ revincti.

Hic venit observanda causa, cur, cùm Chiliada scribere proposuerim, numerus tamen maximus non sit 1000. sed potius 100000.00. ejusque unitas non 1. sed 100.00. Deinde cur semper ultimae duae numeri cujusque figurae interposito puncto sint separatae, et velut abscissae à reliquis versus sinistram. Causa igitur utriusque rei est eadem, quia nimirum in vulgato Canone Sinuum, maximus seu semidiameter Circuli constat fi|guris totidem, vel enim 100000. vel 10000000. solet usurpari. Et *123*
quia Radius ille ad quinque Cyphras continuatus plerunque sufficit ad calculum, alterius qui septem cyphris exprimitur, rarior est necessitas: hinc postremi Canonis Sinuum excultores coeperunt duas ultimas, tanquam minus necessarias, puncto separare. Atque hoc ego mihi ratus sum observandum in rotundis meis, ut qui sunt etiam loco Sinuum. Si quis iis, ut absolutis, velit uti, poterit quatuor ultimas Cyphras rejicere, quoties id usus aut praecepta sequentia exegerint.

Porrò haec causa attinet etiam columnam quartam, quae praecipua est, Logarithmorum scilicet cum differentiis, de qua nunc plura dicam.

Primum operae precium fecerit computista, qui hâc Chiliade est usurus, si subordinationem differentiarum sub suos Logarithmos subtilibus lineolis adjuvet, ut singulae figurae illarum singulis horum respondeant.

Deinde notet calculator, numeros hos non esse ἀριθμοὺς absolutos, sed esse λογαρίθμους, numeros scilicet relatos singulos ad binos alios numeros, proportionem significantes, quae est inter absolutum ad latus sinistrum positum, et inter maximum Chiliadis seu 100000.00.

Tertiò hi Logarithmi omnes sunt scrupulosi, hoc est, non rotundi. Non tamen exhausta est omnis eorum scrupulositas continuatione hâc eorum usque ad duas figuras ultra punctum. Atque hoc indicatur ibi per signa + plus et — minus passim apposita.

Nam quibus nullum tale adest signum, iis intellige non unum quadrantem unitatis neque deficere, neque abundare: qui verò habent signum +, ii habent insuper plus quàm quadrantem, minus quàm semissem unitatis, aut summum semissem: qui denique habent signum —, eos intellige minuendos | aliquâ particulâ unitatis, quae sit inter *124*
quadrantem et semissem. Qui igitur vult accuratissimè computare, is si duos Logarithmos est additurus cum signo +, summae poterit addere unum insuper semissem: Sin duos cum signo —, de summâ detrahet semissem. Et in Subtractione, si qui est cum signo — subtrahendus erit ab

30) indicatur + ibi 32) unam

aliquo cum signo -+, is residuum faciet semisse auctius. Sin è contrario is qui habet -+ subtrahi debet ab eo qui habet —, Residuum semisse minuendum erit.

Exempla additionis.	12783.34 —	59783.70 -+
	230258.52 —	61618.61 -+
	$243041.85\frac{1}{2}$	$121402.31\frac{1}{2}$
	sive 86 —	sive 32 —
Exempla subtractionis.	59783.70 -+	231263.55 —
	12783.34 —	1005.03 -+
	$47000.36\frac{1}{2}$	$230258.51\frac{1}{2}$
	sive 37 —	sive 52 —

Haec scrupulositas locum habet tantùm in Logarithmis, qui sunt ex- † pressi in Chiliade, quorum correctionem vide in calce harum paginarum: in aliis intercidentibus praestari non facilè potest: nuspiam verò est absolutè necessaria. Immò plerumque contemni possunt duae ultimae post punctum. Denique quantò major Logarithmus, tantò minus periculi in neglectu figurarum differentiae, post duas ad sinistram primas omnium.

Restant Columnae Tertia et Quinta. Et in Tertia quidem sunt numeri Logistici non absoluti; maximus habet 24. G. quot scilicet sunt unius diei Horae, etsi possunt significare promiscuè vel horas, vel gradus. |

125 In Quinta rursum sunt numeri Logistici, complectentes collectionem sexagenariam: itaque maximus est 60′. Tertia quidem numeros exhibet suos tribus membris, in primo sunt integri gradus vel horae, in secundo scrupula prima unius integri, in tertio scrupula secunda. Quinta duobus membris est contenta, scrupulis nimirum et secundis. Cùm autem divisio millenaria non sit apta numeris 24. G. et 60′. fit ut in his duabus columnis ultima unitas scrupulorum secundorum non sit exacta: nam minutiae ejus, quae minus semisse efficiunt, neglectae sunt, quae plus, eae completione unitatis sunt confusae et obliteratae. Pars enim millesima de 24. G. est 0. G. 1′. 26″. 24‴. pro qua scripta sunt 0. G. 1′. 26″. Duae tales partes sunt 2′. 52″. 48‴. pro hoc scripta sunt 2′. 53″. Et in sexagenaria pars millesima est 0′. 3″. 36‴. pro qua scripta sunt 0′. 4″. Duae millesimae sunt 0′. 7″. 12‴. pro quo scripta sunt 0′. 7″. Itaque quaternis lineis semper excessu vel defectu peccantibus, solae quintae sunt exactae. Propriam verò et accommodatam hae columnae † subdivisionem sortientur in Tabulis Rudolphi. In praesens Chiliadi dandae fuerunt partes potiores: Et electus est à me millenarius, tanquam propria collectio numerorum Absolutorum: quia, ut initio dic-

1) eis *statt* is 30) ea

tum, scopus meus fuit, monere lectorem, quod proportiones, earumque mensurae, Logarithmi, accidant primò Numeris Absolutis. Nihil tamen impedit has duas columnas, Tertiam et Quintam, etiam per hanc dispositionem minus exactam et impropriam, millenariam scilicet, fieri utiles: ut in sequentibus dicetur.

CAPUT II

DE ASSOCIATIONE COLUMNAE ARCUUM, ET COLUMNAE ROTUNDORUM

Dixi cur in columnâ Numerorum absolutorum statuerim progressionem Arithmeticam continuam ab unitate ad mille, | seu à 100.00. *126* ad 100000.00. et qua ratione cuilibet ex hisce rotundis in columnâ Arcuum, associaverim suum arcum.

Cùm autem arcus hi omnes sint scrupulosi, fit creberrimè, ut oblato arcu non scrupuloso, aut scrupuloso quidem, sed sic, ut non exactè reperiatur inter arcus Chiliadis, sed inter binos intercidat, ut his, inquam, arcubus jubeamur assignare suos sinus; ut ita Chilias nostra quadamtenus etiam serviat loco Canonis Sinuum, ejusque vices suppleat. Id autem fieri poterit hac ratione.

Per arcum Chiliadis proximè minorem proposito excerpe Sinum Rotundum, eundem arcum aufer à proposito: residua scrupula, prima et secunda, colloca in regula Detri ad dextram, differentiam verò binorum arcuum, inter quos positus intercidit, colloca ad sinistram, in medio colloca numerum progressionis perpetuum scilicet 100.00. et operare per Regulam Detri, prodibunt enim figurae 4. ultimae scrupulosae adjiciendae exscripto sinui rotundo, seu loco deletarum ejus 4. Cyphrarum finalium scribendae.

Vicissim dato sinu scrupuloso, indagabimus etiam ejus arcum; si cum sinu rotundo Chiliadis proximè minore quàm est propositus, hoc est, cùm ejus tribus primis figuris ex septem, excerpamus arcum, deinde de differentia interjecta inter duos arcus proximos, sumamus partem proportionalem scrupulositati, quam 4. ultimae sinus dati figurae complectuntur.

Hic cùm misceantur Numeri diversorum generum, facilè compendium aliquod invenies ex teipso, si bonus es Arithmeticus, ingenioque polles. Si verò nescis compendium, utere nostro, quod huic rei serviturum in Cap. IX. Num. VII. et VIII. rejectum est.

Non quidem erit exactissima vel una, vel altera operatio, praesertim in fine Quadrantis, quia differentia tunc fit subitò magna. Itaque con-

duceret, decem ultimas differentias in denas subdividere, et interpositis
127 Sinubus usque ad quartam figuram[1] scrupulosis, suos illis ex Canone Quadrantis assignare arcus, quod quilibet privatâ operâ poterit. Exceptis verò decem ultimis differentiis, per reliquum Quadrantis perveniemus in notitiam Sinuum ad 5. saltem figuras continuatorum, non multò incertius, facilius etiam, quàm per Canonem Sinuum ad singula scrupula prima extensorum: quia laborem quaerendae partis, quae sit proportionalis adhaerentibus secundis, per Logarithmos sublevamus, ut Capite IX. doceberis. Quomodo etiam secantes arcuum quodammodo haberi ex hâc Chiliade possint, infra apparebit Capite VIII.

Jam quorsum sint nobis utiles Sinus arcuum, id non est hujus loci docere, ubi omnia per Logarithmos perficimus. Adeantur libri qui tradunt Doctrinam Triangulorum per rectos Quadrantis.

CAPUT III

DE COMPARATIONE COLUMNAE SECUNDAE SINUUM, CUM TERTIA QUADRIVICENARIA, VEL CUM QUINTA SEXAGESIMORUM

† Fit interdum, sic exigente parte Arithmeticae, quae Logistica dicitur, ut semidiameter circuli aliter divisa offeratur, quàm in partes denarias, centenarias, millenarias, etc. Verbi causâ diameter Solis vel Lunae deficientis dividitur in partes 12. quas digitos appellamus. Quod si igitur detur aliqua portio diametri in partibus, qualium est semidiameter 100000. ea portio quaesita inter absolutos, statim monstrat è regione sub Quadrivicenariâ quadruplum numerum digitorum, quos valet illa portio.[1]

128 Vt si deficiat sexta pars de ipsâ circumferentiâ Lunae; ad sciendum quot digiti supersint in lumine, posito quod umbra terrae secet diametrum ut recta linea ad rectos angulos: supersunt igitur in lumine 300. gradus. Horum dimidium est 150. G. hoc est 90. G. et 60. G. Partes igitur diametri respondentes erunt 100000. et 86603. Illa in Quadrivicenariâ ostendit 24. G. ista 20. G. 47′. 2″. Summa 44. G. 47′. 2″. Hinc quarta pars est 11. G. 11′. 45″. Et tot sunt digiti rescissi de diametro.

Vicissim si deficiat digitus, quid is valet in dimensione, qualium semidiameter, hoc est 6. digiti, sunt 100000? Quia igitur 24. numerus hujus columnae maximus est quadruplum de 6. sume etiam quadruplum digiti unius, id est 4. G. Hoc verò quaesitum in Quadrivicenaria, offert inter Absolutos 16675.00. circiter.

Eodem modo fit interdum, ut semidiameter valeat Authoribus non 100000. sed 60′. ut solet PTOLOMAEVS, et plerique Astronomorum in indicatione proportionis Orbium. Ii Authores, si exprimant in hac dimensione Sinus arcuum, aut partes quascunque semidiametri: quaesitae eae partes in Sexagenariâ, exhibent in Absolutis valorem illius partis in dimensione hodiernâ Sinuum progressionis denariae.

Exempli causa, quaeritur 38′. 47″. quantum faciat sinum, qualium 60′. est 100000, respondetur 64630. circiter.

Sic etiam vicissim quaeritur 9265. Eccentricitas Martis, quot faciat scrupula, qualium 100000. facit 60′. respondetur 5′. 33″.

CAPUT IV

DE COMPARATIONE QUADRIVICENARIAE CUM SEXAGENARIA

Solet esse pars Tabularum Astronomicarum conversio horarum in scrupula diei et vicissim.[1]

Haec conversio habetur per has duas tabulas satis exactè, praesertim 129
in quintis lineis, quas rotundas dicere possumus.

Verbi causâ Horae 6. G. 28′. 54″. quot valeant scrupula diei? In columna tertia occurrunt 6. G. 28′. 48″. quae faciunt in quinta 16′. 12″. exactè, quia linea est rotunda et quinarii ultima. Residua igitur 6″. unius minuti horarii, quaesita ut horae, dant 15′. 0″. quae jam valent 15‴, junctis scilicet apicibus residui horarii 6″, et horum 15′. horis 6. G. respondentium. Ergò totus numerus 6. G. 28′. 54″. valet scrupula diei 16′. 12″. 15‴.

Vicissim 47′. 39″. scrupula diei quot valent horas?

In Quinta 47′. 38″.+ valent horas 19. G. 3′. 22″.— residuum secundum unicum seu 60‴, quaesita ut 60′. ostendunt 24″. (duobus apicibus, quos illis 60‴. detraxeramus, numero ostenso 24. G. superpositis). Ergò proposita scrupula 47′. 39″. valent horas 19. G. 3′. 46″.— Non prodit enim hic exactum, quia linea est scrupulosa, quarta scilicet sui quinarii.

Sed si memor eris eorum, quae capite primo sunt dicta de his linearum quinariis, quod scilicet in primis intelligantur accedere quadrivicenario numero 24‴. in secundo deficere 12‴. in tertio accedere 12‴. in quarto deficere 24‴. et sexagenario numero in primâ linea deficere 24‴. in secunda accedere 12‴. in tertia deficere 12‴. in quarta accedere 24‴. poteris etiam ex quatuor prioribus quinarii lineis exactè excerpere con-

20) Residuum

versiones istas. Nam exactè 47'. 38''. 24'''. valent 19. G. 3'. 21''. 36'''. Ergò residua 36'''. unius secundi quaesita 36'. ostendunt horas 14. G. 24'. valentque 14''. 24'''. Itaque totus 47'. 39''. valet exactè horas 19. G. 3'. 36''. 0'''.

† In Tabulis Rudolphi exacta erit ista conversio in lineis omnibus, quia servabitur naturalis, et propria divisio numerorum 24. G. et 60. G. in lineis omnibus.

130 Alia quoque conversio est in usu crebro, Horarum 24. in | Gradus Aequatoris 360. et vicissim. Et potest haec quoque conversio perfici ope harum 2. Tabularum in hunc modum.

Quaeritur, Horae 19. 25'. 37''. quot faciunt gradus et scrupula Aequatoris. In columna igitur tertia 19. H. 26'. 24''. dant 48'. 36''. exactè. Sed temporaria 47''. quaesita ut temporaria 47'. dant 1'. 58''. quae valent 1''. 58'''. Ergò propositae 19. H. 25'. 37''. dant 48'. 34''. 2'''. quae multiplica in 6, et diminue apices, proveniunt 291. G. 24'. 12''. Gradus Aequatoris.

Vicissim Gradus Aequatoris sic convertes in horas: Divide eos per 6, et auge apices: quotiens in sexagenariam immissus, ostendit è regione horas quaesitas.

Quaeruntur gr. 259. 34'. 17''. quot sint horae?

Sexta pars est 43. 15'. 43''. Quaere igitur 43'. 15''. 43'''. et monstrabunt in tertia 17. H. 18'. 14''. —

CAPUT V
DE QUADRIVICENARIA CUM LOGARITHMIS COMPOSITA

I. Tabula Diurnorum et Horariorum solet Ephemeridibus praefigi, prolixa admodùm: ubi docemur, dato diurno excerpere horarium ad datum horarum numerum. Excerptio ipsa licet non fatiget mentem multiplicatione, fatigat tamen et mentem additione, et oculos manusque excerptione. At hîc conjunctio Columnae quartae cum tertia, et tollit necessitatem Tabulae diurnorum, et opus peragere docet longè facilius, quippe additione simplici (non Logistica) Logarithmorum.

Quaere enim tam diurnum, quàm horas in Quadrivicenaria, et Log-
131 arithmos ab iis monstratos adde in unam summam; | quae inter Logarithmos quaesita, monstrabit è regione in Columna tertiâ portionem motus
† competentem horis.

Vtile est hoc Praeceptum, ubi magnus est diurnus, non major tamen quàm Gr. 24. ut in Lunâ et Cometarum nonnullis.

12) dat

Exemplum

Sit diurnus Lunae 14. G. 23′. Quaeritur quantum competat Horis 19.42.

Logarithmus ad 14.	23. 0″.	est	51200.	circiter.
Logarithmus ad 19.	42. 0.	est	19730.	circiter.
		Summa	70930.	

Haec quaesita inter Logarithmos, ostendit in Quadrivicenariâ 11. G. 48′. 0″. Tot gradus competunt horis 19. 42′.

Aliud Exemplum

Sit diurnus 2. G. 15′. Horae 9. 38′.

Logarithmus 2.	15.	est 237000.	circiter.
Logarithmus 9.	38.	est 91200.	circiter.
		Summa 328200.	dat 0. G. 54′. 0″.

Potest verò hoc exemplum, ubi diurnus est adeò parvus, aliter etiam et faciliori viâ computari, quam referam in Caput 9.

II. Huc pertinet etiam Ratio computandi Adspectus Lunae cum stellis. Vt si detur separatio diurna duorum Planetarum, et distantia eorum minor quàm illa; quaeraturque quot horis ea conficiatur?

Tunc enim à Logarithmo Distantiae auferatur Logarithmus separationis diurnae, residuum inter Logarithmos quaesitum, ostendit è regione sub Quadrivicenariâ horas competentes.[1]

Exemplum *132*

Sit Mercurii diurnus Retrogradus	2. G.	15′.	
Lunae directus	15.	2.	
Separatio igitur diurna	17.	17.	
Logarithmus est			32840. circiter
Sit Distantia Lunae et Mercurii	12.	23.	
Logarithmus			66170. circiter
Residuum			33330. dat 17. G. 12′.

Tot igitur horis fit aspectus Lunae, ante vel post momentum, quo invenitur haec distantia, prout Luna post vel ante Mercurium fuerit.

Si uterque Directus, vel uterque Retrogradus esset, minor diurnus à majori subtraheretur, ad eruendam separationem diurnam, uti docemur in Astronomia. De Aspectibus tardiorum inter se infra Cap. 9.

III. Diurnum indagare (minorem quidem quàm 24. H.) ex motu aliquot horarum.

Tunc Logarithmum horarum aufer à Logarithmo Motus competentis, restabit Logarithmus motus diurni.

Exemplum

Promotum deprehendatur Sidus aliquod in horis 4. 27'. Gradus 1. 53'. quantus erit diurnus?

Gradus 1. 53'. Logar. 254500. circiter.
Hor. 4. 27. Logar. 168400.
Residuum 86100. dat gr. 10. 9'. diurnum.

Infra Cap. 9. erit alius modus pro diurnis parvis.

133 IV. Datis tribus stellis in unâ rectâ, datisque singula|rum latitudinibus, duarum verò solarum longitudinibus, indagare et tertiae longitudinem. Item, si pro latitudinibus notae fuerint declinationes, pro longitudine verò sumatur Ascensio Recta.

Cùm hae rectae plerumque sint breves et infra 24. G. nihil nobis nocebit abusus ἄτεχνος curvilineorum ut rectilineorum triangulorum.

Pone in Regula Detri ad sinistram differentiam latitudinum duarum, in medio differentiam longitudinum earundem; ad dextram differentiam iterum latitudinis stellae tertiae et priorum unius; quaesitisque his arcubus in Quadrivicenariâ, exscribantur Logarithmi; additisque secundo et tertio, de summa dematur primus; restabit Logarithmus differentiae longitudinis stellae tertiae.

Vsus hujus praecepti peropportunus est in tractatione observationum per lineas rectas trium stellarum.

CAPUT VI

DE SEXAGENARIA CUM LOGARITHMIS COMPOSITA

Tabulae Hexacontádôn usus est in Logisticâ multiplex, praecipuus quidem ad multiplicationes et divisiones Logisticas, scrupulositatis infinitae, ubi fit progressio ad tertia, quarta, quinta, sexta, et sic deinceps. Tantam subtilitatem non profitetur usus Chiliadis nostrae. Maneat igitur haec utilitas propria Tabulae Hexacontádôn.

Sed quia haec Tabula praefigi solet etiam Tabulis Astronomicis et Ephemeridibus, in quibus non fit progressio ultra secunda, vel ad
134 summum tertia: hunc ejus usum Tabula nostra sexa|genaria plenissimè praestat, ejusque necessitatem penitus tollit: quod docebo praeceptis sequentibus.

I. Multiplicationes logisticas perficere compendiosissimè.

Primum capiant numeri, qui sunt in se mutuò multiplicandi, denominationes seu apices familiares Tabulae Chiliadis. Nam quia in Logistica

10) Idem 11) Assensio

apices antecedentes integra 1. G. versus sinistram, sunt indices sexagenarum, sequentes verò integra 1. G. sunt indices sexagesimorum scrupulorum, seu fractionum unius integri: sciendum igitur, numeros in columnâ sexagenariâ propriè intelligi de sexagesimis scrupulis primis et secundis, tanquam fractionibus unius integri. Ergò si offerantur gradus et minuta in datorum alterutro, pro gradibus scribantur Minuta, pro Minutis Secunda. Tunc iis in sexagenaria quaesitis, excerpantur Logarithmi, addanturque in unam summam; quae inter Logarithmos quaesita exhibebit sub sexagenaria factum in primis et secundis. Sed si prius apices multiplicandorum fuerunt mutati, nunc etiam facti apices erunt mutandi in contrarium, nam quot apices utrique junctim additi sunt, totidem jam uni soli quotienti sunt adimendi, et vicissim.

Exemplum

Sint multiplicandi 25'. 35''. Log. 85240.
et 49'. 50''. Log. 18566.
Summa 103806. dat 21'. 14''. factum.[1]

Aliud 135

15. G. 38'. 40''. sint multiplicanda in 53'. 49''.
Scribe 15'. 38''. 40'''. Log. 134400. Hic apices aucti sunt unitate.
et 53'. 49''. Log. 10900.
Summa 145300. dat 14'. 2''.
Sed scribe 14. G. 2'. detracta ab apicibus unitate vicissim.

Aliud

Sexagenae. Sexagesimae.
39. G. 20'. sint multiplicanda '46. 15. G.
Scribe 39'. 20''. Log. 42227. Hic apices aucti unitate.
46'. 15''. Log. 26028. Hic apices aucti binario.
Summa 68255. dat 30'. 19''. 0'''.
Sed scribe ''30. '19. 0. G. detracto ternario ab apicibus sexagesimariis.
Scilicet hic factus non est 30'. scrupula sexagesima prima, et 19''. secunda, sed ''30. sexagenae secundae et '19. primae, etc.

Aliud Exemplum

Sint multiplicandae sexagenae '37. 41. G. in sexagesimas 32''. 29'''.
Scribe 37'. 41''. Log. 46513. Hic apices sunt aucti binario.
32'. 29''. Log. 61362. Hic apices deminuti unitate.
Summa 107875. dat 20'. 24''.
Sed scribe 20. G. 24'.

Nam propter primum detrahendus esset ab apicibus binarius, propter secundum addenda unitas vicissim. Compensatione igitur contrariorum facta, adhuc detrahenda fuit à facti apicibus unitas.|

136 *II. Quadrare numerum Logisticum facillimè.*

Rursum esto memor, quod numeri in sexagenariâ sint fractiones, eoque numerus quadratus prodiens, quod aestimationem apicum attinet, minor seu minoris valoris sit, quàm quadrandus. Propriissimè quidem quadratus, de quo quaeritur, sic est ad quadrandum, ut hic ad unitatem 1. G. seu 60'. scr. ut sit quadrare logisticè nihil aliud, quàm tertiam proportionalem à maximo columnae sexagenariae invenire.

Numeri igitur quadrandi in sexagenariâ quaesiti Logarithmum duplica, duplum in Logarithmis quaesitum exhibet ex sexagenariâ quadratum, quod quaerebatur.

Exemplum

Sit quadrandus 49'. 53''. Ejus Logarithmus 18450. dupletur ut sit 36900. Hoc in Logarithmis quaesitum exhibet 41'. 29''. Dico igitur 41'. 29''. 0'''. 0''''. esse quadratum numeri 49'. 53''.

Si quid mutandum in apicibus, ut Quadrandus inveniri possit in Chiliade, tunc valent praecepta eadem, quae prius in multiplicatione, tantummodò ut memineris, Quadrandum esse vice duorum in se multiplicandorum.

III. Divisiones Logisticas perficere compendiosissimè.

Primò observentur eadem de aptatione apicum, quae prius circa multiplicandos. Deinde observa, num dividendus (sic aptatus si opus fuit) major fuerit, quàm divisor, an minor. Nam si major, non propriè pertinet operatio ad Chiliada; sed ejus loco dividendus est, vel excessus ejus supra divisorem, vel ejus pars aliquota, minor divisore.

137 Si igitur hoc pacto dividendus logisticus fuerit minor ipso | divisore, tunc Logarithmus divisoris auferatur à Logarithmo dividendi, restabitque Logarithmus Quotientis. Atque is quotiens vel erit excessus itidem, addendus dividendo, ut constituatur verus quotiens, vel erit itidem pars aequè multiplex quotientis, vel denique, si nulla permutatio facta in datis numeris, erit ipse quotiens.

At mutatio in apicibus facta adhuc est compensanda. Nam quantum fuit additum vel subtractum Apicibus divisoris, tantum etiam addendum vel subtrahendum Apicibus Quotientis. Quantum verò apicibus divi-

29) Bogarithmus

dendi vel additum, vel subtractum: tantum contrariâ ratione subtrahendum vel addendum apicibus Quotientis, seorsim utrumque.

Exemplum

Dividantur 29′. 30″. Log. 70995.
in 59′. 0″. Log. 1681.

69314. dat 30′. 0″.

Hic nulla est facta mutatio apicum, nec in divisore, nec in dividendo, quippe dividendus erat minor divisore, casusque proprius Chiliadi. Ergò 30′. 0″. erit quotiens justus. Quod mirari non debes 29′$\frac{1}{2}$. distributa in partes 59′, facere portiones magnitudine 30′. majore, quàm erat totus dividendus. Debes enim cogitare, illa 59′. non esse integra, sed fractionem unius integri, proinde quotiens 30′. est portio debita non uni 1. scrupulo primo, sed uni 1. integro.

Aliud

Dividantur Gr. ‵6. 0.	Scribe 6′. 0″. Log. 230258.
in horas 59. 3′.	59′. 3″. Log. 1550.
	Residuum 228708.[1]

Hoc residuum ostendit 6′. 6″. Si ergò dati habuissent illos apices, cum *138*
quibus excerpsimus Logarithmos, tunc quotiens hic fuisset. At quia apicibus dividendi sunt adjectae duae unitates, sic ut ex 0. G. fierent sexagesima 0″. ex sexagenis verò ‵6. fierent sexagesima 6′: Vicissim igitur quotienti huic 6′. 6″. adimendi duo apices sexagesimarii, ut fiat ‵6. 6. G. Quia verò etiam divisoris apicibus fuit adjecta unitas sexagesimaria, ut pro 59. G. scriberentur 59′. et pro 3′. scriberentur 3″. rursum igitur idem est faciendum Quotienti primo mutato, ut pro ‵6. 6. G. scribatur itidem 6. G. 6′.

Exemplum ubi dividendus major

Dividantur 57′. 23″. major
in 41′. 15″. ut minorem.
Subtrahe, manet 16′. 8″. residuum jam minus divisore.
Ergò divide 16′. 8″. Log. 131300.
in 41′. 15″. Log. 37470.
Residuum 93830. ostendit 23′. 29″.

15) Gr. 6′. 0. 16) dies *statt* horas 18) 6′. 8″. 21) ″0 . . . sexagesima ″6: 31) 131350. 33) 93880.

Cui adde divisorem ipsum totum semel, quia semel tantum erat subtractus à dividendo, colligitur 1. G. 4'. 44''. Quotiens debitus uni integro, cujus divisor 41'. 15''. erat pars seu fractio.

Exemplum de parte aliquota

Sint dividendi 3. G. 45'. 13''. per 57'. 8''. Cùm igitur contineatur divisor in dividendo, crassâ aestimatione, minus quàm quater: operabor per dividendi partem quartam, quae facilè sumitur, estque

	56'. 18''. 15'''.	Log. 6360.
Divisoris	57'. 8''.	Log. 4900.
	Residuum	1460. |

139 Hoc ostendit quotientem 59'. 8''. Hujus igitur sumendum est iterum quadruplum scilicet 3. G. 56'. 32''.

Nota hoc Exemplum potuisset etiam tractari aliter pro 3. G. 45'. 13''.

scribendo	3'. 45''. 13'''.	Log. 277000.
Divisor	57'. 8''.	Log. 4900.
	Residuum	272100.

Hoc enim ostendit 3'. 56''. 30'''. Quia verò apicibus dividendi fuit apposita unitas: detrahatur vicissim apicibus quotientis unitas, fietque quotiens 3. G. 56'. 30''. ut prius.

Quomodo compendiosè sit agendum, si dividendus fuerit aliquoties major divisore, tradetur infra Capite 9. modus etiam alius.

IV. Operari per Regulam Proportionum, Detri dictam, in Logisticis.

Si trium datorum unus sit pura unitas, sic ut ea possit aptari pro 1. G. seu 60': siquidem haec unitas fuerit primo loco ad sinistram: tunc operatio absolvitur per meram additionem Logarithmorum, loco primo traditam. Sin autem fuerit haec pura unitas 1. G. seu 60'. loco secundo vel tertio, tunc operatio perficitur per simplicem subtractionem Logarithmorum loco secundo propositam. At si nuspiam fuerit pura unitas, tunc sinistimi Logarithmus aufertur à summa duorum Logarithmorum residuorum, si potest: vel quod idem est, sinistimi Logarithmus aufertur ab uno duorum residuorum, si potest; residuum addetur Logarithmo tertii: utroque modo conficitur Logarithmus Quotientis. |

17) Haec

Exemplum 140

29'. 45''. dat 15'. 43''.	quid 58'. 47''?		Vel	133970.
Log. 70150. 133970.	2050.		Aufer	70150.
	Adde	133970.	Resid.	63820.
	Summa	136020.	Adde	2050.
	Aufer	70150.		65870. ut prius.
	Residuum	65870.		

Quotiens ostenditur 31'. 3''.

Si sinistimi Logarithmus à summâ reliquorum subtrahi non potest, si nimirum sinistimus datus, minor fuerit utroque reliquorum dato seorsim: id indicio est, Quotientem excrescere supra 1. G. seu 60'. Quare operare per secundi vel tertii partem aliquotam, quotientisque prodeuntis sume aequè multiplicem: vel operare per excessum alterutrius datorum, supra datum sinistimum; Quotientique emergenti adjunge ipsum sinistimum: uti in divisione doctus es.

V. A Numero Logistico proposito Radicem extrahere Quadratam facillimè.

Ne turberis, quod Radix sit major suo Quadrato: fit enim hoc propterea, quia numeri Sexagenariae sunt fractiones unius integri: ut suprà dictum. Radix enim Logistica nihil est aliud, quàm medium proportionale inter integrum 1. G. et numerum Logisticum integro minorem, vel etiam majorem.

Ergò numeri propositi Logistici Logarithmum bipartire, semissis enim quaesitus inter Logarithmos in sexagenariâ ostendet radicem quaesitam.

Exemplum

Quadratus esto 50'. 27''. Logar. 17360.
Semissis 8680.[1]

Hic semissis ostendit Radicem 55'. 0''. eritque ut 1. G. 0'. 0''. ad 55'. 0''. sic hoc ad 50'. 27''. ferè. 141

Quod si Quadratus habuerit alios apices, quàm in sexagenariâ, quaeratur ejus partis quadratae, quae minor fuerit integro, puta quartae, vel nonae, vel sedecimae, etc. radix, eaque inventa vicissim duplicetur, triplicetur, vel quadruplicetur, etc.

Sit Quadratum 1. G. 39'. 20''. Hic cùm excurrat supra integrum, sic ut inveniri non possit in sexagenariâ, tento ejus quadrantem 24'. 50''. Hic cùm jam inveniatur in sexagenariâ, ejus ergò Log. 88190. semis-

19) qui 36) tanto

sis 44095. ostendit 38'. 36''. radicem Quadrantis; ejus ergò duplum 1. G. 17'. 12''. est radix quaesita; seu magis propriè est medium proportionale inter 1. G. 0'. 0''. et 1. G. 39'. 20''.

Mirabitur hoc imperitus, quomodo 1. G. 17'. sit radix de 1. G. 39'. reputans illic esse 77'. hic 99'. et verò radicem de 99'. esse paulò minorem quàm 10'. At memineris integrum in sexagenariâ non esse unum scrupulum, sed unum gradum: proinde hujus unitatis linearis quadratum, itidem est unitas superficiaria valens Gr. 1. seu 60'. Et sic unitatis linearis, cum fractione appendice, per 17'. expressâ, quadratum rectè fit unitas superficiaria cum fractione appendice per 39'. expressâ. Si verò cogitationem ab hâc unitate gradus transferas ad unitatem scrupulariam: tunc unitas linearis scrupularia quadratum habet unitatem superficiariam, quae valet scrupulum: Et sic prioris unitatis graduariae 60'. scrupula in formam redacta quadratam, latus habebunt paulò brevius 8. unitatibus lineae scrupulariae. Vnde elucet consensus rei utriusque.

VI. Inter duos numeros Logisticos medium proportionale constituere.

Si datorum unus est 1. G. 0'. 0''. jam modò doctus es idem facere per
142 extractionem radicis. Haec est enim medium proportiona|le. Si verò non est intègrum sexagenariae, scilicet 1. G. inter datos, adde datorum Logarithmos, summae semissem quaere inter Logarithmos, et excerpes ex sexagenariâ quaesitum Medium proportionale.

Exemplum

Sint dati	25'. 35''.	Logarith.	85240.
et	49'. 50''.	Logarith.	18566.
		Summa	103806.
		Semissis	51903. dat 35'. 43''.

Erit igitur ut 25'. 35''. ad 35'. 43'', sic hoc ad 49'. 50''.

VII. In specie hîc docemur partem proportionalem venari in Tabulis aequationum et alibi.

Fit autem secundum praecepta praemissa multò compendiosissimè, quoties totum, quod debetur uni gradui, seu Horae, seu 60. minutis, non superat 60'. minuta. Adduntur enim Logarithmi: 1. Differentiae uni gradui, vel horae respondentis, et 2. scrupulorum, integris gradibus vel horis adhaerentium summa inter Logarithmos quaesita exhibet ad latus sub sexagenariâ partem proportionalem quaesitam.

3) 39'. 28''. 15) consensui

Sit Anomalia 136. G. 47'. 14''. et excerpatur cum integris 136. G. aequatio 4. G. 15'. 23''. Sitque differentia aequationum duarum vicinarum decrescentium 37'. 29''. Quaeritur pars proportionalis scrupulis 47'. 14''.

Logarith. 47'. 14''. est 23920. circiter.
Logarith. 37'. 29''. est 47050. circiter.
Summa 70970. dat 29'. 30''.

partem proportionalem decrementi, ablata igitur haec à 4. G. 15'. 23''. relinquit 3. G. 45'. 53''. aequationem correctam. |

Exemplum aliud 143

Sit Horarius 31'. 24''. sint Minuta unius Horae 41'. 48''. quaeritur quantum iis debeatur de Horario? Adde Logarithmos 64770, et 36150. Summa 100920. ostendit partem proportionalem 21'. 52''.

VIII. Dato Horario Lunae à Sole, datisque scrupulis incidentiae, Morae dimidiae, vel durationis dimidiae: eruere Tempus incidentiae, Moram dimidiam, vel durationem dimidiam in Eclipsibus.

Vel:

Dato Horario, datoque arcu percurrendo, indagare numerum Horarum et Minutorum, intra quos arcus percurritur.

Primum aufer Horarium Lunae à Sole quoties potes à datis scrupulis, totiesque scribe unam Horam.

Deinde à Logarithmo residui, quod minus erit Horario, aufer Logarithmum Horarii, restabit Logarithmus Minutorum horis integris adjiciendorum.

Sint scrupula 53'. 16''.
Horar. Lunae à Sole 31'. 24''. Aufer semel et scribe Hor. 1.
Residuum 21'. 52''. Logar. 100920.
Horarii 31'. 24''. Logar. 64770.
Residuum 36150. dat 41'. 48''.

Ergò tempus est H. 1. 41'. 48''. |

IX. Dato numero Horarum et Minutorum, cui respondeat datus minor numerus Graduum et Scrupulorum, inquirere Horarium: oportet autem Horarum numerum infra 60'. esse. 144

Quaere datos (diminutis signis) in sexagenariâ, et Logarithmum Horarum, aufer à Logarithmo graduum; residuum est Logarithmus Horarii ex eadem sexagenariâ excerpendi cum ipsis signis.

8) 3. G. 41'. 55''.

Vt si horis 50. 26'. Luna promoveatur Gr. 28. 3'.
Diminue signa, ut stent illic 50'. 26''. hic 28'. 3''.

Jam igitur à Logarithmo	28'. 3''. sc.	76036.
Aufer Logarithmum	50'. 26''. sc.	17469.
	Residuum	58567.

ostendit Horarium 33'. 24''. retentis signis.

Appendix

Si plures essent gradus quàm horae, aufer numerum Horarum à numero Graduum quoties potes, totiesque scribe unum gradum in quotiente. Deinde cum eo, quod de gradibus fuerit residuum, operare, ut jam dictum, prodibuntque scrupula et secunda, gradibus integris in quotiente scriptis, addenda.

Sed haec Cap. 9. tradentur per alium modum simpliciorem, et magis proprium, ut mutatione apicum non sit opus.

Compendium

Conducit etiam ad brevitatem, si major numerus fuerit infra 30, uti tunc operemur per utriusque duplum.

Vt si Horis 25. 13'. Luna promoveretur Gr. 14. $1\frac{1}{2}$. hoc perinde esset ac si Horis 50. 26'. responderent gr. 28. 3'. |

145 *X. Si Triangulum Rectangulum, seu planum, seu Sphaericum, omnia latera minora habuerit quàm 1. G. seu 60' : tunc datis duobus lateribus circa rectum, per Logarithmos invenire latus tertium recto subtensum, seu Basin.*

Facilius quidem fit, in Sphaericis quidem per Antilogarithmos Canonis, seu ut Cap. 7. dicetur, per Logarithmos complementi: si tamen per opportunitatem etiam sexagenariâ placeat uti: sic poterit operatio institui.

Logarithmos laterum excerptos singulos seorsim duplica, cum his duplis, ut Logarithmis, excerpe laterum Quadrata ex sexagenariâ, eaque in unam summam adde, summa quaesita in sexagenariâ, exhibebit è regione Logarithmum, cujus semissis, ut Logarithmus quaesitus, ex eadem sexagenariâ exhibebit Basin quaesitam.

Vt si sint latera 28'. 17''. et 50'. 31''. eorum Logarithmi 75200. et 17200. dupli horum 150400. et 34400. ostendunt quadrata laterum 13'. 20''. et 42'. 32''. Summa utriusque est 55'. 52''. Hujus Logarithmus 7140. Et hujus semissis 3570. ostendit Basin 57'. 54''.

13) tradantur 24) dicatur

XI. Vicissim datâ Basi, in sic comparatis, et latere alterutro, invenire latus reliquum.

Rursum duplica Logarithmos basis et lateris dati; per haec dupla excerpe quadrata ex sexagenariâ, minusque à majori subtrahe; residui Logarithmus est duplus Logarithmi lateris quaesiti.

Vt si Basis 57'. 54''. latus 28'. 17''. Logarithmi 3570. 75200. Duplicati sunt 7140. 150400. Quadrata 55'. 52''. et 13'. 20''. Residuum 42'. 32''. Logarithmus 34400. dimidium 17200. quod ostendit 50'. 31''. latus quaesitum. |

CAPUT VII 146

DE COPULATIONE COLUMNAE ARCUUM CUM COLUMNA LOGARITHMORUM

Per solos Logarithmos Arcuum et Angulorum, omnia Triangula Sphaerica solvere, omnia scilicet quaesita ex tribus datis eruere.

Prima autem sunt Rectangula, eorumque casus sedecim, in quibus † inter tria data intelligitur semper ipse Rectus Angulus.

Hic autem vox Complementi crebrò usurpanda, cùm sic solitariè sumitur, semper dat subintelligi *ad Quadrantem:* Basis verò vox pro latere maximo sumitur, quod scilicet angulo recto opponitur. Et loquimur de talibus Rectangulis, quorum latera sunt minora quadrante singula.

I. Ex Basi et angulo latus oppositum.

Addantur invicem Logarithmi datorum, conficietur Logarithmus quaesiti lateris.

II. Ex lateribus Basin.

Addantur invicem Logarithmi Complementorum datorum laterum, conficietur Logarithmus Complementi quaesitae Basis. Vide Cap. 6. Numero 10. modum alium.

III. Ex Angulo et latere adjacente Angulum reliquum.

Addantur invicem Logarithmi anguli et Complementi lateris, conficietur Logarithmus complementi quaesiti Anguli. |

IV. Ex Basi et Latere Angulum oppositum. 147

Auferatur Logarithmus Basis à Logarithmo lateris, restabit Logarithmus Anguli oppositi.

3) duplicia 6) 57200. *statt* 75200. 23) conficitur 31) complenti

V. Ex Angulo et latere opposito Basin.

Auferatur Logarithmus Anguli à Logarithmo lateris oppositi, restabit Logarithmus Basis.

VI. Ex Angulo et latere subtenso Angulum reliquum.

Auferatur Logarithmus Complementi lateris dati à Logarithmo Complementi Anguli dato oppositi, restat Logarithmus ipsius Anguli residui quaesiti.

VII. Ex latere et Basi latus reliquum.

Auferatur Logarithmus Complementi lateris à Logarithmo Complementi Basis, restabit Logarithmus Complementi lateris reliqui. Vide suprà Cap. 6. Num. 11. modum alium.

VIII. Ex Angulis latus.

Auferatur Logarithmus anguli, qui lateri quaesito adjacet, à Logarithmo Complementi Anguli oppositi, restat Logarithmus Complementi lateris quaesiti.

IX. Ex lateribus Angulum.

Addantur in unam summam Logarithmi Complementorum datorum laterum, summa excerpat arcum: Ejus arcus Complementi Logarithmus auferatur à Logarithmo lateris quaesito angulo oppositi, restat Logarithmus Anguli quaesiti.

Pro his compositis casibus aptior est Canon ipse Logarithmorum Quadrantis, quàm Chilias nostra: quia in illo non opus est excerptione arcus, quippe cum ejus complementum statim cum Logarithmo suo è regione in conspectum veniat. Vt jam non dicam, quòd Mesologarithmi Canonis, quibus caret Chilias nostra, praestent hos compositos etiam simplices.

X. Ex Basi et Angulo residuum angulum.

148 Addantur in unam summam Logarithmi datorum, sum|ma excerpat arcum: ejus complementi Logarithmus auferatur à Logarithmo complementi Anguli dati, restabit Logarithmus Anguli quaesiti.

XI. Ex Angulo et latere adjacente, latus oppositum reliquum.

Addantur in unam summam Logarithmi Anguli et complementi lateris, summa excerpat arcum: ejus complementi Logarithmus auferatur à Logarithmo complementi anguli dati, restabit Logarithmus complementi lateris quaesiti.

21) residuus angulus.

XII. Ex Basi et Angulo latus adjacens.

Addantur Logarithmi datorum, summa excerpat arcum; ejus complementi Logarithmus auferatur à Logarithmo complementi Basis, restabit Logarithmus complementi lateris quaesiti, angulo adjacentis.

XIII. Ex Basi et latere Angulum adjacentem.

Auferatur Logarithmus complementi lateris à Logarithmo complementi Basis, residuum excerpat arcum, ab hujus complementi arcu auferatur Logarithmus Basis, restabit Logarithmus anguli adjacentis.

XIV. Ex Angulo et latere opposito latus reliquum.

Auferatur Logarithmus Anguli à Logarithmo lateris, residuum excerpat arcum, à cujus complementi Logarithmo auferatur Logarithmus complementi lateris: restabit Logarithmus complementi lateris reliqui.

XV. Ex Angulo et latere adjacente Basin.

Addantur invicem Logarithmi Anguli et complementi lateris; summa excerpat arcum; hujus complementi Logarith|mus auferatur à Logarithmo lateris dati, restabit Logarithmus Basis. *149*

XVI. Ex Angulis Basin.

Auferatur Logarithmus anguli unius à Logarithmo complementi Anguli alterius; residuum excerpat arcum, ab hujus complementi Logarithmo aufer Logarithmum ipsius Anguli alterius, seu posterius hîc adhibiti, restat Logarithmus Basis.

Exemplum casuum omnium

Sit Basis 72. G. o'. Angulus 50. G. o'.

			Logarithmi.	Complementa.		Logarithmi.
Basis	72. G.	o'. F	5030. A	18. G.	o'. L	117440. O †
Angulus	50.	o'. G	26650. B	40.	o'. M	44190. P
Latus oppositum	46.	45'. H	31680. C	43.	15'. N	37805. Q
Latus majus . .	63.	12'. I	11370. D	26.	48'. R	79635. T
Angulus major .	69.	48'. K	6340. E	20.	12'. S	106350. V

Hoc Exemplum sic fuit constructum

F. G. sunt ex arbitrio, quae dant L. M. Ergò habentur A. B. O. P. Jam per I. ex A. B. habetur C. hinc H. hinc N. hinc Q. Tunc per VII.

4) Logarithus 29) Angelus

ex O. Q. habetur T. hinc R. hinc I. hinc D. Etiam per IV. ex A. D. habetur E. hinc K. hinc S. hinc V. Reliqua Praecepta omnia erunt loco probationis, verbi causâ primum. Ex Basi F. et angulo K. latus I. illi oppositum, invenitur enim D. qui dat I.

Ex primo.	Ex secundo.	Ex tertio.	
5030. A.	37805. Q.	26650. B.	6340. E.
6340. E.	79635. T.	79635. T.	37805. Q.
11370. D.	117440. O.	106285. V.	44145. P.
		pro 106350.	pro 44190.

150

Ex quarto.	Ex quinto.		Ex sexto.	
5030. A.	26650. B.	6340. E.	44190. P.	106350. V.
31680. C.	31680. C.	11370. D.	37805. Q.	79635. T.
26650. B.	5030. A.	5030. A.	6385. E.	26715. B.
			pro 6340.	pro 26650.

Ex septimo.	Ex octavo.		Ex nono.		
117440.O.	26650. B.	6340. E.	37805.Q.		
79635.T.	106350. V.	44190. P.	79635. T.		
37805.Q.	79700. T.	37850. Q.	117440.O.	18.G.o'.	117440.O.
	pro 79635.	pro 37805.	31680. C.		11370. D.
			5030. A.	72. o'.	5030. A.
			26650. B.		6340. E.

Ex decimo.		Ex undecimo.		Ex duodecimo.	
5030. A.	5030. A.	26650.B.	6340. E.	5030.A.	5030.A.
26650. B.	6340. E.	79635.T.	37805.Q.	26650. B.	6340.E.
31680. C.	11370. D.	106285.V.	44145.P.	31680.C.	11370.D.
37805. Q.	79635. T.	6340.E.	26650.B.	37805.Q.	79635. T.
44190. P.	106350. V.	44190.P.	106350.V.	117440.O.	117440.O.
6385. E.	26715. B.	37850.Q.	79700.T.	79635.T.	37805.Q.
pro 6340.	pro 26650.				

Ex decimo tertio.		Ex decimo quarto.	
37805. Q.	79635. T.	26650. B.	6340. E.
117440. O.	117440. O.	31680. C.	11370. D.
79635. T.	37805. Q.	5030. A.	5030. A.
11370. D.	31680. C.	117440. O.	117440. O.
5030. A.	5030. A.	37805. Q.	79635. T.
6340. E.	26650. B.	79635. T.	37805. Q.

3) ex prim. *statt* primum. 17) 73805. Q. 22) 3640. E. 27) (*1. Kol.*) 73805. Q.

Ex decimo quinto.		Ex decimo sexto.	
26650. B.	6340. E.	26650. B.	6340. E.
79635. T.	37805. Q.	106350. V.	44190. P.
106285. V.	44145. P.	79700. T.	37850. Q.
6340. E.	26650. B.	11370. D.	31680. C.
11370. D.	31680. C.	6340. E.	26650. B.
5030. A.	5030. A.	5030. A.	5030. A.

151

Primi igitur octo casus perficiuntur per operationem simplicem; reliqui octo per duplicem, in quibus scilicet semper aliquid aliud quaeritur ante id, quod proponitur, per unum ex octo prioribus.

Resolvuntur itaque 9. in 2. et 4. Sic 10. in 1. et 6. Sic 11. in 3. et 8. Sic 12. in 1. et 7. Sic 13. in 7. et 4. Sic 14. in 5. et 7. Sic 15. in 3. et 5. Sic 16. in 8. et 5.

Excerpsi autem studio Logarithmos rudes, ut si arcus propositus caderet medius inter duos expressos in Chiliade, medium etiam aliquid inter duos illorum Logarithmos eligerem, rotundo fine; ut monerem, etsi neque arcus, neque eorum Logarithmi in Chiliade Rotundi sint, nihil tamen opus esse, ut Calculator sese ubique maceret, minutias consectando, quod equidem grave esset in hâc Chiliade: facilius aliquantò in Canone quadrantis; in quo arcus rotundi sunt, et singula minuta suos habent Logarithmos.

Aliud etiam Compendium non contemnendum (ut ad marginem monui) habet Canon prae meâ Chiliade, quod is arcuum Complementa cum suis Logarithmis exhibet è regione. Itaque quod ego in Chiliade cogor circumloqui longius, Logarithmum scilicet Complementi arcus, lateris, basis, vel anguli: id in Canone brevius exprimimus, Antilogarithmum arcus, lateris, basis et anguli dicentes: ut innuamus excerpendum esse Antilogarithmum è regione Logarithmi. |

Tertium compendium Canonis est in eo, quod is habet etiam Mesologarithmos, per quos casus octo posteriores fiunt simplices, qui sunt hic duplices: verum hoc Canonis compendium apud inexercitatos conjunctum est cum dispendio, quod distrahitur animus additionibus et subtractionibus Mesologarithmorum Cossicis, hoc est, multitudine cautionum, quibus Arithmetica Cossica constat. 152

Sed quod attinet Logarithmos paulò exactiores, ex ipsâ etiam Chiliade excerpendos, ut etiam in hoc satisfiat curiositati quorundam: tradam Cap. sequenti 8. modum elaborandi Logarithmum cuique sinui respondentem; Capite verò 9. modum alium subsidiarium capiendi pro Logarithmis partem proportionalem vulgarem, idque sine labore, mediantibus aliis Logarithmis.

12) 13. in 2. et 14. 30) pro *statt* per

Hactenus igitur de Triangulis Sphaericis Rectangulis egimus. Nunc ad Obliquangula transeamus.

DE TRIANGULIS OBLIQUANGULIS SPHAERICIS:

in quibus Casus sunt 12.

† I. Si dentur duo latera, et angulus uni oppositus: quaeraturque angulus alteri datorum laterum oppositus: ad Logarithmum anguli adde Logarithmum lateris dati, quaesito oppositi, à summa aufer Logarithmum lateris angulo dato oppositi, restabit Logarithmus anguli quaesiti, recto seu majoris, seu minoris.

Exemplum casus primi, Logarithmis rudibus seu rotundis

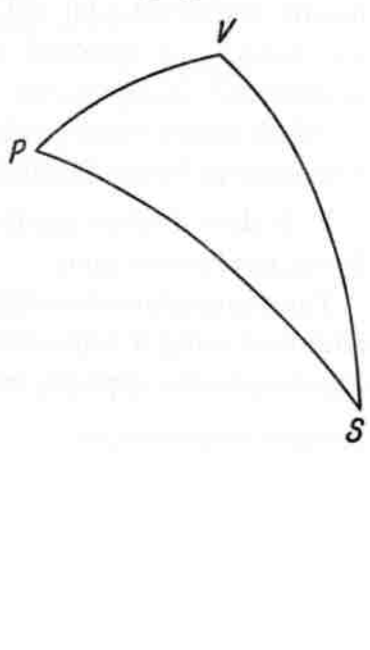
In Triangulo P. V. S. data sunto latera duo P. V. 38. G. 30′. V. S. 40. G. 0′. Angulus V. P. S. 31. G. 34′. oppositus ipsi V. S. Quaeritur angulus V. S. P. lateri V. P. oppositus. [1]

113 V. P. S.	31. G.	34′.	Logarith.	64720.	
V. P.	38.	30.	Logarith.	47480.	
			Summa	112200.	
V. S.	40. G.	0′.	Logarith.	44190.	subt.
			Residuum	68010.	ut

Logarithmus dat V. S. P. 30. G. 26′. circiter.

Hic sitne ipse quaesitus, an ejus residuum ad Semicirculum, facilè discerni poterit ex habitudine laterum, praesertim oppositi P.V. Non est enim mei instituti minimas cautiones hâc vice consectari.

II. Si iisdem datis, quaeratur latus tertium: Tunc adde Logarithmos anguli dati, et lateris attigui dati, prodit Logarithmus perpendiculi dictus. Ejus perpendiculi Logarithmus complementi ablatus à datorum laterum Logarithmis complementi, relinquit Logarithmos duorum arcuum, quorum vel differentia, vel complementorum summa, est latus quaesitum tertium.



III. Si iisdem datis, quaeratur angulus inter latera data comprehensus.

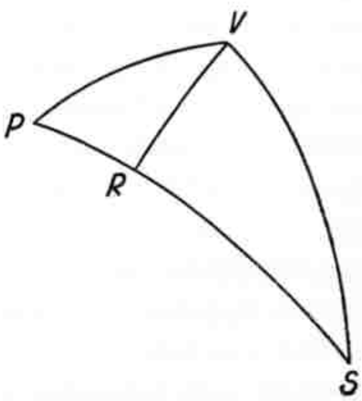
Tunc quaeratur latus tertium, ut praecepto secundo horum. Ejus Logarithmo adde Logarithmum anguli dati, à summâ aufer Logarithmum lateris, cui datus angulus opponitur: restat Logarithmus anguli comprehensi, ejusque complementi ad duos rectos. |

Exemplum II. et III. Casuum *154*

Iisdem datis, quaeratur PS et PVS.

VS.	40. G.	0'.	Log.	44190.	Compl.	50. G.	0'.	Log.	26660.
VPS.	31.	34.	Log.	64720.					
VP.	38.	30.	Log.	47480.	Compl.	51.	30.	Log.	24510.
VR.	19.	0.	Log.	112200.	Compl.	71.	0.	Log.	5600.
SR.	35.	54.			Compl.	54.	6.	Log.	21060.
PR.	34.	8.			Compl.	55.	52.	Log.	18910.
SP.	70.	2.	Log.	6190.					
				70910.					
SVP.	49.	57.	Log.	26720.					

Residuum hoc est angulus comprehensus, seu complementum anguli ad duos rectos, quod facilè patet ex magnâ proportione PS ad PV, VS. Quando verò dubitari potest, tunc quaerenda sunt ejus elementa PVR, RVS.



IV. Si datis duobus lateribus et angulo comprehenso, quaeratur latus tertium.

Tunc ad Logarithmum lateris minoris adde Logarithmum comprehensi, prodit Logarithmus perpendiculi in latus majus, quod perpendiculum constituit duo illius lateris elementa: Hujus enim perpendiculi Logarithmus complementi ablatus à Logarithmo complementi lateris minoris, dat Logarithmum arcus, cujus complementum est alterum ex illis elementis, eoque vel addi, vel auferri debet à toto latere majori; summae vel residui, ut elementi alterius Logarithmum complementi adde Logarithmo complementi perpendiculi, fietque Logarithmus complementi lateris tertii quaesiti. Prior casus est, quando angulus comprehensus et datus obtusus est, posterior, quando acutus. |

V. Si datis duobus lateribus et angulo comprehenso quaeratur angulorum residuorum unus. *155*

Tunc quaere latus tertium, ut in quarto praecepto horum. Ejus Logarithmum aufer à summa Logarithmorum anguli initio dati, et lateris angulo quaesito oppositi, restabit Logarithmus anguli quaesiti.

14) angulus comprehensus *fehlt*

Exemplum IV. et V. Casuum

Dentur VP, PS et VPS, quaeratur VS, et PVS.

				Logar.	Compl.		Logar.
	PV.	38. G.	30'.	47480.	51. G.	30'.	24510.
	VPS.	31.	34.	64720.			
Perpendiculum	VR.	19.	0.	112200.	71.	0.	5600.
Elementum unum	PR.	34.	8.		55.	52.	18910.
	PS.	70.	2.	6190.			
Elementum alterum	RS.	35.	54.		54.	6.	21070.
Quaesitum latus	VS.	40.	0.	44190.	50.	0.	26670.
Summa Log. VPS. et PS.				70910.			
Quaesit. angulus	PVS.	49.	57.	26720.			

VI. Si datis tribus lateribus quaeritur angulus.

† Tunc laterum circa quaesitum angulum exquire differentiam; illam à latere tertio aufer, eidemque adde, et tam residui quàm summae constitue semisses. Hâc praeparatione praemissâ, jam excerpe quatuor Logarithmos, duos semissium, et duos laterum circa quaesitum angulum, summamque horum aufer à summa illorum: Differentiae, quae futura est, semissis, ut Logarithmus, ostendet semissem anguli quaesiti.[1]

156 Exemplum sexti Casus

Dentur VP, PS, SV, quaeratur VPS.

	VP. 38. G.	30'.		Log.	47480.
	PS. 70.	2.		Log.	6190.
	Diff. 31.	32.			53670. Summa.
	VS. 40.	0.	Semisses.		
Residuum	8.	28.	4. 14'.	Log.	260400.
Summa	71.	32.	35. 46.	Log.	53700.
					314100. Summa.
					260430. Summar. diff.
Quaesitus VPS.	31.	34.	15. 47.	Log.	130215. semissis.

Quaeratur PVS.

VP. 38. G.	30'.	Log.	47480.
VS. 40.	0.	Log.	44190.
1.	30.		91670.

4) PV. 30. G.

PS.	70.	2.	Semisses			
	68.	32.	34. 16.	Log.	57440.	
	71.	32.	35. 46.	Log.	53700.	
					111140.	
					19470.	Summar. diff.
Quaesitus PVS.	130.	14.	65. 7.	Log.	9735.	Dimid. |

Quaeratur PSV. *157*

SV.	40. G.	o′.		Log.	44190.	
PS.	70.	2.		Log.	6190.	
	30.	2.			50380.	
VP.	38.	30.	Semisses.			
	8.	28.	4. 14.	Log.	260400.	
	68.	32.	34. 16.	Log.	57440.	
					317840.	
					267460.	Summar. diff.
Quaesitus VSP.	30.	26.	15. 13.		133730.	Dimidium.

VII. Si datis duobus angulis, et latere alteri datorum subtenso, quaeratur latus reliquo subtensum: Ad Logarithmum lateris dati adde Logarithmum anguli adjacentis dati, à summâ aufer Logarithmum anguli lateri dato oppositi; restabit Logarithmus lateris quaesiti, ejusque complementi ad Semicirculum: ubi pro ratione quantitatis datorum, vel ipse Logarithmi arcus, vel ejus complementum ad Semicirculum sumendum est pro latere.

Exemplum VII. Casus

Dentur PVS, VPS, VS, quaeratur PS.

			Logarith.		Aliud.		
VS.	40. G.	o′.	44190.	Latus	40. G.	o′.	44194.
PVS.	130.	3.	26720.	Ang.	30.	28.	67917.
			70910.				112111.
VPS.	31.	34.	64720.	Ang.	80.	o.	1531.
Quaesitum PS.	70.	2.	6190.	Lat. quaes.	19.	19.	110580.|

VIII. Si iisdem datis quaeratur Angulus tertius. *158*

Tunc adde Logarithmos lateris dati, et anguli alterius adjacentis: prodit Logarithmus perpendiculi ex angulo quaesito demissi: cujus Logarithmus complementi, ablatus à datorum angulorum Logarithmis complementi, relinquit Logarithmos duorum elementorum anguli quaesiti,

11) VP. *fehlt* 31) Quaesitum VS

à perpendiculo constitutorum: quorum ideò vel summa constituit quaesitum, si perpendiculum cadit intra Triangulum, vel differentia, si extra.

IX. Si iisdem datis, quaeratur latus interjectum datis angulis.

Tunc quaeratur angulus tertius, ut praecepto VIII. horum. Ejus Logarithmo adde Logarithmum lateris dati; à summa aufer Logarithmum anguli, qui lateri illi dato opponitur, restabit Logarithmus lateris interjecti.

Exemplum VIII. et IX. Casuum

Dentur PVS, VPS, VS, quaeratur VSP et VP.

			Logar.	Compl.		Logar.
VS.	40. G.	o'.	44190.			
PVS.	130.	3.	26720.	40. G.	3'.	44080.
Perpendic. ex angulo S.	29.	29.	70910.	60.	31.	13870.
VPS.	31.	34.		58.	26.	16000.
Elementum unum				47.	40.	30210.
Elementum alterum				78.	14.	2130.
VSP. Quaesitus				30.	34. per subtractionem.	
VSP.	30. G.	34'.	67630.			
			111820.			
VPS.			64720.			
Quaesitum VP.	38.	37.	47100.			

Nota: Arcus 130. G. 3'. } Logarithmus est idem.
et 49. 57. }
At 40. 3. est minoris quadrante complementum; majoris quadrante Excessus.

159 Aliud exemplum

			Logar.	Compl.	Logar.
Latus	40. G.	o'.	44194.	G. '.	
Ang. adjac.	30.	28.	67917.	59. 32.	14859.
Perpendic. ex angulo . .	19.	1.	112111.	70. 59.	5612.
Ang. alter, lateri oppos.	80.	o.	1531.	10. o.	175072.
			Elementum unum	65. 44.$\frac{1}{2}$	9247.
			Elementum alterum	10. 35.	169460.
			Ang. quaesitus	76. 19. per addit.	

23) Quaesitus 32) 5613. *statt* 5612. 34) 56.44$\frac{1}{2}$. 99247 35) 169470.

Angulus tertius	76. G.	19′.		2879.
				47073.
Latus quaesitum angulo tertio quaesito oppositum.	39.	22.		45542.

X. Si datis duobus angulis et latere interjecto, quaeratur angulus tertius, lateri dato oppositus: Tunc ad Logarithmum anguli minoris adde Logarithmum lateris interjecti, prodit Logarithmus perpendiculi ex majori angulo; cujus perpendiculi Logarithmus complementi et asservari debet, et auferri ab anguli illius ejusdem Logarithmo complementi, relinquetur Logarithmus unius elementi illius anguli, unde perpendiculum est demissum. Hoc igitur ablatum ab angulo ipso toto, vel ille ab hoc, relinquit ejus elementum alterum.

Hujus iterum Logarithmus addatur Logarithmo asservato, ita fiet Logarithmus complementi anguli tertii quaesiti, vel ejus excessus supra Quadrantem.

Si datorum angulorum alter est major quadrante, latus datum minus esse debet Quadrante.[1]

Si latus datum est quadrante majus, tunc elementum anguli, quod illi *160*
respondet, est etiam quadrante majus, et sic Triangulum obtusangulum, ubi perpendicularis cadit extra.

XI. Si datis duobus angulis, et latere interjecto, quaeratur laterum residuorum unum: Tunc quaere angulum tertium, ut in praecepto X. horum, ejus Logarithmum aufer à summa Logarithmorum lateris initiò dati, et anguli lateri quaesito oppositi, restabit Logarithmus lateris quaesiti.

Exemplum X. et XI. Casuum

Dentur PVS, VPS, VP, quaeratur VSP, et VS.

			Logar.	Compl.		Logar.
Ang. tot. PVS.	130. G.	3′.	26720.	40. G.	3′.	
VPS.	31.	34.	64720.	58.	26.	16000.
VP.	38.	30.	47480.			
Perpendic. ex V.	19.	1.	112200.	70.	59.	5610. Asservandus.
Vnius elementi anguli	64.	23.				10390.
Alterum elementum ang.	65.	40.	9300.			
			5610. asservatus.			
			14910.	59.	29.	
Quaesitus VSP.	30.	31.	67780.			
Quaesitum VS.	39.	54.	44420.			

XII. Si datis tribus Sphaerici angulis, quaeratur laterum aliquod.

Tunc primum pro angulo maximo scribe et usurpa ejus complementum ad Semicirculum, deinde angulorum latus quaesitum attingentium exquire differentiam: illam ab angulo tertio aufer, eidemque adde, et tam residui quàm summae constitue semisses.[4]

161 Horum Logarithmos adde in unam summam, à quâ aufer summam Logarithmorum duorum angulorum latus attingentium: residui semissis, ut Logarithmus, dat semissem lateris quaesiti ex columnâ arcuum. Excipe casum unum, si nimirum in Acutangulo Triangulo latus quaesitum subtensum fuerit angulorum maximo: tunc operatione per ejus complementum ad Semicirculum peractâ, ut prius, prodit semissis, non ipsius lateris quaesiti, sed ejus itidem complementi ad Semicirculum.

At in Obtusangulo, etiamsi latus quaesitum subtensum fuerit obtuso, et sic maximo, valet nihilominus regula generalis, proditque semissis lateris quaesiti ipsius.

Exemplum XII. Casus

Dentur anguli PVS, VSP, SPV, quaeratur PS.				Logarithmi.	
VSP.	30. G.	28'.		67910.	
VPS.	31.	34.		64720.	
Differentia	1.	6.		132630.	Summa.
Complementum PVS.					
ad Semicirc.	49.	57.	Semisses.		
Differentia	48.	51.	24. 25½.	88309.	
Summa	51.	3.	25. 31½.	84187.	
				172496.	Summa.
				39866.	Diff. sum.
Quaesitum PS.	70.	0.	35. 0.	19933.	Semissis.[5]

162

Quaeratur PV.				
PVS.	130. G.	3'.		Logarithmi.
Compl. ad Semicirc.	49.	57.		26725.
VPS.	31.	34.		64724.
	18.	23.		91449.
VSP.	30.	28.	Semisses.	
	12.	5.	6. 2½.	225142.
	48.	51.	24. 25½.	88309.
				313451.
				222002.
Quaesitum VP.	38.	29.	19. 14½.	111001.

4) exquira

Quaeratur VS.

PVS.	130. G.	3'.		Logarithmi.
Compl. ad Semicirc.	49.	57.		26725.
VSP.	30.	28.		67917.
	19.	29.		94642.
VPS.	31.	34.	Semisses.	
	12.	5.	6. $2\frac{1}{2}$.	225142.
	51.	3.	25. $31\frac{1}{2}$.	84187.
				309329.
				214687.
Quaesitum VS.	39.	57.	19. $58\frac{1}{2}$.	107343.

Aliud Exemplum 163

Sint Anguli circa latus quaesitum.				Logarithmi.	
	30. G.	28'.		67917.	
	76.	19.		2879.	
Differentia	45.	51.		70796.	Summa.
Ang. oppos.	80.	0. Maximus trium.			
Compl. ad Semicirc.	100.	0.			
	54.	9.	27. $4\frac{1}{2}$.	78712.	
	145.	51.	72. $55\frac{1}{2}$.	4508.	
				83220.	Summa.
				12424.	Diff. sum.
	140.	2.	70. 1.	6212.	Semissis.
Quaesitum	39.	58.			

Vicissim sint anguli circa quaesitum hi:

				Logarithmi.	
Maximus trium	80. G.	0'.		1531.	
Compl. ad Semicirc.	100.	0.			
Alter	76.	19.		2879.	
Differentia	23.	41.		4410.	Summa.
Tertius	30.	28.	Semisses.		
Differentia	6.	47.	3. $23\frac{1}{2}$.	282750.	
Summa	54.	9.	27. $4\frac{1}{2}$.	78712.	
				361462.	Summa.
				357052.	Diff. sum.
Quaesitum latus	19.	19.	9. $39\frac{1}{2}$.	178526.	Semiss.

24) Quaesitus

164 Atque haec de obliquangulis, et in universum de Sphaericae superficiei Triangulis curvilineis, quae formantur arcubus Circulorum maximorum.

De Rectilineis verò Triangulis, seu quae formantur in superficie planâ, Capite Nono agetur.

CAPUT VIII

DE COPULATIONE COLUMNAE SINUUM, SEU NUMERORUM ABSOLUTORUM, ET COLUMNAE LOGARITHMORUM

PRAECEPTUM I

Logarithmum excerpere accuratum Numeri scrupulosi propositi.

Etsi rarissimè est opus tantâ scrupulositate, quoties tamen est opus, fit per Prop. 27. Corollarium 3. in hunc modum.

Propositi Numeri scrupulosi excessum super Rotundum Chiliadis † proximè minorem continua, appositis versus dextram septem Cyphris; sic continuatum divide per hunc ipsum proximè minorem, elaboratum tamen prius seu continuatum per unam insuper vel duas figuras scrupulosas, quae contineant dimidium duarum primarum figurarum excessus, vel aliquid proximè minus dimidio: Quotientem aufer à Logarithmo ad dictum rotundum proximè minorem, restabit Logarithmus propositi scrupulosi.[1]

165

Exemplum

Propositus esto scrupulosus	23456.78.		
Chilias exhibet ad Rotundum proximè minorem	23400.00.	Log. 145243.42.	Quo-
Igitur excessus scrupulosi est	56.78.	Log. 242.36.	tiens aufe-
		145001.06.	ratur.
		Hic est Logarithmus quaesitus accuratius.	
Ei apponantur 7 Cyphrae	567800000 00.		

4) superficiei 26) 145001.66.

Hunc divide per inventum Rotundum Chiliadis proximè minorem 2340000.

Sed elaboratum per duas figuras significativas, quae sint dimidium de 56. primis duabus figuris in excessu scilicet per 28. Vt 2342800.

Divisio compendiosa.

56780	
23428	
46856	2.
9924	
9371	4.
553	
469	2.
84	
70	3.
14	
14	6.

Aliud Exemplum

Sin. gr. 81. scrupulosus . . 987 | $68.83\frac{2}{5}$.

Minor Chiliadis . . . . . 987 | 00.00. Log. 1308.52.

Excessus appositis Cyphris	68834000000	
Divisor	98734 00	
	592404	6.
	959360	
Logarith. 1308. 52.	888606	9.
Quotiens. 69. 72.	707540	
1238. 80.	691138	7.
quaesitus.	164020	
	197468.	2. Quotiens.

Hîc prodeunt tantum quatuor figurae.|

Aliud Exemplum 166

Sit Sinus Gr. 9.	15643.45.	
Rotundi ergò .	15600.00.	
Excessus	43.45.	
Divisor	15621	
	31242	2.
	122080	
	109347	7.
	127330	
	124968	8.
	23620	
	15621	1.
	8000	5.

Log. 185789.93.

278.15. Quotiens subt.

185511.78. Log. quaesitus.

2) proximi 32) 12208 35) 124960 38) 80000

Cautio

Raro usu venit, ut opus nobis sit Logarithmo tam scrupuloso et accurato: plerunque sufficit Logarithmus Rotundus, cui non sint plures à sinistris figurae significantes, quàm in quot figuris Logarithmi bini Chiliadis, proximi invicem, nihil inter se differunt, unâ plus.

Vt quia Logarithmus ad 23400.00. est	1452.	43.42.
Sed Logarithmus ad 23500.00. est	1448.	16.98.
Sufficit igitur Logarithmus Rotundus	1450.	00.00.

Quia 1450. est medium inter 1452. et 1448.

Cautio alia

167 Si vero omninò esset opus Logarithmo accuratiore, tunc | scito, quod in Logarithmis valdè magnis ad numeros parvos Chiliadis, divisor debeat esse vicinissimus medio Geometrico inter numerum datum scrupulosum, et inter proximè eo minorem Chiliadis: paulò tamen major medio Geometrico: ut docet allegata Propositio.

Exempli causa

Si quaeratur Logarithmus numeri 150.00. Hic numerus scrupulosus est, quia cadit inter duos Chiliadis proximos, scilicet inter 100.00. et 200.00. Excessus est 50.00. Si hunc divideres per 12500. quod est inter 15000. datum scrupulosum, et inter datum proximè minorem 10000. medium Arithmeticum, prodiret quotiens 40000.00. auferendus à 690775.54. restaretque 650775.54. Sin autem dividas per 12000. Geometricum medium inter 15000. et 10000. quotiens erit 41666.67. qui ablatus à Logarithmo proximè minoris scilicet à 690775.54. relinquit 649108.87. quasi Logarithmum ad propositum absolutum seu Sinum 150.00.

Quod verò Logarithmus iste sit jam minor justo, sic patet per usum praecepti sequentis.

Pro 150.00. sume centuplum 15000.00. ejusque Logarithmum 189712.00. adde Logarithmo centuplicationis 460517.03. Sic colligitur Logarithmus Numeri 150.00. scilicet 650229.03.

Quare Quotiens 41666.67. quem subtrahebamus, erat major justo, ac proinde medium proportionale inter scrupulosum et Chiliadis proximè minorem scilicet 120.00. erat divisor minor justo. |

11) accuratione 26) 125.00. 32) 4166667. quam

Alia exemplaris observatio pro scrupulosorum magnorum Logarithmis accuratis indagandis. *168*

Sit numerus Scrupulosus seu Sinus Gr. 81. 98768.834. Log. accuratus est 1238.80.

Sagitta	1231.166.	
Secantis complementi (9. G.) Exc.	1246.513.	
Summa	2477.679.	
Horum med. Arithmeticum	1238.840.	
Differentia medii arith. et sagitt.	7.673.	
Adde ad sagittam fit	1238.839.	Logarithmus
Vel differentia Excess. et sag.	15.347.	ferè: qui dif-
Ejus dimidium	7.673.	fert à Log-

arithmo accurato solis 4. unitatibus loco secundo post punctum, scilicet quia Logarithmus est adhuc parvus.

Sic per complementum scrupulosi parvum.

Sin. Gr. 84. 16′. . . . . 99499.762.
Chiliadis numerus major . 99500.000. dat Log. 501. 25.
Complementum scrupulosi 24. Quotien-
parvum . . . . 238000000 tem adde.
Divisor 99500000 | 2 501. 49. Log.
4 Quotiens.

Hîc Sagitta	500.238.
et Excess. secant. in Canone	502.753.
Faciunt summam	1002.991.
Dimidium	501.496. Paulò majus est Logarithmo accurato.

Vide super hac re etiam Prop. XXII. Corollaria et praecepta, fol. 31.[1] †

Vt compendiosè excerpas Logarithmos Numerorum quorundam scrupulosorum, scilicet sine Divisione. *169*

Casus primus

Si propositus numerus scrupulosus fuerit minor quàm 10000.00. minor scilicet quàm decima pars Maximi in Chiliade: sic ut Logarithmus ejus sit valdè magnus, et differentiae Logarithmorum circa illa loca non magnae tantùm, sed insuper etiam notabilibus incrementis crescentes. Tunc Logarithmo propositi decupli (qui facilius elaboratur)

19) 238000000 20) 9950000

adde Logarithmum decuplicationis, vel Logarithmo centupli Logarithmum centuplationis, etc. ita habetur Logarithmus propositi Numeri.

Exemplum

Propositus esto scrupulosus 2345.68. hic cùm sit minor quàm 10000.00. ergò quaere Logarithmum ejus decupli sc. 23456.80. Is autem invenitur superiori Methodo 145001.00. Huic igitur adde
Logarithmum decuplationis 230258.51.
Summa 375259.51. est Log. quaesitus Numeri 2345.68.

Aliud exemplum

Propositus esto Numerus scrupulosus 175.00. ut ejus Logarithmus exactus habeatur: quaere centupli 17500.00. Logarithmum, qui est 174296.93. Et pro appositis 00.
adde centuplationis 460517.03.
Emergit Numeri 175.00. Log. 634813.96.

Aliud exemplum

Sinus unius Minuti solet exprimi hoc numero 29.09. quaeritur hujus numeri Logarithmus.[1]

170 Scribe millecuplum 29090.00.
Hoc proximè minor invenitur 29000.00. Log. 123787.43.
Excessus 90.00.

Hic continuatus septem Cyphris, et divisus per 29045.00. medium Arithmeticum inter datum et excerptum: seu ille continuatus 5. Cyphris, et divisus per 29045. dat quotientem 309.87. qui ablatus ab exscripto Logarithmo, relinquit

Logarithmum millecupli	123477.56.
Huic igitur adde Millecuplatorem	690775.54.
Provenit Logarithmus quaesitus	814253.10.

Quod si numerus 29.09. exactè exprimeret Sinum unius Minuti, tunc hic etiam exactus esset Logarithmus unius Minuti: at quia in 29.09. ultima unitas non est omninò plena, ideò etiam Logarithmus unius Minuti est paulò major: ut quidem VRSINVS eum exprimit sic 814257.

Casus secundus

Idem ferè processus est, si datus scrupulosus fuerit major quidem quàm 10000.00. parvus tamen etiamnum et minor quàm maximus Chiliadis. Tunc enim Logarithmo dupli, vel tripli, vel quadrupli (quod quidem non excedat maximum Chiliadis) additur Logarithmus totuplans.

Vt si detur Numerus scrupulosus 23456.78.

Hic etsi major est quàm 10000.00. est adhuc tam parvus, ut ejus quadruplus scilicet 93827.12. sit adhuc minor maximo Chiliadis. Quaeratur igitur hujus Logarithmus: |

Ad 93800.00. est Log. 6400.53. 171

Appendix scrupulosa 27.12. Aufer 28.91. Quotiens auferend.

138629.44. Log. quadruplans add.

145001.06. Logarithmus quaesitus. †

Haec dividitur per	938135	
	1876270	2
	8357300	
	7505080	8
	8522200	
	8443215	9
	78985	1

Hic casus generaliter proponi potest, ut circumspicias, in quâ proportione (terminorum quidem Rotundorum) sit numerus propositus ad aliquem proximè minorem maximo Chiliadis. Tunc constituitur proportionis illius Logarithmus, et per eum augetur Logarithmus illius proximè minoris.

Sit Sinus quicunque, puta 15643.45. hic continetur in 100000.00. sexies, sextuplum enim est 93860.70. Huc potest accedere triens 5214.48. et conficitur 99075.18. Est igitur 15643.45. ad 99075.18. ut 19. ad 3. Logarithmus Novemdecupli est 294443.90. Hinc aufer triplicantem 109861.23. Logarithmus igitur proportionis est 184582.67.

Quare Logarithmus illius multiplicis proximè minoris Maximo Chiliadis per divisionem elaboratus est iste: |

	99075.18.		Logar. 172
	99000.00.		1005.03.
Exc.	75.18.		75.91. Quotiens.
			929.12.
Exc.	7518000000	Adde Log. prop.	184582.67.
Div.	9903700000		185511.79. Log. quaesitus
	693259	7.	Numeri absoluti 15643.45.
	585410		
	495185	5.	
	902250		
	891333	9.	
	10917	1. Quotiens.	

6) Aufert 28.82. 23) 299443.90. 24) 189582.67. *statt* 184582.67.

Casus tertius

Si scrupulosus minor quàm 50000.00. habuerit non plures quàm 4. figuras significativas, earumque ultima fuerit quinarius:

Tunc dupli vel quadrupli Logarithmo in Chiliade invento, adde Logarithmum duplicantem, vel quadruplicantem.

Exempla

Vt si datus sit numerus scrupulosus 49950.00. minor scilicet quàm 50000.00. ejus dupli 99900.00. Logarithmo 100.05. adde Logarithmum duplicationis 69314.72. fit 69414.77. Logarithmus quaesitus.

Aliud

Suprà casu primo quaerendus fuit Logarithmus ad Numerum 17500.00. propter scilicet ejus centesimae 175.00. Logarithmum indagandum. Hic si non positus esset in ipsâ Chiliade, posset sic investigari.

Duplum est 35000.00. quadruplum 70000.00.

Hujus verò Logarithmus est	35667.49.
Huic adde Logarithmum Quadruplatorem	138629.44.
Prodit qui supra	174296.93.[1]

173

Casus quartus

Si datus scrupulosus, duplicatus continuè, tandem sortiatur non plures figuras significativas, quàm tres primas à sinistris, sed tunc excesserit maximum Chiliadis, tum Logarithmo partis 10. vel 100. de hoc sic multiplicato, adde Logarithmum duplicationis vel quadruplicationis, etc. à summâ aufer Logarithmum decuplationis vel centuplationis, etc.

Vt si proponatur Numerus scrupulosus	51250.00.
Hujus duplus est	102500.00.
Et hujus duplus est	205000.00. habens significativas figuras non ultra tres.

Hic verò jam est major quàm 100000.00.

Ergò ejus partis decimae 20500.00. Logarithmo	158474.53.
adde Logarithmum quadruplicantem hoc loco	138629.44.
Et aufer Logarithmum decuplantem hoc loco	230258.51.
Restat Numeri 51250.00. Logarith.	66845.46.

Potuit etiam sumi duplus ipsius 205. etc. scilicet 410. etc. et rursum hujus duplus 820. etc. hujus Log. 19845.09.

Adde sedecuplatorem	277258.88.
	297103.97.
Et aufer decuplatorem	230258.51.
Restat idem quod prius	66845.46.

Casus quintus

Si datus scrupulosus habuerit partem aliquotam, quae solas tres figuras à sinistris habeat significativas: Tunc Logarithmo illius partis aufer Logarithmum totuplantem.[1]

Vt si proponatur Numerus 19980.00. scrupulosus. 174

Hujus semissis est 9990.00. Hujus numeri Logarithmus per praeceptum primi casus invenitur sic:

Decupli 99900.00. Logarith. est	100.05.
Huic adde Logarithmum decuplationis	230258.51.
Ita fit Log. 9990.00. partis dimidiae	230358.56.
Hinc aufer Logarithmum duplationis	69314.72.
Restat Log. numeri 19980.00. quaesitus	161043.84.

PRAECEPTUM II

Dato Numero absoluto, qui excedit maximum Chiliadis (ut sunt secantes arcuum) invenire ejus Logarithmum.

Excedentis dati constitue partem aliquotam, quae non excedat, puta decimam, centesimam, millesimam, etc. vel etiam dimidiam, tertiam, quartam, per Cas. II. praeced.

Ejus partis in Chiliade quaesitae Logarithmus auferatur à Logarithmo totuplationis (ut Decuplationis, Centuplationis, Millecuplationis, vel etiam Duplationis, Triplationis, Quadruplationis) restabitque Logarithmus excedentis privativus.

Vt si quaeratur Logarithmus numeri 102400.00. Hic numerus habet loca octo, cum Chiliadis maximus 100000.00. habens loca itidem octo, sit tamen minor. Quare sumatur numeri dati pars decima 10240.00. utpote quae jam fit minor maximo Chiliadis. Hic numerus cùm jam sit in quarto loco scrupulosus, Logarithmum exactum non invenit in Chiliade, quare per praeceptum praecedens elaborandus est ejus Logarithmus sic:[1]

175 Numerus 10240.00.
In Chil. prox. minor 10200.00. habens Log. 228278.25.

Excess. nostri prolong.	40.000000000		Quotiens 391.39. Subt.
Divisor est	1022 000		227886.86.
Medium scil. Arithmeti-	3066	3.	Hic est Logarithmus
cum inter datum, et	9340		partis decimae: qui ab-
proximè minorem	9198	9.	latus à Logarithmo
Chiliadis.	1420		230258.51. decuplatio-
	1022	1.	nis, relinquit Logarith-
	3980		mum 2371.65. priva-
	3066	3.	tivum signo —, Numeri
	9140		scilicet dati excedentis
	9198	9.	102400.00.

In hoc exemplo, quia pars decima numeri propositi fuit scrupulosa, praestabat nos uti praecepti prioris casu V.

Ecce: Numeri 102400.00. propositi.

Semissis 51200.00. rotundus, habet Log. 66943.07. Subt.
Logarithmus duplicationis est 69314.72.
Restat quod prius 2371.65.

In genere, si fuerint tres numeri continuè proportionales, eorumque Medius idem, qui et Maximus Chiliadis: tunc excedens maximum hunc Chiliadis Logarithmum habet eundem cum minimo trium, sed privativum, signo — praeponendo, ne videatur nihil aliud significare, quàm defectum in figurâ ultimâ, ut Cap. I.

Vt si sit 80000.00. ad 100000.00. ut hic ad 125000.00.

176 Quia igitur numeri 80000.00. Logarithmus est 22314.36. positivus, erit ergò et Numeri 125000.00. Logarithmus 22314.36. sed privativus.

Aliter et facilitate inopinabili

† A dato Numero excedente rejice tres ultimas figuras ad dextram. Sic curtatum quaere inter Logarithmorum differentias interlineares: et Logarithmum ipsum ei differentiae proximum, planeque respondentem exscribe; erit enim hic ipse Logarithmus Numeri propositi excedentis, sed privativus.

Vt si quaeratur, quis sit Logarithmus intervalli Martis et Solis 152500. seu prolongati 152500.00. ut sit intervallum Solis et Terrae mediocre 100000.00. deletis ergò tribus ultimis restat 152.50. Huic verò numero proximus invenitur inter Logarithmorum incrementa interlinearia iste 152.55. habens ante se Logarithmum 42312.00. post se 42159.45. ut sic

13) 9108

ipsi differentiae 152.55. intermediae respondeat etiam intermedius 42236.00. circiter. Hic igitur est Numeri 152500.00. Logarithmus Privativus.

Admonitio de Secantibus

Atque hinc apparet, etiam secantes ipsos Arcuum complementorum quodammodo haberi per differentias Logarithmorum ad illos arcus, prolongatas tribus locis, quod suprà Cap. II. promisi me indicaturum.

Admonitio alia

Hic potest vicem Chiliadis implere, Canonis Neperiani columna Media Mesologarithmorum, juncto Canone Tangentum in hunc modum. †

Datum numerum excedentem quaere inter Tangentes, et nota ejus arcum in gradibus et scrupulis: cum hoc excerpe ex Ca|none Mesologarithmorum Mesologarithmum privativum, habebis sic excedentis Logarithmum privativum. 177

PRAECEPTUM III

Dato Logarithmo, qui non exactè reperiatur in Chiliade, assignare Numerum Absolutum justum cum scrupulositate suâ, sicubi eâ sit opus.

Dato Logarithmo proximè majorem exscribe ex Chiliade, cum † Numero absoluto Rotundo respondente, factâque subtractione dati ab exscripto, residuum duc in absolutum exscriptum ut multiplicantem, factus, absectis septem ultimis ad dextram locis, collocetur loco quatuor Cyphrarum exscripti Absoluti: Ita prodit quam proximè justus Absolutus, dato Logarithmo competens. Sed quia ei adhuc deest aliquid, corrigatur sic, si facti curtati dimidium colloces loco ultimarum Cyphrarum Multiplicantis, et multiplicationem repetas.

Exemplum

Datus esto Log.	145001.10. Subtr.		
Hoc prox. major Chiliadis Log.	145243.42.	ei resp. absol. 23400.00.	
Residuum	242.32.		
Duc in Abs. exscript.	23400.00.		
	4846	4	
	726	96	
	96	9280000.	
Factus absectis 7. ultimis	5670.	Hic esset addendus ad	

exscriptum Absolutum, fieretque 23456.70. Sed quia pars addenda non-

7) indicatorum. 24) corrigetur

178 dum est perfecta, ideò dimidium ejus 2835. appono ad Multipli|cantem, ut fiat 2342835. repetoque multiplicationem sic:

242.32.	
2342835.	
4846	4
726	96
96	928
4	8464
1	93856
	72696
	121160

Compendiosè sic, quia ultimi 35. parum aut nihil efficiunt.

242.32.	
23428.	
4846	4.
727	0.
96	9.
4	8.
1	9.
	1.
5677.	

Factus correctior 5677.

Facilè autem videbit exercitatus calculator, non totam sibi multiplicationem esse repetendam, sed multiplicatione per anteriores figuras Multiplicantis peractâ, et summâ constitutâ, jam id quod per figuras anteriores semissis de emergente facto fit, tantummodò subjiciendum esse decenter facto priori, in hunc modum.

242.32	
234	
4846	4
727	0
96	9
5670	3
28.4	8
1	9
5677.	1

Hoc igitur correctiori facto apposito
ad primo exscriptum 23400.00.
Fit absolutus justus 23456.77.

179

Cautio

In Logarithmis valdè magnis, non est accuratissima haec ratio: id tamen, quod peccatur, utcunque magnum, in Logarithmis magnis non efficit tamen sensibile quippiam in iis, quorum causâ sunt Logarithmi.

Alia Admonitio

Plerunque non est nobis opus scrupulositate numeri quaesiti: sic ut sufficiat exscribere aliquem Absolutum medium inter duorum circumstantium Logarithmorum Absolutos. Et tunc etiam sufficit scribere tam Numeros, quàm Logarithmos usque ad punctum; quod quidem punctum huic ipsi compendio servit.

13) totum 14) repetendum 18) 24234

PRAECEPTUM IV

Dato Numeri Logarithmo privativo, invenire Numerum.

Privativum datum aufer à Multiplicatore aliquo majore, ut à Decuplatore vel Centuplatore, etc. vel etiam à Duplicante, Triplicante, etc. Cum residuo quaere Numerum in Chiliade, qui erit quaesiti pars decima vel centesima, etc. vel etiam dimidia, tertia, etc.

Vt si detur Logarithmus – 2371.65. privativus: ut scias quis ei respondeat numerus: aufer eum à Logarithmo decuplationis 230258.51. quippe qui jam est illo major, restabit 227886.86. Hic indicat in Chiliade Numerum 10240.00. qui erit pars decima quaesiti: quare quaesitus ipse erit 102400.00. ferè.

Vel aufer datum privativum à 69314.72. duplicationis Logarithmo, quia etiam hic jam est major dato privativo, restabit 66943.07. qui ostendit in Chiliade 51200.00. qui est pars dimidia quaesiti: quare ipse quaesitus est 102400.00. [1]

Aliter et facilitate inopinabili *180*

Privativum datum quaere inter Logarithmos Chiliadis, et incrementum duorum proximorum, illi respondens, exscriptum auge tribus figuris ad dextram, sic formatus erit Numerus Logarithmi dati quaesitus. †

Vt si datus sit idem, qui prius 2371.65. Hic inter Logarithmos quaesitus, cadit medius inter 2429.27. et 2326.86. et differentia horum, itidem media, est 102.41. Hanc auge tribus locis, fiet 102410.00. Numerus respondens, ferè.

Admonitio

Atque hîc iterum vicem Chiliadis supplet ex Canone Logarithmorum Quadrantis columna Media Mesologarithmorum. Quaesitus enim in eâ Logarithmus excerpat arcum, gradus scilicet in calce (quippe cum sit privativus) minuta in margine dextro. Hic arcus translatus in Canonem Sinuum et Tangentum, ostendit inter Tangentes Numerum quaesitum.

PRAECEPTUM V

De usu Differentiarum interlinearium.

Etsi incrementa Logarithmorum Chiliadis respiciunt (intra eam) solos Numeros absolutos, ad latus positos, eorumque Logarithmos, inter quos sunt inserta: sciendum tamen est, illa eadem, eodem ordine à primo Chiliadis ipsius (dissimulato jam ejus vestibulo) servire cuicunque alii

Tabulae construendae, quae alios numeros (progressione tamen Arithmeticâ aequabili surgentes) alios etiam eorum Logarithmos habuerit, dummodò pauciores mille fuerint.

Verbi causâ, si pro Numero maximo 100000.00. placeat statuere maximum 60'. 0''. et hujus partes facere 720. sic ut una pars sit 0'. 5''. pro
181 eo quod in Chiliade est 100.00. Logarithmus in | Chiliade ad numerum 720. est 32850.41. Hunc aufer à Logarithmo ad 100.00. scilicet 690775.54. residuus erit Logarithmus ad 0'. 5''. novae Tabulae, scilicet 657925.13. Quod si jam subtraxeris ordine omnia incrementa (seu potius decrementa) Logarithmica Chiliadis ipsius (excluso jam ejus vestibulo) orsus à primo 69314. 72. usque ad ultimum ex 720. scilicet 138.98. constituti erunt Logarithmi ad omnes partium novarum collectiones, puta ad 0'. 10''. et 0'. 15''. etc. Idem fiet, si unum et eundem Logarithmum, qui est ad numerum 720. seu 72000.00. subtraxeris ab omnibus et singulis 720. Logarithmis, ordine invicem succedentibus in Chiliade.

Aliud exemplum

Si quis in subsidium rei Monetariae vellet construere Tabulam, cujus maximus numerus sit una Marca, hoc est 16.Vnciae, hoc est 256. oboli;

Logarithmus ad absolutum 25600.00. Chiliadis scilicet	136257.79.
ablatus à Logarithmo primo Chiliadis scilicet	690775.54.
relinquit Logarithmum unius oboli scilicet	554517.75.

Ab hoc Logarithmo ablata prima 256. incrementa Logarithmica Chiliadis, quorum primum sit 69314.72. ultimum verò 391.39. constituent omnium numerorum Monetariorum Logarithmos.

Vsus verò talis Tabulae facilè intelligitur ex comparatione harum praeceptionum.

Ego quidem illum hâc vice praetereo, cùm nulla pars Chiliadis à re Monetaria nomen sortiatur.

Alius usus indicatus est praecepto II.

PRAECEPTUM VI

Duos numeros absolutos in se mutuò multiplicare per Logarithmos, et factum invenire.

182 Multa quidem sequentium praeceptorum, seipsis inutilia | videbuntur, cùm facilius et exactius operationes aliquae peragantur viâ communi: at propter cognationem cum aliis utilioribus, negligenda non fuerunt, lucis causâ.

7) 690775.57. 21) obuli 25) intelligatur

Quando igitur numeri duo absoluti sunt inter se multiplicandi, ut sciatur factus: tunc hoc est perinde, ac si in Regula Trium poneretur primo loco ad sinistram unitas, loco secundo et tertio Multiplicans et Multiplicandus; ut Factus occupet locum quartum, veluti peractâ Regulâ Trium Quotientem.

Igitur adde Logarithmos duorum numerorum, excerptos ex Chiliade: summa, quaesita rursum inter Logarithmos, monstrat Absolutum in illorum columnâ numerum, qui semper est quaesiti pars multiplex, proportionis decuplae continuae. Nam si uterque numerorum absolutorum fuit minor maximo Chiliadis: tunc numero per summam Logarithmorum monstrato sunt apponendae septem cyphrae ad dextram, ut ita factus hic rectè comparari possit cum facientibus.

Exemplum

Sint invicem multiplicandi 51200.00. Log. 66943.07.
et 76800.00. Log. 26396.55.
Summa 93339.62.

Haec summa dat Absolutum 39330.00. circiter.

Igitur factus ex multiplicantibus est 393300000000.00. circiter.

Sin autem facientes excedunt maximum Chiliadis, tunc per eos excerpi non potest, sed per eorum partes decimas vel centesimas, etc. et tunc etiam facto, sic conformato, ut vult praeceptum superius, apponendae sunt insuper omnes cyphrae, quae facientium utrique junctim fuerunt adimendae, ut excerptio fieri posset.

Vt si numerorum superiorum alter fuisset uno loco longior, scilicet 768000.00. etiam factus prodiret uno loco longior, scili|cet *183*
3933000000000.00. Sin autem etiam alter fuisset duobus locis longior, scilicet 5120000.00. factus prodiret in universum tribus locis longior, scilicet 393300000000000.00.

Cautio

Si Logarithmus ex additione excresceret supra maximum Chiliadis Logarithmum, ipsius etiam vestibuli: aufer ab eo Decuplatorem vel Centuplatorem, etc. sic ut remaneat minor Maximo Chiliadis: per hoc residuum excerptus numerus absolutus, et per praeceptum conformatus, debet jam vicissim curtari unâ, duabus, etc. figuris.

PRAECEPTUM VII

Numerum absolutum quadrare, seu ejus Quadratum praeter propter invenire.

Duplica Logarithmum numeri quadrandi, duplum hoc inter Logarithmos quaesitum, exhibet ex columnâ suâ numerum absolutum, cui sunt apponendae ad dextram septem cyphrae; sic habebitur Quadratum numeri propositi, saltem in primis ejus figuris ad sinistram. Nam loca reliqua ad dextram cyphris impleta, nullius sunt momenti, etiamsi vel scrupulosissimè exprimerentur.

Exemplum

Quadrandus sit 3100.00. Log.	347376.81.
Ejus duplum	694753.62.
Hoc duplum indicat absolutum	96.10.
Ergò quadratum quaesitum est	9610000.0000.
Vel	
Sit quadrandus 31000.00. Log.	117118.30.
Duplum	234236.60. |
184 Hoc duplum indicat absolutum	9610.00.
Ergò quadratum quaesitum est	961000000.0000

PRAECEPTUM VIII

Numeri absoluti Cubum invenire.

Triplica Logarithmum numeri, triplum hoc inter Logarithmos quaesitum, exhibebit primas Cubi quaesiti figuras, quibus apponendae sunt aliae 14.

Exemplum

Numeri absoluti 90000.00. Logarithmus 10536.05. triplicatus facit 31608.15. qui ut Logarithmus dat ex columnâ numerorum absolutorum 72900.00.

Ergò Cubus est 729000000000000.000000.

PRAECEPTUM IX

Si duorum Numerorum absolutorum major dividendus est per minorem; quotientem eruere per Logarithmos.

Quando dividendus est major per minorem: tunc hoc est perinde ac si in Regulâ Trium primo loco ad sinistram collocaretur minor, secundo major, tertio unitas, quartoque loco ad dextram quotiens. Nam ut minor est ad majorem, sic unitas ad quotientem.

Aufer igitur Logarithmum minoris à Log. unitatis absolutae in vestibulo Chiliadis, scilicet ab 1611809.59. residuo adde Logarithmum majoris, summa inter Logarithmos quaesita ostendit inter Absolutos quotientem.

Exemplum

Sit dividendus 99200.00. per 3200.00. Hujus ergò Logarithmum 344201.94. aufer, et vicissim illius Logarithmum 803.22. adde ad 1611809.59. conficietur Logarithmus 1268410.87. qui ostendit absolutum 0.31. Ergò 0.31. est quotiens. [1] †

Vel 185

Aufer Logarithmum minoris à proximè majori Logarithmo unitatis cujuscunque in Chiliade, residuo adde Logarithmum majoris, provenit Logarithmus Numeri, à quo sunt abscindenda totidem loca, quot cyphras habuit unitas illa, quae Logarithmum dedit.

Vt si in exemplo superiori Logarithmum minoris 344201.94. abstulisses à 460517.03. Logarithmo numeri 1000.00. residuus fuisset

	116315.09.
Cui additus majoris Log.	803.22.
Confecisset Logarithmum	117118.31.

Hic verò indicat 31000.00. Quia verò numerus seu unitas illa 1000.00. habet 5. cyphras, decurta igitur hunc vicissim 5. ultimis locis, manetque 31.

Observationes

Si per Divisoris decuplum diviseris; prodibit pars decima quotientis quaesiti: et sic consequenter.

Si unus vel ambo excesserint maximum Chiliadis: decurtatis ambobus aequali numero locorum, sic ut fiant minores maximo Chiliadis, operatio peragatur, prodibitque Quotiens justus.

Exempla dimissis figuris post punctum

Dividendus sit 100000. per 4362.

Hic possum uti divisoris decuplo 43620. cujus Logarithmus cùm sit 82965. auferam eum à Logarithmo proximè majori unitatis alicujus ex Chiliade, scilicet à numeri 10000. Logarithmo 230259. restat 147294.

8) pro *statt* per   10) 1268412.87. *statt* 1268410.87. ... obsolutum   35) numeris

cui jam nihil additur, quia Logarithmus numeri 100000. est 0. Hic ergò Logarithmus ostendit absolutum 22950. Sed quia unitas usurpata habet
186 quatuor cyphras, debent ergò vi|cissim rejici ab hoc absoluto, quatuor quidem loca, ut formetur pars decima quotientis, tria verò, ut ipse Quotiens. Erit igitur ille 23. vel $22\frac{95}{100}$.

Quod si dividendus fuisset 1000000. divisor 4362: Tunc pro 1000000. Chiliadis maximum (usque ad punctum) superante, scripsissem 100000. ut qui non superat, et pro 4362. $436\frac{1}{5}$. utrumque scilicet curtassem aequaliter.

Tunc usus priore processu, pro $436\frac{1}{5}$. usus essem ejus centuplo 43620. Et prodisset $2\frac{295}{1000}$. centesima quotientis, ipse igitur Quotiens $229\frac{5}{10}$.

Alius dividendi modus

Dividendum majorem decurta, uti curtatus fiat minor divisore. Tunc à Logarithmo curtati aufer Logarithmum divisoris, residuum erit Logarithmus numeri, qui decurtandus est tot locis, ut decurtatio utraque deleat loca 7. (vel si omittimus figuras post punctum, loca 5.).

Vt si sit dividendus 99200. per 3200.

Rejectis à dividendo duabus figuris fit 992. jam minor divisore. Jam igitur per observationes superiores sume utriusque decuplum, ut fiant proximi maximo Chiliadis.

Ergò 32000. Logar. 113943.
9920. Logar. 231062.

Residuum 117119. est Logarithmus numeri 31000. Quia igitur à dividendo rejectae sunt figurae duae, rejiciantur jam à Quotiente tres, ut rejectarum sint 5. formabitur quotiens 31. |

187 PRAECEPTUM X

Ex numero absoluto, ut Quadrato, Radicem extrahere quadrati.

† A numero absoluto proposito reseca loca bina et bina, tantisper, quoad loca residua ad sinistram repraesentent numerum non majorem maximo Chiliadis: Numeri sic decurtati Logarithmum adde Logarithmo unitatis purae in vestibulo Chiliadis: summae semissis quaesitus inter Logarithmos, ostendet è regione inter absolutos primas figuras radicis quaesitae, cui numero pro binis locis prius resectis, restituendae sunt singulae cyphrae. Ita formatur Radix quadrata quaesita.

11) $2\frac{259}{1000}$. . . . $225\frac{9}{10}$.

Exemplum

Quadratum esto 96100.0000. quaeritur ejus Radix quadrata. Numerus igitur iste habet loca 9. cùm maximus Chiliadis habeat tantùm 8. Abscinde duo ultima (numero pari) ut restent septem.

Ergò 96100.00. habet Log.	3978.00.
Sed purae unitatis in vestib. Log.	1611809.59.
Summa	1615787.59.
Semissis	807893.80.

Hic semissis indicat absolutum 31.00. huic verò pro duobus locis prius rejectis jam restitue unam cyphram, fietque vera radix 310.00.

Alius modus sine Logarithmo unitatis

A numero proposito rejice loca ad dextram numero impari, ut fiat minor maximo Chiliadis.

Hujus numeri decurtati Logarithmum ipsum bipartire, cum | semisse *188*
inter Logarithmos quaesito, excerpe ex columnâ absolutorum numerum competentem, qui offert primas ad sinistram figuras radicis quaesitae: sed nisi septem omninò loca dempta fuerint initiò, nondum erit hic numerus radix ipsa. Pro binis enim minus quàm septem illic ademptis, singulae cyphrae hîc sunt adimendae, pro binis plus quàm septem ademptis singulae restituendae.

Et nota, quod etiam si numerus ipse statim initio fuerit minor maximo Chiliadis, tamen unus illi locus sit demendus, ut radici demantur tria loca, vel unus adjiciendus, ut radici demantur quatuor, vel si tam est parvus, tres adjiciendi, ut radici demantur quinque.

Exemplum

Vt si quadratus proponatur 9610.00000. Hic cùm habeat loca 9. si auferres unum, adhuc haberet nimium, octo scilicet, et in primo novenarium, cùm maximus Chiliadis habeat octo quidem et ipse, sed in eorum primo unitatem. Aufer ergò loca tria (numero scilicet impari) restant sex, numerus scilicet 9610.00. Hujus Logarithmus est 234236. usque ad punctum, semissis hujus 117118. ostendit 31000.00.

Quia igitur quadrato loca sunt dempta 4. minus quàm 7. demenda jam sunt huic numero duo, formaturque radix 310.00.

Si quadratus fuisset 9610000000000. constans scilicet locis 13. ut igitur minor restet numerus, quàm maximus Chiliadis: oportet rescindere loca 7. numero scilicet impari: et tunc peractâ operatione de

2) 961000000. 26) 961000000. . . . habent 30) 961000.

invento absoluto rescinderetur nihil, quia loca à quadrato rescissa, fuerunt numero septenario, quot cyphras habet maximus Chiliadis.

Si verò quadratus habuisset loca 15. rescindenda fuissent loca 9. numero scilicet impari, ut semper in hoc modo: ut scilicet restaret
189 numerus minor maximo Chiliadis. Cùm autem 9. excedat | 7. binario, jam igitur ad numerum per operationem inventum vicissim fuisset apponenda una cyphra.

Denique si quadratus fuisset 9610000. adhuc rejiciendus fuisset ab illo locus unus, semper enim in hoc modo aliquid impari numero mutandum est. Vnum verò à 7. ablatum relinquit 6. tres igitur cyphrae tunc fuissent rejiciendae, ut radix tunc fiat 3100.

Et si quadratus fuisset 96100. rejici poterit unus locus, poterit et addi unus, ut prolongatus nihilominus sit minor maximo Chiliadis. Sed tunc qui apponit unum, is demit uno minus quàm nihil. Differentia verò inter 7. et inter unum minus quàm nihil, est 8. quatuor ergo demeret loca de invento 31000.00. ut sic formetur ipsius 96100. radix 310.

Ita si quadratus fuisset 9610. potuissent addi loca tria, fuissetque 96100.00. minor maximo Chiliadis, habens Logarithmum 3978. Semissis verò 1989. ostendisset absolutum 98029.00.

Tria verò loca prius apposita pro 7. delendis, faciunt decem: quinque igitur hîc dele, ut restet Radix 98. plus, numeri quadrati 9610. ferè.

PRAECEPTUM XI

Medium proportionale inter duos Absolutos datos invenire.

Quia hoc fit in Arithmetica vulgari, multiplicatis in se mutuò duobus datis, factique radice quaesitâ: fit igitur per Logarithmos similiter, conjunctione in unum sexti et decimi praeceptorum; in hunc tamen modum commodissimè.

Absolutus uterque acquirat loca 7. nisi fortè unus eorum fuerit ipse maximus Chiliadis, huic relinqui possunt loca octo. Tunc sic aptatorum Logarithmi adduntur, cum summae semisse, ut Logarithmo, excerpi-
190 tur numerus absolutus; cui sunt restituen|da loca prius abscissa vel demenda, quae erant prius adjecta facientibus utrisque.

Exemplum

Sint duo numeri 987654321. et 59643. quaeritur eorum Medius proportionalis. A primo rejice loca duo ad dextram, ad secundum appone duas cyphras:

11) 31.00.

Ergò 9876543.	Log.	1242.25.
5964300.	Log.	51679.34.
	Summa	52921.59.
	Semissis	26460.80.

Hic dat absolutum 76750.65. Cùm igitur uni datorum dempta sint loca duo, alteri totidem apposita: vicissim huic invento duo sunt apponenda, † duo vicissim demenda, hoc est, compensatione factâ nihil mutandum. Ita hic ipse est Medium Proportionale quaesitum.

Hic operae precium est videre, quantus error fuisset commissus, si Logarithmi fuissent excerpti per proximè minores vel majores Absolutos sine elaboratione scrupulosâ.

Numero 98765.43. vicinior Chiliadis et major
98800.00. dat Log. 1207.26. Minorem justo.
Et Numero 59643.00. vicinior Chiliadis et minor
59600.00. dat Log. 51751.46. Majorem justo.
Summa 52958.72. Propè vera.
Semissis 26479.36.

Jam Logarithmus Chiliadis hoc proximè major, ut qui propior, dat absolutum 76700.00. Ergò semissi ipsi respondebit plus aliquid. Itaque si medium eligam inter 76700. et 76800. | puta 76750.00. id erit proximum vero. Sanè suprà vides inventum 76750.65. *191*

PRAECEPTUM XII

Propositi Numeri Radicem invenire Cubicam, ejusque radicis Quadratum.

Quia unitas est ad Radicem Cubicam, ut haec ad Quadratum ejus, et hoc ad Cubum ejus: ergò à Numero Absoluto, qui ut Cubus proponitur, rejice ad dextram loca terna et terna tantisper, quoadusque loca residua repraesentent non majorem maximo Chiliadis: Numeri sic decurtati Logarithmum aufer à Logarithmo unitatis purae in Chiliadis vestibulo, residui tertiam partem, si adjeceris Logarithmo Numeri, constitues Logarithmum utilem indagando Cubicae radicis quadrato, si duas tertias adjeceris, fiet Logarithmus pro ipsa radice Cubicâ. Excerpe igitur Absolutos cum utrâque summâ constitutâ, inter Logarithmos quaesitâ, et pro ternis locis prius demptis appone Radicis quidem numero Cyphras singulas, ejus verò Quadrati numero binas: ita formabitur et Radix Cubica et ejus Quadratum.

19) semisse

Exemplum

Propositus esto Cubicus numerus 729. cum 18. cyphris, loca scilicet habens 21. Rejice loca 15. quinquies scilicet terna: quia si 12. rejiceres, restarent 9. plura scilicet quàm habet maximus Chiliadis.

Jam igitur 7290.00. dat Log. 261866.63.
Sed unitatis primae in vestib. Log. est 1611809.59.
Differentia 1349942.96. |
192 Seu quod idem est 72900.00. dat Log. 31608.15.
Sed unitatis secundae in vestibulo Log. 1381551.08.
Differentia 1349942.93.
Hujus pars tertia 449980.98.
Summa pro Quadrato 711847.61.
Summa pro Rad. Cub. 1161828.59.

Ergò summa prior dat 81.00. cui appone propter loca 15. prius rejecta, cyphras 10. fiet 810000000000000. Quadratum Radicis Cubicae.

Sic posterior summa dat 90. cui appone pro 15. locis prius rejectis jam cyphras 5. ita fit Radix Cubica 9000000.

PRAECEPTUM XIII

Invenire Logarithmum indicem proportionis inter duos numeros datos.

Magnum habet usum hoc praeceptum ad Triangula plana solvenda, de quibus agemus Capite sequenti.

Sunt autem Casus varii. Aut enim uterque datorum terminorum invenitur expressus in Chiliade; aut alter solum, aut neuter. Et si uterque in Chiliade; tunc ii aut proximi sunt invicem, ut 237. 238. seu 23700.00. 23800.00. et tunc differentia Logarithmorum Numeris ad latus respondentium, est quaesitus proportionis Index; ut in hoc Exemplo 421.05. indicat proportionem inter 237. 238. Aut non sunt invicem proximi, sed distant interjectis aliis: tunc Logarithmus majoris auferatur à Logarithmo minoris, restabit Logarithmus proportionis inter datos terminos. |

193

Exempla

Sint termini Proportionis 1. et 60.
Numeri 1000.00. Logar. 460517.03.
Numeri 60000.00. Logar. 51082.56. aufer.

Restat Log. proportionis inter datos 409434.47. qui ideò et sexagecuplator dici potest.

5) 72900.00. 9) vestibus 17) 90000.00.

Sic Numeri 1000.00. Logar. 460517.03.
Et Numeri 2400.00. Logar. 372970.14.
Restat Log. viginti quadruplae proport. 87546.89.

Sin vel neuter ex terminis, vel alteruter solùm invenitur expressus in Chiliade: tunc vel cadit talis inter duos Chiliadis, proximos invicem, estque scrupulosus, vel excedit maximum Chiliadis.

In priori casu elaboretur prius Logarithmus numeri scrupulosi; et tunc per eum operatio est eadem, quae prius.

In posteriori casu sumantur numeri utriusque aequè multiplices partes, minores maximo Chiliadis, et cum eorum Logarithmis agatur ut suprà.

Vt si quaeratur proportio inter 102400.00. et 100000.00.

Decurta eos aequaliter, ut sint eorum partes decimae, scilicet
10240.00. Log. 227886.86.
10000.00. Log. 230258.51.
Erit proportionis Log. 2371.65.

Nota

Si numerorum alter fuerit ipse Maximus Chiliadis, tunc ipse Logarithmus alterius numeri est Index proportionis inter utrumque, seu Positivus fuerit Logarithmus, seu Privativus. Logarithmus enim definitus est post Prop. XX. nihil aliud quàm haec ipsa Proportio.[1]

PRAECEPTUM XIV 194

Proportionem cum terminis suis datam secare in partes, quae sint ad invicem in alia proportione propositâ.

Data sit Proportio inter terminos 37. et 53.

Haec proportio sit secanda in partes duas, quarum una sit ad alteram, ut 5. ad 2.

Igitur constituatur quantitas proportionis secandae per praecedens praeceptum.

		Logar.		Logar.
Termini	5300.	293746.	vel 53000.	63488.
	3700.	329684.	37000.	99425.
	Proportio	35938.		35937.

Jam secundae Proportionis, secundum quam secanda est prima, Termini sunt 5. et 2. Summa 7. Divide igitur proportionis primae

2) 24000.00.

quantitatem in 7. erit pars septima 5134. et duae septimae 10268. Ergò quinque septimae 25670.

Quantitate partium inventâ, jam duplici viâ potest secari in has partes prima proportio: Aut enim ut pars major stet à plagâ termini majoris.

Igitur termini majoris Logarithmo	63488.
Adde partem majorem	25670.
Summa	89158.

Haec ut Logarithmus ostendit absolutum 41000. ferè. Ergò ut se habet 5. ad 2. sic se habere fecimus proportionem inter 53. 41. ad proportionem inter 41. 37.

Aut ut pars minor sectae, stet à plaga termini Majoris.|

195

Eidem ergò termini majoris Logarithmo	63488.
Adde partem minorem	10268.
Summa	73756.

Haec ut Logarithmus ostendit 47830. circiter.

Ergò ut se habet 2. ad 5. sic fecimus se habere proportionem inter 53. $47\frac{83}{100}$. ad proportionem inter $47\frac{83}{100}$. 37.

Idem efficiemus etiam per Logarithmum Termini Minoris, subtrahentes ab eo.

Aliud exemplum et nobile quidem

Datur proportio inter dies 687. periodi Martis et $365\frac{1}{4}$. periodi Solis (Terrae COPERNICO). Sit haec proportio secanda in partes duas, sic ut major ad minorem se habeat, ut 2. ad 1. et ut major pars proportionis divisae stet à plaga termini minoris, ut ita Proportio tota sit ejus partis majoris sesquialtera.

Ergò Termini Majoris	68700. Log.	37542.
Termini Minoris	36525. Log.	100740.
Quantitas ergò proportionis		63198.

Proportionis verò divisoriae termini 2. 1. faciunt 3. quâ summâ divisa quantitas Proportionis, facit ejus trientem 21066. et

duos trientes	42132.	Hos aufer
à Logarithmo partis minoris	100740.	
Restat	58608.	

† Hoc ut Logarithmus ostendit Numerum absolutum 55650. Ergò ut 1. ad 2. sic fecimus proportionem inter 68700. 55650. ad proportionem inter 55650. 36525.|

35) 58608. *statt* 55650. 36) 58608. *statt* 55650.

Quod si ex termino minori 36525. fiat 100000. distantia mediocris Solis et Terrae, tunc ex hoc invento termino majori 55650. fiet 152400. ferè: distantia Solis et Martis mediocris. 196

Et fit manifestum, quod proportio Periodicorum temporum sit sesquialtera proportionis Intervallorum mediocrium: ut indicavi in Epitomes Astronomiae Cop. libro IV.

PRAECEPTUM XV

Regulam Proportionum seu Detri absolvere per Logarithmos, seu sine Multiplicatione et Divisione.

Positis in Regula tribus datis Numeris, in Chiliade comprehensis, ut docet vulgaris Arithmetica, aufer Logarithmum sinistimi à Logarithmo medii, vel hunc ab illo: differentiam Logarithmo dextimi adde in primo casu, subtrahe in secundo, si potest: summa illic, vel hic Residuum, est Logarithmus Quarti quaesiti seu Quotientis positivus.

Rursum autem si Logarithmus Tertii fuerit minor residuo, subtrahe vicissim illum ab hoc, remanebitque privativus Logarithmus, numeri scilicet absoluti, seu Quotientis, superantis maximum Chiliadis.

Exemplum primi casus

77100. dat 53200. quid 92500.

Log. 63111.

Log. 26006. Subt.

Residuum 37105.

Logar. 7796. adde

Logar. 44901. Quotientis 63800. plus.[1]

Exemplum secundi casus 197

876. dat 941. quid 765.

Log. 6081. Subtrahatur ut minor.

Log. 13239.

Residuum 7158. Subtrahe quia secundus subtractus.

Logarithmus 26788.

Logarithmus 19630. Quotientis 822. minus.

2) Lunae *statt* Terrae . . . 58608. fiat 1524.00. 6) Epitomen 21) 26007.

Exemplum casus tertii

889. dat 996. quid 960.

Log. 401. Subtrahatur ut minor.
Log. 11766.

Residuum 11365. Subtrahendum erat, quia secundus subtractus fuit.
Logarith. 4082. Subtrahe hunc quia minor est residuo.

Logarith. 7283. privativus, quia tertius subtractus fuit. Hic igitur privativus per IV. praeceptum, dat Quotientem 1075. majorem maximo Chiliadis 1000. ut hîc quidem operamur per curtatos.

Nota

Licet autem commoditatis causa, omnes tres in Regulâ positos, vel prolongare, vel curtare, ut fiant proximè minores maximo Chiliadis: et tunc quotiens, qui pro sic accommodatis elicitur, idem debet pati, quod passus est sinistimus: eos verò locos, qui secundo et tertio fuerunt adempti vel appositi, solus quotiens omnes contrariâ ratione vel recipere debet, vel amittere.[1]

198 CAPUT IX

DE COPULATIONE COLUMNAE LOGARITHMORUM CUM DUABUS ALIIS IUNCTIS

PRAECEPTUM GENERALE

Quotiescunque in Regulam Proportionum offeruntur diversarum Columnarum Numeri, sic ut duo quidem ex iis sint ex unius Columnae genere, unus verò residuus cum quotiente quaesito competat in columnam alteram: tunc operatio per Logarithmos perfici potest, tam in vulgaribus seu Absolutis Numeris, quàm in Logisticis.

Hujus mixturae dabo aliquot Exempla, tanquam Praecepta particularia.

I. PRAECEPTUM

Dividere Horas vel Gradus per sexagenaria scrupula.

† Quia enim est, ut Divisor Sexagenarius ad Dividendum, sic Integrum seu 60′. ad Quotientem: Divisor igitur et Integrum sunt ex genere eodem sexagenario, Dividendus verò et Quotiens possunt esse ex

5) 13365. 13) accommodatos

Quadrivicenariâ. Possunt igitur illa Exempla Capitis VI. Praecepti III. ubi dividendus aliquot integra continet, possunt, inquam, plerunque per Quadrivicenariam perfici.

Vt si dividendi, ut suprà 3. G. 45′. 13″. in 57′. 8″. sic age:

Gr. 3. 45′. 13″. Log. 185470. circ. ex Quadrivic.

Scr. 57′. 8″. Log. 4900. ex Sexagenar.

Residuum 180570. dat ex Quadrivicenaria quotientem 3. G. 56′. 30″. ut et Cap. VI. |

II. PRAECEPTUM 199

Partem proportionalem scrupulis sexagenariis capere de differentiâ, excedente integrum.

Addantur Logarithmi Scrupulorum in sexagenaria, et differentiae excedentis in Quadrivicenaria, quaesitorum summa ex Quadrivicenaria ostendit partem proportionalem.

Vt si uni Gradui Anomaliae mediae respondeant 1. G. 24′. 17″. coaequatae, quid competit Minutis 49. 23.

Gr. 1. 24′. 17″. Log. 284000. circiter.

Scr. 49. 23. Log. 19480.

Summa 303480. dat 1. G. 9′. 15″. tantum competit scrupulis 49. 23.

III. PRAECEPTUM

Dato diurno Solis vel Planetarum 5. unius, colligere aliquot horarum motum.

Si diurnus minor est quàm 60′. ut in Saturno, Jove, Marte, et in Sole: quaere eum in Sexagenaria, numerum Horarum in Quadrivicenaria, et adde eorum Logarithmos; Summa in Logarithmis quaesita, eruet ex Sexagenaria partem Horis competentem.

In Sole, Venere, Mercurio, si diurnus est inter 1. et 2. G. quaere proportionalem partem de excessu supra 1. G. eamque adde ad id, quod horis datis in sexagenaria respondet per Caput IV. In Mercurio verò, si ejus diurnus superat 2. G. partem proportionalem de excessu, adde duplo illius, quod horis datis respondet in sexagenaria.

Aliter, quia diurnus plerunque constat integris scrupulis, sine appendice secundorum: quaerere illa poteris non in sexagenariâ, | sed inter 200
absolutos, prolongata priùs, ut Cap. VIII. docui: et tunc quae ex Logarithmis colligitur summa, quaesita in Logarithmis, rursum inter absolutos ostendet partem proportionalem decurtandam iterum totidem locis.

Exempla

Sit diurnus 17'.	horae 19. 48'. 0''.	Vel	
Horarum 19. 48'.	Log. 19237.		19237.
Scr. 17'. ex sexag.	Log. 126200.	Ex absolutis 17000.	
	Summa 145437.		Log. 177200.
Pars proportionalis ex sexagenariâ	14'. 1''.		Summa 196437.
			Ex absol. colum. 14020.

Jam si Veneris diurnus fuisset 1. G. 17'. tunc è regione H. 19. 48'. invenio scrupula 49'. 30''. quae addenda sunt ad 14'. 1''. partem proportionalem de excessu, essetque arcus quaesitus 1. G. 3'. 1''. Et si Mercurii diurnus fuisset 2. G. 17'. duplicanda fuissent illa 49'. 30''. addendaque 14'. 1''. ita collegissemus 1. G. 53'. 1''.

IV. PRAECEPTUM

Horarium elicere ex motu aliquot Horarum datarum, minore quàm 60'.

Auferatur Logarithmus Horarum datarum, in quadrivicenariâ quaesitarum, à Logarithmo ex sexagenariâ scrupulorum, Horis competentium; Residuum, ut Logarithmus, ex sexagenaria exhibebit Horarium. Exempla sunt facilia et obvia.

V. PRAECEPTUM

Datâ separatione diurnâ minore quàm 60'. et distantiâ Planetae ab alterius aspectu, minore ea quàm est diurnus, prodere Horarum intervallum respondens.

In sexagenariâ, vel etiam inter Absolutos, quaesitis diurna | separa-
201 tione et distantiâ, Logarithmus illius aufertur à Logarithmo hujus, residuum, ut Logarithmus exhibet Horas ex Quadrivicenariâ, respondentes distantiae seu intervallo.

VI. PRAECEPTUM

Hoc modo etiam ingressus Solis in signa computatur: Per diurnum scilicet Solis, et per distantiam ejus à principio signi in meridie vicino, in sexagenariâ quaesitis, et Logarithmo illius ablato à Logarithmo hujus. Residuum enim, ut Logarithmus, ostendit in Quadrivicenariâ Horas ante vel post meridiem.

15) Aufertur

Plurima alia per hanc combinationem columnarum perfici possunt: sed sex ista exemplorum loco sufficiant. Jam enim ad rariora et scrupulosiora nonnulla transeundum, suprà dilata, et in hunc locum rejecta.

VII. PRAECEPTUM

Cuilibet arcui Sinum suum scrupulosum assignare per Logarithmos.

Subsidium, ut vides, paratur hîc Capiti II. ut in ejus tractatione promiseram. Quanta igitur sit operationis certitudo, vide ibi: nunc modum doceo.

Ab arcu dato aufer proximè minorem Chiliadis, et exscribe ejus † Sinum Rotundum, ut jam corrigatur, suamque acquirat scrupulositatem. Tunc in sexagenariâ quaesitis et excessu arcus dati, et differentiâ binorum arcuum Chiliadis, inter quos arcus propositus intercidit, auferatur Logarithmus hujus à Logarithmo illius: Residuum immissum in Logarithmos, ostendit inter Absolutos Numerum, qui praecisis tribus ultimis locis ad dextram, fit augmentum scrupulosum exscripti Sinus † Rotundi.[1]

Exemplum 202

Propositus esto arcus	37.	G. 49′. 53″.		
Proximè minor Chil.	37.	48. 26.	dat Rotund. 61300.00.	
Residui	o.	1′. 27″.	Log. 372900. circ.	
Differentiae inter duos Chil.		4. 21.	Log. 262400. circ. aufer.	
			Residuum 110500.	

Hoc quaesitum, ut Logarithmus, dat inter Absolutos Numerum 33190.00. circiter. Ergò praecisis 3. locis, acquirimus 33. 19. et fit Sinus scrupulosus arcui proposito conveniens 61333.19.

Cautio

In fine Quadrantis, ubi differentia in Chiliade superat 60′. uti liceret Columnâ Quadrivicenariâ, nisi tum simul etiam proportionalitas, quam hoc praeceptum praesupponit, insigniter turbaretur.

VIII. PRAECEPTUM

Vicissim cuilibet Sinui Scrupuloso suum assignare arcum.

Primùm cum Sinu rotundo, proximè minori, exscribe arcum et † differentiam subjectam. Tunc ad 4. ultimas figuras Sinus scrupulosi (ad excessum scilicet Sinus dati suprà rotundum Chiliadis proximè minorem) appone tres Cyphras, et quaesito Numero sic formato inter Absolutos, differentiâ verò in sexagenariâ, adde eorum Logarithmos; Summa ut Logarithmus, ostendet in sexagenaria scrupula prima et secunda, addenda arcui exscripto.

Exemplum

Vt si detur Sinus scrupulosus 61333.10. proximè minor rotundus
203 61300.00. dat arcum 37. G. 48'. 26''. Et differentiam | 4'. 21''. cujus
Logarithmus 262400. circiter. Quatuor autem ultimae Sinus scrupulosi figurae hic sunt 3310. prolongatus hic numerus, ut sit 33100.00. dat Logarithmum 110500. qui additus ad priorem, facit summam 372900. circiter.

Haec ostendit partem proportionalem 1'. 27''. Ergò Arcus erit 37. G. 49'. 53''.

IX. PRAECEPTUM

Cuilibet arcui suum assignare Logarithmum sine magno labore.

Rursum hic subsidium paratur doctrinae Triangulorum Sphaericorum, Cap. VII. traditae, pro curiosis, qui dedignantur operari cum Logarithmis rudibus. Praeceptio erit verbosa quidem; at non valdè necessaria, ne metuas, calculator.

Cùm enim in hâc Chiliade tam arcus, quàm Logarithmi exhibeantur scrupulosi; et differentiae, inter arcus quidem interjectae, crescant continuò, inter Logarithmos verò decrescant; ut ita neutrobique maneat unus et idem numerus constans: laborem equidem haud levem sumpserit, qui, quotiescunque opus fuerit Logarithmo exacto, toties multiplicatione scrupulorum et secundorum Excessus arcus in differentiam Logarithmorum, ut in numerum apicibus carentem (diversi scilicet generis) et rursum, facti divisione in differentiam, ex Scrupulis et secundis constantem, venari velit partem proportionalem.

Hic igitur juvent Logarithmi seipsos, ut contribules. Cum arcu Chiliadis, qui proximè minor proposito arcu vel angulo fuerit, exscribe
Logarithmum exactum, eumque arcum subtrahe à proposito: et quaesitis in sexagenariâ, tam excessu propositi, quàm differentia inter duos
arcus Chiliadis, inter quos cadit propositus, Logarithmum hujus ruditer
204 saltem excerptum, aufer à Loga|rithmo rudi illius: residuum junge
Logarithmo rudi differentiae vicinorum duorum Logarithmorum pro-

longatae, secundum praecepta praecedentis Capitis, et quaesitae inter absolutos: Summa ut Logarithmus ostendit, rursum inter absolutos, numerum, qui decurtatus prodit partem proportionalem, auferendam à Logarithmo exacto arcus proximè minoris, primum exscripto, ut justus constituatur Logarithmus arcus propositi.

Exemplum

Cupio Logarithmum arcus	71. G. 40'. 10''.	
In Chiliade invenio proximè minor. 71.	37. 21.	Log. 5234.65.
Excessus dati	2'. 49''.	Log. 305800.
Differentia duorum in Chiliade	10. 57.	Log. 170000. rudis.
Residuum		135800.

Differentia duorum Logarithmorum 105.32. prolongata ut fiat 10532.00. inter absolutos quaesita dat Logarithmum 225000. rudem.
Adde resid. 135800.
Summa 360800. Haec ut Logarithmus ostendit inter absolutos 2725.00. Deletis verò iterum duobus ultimis, fit pars proportionalis 27.25. quibus ablatis ab exscripto 5234.65. restat 5207.40. Logarithmus, quantum proportionalitas locum habet, exactus. Nam Capite VIII. veriores, et plerunque exactissimos docuimus assignare Sinubus, qui per eos suis arcubus transcribi possunt.

X. PRAECEPTUM

Vicissim Logarithmo scrupuloso arcum suum assignare.

Primùm cum Logarithmo Chiliadis, qui proximè major | fuerit proposito, exscribe arcum scrupulosum, cum differentia subjecta. *205* Tunc subtrahe Logarithmum propositum ab exscripto proximè majore: Excessum illius, et simul differentiam duorum in Chiliade, prolonga aequali locorum numero, ut sint tamen minores maximo Chiliadis. Sic igitur formatis iis, et inter absolutos quaesitis, Logarithmum hujus ab illius Logarithmo aufer, residuo adde Logarithmum differentiae arcuum in sexagenariâ quaesitae; sic accumulatur Logarithmus partis proportionalis ex sexagenariâ itidem excerpendae, et addendae arcui exscripto.

10) rudes.

Exemplum

Sit Logarithmus 5207.40.
Prox. major 5234.65. dat 71. G. 37'. 21''. et diff. 10'. 57''.
Excessus 27.25.
Diff. Logarithmorum 105.32.
Hi Num. prolongati 2725.00. dant rudes 360800.
10532.00. 225000.
Differentia 135800.
Differentiae arcuum Log. 170000.
Summa 305800. ostendit
partem proportionalem 2'. 49''.
Ergò Arcus 71. G. 40'. 10''.

Habent igitur curiosi quod agant, si rudibus Logarithmis, minimo cum damno, uti dedignantur. Veruntamen qui tales futuri sunt, iis consultum est, ut privatâ quilibet operâ, et in vestibulo Chiliadis columnam arcuum hîc vacantem impleat, et in fine Quadrantis decem ultimas arcuum differentias in denas subdividat, Sinuum quidem differentias statuens aequales, eis verò Sinubus ex Canone Sinuum
206 exacto suos adscribens arcus, et Lo|garithmos Sinubus suos ex doctrina Capitis prioris accommodans.

Nam pars proportionalis usitato modo quaesita, locum non habet in fine Quadrantis: ut Capite secundo monui.

XI. PRAECEPTUM

Per solos Logarithmos Absolutorum et Arcuum seu Angulorum, omnia Triangula plana solvere: omnia scilicet quaesita ex tribus datis eruere.

Ad hoc caput propriè pertinet haec doctrina, quia jungi debet Columna Absolutorum (non ut ii sunt Sinus arcuum) et columna ipsorum arcuum. Sunt autem Casus sex.

I. Si datis angulis et uno latere, quaeritur latus.

Tunc prolongato vel decurtato latere, ut Capite VIII. doctus es, adde Logarithmos lateris dati et anguli quaesito lateri oppositi; à summâ aufer Logarithmum anguli dato lateri oppositi, restat Logarithmus lateris quaesiti, similiter prolongati.

Si subtractio fieri non potest, vicissim summam subtrahe, restabitque privativus Logarithmus, lateris excedentis maximum Chiliadis.

4) 27.15. 6) 2715.00. 14) decimo *statt* damno 26) doctrinae

Exemplum

Dentur Anguli 50. G. o'. et 60. G. o'. datur igitur etiam residuus, ut complementum illorum duorum ad Semicirculum scilicet 70. G. o'. detur et latus oppositum medio angulo 573. quaeritur latus oppositum maximo. |

Lateris 57300.00. (prolongati) Log. 55687. 207
Anguli 70. G. o'. Log. 6220. circ. †
Summa 61907.
Anguli 60. G. o'. Log. 14380. circ.
Residuum 47527. dat 62175.00.

Latus ergò est 622. ferè.

Quod si Rectus fuerit angulorum unus, et detur ei subtensum latus, sufficiet sola Additio.

Sin autem quaeratur latus recto subtensum, sufficiet sola subtractio Log. anguli à Log. lateris oppositi. Restabit enim Log. lateris recto subtensi.

II. Si datis duobus lateribus, et angulo uni eorum opposito, quaeruntur anguli reliqui.

Tunc lateribus aequaliter prolongatis vel decurtatis, ut sint proximè minora maximo Chiliadis, adde Logarithmos Anguli et lateris unius adjacentis; à summâ aufer Logarithmum lateris dato angulo oppositi, restat Logarithmus anguli lateri alteri oppositi, qui angulus interdum tàm potest esse minor quadrante, quàm major: et sic Complementum ad Semicirculum ejus, quem Logarithmus excerpit: quantisper non plura dantur. Tertius verò angulus est duorum junctorum complementum ad Semicirculum. |

Exemplum 208

Vt si dentur Latera 622. 507. Et huic oppositus 50. G. o'. quaerantur Anguli reliqui.

Anguli 50. G. o'. Log. 26650.
Adjac. lateris 62200.00. Log. 47527.
Summa 74177.
Oppositi lateris 50700.00. Log. 67957.
Residuum 6220. dat Ang. 70. G. o'.

alteri lateri oppositum.

Si ergò duo sunt 50. G. o'. 70. G. o'. Tertius erit eorum summae complementum ad duos rectos scilicet 60. G. o'.

Si verò angulus prodiens sumeretur non 70. o. sed
complementum ad semicirculum 110. o. Tertius
fiet 20. o.

Si datus angulus fuerit Rectus, sufficiet sola subtractio Logarithmi lateris recto oppositi, à Log. lateris reliqui dati: restabit enim Logarithmus anguli ei oppositi.

Si latus dato angulo oppositum Logarithmum habuerit aequalem summae priorum: rectangulum erit Triangulum.

III. Si datis duobus lateribus et angulo uni eorum opposito quaeratur latus tertium.

Tunc primùm, ut in secundo casu, quaeratur angulus reliquo lateri dato oppositus; additis Logarithmis, Anguli dati, et lateris ei adjacentis; à summâ verò dempto Logarithmo lateris dato angulo subtensi: cum residuo, ut Logarithmo, exscribatur angulus, et jam summâ duorum angulorum à duobus rectis ablatâ constituitur angulus tertius, cujus Logarithmus, ut in primo casu addendus est Logarithmo unius ex
209 lateribus, à summâ auferendus | Logarithmus Anguli oppositi, restabitque Logarithmus lateris tertii.

Vt in Exemplo priori, sumpto Angulo secundo 70. G. o'. et invento angulo tertio 60. G. o'. Ejus Logarithmo

	14380.		14380.
Addatur lat. 622. Log.	47527.	vel lateris 507. Log.	67957.
A summâ	61907.	vel	82337.
aufer anguli 70. G. Log.	6220.	vel ang. 50. G. Log.	26650.
Restat	55687.		55687.

Logarithmus lateris tertii quaesiti 57300.00. sed decurtati, ut priora, 573.

At si angulus in priori praecepto prodiens sumatur non 70. G. o'. sed 110. G. o'. et tertius ideò sit 20. G. o'. hujus igitur Logarithmus 107290. additus Logarithmis datorum laterum, et ablatis Logarithmis angulorum oppositorum, dat Logarithmum 148600. lateris tertii, angulo scilicet 20. G. o'. oppositi, scilicet 22630.00. decurtati igitur $226\frac{3}{10}$.

Si angulus datus fuerit Rectus, aufertur Logarithmus lateris recto oppositi à Logarithmo lateris reliqui, restat Logarithmus anguli: hujus complementi Logarithmus, vicissim additus Logarithmo primo, lateris recto oppositi, dat Logarithmum lateris reliqui.

IV. Si datis duobus lateribus, et angulo comprehenso, quaerantur anguli reliqui.

† Hic via directa solvendi hunc casum utitur Mesologarithmis, qui non aliter elici possunt ex Chiliade, quàm si Logarithmos arcus ejusque complementi ab invicem subtrahamus: ut sic datâ eorum differentiâ ipsi Logarithmi partium quadrantis non directè possint accipi, sed positione sit utendum. |

38) directà

Dimisso igitur hoc modo, ne tamen manca hîc sit Chilias nostra: utamur positionibus potius in aliâ viâ facili et indirectâ: etsi et haec aptior sit Logarithmis Canonicis Quadrantis. *210*

Est autem talis: Datis lateribus quaeratur eorum proportio: fit enim facilimè, per Capitis VIII. Praeceptum XIII.

Haec verò proportio, cùm sit differentia inter Logarithmos angulorum residuorum, quorum angulorum summa est in anguli dati Complemento ad Semicirculum: Ponatur igitur angulus minor esse notus, auferaturque à dati complemento ad Semicirculum, residui Logarithmo adde proportionem laterum inventam; Summa ut Logarithmus, si dat arcum eundem, quem posueras, felix fuit positio; sin discrepat, muta positionem primam, sumens vel aliquid intermedium, si residuum ex complemento ad Semicirculum fuerit Quadrante minus: vel aliquid longius à primâ positione recedens, quàm quod prodierat; si residuum ex complemento ad Semicirculum fuerit majus Quadrante, praesertim si valdè magnum.

A tali nova positione incipiat nova operatio: Id fiat tantisper, donec prodeat id, quod ultimò fuit positum. Ita habebis utrumque angulum ex quaesitis.

Conducit autem primas positiones sic moderari, ut remaneat de complemento ad Semicirculum aliquid quod exactè reperiatur in Chiliade.

Exempla

Dentur latera 507. et 226$\frac{3}{10}$. comprehensus esto 110. G. ut sit ejus complementum ad Semicirculum 70. G. Quaeruntur duo anguli residui, quos junctos scio facere 70. G. |

Primùm quaero proportionem laterum	50700.			Log.	67957.	*211*
	22630.			Log.	148600.	
				Proportio	80643.	
Compl. ang. ad Semic.	70. G.	0'.				
Positio arbitraria	10. G.	0'.	10''.			
Residuum	59.	59.	50.	Log.	14387.	
Prodit	22.	45.	circ.		95030.	
Positio secunda	17. G.	3'.	37''.			
Residuum	52.	56.	23.		22565.	
Prodit	20.	52.	circ.		103208.	

3) Logarithmus 36) 30. *statt* 20.

Positio tertia	19. G.	0'. 47''.			
Residuum	50.	59. 13.			25231.
Prodit	20.	17. circ.			105874.

Hoc modo cum medio Arithmetico inter positum et prodeuntem semper possemus propius ad consensum venire. At quia statim in secunda positione apparuit, veritatem esse ultra medium Arithmeticum: Sumemus etiam in quarta positione aliquid, quod propius sit prodeunti 20. G. 17'. quam posito 19. G. 1'. tentabimus scilicet 20. G. 0'.

Positio quarta	20. G.	0'.	Proportio	80643.
Residuum	50.	0.	Logarith.	26650.
Prodit	20.	0.		107293. |

212 Haec ergò tandem felix fuit positio, et Anguli quaesiti sunt 20. G. 0'. et 50. G. 0'.

Exemplum aliud

Dentur latera 507. 573. et comprehensus 70. G. ut residuum ad Semicirculum sit 110. G. 0'. Quaero proportionem laterum.

			50700.	67957.
			57300.	55687.
Compl. ang. ad Semic.	110. G.		Proportio	12270.
Positio arbitraria	29. G.	56'. 14''.		
Residuum	80.	3. 46.	Log.	1511.
Prodit	60.	36. circiter.		13781.
Positio secunda	45. G.	58'. 22''.		
Residuum	64.	1. 38	Log.	10647.
Prodit	52.	40. circiter.		22917.
Positio tertia	49. G.	4'. 13''.		
Residuum	60.	55. 47.	Log.	13467.
Prodit	50.	38.		25737.
Apparet ponendum	50. G.	0'.		
Residuum	60.	0.	Log.	14380.
Prodit	50.	0.		26650.

Ergò anguli quaesiti sunt 50. G. 0'. et 60. G. 0'. |

27) 60. 55. 34.

Exemplum tertium 213

Dentur latera, ut prius 507. 573. sed comprehensus sit 20. G. Complementum ad Semicirculum 160. G. Manente igitur laterum proportione

		Log.	12270.
Compl. ad Semic.	160. G. 0'.		
Sit positio arbitrar.	70. G.		
Residuum	90.	Log.	0.
Prodit	62. G. 8'. circiter.		12270.
Positio secunda	54. G. 47'. 45''.		
Residuum	105. 12. 15.		
	74. 47. 45.	Log.	3563.
Prodit	58. 35.		15833.
Positio tertia	60. G. 0'.		
Residuum	100. G. 0'.		
	80. 0'.	Log.	1530. circ.
Prodit	60. G. 35'. circiter.		13800.
Positio quarta	61. G. 0'.		
Residuum	99. 0.		
	81. 0.	Log.	1240.
Prodit	60. 52.		13510.

Ergò positio felix erit 60. G. 47'. circiter.

Hic cum in primâ positione 70. G. Residuum fieret 90. G. prodiit aliquid minus ipsâ positione, scilicet 62. G. 8'. Residuum igitur apparuit futurum majus quadrante. In hoc ergò casu posi|tionem secundam 214 longius à primâ distare feci, quàm id quod per primam prodiit.

Sic in positione secundâ 54. G. 47'. prodiit 58. G. 35'.

Ergò positio tertia 60. G. 0'. longius distare jussa est à positione praecedenti 54. G. 47'. quàm id quod prodierat 58. G. 35'. minus tamen quàm quod primò prodiit, scilicet 62. G. 8'. Et in positione tertia 60. G. 0'. prodiit major 60. G. 35'. feci ergò quartam adhuc majorem, scilicet 61. G. 0'. Per hanc autem quartam 61. G. 0'. prodiit jam minus 60. G. 52'.

Ergò quinta positio adhuc minor est facta, major tamen quàm 60. G. 35'. quod prius prodierat, scilicet 60. G. 47'. Est igitur angulus minor 60. G. 47'. major 99. G. 13'. ferè.

Si datus fuerit Rectus: reliqui duo ex Canone Neperiano facilè habentur, quaesitâ proportione laterum inter Mesologarithmos, inventa enim ea ostendit utrumque angulum.

V. Si datis duobus lateribus et angulo comprehenso quaeratur latus tertium.

Nulla est alia machina, quàm ut prius quaerantur anguli, per praecedens. Tunc iis inventis, cadit quaestio in casum primum.

Si tamen angulus datus sit Rectus, Logarithmos laterum duplica, duplicatorum Logarithmorum numeros absolutos adde, summae Logarithmum dimidia; Semissis iste, ut Logarithmus, dabit inter absolutos quaesitum latus.

VI. Si datis tribus lateribus quaeratur Angulus.

Tunc ante omnia ex majori angulo resecandum est Triangulum aequicrurum, cujus crura sint linea sectionis et latus minus; Basis verò segmentum lateris majoris. Id verò obtinetur in hunc modum. |

215 Adde Logarithmos et differentiae, et summae laterum minorum, à Logarithmorum summâ aufer Logarithmum majoris lateris, residuum ut Logarithmus ostendet inter absolutos, partem de latere majori subtrahendam, ut restet basis aequicruri supradicti.

Constitutâ hac Basi, Maximus angulorum habetur per sua Elementa, si exscripseris Logarithmos tam semissis de basi, quàm residui de latere majori, post ablatum basis semissem; et ab illo quidem minoris, ab isto verò medii lateris Logarithmos abstuleris, relinquuntur enim Logarithmi duarum partium anguli maximi. Duo verò minores anguli sunt horum majoris Elementorum Complementa.

Exemplum

† Sint latera	507. 573. 622. quaeruntur anguli.			
Latus minus	507.			
Medium	573.			
Differentia	66.	Scribo 66000.	Log.	41552.
Summa	1080.	Scribo 10800.	Log.	222562.
				264114.
Lat. maxim.	622.	Scribo 62200.	Log.	47482.
Prodit	11460.	Residuum		216632.

Ad primum tres cyphrae accesserunt, ad secundum una, quae sunt à prodeunte removendae: vicissim ad tertium duae appositae, sunt etiam ad

32) 632.

Quotientem apponendae: duabus igitur appositis, et quatuor remotis formatur pars lateris majoris $114\frac{6}{10}$.[1]

Pars lateris majoris	114.60.		216
Latus majus	622.00.		
Basis aequicruri	507.40.		
Semissis	253.70.	Log. 137160.	
Residuum ablato basis semisse	368.30.		Log. 99886.
Latus minus	507.00.	Log. 67924.	
Latus medium	573.00.		Log. 55687.
Residui manent duo Logarithmi		69236.	44199.
Duorum Elementorum anguli		30. G. 1′.	40. G. 0′.
Ergo totus angulus iste est		70. G. 1′.	

Duo verò minores sunt Complementa Elementorum scilicet . . . . 59. G. 59′. et 50. G. 0′.

Haec igitur de usu Chiliadis nostrae hâc vice sufficiant.

FINIS

NACHBERICHT

In seiner „Weltharmonik" geht Kepler von der Voraussetzung aus, daß letzte Einsichten in das Gefüge des Kosmos nicht den induktiven Wissenschaften vergönnt seien, sondern der Geometrie, einer Geometrie freilich, die in naher Beziehung zur Metaphysik steht. Von „Grenzgebiet zwischen Mathematik und Metaphysik" spricht er in einem Brief an Philipp Müller (Bd. XVIII, S. 101) und bekennt von sich, daß er darin tiefere Befriedigung finde als in der „abstrakten Mathematik", ja selbst als in der Astronomie. Dieselbe Unterscheidung macht er in der „Weltharmonik" (Bd. VI, S. 279), wenn er von der „abstrakten Geometrie" im Gegensatz zu der „in der physischen Welt ausgedrückten Geometrie" spricht und seine Vorliebe für die letztere mit der Stellung des Planeten Jupiter in seiner Nativität begründet.

Da die Schriften dieses Bandes in ihrer Gesamtheit der „abstrakten Mathematik" zuzurechnen sind, so wäre an sich keine Veranlassung gewesen, hier auf den Dualismus von Seinsmathematik und Zweckmathematik hinzuweisen, wenn nicht aus diesem Dualismus Keplers ablehnende Haltung der Algebra oder Coss, speziell der Gleichungslehre gegenüber, entspringen würde. Der wichtigste Fortschritt der Mathematik gelingt nämlich am Ende des 16. Jahrhunderts durch François Viète auf dem Gebiet der Algebra durch Einführung der Buchstabenrechnung und deren Anwendung auf geometrische Probleme. Kepler war durch Jost Bürgi und Adriaen van Roomen mit der Buchstabenalgebra von Viète bekannt geworden und konnte sie daher für seine stereometrischen Schriften nutzbar machen. Daß er es zum Schaden für diese nicht getan hat, liegt vor allem an seinen seinsmathematischen Bedenken gegen die neue Methode.

Existenz, potentielle und aktuelle, kommt in der Seinsgeometrie nur solchen Gebilden zu, die wirklich konstruierbar sind; was nicht konstruierbar ist, wie etwa das reguläre Siebeneck, das weder vom menschlichen noch von dem allwissenden Geist in einem einfachen, ewigen Akt gewußt werden kann (Bd. VI, S. 55), ist für Kepler ein „Nicht-Ding". Im Widerspruch dazu stellen die Cossisten eine Gleichung für die Siebeneckseite auf, setzen sie dabei als existent voraus, obgleich sie keine allgemeine, streng gültige, sondern nur eine Näherungslösung der Gleichung zu haben vermögen, machen sich also einer petitio principii schuldig. Dieses Bedenken verbietet es Kepler, der selber die regulären Vielecke, entsprechend Euklid X, nach dem Grad der Irrationalität, d. h. doch: algebraisch klassifiziert (Th. Peters: Jo. Kepleri Harmonices Mundi Liber I. Berlin 1940, S. 22 f.), die Äquivalenz der algebraischen und der geometrischen Lösung anzuerkennen. Da die Algebra „die begrifflichen Unterschiede der geometrischen Dinge gänzlich außer acht läßt" (Bd. VI, S. 15), kommt ihr lediglich der Rang einer Näherungsanalysis zu; sie eignet sich für „Warenrechnungen", aber nicht für die Erklärung des Wesens der geometrischen Dinge. Man könnte seine Urteile häufen: Die Cossisten sind Leute, „die durch Zahlen, d. h. durch Aussprechen das Unaussprechbare quälen" (Bd. VI,

S. 18f.); „die cossischen Dreiteilungen, Fünfteilungen u. s. f. eines Winkels sind nicht wissenschaftlich" (Brief an Schickard, Bd. XVII, S. 258); in der „Messekunst Archimedis" (S. 147) bringt er den Näherungscharakter cossischer Lösungen bildhaft zum Ausdruck: „Die Cossa, welche vns den weg weiset, wie einem blinden sein führer, oder zwo enge wände in der finstere: wann ich den Kopff zur lincken anstoße, so weiß ich, das ich mich zur rechten wenden soll, den weg aber sehe ich nicht, kan auch das rechte mittel von mir selber nicht treffen".

Es ist danach nicht verwunderlich, wenn die Coss in den stereometrischen Schriften, die das fruchtbarste Feld dafür gewesen wären, nur gelegentlich und ganz am Rande zur Geltung kommen kann, so, wenn Kepler (S. 112) in Worten die Gleichung 3. Grades für die Höhe des Kegelstumpfes aufstellt, welcher bei gegebenem Verhältnis der Grundkreisdurchmesser mit einem gegebenen Zylinder gleicher Visierlänge inhaltsgleich werden soll, aber gleich die Bemerkung anfügt: „Nach solchen Gleichungen suchen die Cossisten immer noch in der Geometrie, werden sie aber, soweit ich urteilen kann, nie finden." Was den Vieta-Schüler Alexander Anderson veranlaßt zu zeigen, daß die Keplersche Gleichung 3. Grades einer einfachen geometrischen Deutung fähig ist (vgl. Anm. 111. 22). Selbst wenn dieser Nachweis Kepler zu Gesicht gekommen wäre und sein abschätziges Urteil über die Coss erschüttert hätte, so wäre dadurch nichts an der Tatsache geändert worden, daß die „Stereometria Doliorum", sein mathematisches Hauptwerk, noch mit dem schwerfälligen Apparat der antiken Mathematik arbeitet, den er zwar virtuos handhabt, der ihm aber trotzdem oft vorzeitig Schranken setzt, wenn er ihn nicht gar vom rechten Weg abführt. Allerdings, das ist zuzugeben, liegt auch ein gewisser Reiz darin, zu sehen, wie Kepler mit archimedischen Hilfsmitteln über Archimedes hinausgreift.

A. DIE STEREOMETRISCHEN SCHRIFTEN

Kepler hat zwei Schriften zur Stereometrie im Druck ausgehen lassen: Die „Stereometria Doliorum" und die „Messekunst Archimedis". Der Original-Titel der lateinischen Schrift ist auf S. 7, der der deutschen auf S. 137 als Faksimile wiedergegeben. In dem sog. Grazer Katalog, einem von Kepler selbst (für Guldin) nach dem Gedächtnis geschriebenen Verzeichnis seiner Werke bis 1622, lauten die Titel „Stereometria seu supplementum Archimedis" und „Messekunst auff Solida, vnd von Müntz". Im Einklang damit werden wir die beiden Schriften im folgenden kurz als „Stereometria" bzw. „Messekunst" bezeichnen. Interessant ist aber, daß in Keplers Erinnerung die doliometrische Absicht hinter den Untersuchungen zur allgemeinen Stereometrie zurückgetreten zu sein scheint, weshalb auch wir lieber von Stereometrie als von Doliometrie reden. Weiter aber verraten alle Titel, die vollständigen und die gekürzten, daß Kepler seine Arbeit an den nahezu 2000 Jahre zurückliegenden Archimedes anknüpft, so als ob in der Zwischenzeit die Stereometrie völlig brach gelegen wäre. Das stimmt objektiv nicht. Während nämlich Archimedes die Stereometrie um die Berechnung von Rotationskörpern 2. Grades (Kugel, Sphäroid, Konoid) bereicherte, steht in den dem Ende des 3. Jahrhunderts n. Chr. angehörenden „Collectiones" von Pappus (im 7. Buch, ed. Hultsch pag. 682/83) ein Satz über die Inhaltsberechnung von Rotationskörpern beliebiger Gestalt, der in freier Übersetzung lautet: „Rotationskörper verhalten sich zueinander wie die jeweiligen Produkte der Flächen der rotierenden Figuren in die Abstände ihrer Schwerpunkte von der Rotationsaxe." Unschwer erkennt man darin die erst nach Kepler gefundene Guldinsche Regel, weshalb Hultsch zunächst die Echtheit des Pappus'schen Satzes anzweifelte. So wenig dieser Zweifel begründet war, als so sicher hat zu gelten, daß Guldin seine Regel selbständig fand; und ebenso sicher ist, daß Kepler, der die Pappusausgabe des Commandino von 1588 benützt hat, über die Stelle weggelesen hat, obgleich ihn der mehrfach vorkommende Ausdruck „Figurae rotatione genitae" hätte aufmerksam machen können. In seinem Bewußtsein war daher Archimedes der letzte, der die Stereometrie um wesentliche Erkenntnisse und Methoden bereichert hatte, so daß für ihn der Stand dieser geometrischen Disziplin als archimedisch charakterisiert war.

Die Aufgabe jedoch, die er sich gestellt hatte, die Inhaltsberechnung von Fässern, drängte ihn über den griechischen Meister hinaus, wenn er weder bei den gröberen Annäherungen der Faßformen durch einen Zylinder oder einen gedoppelten Kegelstumpf, noch bei der feineren, von ihm aber als unzulässig erkannten, durch ein beiderseits gekapptes Sphäroid stehen bleiben wollte. Keplers erfolgreicher Angriff auf die bisher von Archimedes gehaltene Grenze wirkte irgendwie befreiend: Die Stereometrie wurde plötzlich wieder zu einem hoffnungsvollen und aktuellen Thema, das seinerseits starke Impulse an andere mathematische Disziplinen weitergab. Guldin, Cavalieri, Torricelli, Gregorius a St. Vincentio, Anderson u. a. greifen, direkt oder indirekt von Kepler angeregt, raumkörperliche Probleme auf.

Nach dem Wortlaut des Titels könnte es scheinen, als ob die „Messekunst" lediglich ein Auszug aus der „Stereometria" wäre, für Praktiker, denen mathematische Beweise nicht zugemutet werden durften, verständlich dargestellt, mit zahlreichen durchgerechneten Beispielen und durch einen Anhang über Maße und Münzen erweitert. Diese Auffassung ist so verbreitet, daß die „Messekunst" allenfalls als Versuch zur Bildung einer deutschen mathematischen Fachsprache, kaum aber als eigener Beitrag zur Stereometrie gewürdigt wird; sie geht jedoch merklich an dem tatsächlichen Verhältnis der beiden Schriften zueinander vorbei. Vor allem ist zu bemerken, daß die „Messekunst" an einer besonders wichtigen Stelle die Problemstellung der „Stereometria" zu Ende führt. Davon wird jedoch an späterer Stelle zu reden sein. Trotzdem bleibt es aber richtig, daß der mathematische Inhalt der „Messekunst" in der Hauptsache einen Teil der „Stereometria" ausmacht und daher kürzer erledigt werden kann. Unlösbar ineinander verkoppelt sind aber die Entstehungsgeschichten der beiden Schriften.

ENTSTEHUNGSGESCHICHTE

Den Anstoß für Kepler, sich um die rechnerische Bestimmung von Faßinhalten zu kümmern und sich damit auf das Gebiet der ihm weniger gelegenen abstrakten Geometrie zu begeben, bildet ein zufälliges Ereignis, über das wir am besten mit seinen eigenen Worten in der „Epistola dedicatoria" (S. 9) berichten. „Es war im vergangenen November [1613]. Ich hatte eben eine neue Gattin heimgeführt, Österreich schickte nach einem ebenso reichen wie guten Weinherbst eine Menge Lastschiffe die Donau herauf, um seinen Reichtum mit unserem Noricum zu teilen, und das ganze Linzer Ufer bot ein Bild, als wäre es zugebaut mit Weinfässern, die für einen annehmbaren Preis zu kaufen waren. Da fühlte ich mich als Gatte und guter Familienvater verpflichtet, für mein Haus nach dem nötigen Getränk Ausschau zu halten. Ich ließ mir daher etliche Fässer ins Haus bringen und einkellern. Vier Tage danach kam der Verkäufer mit einer Meßrute, einer einzigen nur, mit der er von allen Fässern samt und sonders der Reihe nach, ohne Unterschied, ohne Rücksicht auf die geometrische Gestalt, ohne weitere Überlegung oder Rechnung den Inhalt ermittelte. Er schob einfach die metallene Spitze der Rute durch das Spundloch des Fasses schräg hinein bis zur tiefsten Stelle des einen und dann des anderen kreisförmigen Holzdeckels, die in der Umgangssprache Böden heißen. Erwies sich die Länge vom höchsten Punkt des Bauches bis zum tiefsten der kreisrunden Bretter beiderseits als gleich, so gab er nach der Zahlenmarke, die der Rute am Ende der gemessenen Länge aufgeprägt war, die Zahl der Eimer an, die das Faß halten sollte. Nach dieser Zahl wurde die Höhe des Preises errechnet."

Zum erstenmal begegnet hier Kepler der Meßrute und einem Meßverfahren, das als „Visierkunst" mindestens schon seit dem 14. Jahrhundert in Übung und, der Zahl der „Visierbüchlein" nach zu schließen, ziemlich verbreitet war.[1] Dem Staunen über die Einfachheit des Verfahrens folgt sofort der Zweifel an der Zuverlässigkeit; ganz unglaublich will es ihm vor allem scheinen, daß ein und dieselbe Rute mit einer einzigen Skala die Inhalte von Fässern verschiedener Bauart richtig angeben solle. Den Zweifel kann nur die Stereometrie beheben, die Lösung der Aufgabe, den Inhalt eines kreisrunden Fasses mit gegebenen Abmessungen rechnerisch zu ermitteln. Von dieser Seite her nimmt denn auch Kepler seine Arbeit in Angriff. Schon am 17. Dezember

[1] Zur Geschichte der Visierkunst vgl. man vor allem G. Sarton: Introduction to the history of science III, 2, pagg. 1112, 1318 u. 1518; ferner Thorndike: „Visierkunst, Ars visorandi, or Stereometry" in Isis 40 (1949) pag. 106 f. Danach stammt die erste bekannte Beschreibung der Visierrute (in deutscher Sprache) von dem Nürnberger Patrizier Ulman Stromer (1329–1407). Ihr folgt eine Reihe lateinischer Traktate. Das erste gedruckte Schriftchen ist das „Fisierbüchlein auf allerhand Eich", Regensburg 1485. Die im 16. Jahrhundert erschienenen Anleitungen zur Visierkunst haben zum Teil bekannte Verfasser wie Jakob Köbel, Heinrich Grammateus, Erhart Helm, Peter Apian. Bei allen diesen Schriften handelt es sich lediglich um kurze, praktische Anweisungen zu Herstellung und Gebrauch eines Visierstabes, von denen sich Keplers Behandlung des Problems grundlegend unterscheidet.

glaubt er damit am Ziel zu sein; an diesem Tag schreibt er nämlich die Widmung an Fürst Maximilian von Liechtenstein und Freiherr Helmhard Jörger, denen er das Manuskript von knappen 6 Seiten (Brief an Mästlin vom 5. Mai 1616; Bd. XVII, S. 170) mit etwa 10 Theoremen (S. 133) als Neujahrsgabe zueignet. Er denkt auch an den Druck des kleinen Schriftchens, das sich äußerlich im Rahmen der Visierbüchlein hält, und schickt es zu diesem Zweck um den 1. Februar nach Augsburg an Markus Welser, den Spiritus Rector der Verlagsgesellschaft „Ad insigne pinus". Zum Glück für Kepler, dem das Büchlein wenig Ehre gemacht hätte, mißlingt jedoch der Plan. Am 11. Februar antwortet nämlich Welser (Bd. XVII, S. 103): „Eure Faßrechnung habe ich dieser Tage richtig erhalten und wegen der Herausgabe sofort mit unserem Buchhändler Krüger verhandelt. Auf keine Weise gelang es mir jedoch, ihn dazu zu bringen, den Verlag auf seine Kosten zu übernehmen. Obschon er zugeben mußte, daß der Name Kepler bei allen wissenschaftlich Gebildeten in Gunst und hohem Ansehen stehe, so behauptete er doch, der Gegenstand des Buches finde keinen Anklang und scheine ihm nicht verkäuflich, zumal in lateinischer Sprache." Auf den Vorschlag Welsers, das Werkchen auf Kosten des Autors zu drucken, geht Krüger jedoch ein und verspricht, sich mit einem Buchdrucker in Verbindung zu setzen. Ehe indes Kepler weiter von der Sache hört, stirbt Welser am 23. Juni 1614. Das Manuskript ruht nun an die 16 Monate bei Krüger und wäre wohl auch bei Kepler allmählich in Vergessenheit geraten, wenn er nicht plötzlich eine Arbeit für einen Drucker gebraucht hätte.

Von Erfurt her kommend war im Frühjahr 1615 der Buchdrucker Hans Blanck (Plank) nach dem bis dahin druckerlosen Linz gekommen und hatte seine Dienste angeboten (vgl. Gutenberg-Jahrbuch 1935, S. 243f.). Am lebhaftesten befürwortete Kepler seine Aufnahme, an ihm blieb deshalb auch die Verpflichtung hängen, dem unbemittelten Drucker einen ersten Auftrag zu verschaffen. In dieser Situation erinnerte er sich seines immer noch in Augsburg liegenden Manuskriptes und forderte es zurück. Mit viel Mühe erhält er es Ende Mai (1615), ist nun aber selbst sehr enttäuscht davon. Abgesehen davon, daß es ihm zu kümmerlich erscheint, entdeckt er darin einen verhängnisvollen Fehler, der ihn, „obgleich in großer Arbeitsnot", zu einer völligen Neufundierung seiner Arbeit zwingt. Dabei wächst allein die „Stereometria Archimedea" beträchtlich über den Umfang des ersten Entwurfs hinaus, das „Supplementum ad Archimedem" kommt neu hinzu; ebenso der ganze 2. Teil mit den Maximumsbetrachtungen in konjugierten und assoziierten Kegelstumpfscharen, aus denen die Berechtigung des Meßrutenverfahrens beim österreichischen Faß hervorgeht. Am Ende ist es gerade noch die Widmung an die Patrone, welche die neue Arbeit mit der alten gemeinsam hat, und das alles sei „der Bequemlichkeit einer am Ort ansässigen Druckerei" zu danken, bemerkt Kepler mit Recht (S. 86). Die Kehrseite davon, allerdings bedingt durch die besonderen Umstände, ist die große Eile, mit der er zu arbeiten gezwungen war: Am 15. Juli, also in der unglaublich kurzen Zeit von 6 Wochen, ist die

Arbeit getan; zu diesem Zeitpunkt müssen bereits einige Bogen gedruckt gewesen sein, denn das fertige Buch, die „Stereometria Doliorum", ist auf der Frankfurter Herbstmesse 1615 zu kaufen. Der Druck ist auffallend sorgfältig ausgeführt; die verhältnismäßig wenigen Fehler, die in dem schwierigen Satz stehengeblieben sind, sind auf einem besonderen Blatt „Errata" korrigiert.

Die Stände von Oberösterreich, Keplers Brotgeber, sahen nicht gut zu seiner Beschäftigung mit der Doliometrie. Es wurde ihm bedeutet, daß die Löblichen Stände es viel lieber sehen würden, wenn er „dergleichen arbaitt einstellen, vnd die wüchtigere sachen, darauff er fürnemlich bestellt seye, als die Tabulas Rudolphinas vnd die Landmappam zu völligem werckh richten" würde (Bd. XVII, S. 173). Trotzdem legt er sein Thema nach der Vollendung der „Stereometria" nicht beiseite, sondern beginnt sofort mit einer Umarbeitung des Werkes für die Leute, die weder der lateinischen Sprache noch der subtilen mathematischen Überlegungen mächtig waren, aber beruflich, amtlich oder gelegentlich als Dilettanten mit dem Maßwesen zu tun hatten, denen es dabei aber nur auf Ergebnisse, nicht auf Beweise und Herleitungen ankam. Sicherlich klingt dabei der Einwand des Augsburger Buchhändlers nach, daß ein lateinischer Traktat nicht verkäuflich sei. Die Arbeit an diesem deutschen Werk, der „Messekunst Archimedis", nimmt verhältnismäßig viel Zeit in Anspruch. Erst nach 5 Monaten, um Weihnachten 1615, ist sie fertig; die Widmung an die Stände trägt das Datum 1. Jan. 1616. Alles in allem, sagt Kepler in einem Brief an Mästlin (Bd. XVII, S. 170), habe er sich 9 Monate bei der Stereometrie aufgehalten. Zur Frühjahrsmesse ist die „Messekunst" in Frankfurt. Der Drucker ist wieder Hans Blanck, der nach wie vor auf Beschäftigung durch Kepler angewiesen ist, was dieser nicht ungern den Ständen gegenüber zu seiner Entschuldigung ins Feld führt: „... dise arbaitt mit der Messekunst ... ist auch sonderlich vnder anderm dahin angesehen gewest, das Ich dem druckher mit einer materia popularj auffhelffe, vnd Ine hernach zu anderen meinen werckhen zur hand haben möge" (Bd. XVII, S. 173).

In beiden Fällen muß Kepler die Kosten des Druckes selbst tragen, sogar den zu mageren Typenapparat Blancks durch Zukauf ergänzen. Von der „Messekunst" sagt er, daß ihm „Uncosten biß in 250 fl." entstanden seien, beim lateinischen Traktat dürften sie sich in derselben Höhe bewegen, obwohl er einen Bogen weniger hat; dafür müssen aber die Figuren in Rechnung gestellt werden. Über Auflage, Verkaufspreis und Vertrieb, der zweifellos einem Buchhändler übertragen war, ist nichts bekannt. Rasch werden die beiden Bücher keinesfalls abgegangen sein; ein Einzelfall aus dem deutschen Nordosten läßt eher das Gegenteil befürchten. Kepler hatte dem Danziger Mathematiker Crüger ein Exemplar der „Stereometria" dediziert mit der Bitte, für sein Werk zu werben. Crüger antwortet (Brief vom 31. März 1616; Bd. XVII, S. 158 f.), daß außer ihm nur sein Königsberger Kollege, die Königsberger Bibliothek und ein preußischer Adeliger namens Niewieschinsky als Käufer in Betracht kommen. Trotzdem kommt Kepler durch Honorare anscheinend gut auf seine Rechnung. Am 17. Juni 1616 schreibt er nämlich an Crüger zurück (Bd. XVII, S. 179): „Ihr gebt mir zu verstehen, daß keine Aussicht bestehe, Exemplare abzusetzen. Das schadet aber gar nicht, ich hatte diese Angelegenheit überhaupt schon vergessen. Für die Österreicher habe ich geschrieben; sie haben bereits bezahlt und werden noch etwas mehr bezahlen." Die Stände von Oberösterreich, denen die „Messekunst" gewidmet ist, lassen Kepler allein schon eine „Verehrung" von 150 fl. zukommen.

Obschon sich die Mathematiker des In- und Auslandes – Italien, Frankreich und England – durch die beiden stereometrischen Schriften, vorab natürlich die „Stereometria", stark angesprochen fühlten, blieb es für jede bei der einen Linzer Erstausgabe. Schon im 18. Jahrhundert war es deshalb nicht ganz leicht, an die Bücher heranzukommen. A. G. Kästner konnte beispielsweise trotz aller Mühe kein Exemplar der „Stereometria" für seine „Geschichte der Mathematik" auffinden. Diese Schwierigkeit wurde erst durch die Gesamtausgabe der Werke Keplers von Chr. Frisch behoben („Stereometria" Bd. IV, S. 551–665, „Messekunst" Bd. V, S. 495–616). In der Sammlung „Ostwalds Klassiker" erschien danach als Nr. 165 (Leipzig 1908) eine deutsche Übersetzung der „Stereometria" von R. Klug, jedoch ohne die „Archimedische Stereometrie" und die vier ersten, kleineren Kapitel des dritten Teiles. Diese kommentierte Übersetzung hat zweifellos zur Beschäftigung mit der Doliometrie Keplers angeregt, um so bedenklicher sind die zahlreichen groben Übersetzungsfehler, die anscheinend noch kaum bemerkt wurden, denn selbst H. Wieleitner, dem wir die bisher ausführlichste Studie über die „Stereometria" verdanken,[1] bezeichnet die Arbeit Klugs „im ganzen als gut". Die Folge dieser allzu guten Meinung ist, daß er sich selbst wiederholt durch Falschübersetzungen irreführen ließ. In den Anmerkungen wird auf solche Stellen aufmerksam zu machen sein.

Dem Verständnis bot die „Stereometria" mit ihren neuartigen Gedanken große Schwierigkeiten. Die Keplersche Methode der Integration eines Apfelkörpers durch Umwandlung in einen Zylinderhuf ging weder Anderson ein, noch Guldin, welch letzterer meint, daß er sich nicht Kopf und Hirn habe zerbrechen wollen, um der Sache auf den Grund zu kommen; der zweite Teil mit den Überlegungen über die Maximaleigenschaft des österreichischen Fasses wird von keinem der beiden gewürdigt. Briggs entschuldigt das mangelnde Verständnis mit der zu großen Breite von Keplers Gedankengängen, die nachzudenken er keine Zeit habe (Brief vom 20. Febr. 1625; Bd. XVIII, S. 221). Aber auch Wieleitner, ein in der Geschichte der Mathematik erfahrener Mann, klagt am Ende der erwähnten Studie von 1930, daß er die Sache viel schwieriger gefunden habe, als er anfangs dachte. Natürlich liegt die Schwierigkeit für den modernen Mathematiker an anderer Stelle als für die Zeitgenossen

[1] In 2 Teilen erschienen, der erste unter dem Titel: „Keplers Archimedische Stereometrie" in: Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaft 36 (1930), S. 176–185; der zweite mit dem Titel: „Über Keplers Neue Stereometrie der Fässer" in: „Kepler-Festschrift", Regensburg 1930, S. 279–313.

Keplers. Dem Heutigen macht das vollständige Fehlen algebraischer Symbolik und das Ungewohnte der Wortgleichungen hauptsächlich zu schaffen. Es erfordert in der Tat erheblichen geistigen Aufwand, um sowohl die einzelnen Theoreme mit ihren Beweisen als auch den Gang der Untersuchung zu durchschauen.

Um solche Schwierigkeiten, entsprechend der Absicht der Nachberichte, dem Leser aus dem Weg zu räumen, und zugleich auch den des Latein nicht oder nicht genügend kundigen Lesern die Möglichkeit zu geben, sich kurz über die ganze Schrift zu orientieren, wird nachfolgend eine Inhaltsanalyse gegeben, die der Reihe der Theoreme folgt und sich zugleich vielfach moderner Symbolik bedient, um auf diese Weise den straffen Gang der Untersuchung mit möglichster Klarheit herauszuarbeiten. Dies ist beim 2. Teil unumgänglich, wenn endlich Keplers Absicht ganz verstanden werden soll. Einzelheiten, die einer Erklärung, Berichtigung oder Hervorhebung bedürfen, ferner historische und literarische Hinweise sind in den Anmerkungen zu finden; die betreffenden Stellen sind im Text durch ein Kreuz gekennzeichnet.

Keinem Werk Keplers begegnet man in der Literatur so oft wie der „Stereometria". Es konnte deshalb nicht die Aufgabe des Herausgebers sein, allen diesen Fäden nachzugehen. Nur die früheste Literatur wurde in den Anmerkungen ausgiebig herangezogen, vielfach sogar wörtlich zitiert, um die unmittelbare Reaktion auf Keplers Gedanken sichtbar zu machen. Von der neuen Literatur wurde nur der ausführliche Kommentar Wieleitners kritisch gewürdigt, da er das Urteil über Keplers Arbeit in der jüngsten Zeit bestimmt hat.

AUFBAU UND INHALT

1. STEREOMETRIA DOLIORUM

Das Werk besteht aus 3 Teilen, denen eine Widmung und ein Vorwort vorausgeschickt sind. Teil I und II haben die bei mathematischen Werken übliche Form der Aufgliederung in Theoreme, die nach Bedarf durch Corollare (Folgesätze), Episagmen (Zusätze)[1] und Analogien erweitert werden; nur Teil III hat lediglich 5 Kapitel mit Einzelüberschriften. Innerhalb von Teil I bilden die durchlaufend numerierten Theoreme zwei getrennte Abschnitte, die durch die Verschiedenheit der Seitentitel schon äußerlich als solche gekennzeichnet sind. Danach ergibt sich folgendes Aufbauschema:

Widmungsschreiben (Epistola Dedicatoria) an Fürst Maximilian von Liechtenstein und Freiherr Helmhard Jörger.

Vorwort (Praeambulum) „Über die zweckmäßige Gestalt eines Weinfasses".

[1] Das Wort Episagma kommt bei Kepler sonst nicht vor. Archimedes hat in „De Conoidibus et Sphaeroidibus" vereinzelt „Theoremata et Epitagmata" (Heiberg, ed. altera I, 259). „Epitagma" hat jedoch den Sinn von Nachdruck, Eindringlichkeit.

Teil I. „Stereometrie der regulären krummen Körper".

[A]. „Archimedische Stereometrie". Theorem 1–17.
„Apostrophe (Zwischenbemerkung) an die Patrone" Liechtenstein und Jörger.

[B]. „Ergänzung zu Archimedes. Stereometrie der den Konoiden und Sphäroiden nächstfolgenden Körper". Theorem 18–30. Eingeleitet wird dieser Abschnitt durch 3 Kapitel über Kegelschnitte, über die durch Rotation eines Kreises je nach der Lage der Rotationsachse zur Kreisfigur entstehenden Ringkörper, und über die Körper, die durch Rotation der übrigen Kegelschnitte entstehen. In Theorem 18–22 folgt die Berechnung der Ringe, des „Apfels" und der „Zitrone" bzw. der ihnen verwandten Körper, wenn der Kreis durch die Ellipse ersetzt wird. In Theorem 23–30 werden die parabolischen und hyperbolischen „Spindeln" behandelt. Da die direkte Berechnung nicht gelingt, werden nur Größenbeziehungen hergestellt. Bei allen diesen Körpern werden auch die faßähnlichen Segmente der Betrachtung unterworfen.

Teil II. „Stereometrie des österreichischen Fasses im besonderen".

Nach einem einleitenden Kapitel über die beste geometrische Annäherung an die Form des österreichischen Fasses wird weiterhin mit dem doppelten Kegelstumpf als Modell operiert. Unter Zugrundelegung dieser Form wird in 29 durchlaufenden Theoremen die Abhängigkeit des Faßinhaltes bei fester Visierlänge von zwei Verhältnissen, dem der Daubenlänge zum Durchmesser des Bodens und dem des größten Durchmessers am Bauch zum kleinsten am Boden, eingehend durchdiskutiert mit dem Ziel, die Maximaleigenschaft des österreichischen Fasses zu beweisen.

Teil III. „Anwendung des ganzen Buches auf die Fässer".

Während in den 4 ersten Kapiteln die nun spruchreife Frage der Anwendbarkeit der Meßrute und die Anwendung selbst besprochen wird, macht das 5. Kapitel den ersten, mißlungenen Versuch, bei einem nicht mehr vollen Faß das Verhältnis des Flüssigkeitsinhaltes zum leeren Raum rechnerisch zu ermitteln.

Nach dieser Übersicht wenden wir uns der Inhaltsanalyse im einzelnen zu. Das Widmungsschreiben für seine zwei Patrone, Maximilian von Liechtenstein und Helmhard Jörger, denen Kepler vor anderen seine Anstellung in Linz verdankte, trägt das Datum 17. Dez. 1613. Es ist danach das einzige Stück, das aus dem sonst völlig beiseite gelegten ersten Entwurf in die „Stereometria" übernommen wurde. Es bedarf unter den veränderten Umständen einer Berichtigung und Ergänzung, die in der „Apostrophe ad Patronos" (S. 36) gegeben wird. Darin erklärt Kepler die Verzögerung des Druckes, er begründet die Umarbeitung des ursprünglichen Manuskripts, das den Herren bereits vorgelegen hatte, und bittet, da die beiden auch Vorgesetzte von ihm sind, um Nachsicht dafür, daß er seine Zeit zu anderen Arbeiten als den ihm aufgetragenen verwendet habe. „Ich bereue aber das Opfer nicht", fügt er hinzu, „denn es ist ja ganz unmöglich, daß eine Arbeit, wenn sie sich keine Zeit kosten ließ, den Preis der Unsterblichkeit davonträgt".

Im Vorwort begründet Kepler die Vorteile des kreisrunden, jedoch nicht zylinderförmigen Fasses, und schließt: „Da die Weinfässer an den regulären Figuren Kreis, Kegel und Zylinder Anteil haben, so sind sie schon bisher geometrischer Berechnung zugänglich nach den von Archimedes entwickelten Prinzipien, die deshalb wert sind, an den Anfang dieser Untersuchung gestellt zu werden; freilich nur in dem Umfang, wie es zur Erlustigung des Gemütes eines Liebhabers der Geometrie hinreicht. Die strengen und bis ins Kleinste durchgearbeiteten Beweise möge man nämlich in den Büchern von Archimedes selbst nachlesen, wenn man nicht vor der dornenvollen Lektüre zurückschreckt. Bei gewissen Partien, an die Archimedes nicht gerührt hat, sei mir jedoch ein längeres Verweilen gestattet, damit auch die gelehrteren Leute etwas finden, wovon sie Förderung und Ergötzung haben" (S. 13).

So, wie hier angekündigt, wird die als 1. Abschnitt von Teil I folgende „Archimedische Stereometrie" vorgetragen. Zwar werden in den Theoremen und Episagmen die Archimedischen Sätze über Kreis, Kegel, Kugel, Sphäroid, parabolisches und hyperbolisches Konoid ziemlich vollständig zusammengestellt, aber die Beweise zu den Theoremen – bei den Episagmen wird grundsätzlich darauf verzichtet und statt dessen auf Archimedes selbst verwiesen – sind nicht archimedisch. Ausdrücklich wird das nochmals bei Theorem XIV (S. 27) betont: „Ich habe nicht die Absicht, den ganzen Archimedes abzuschreiben". Was dieser bewiesen hat, wird als unumstößlich richtig akzeptiert; Kepler sieht seine Aufgabe darin, die Wahrheit des Theorems, vielleicht auch die Beweismethode eingängiger zu machen.

Dieses Verfahren ist nicht mehr anwendbar bei den 3 letzten Theoremen XV–XVII dieses Abschnitts, „an die Archimedes nicht gerührt hat", die Kepler also selbst gefunden hat und deshalb mit strengem Beweis einführen muß. In Theor. XV stellt er fest, daß die zwei Kugelsegmente, in die eine Kugel durch eine schneidende Ebene zerfällt, gewissen Rechtecken proportional sind, während Archimedes Proportionalität mit 2 Kegeln bewiesen hatte. Theor. XVI umfaßt einige Sätze über die durch Schnitt eines geraden Kreiskegels mit einer zur Achse senkrechten oder schrägen Ebene entstehenden Teilkörper. Im ersteren Fall des geraden Kegelstumpfs gelingt ihm dabei „ein sehr schönes Theorem" über das Verhältnis des ganzen Stumpfs zu der über den inneren Zylinder hinausragenden „Tunica" (S. 32), dessen noch schönerer Beweis erst im Anschluß an Theor. XXII gegeben werden kann. In Theor. XVII wird der Kegel durch einen Kreiszylinder ersetzt und, abgesehen von dem Verhältnis der „Tunica" zu dem zwischen „Tunica" und äußerem Zylinder des Kegelstumpfes liegenden „Restlimbus", vor allem das Problem der Inhaltsberechnung eines Zylinderhufs in Angriff genommen, des für das Folgende wichtigen Körpers, der entsteht, wenn der gerade Kreiszylinder von einer Ebene so getroffen wird, daß sie einen der beiden Grundkreise zerschneidet. Kepler konnte nicht wissen, daß Archimedes diese Aufgabe in der „Methodus" („Ἔφοδος") genannten Schrift, die erst zu Beginn des 20. Jahrhunderts von Heiberg in einem Palimpsest wiederentdeckt wurde (Opera, ed. Heiberg, Bd. II, S. 484–507), als Prop. 11 bereits in Angriff genommen und für den Fall, daß der Grundkreis vom Durchmesser d von der schneidenden Ebene halbiert wird und der Huf die Höhe d hat, seinen Inhalt zu $\frac{d^3}{6}$ bestimmt hatte. In Übereinstimmung damit findet Kepler das Verhältnis desselben Hufs beliebiger Höhe zu dem des gleichhohen Zylinders als $H : Z = 7 : 33 = 2 : 3\pi$, und entsprechend das Verhältnis von H zu dem Rest R des halben Zylinders $H : R = 14 : 19 = 4 : (3\pi - 4)$.

Nicht diese paar Eigentheoreme Keplers sind es aber, welche die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf die an sich gar nicht aufregende „Stereometria Archimedea" gezogen haben, sondern die am Beginn dieses Abschnittes stehenden uralten Sätze über die Kreismessung, genauer gesagt: Keplers Kommentar zu dem Satz von Archimedes (Prop. 1 der „Kreismessung"), daß die Fläche des Kreises gleich sei der Fläche des rechtwinkligen Dreiecks, dessen kleinere Kathete dem Halbmesser des Kreises, die größere dem Umfang des Kreises gleich ist. Denn ein Beweis will die unzulängliche Infinitesimalbetrachtung nicht sein, sie setzt vielmehr den Satz, der bezeichnenderweise gar nicht als eigenes Theorem erscheint, als bewiesen voraus. Aber die Art, wie Archimedes ihn beweist, indirekt, durch eine „deductio ad impossibile", indem er nämlich zeigt, daß die Kreisfläche weder größer noch kleiner sein könne als die Fläche des besagten Dreiecks, scheint Kepler – und nicht nur Kepler – einer Erklärung zu bedürfen. Wie kommt Archimedes zu dem Dreieck als Vergleichsfläche? Und wenn diese Wahl, die sich zunächst als bloßer Kunstgriff ausnimmt, einsichtig gemacht ist, deutet sich dann nicht die Wendung vom indirekten zu einem direkten Beweis an?

Keplers Erklärung beginnt mit den Worten: „Archimedes benützt einen indirekten Beweis, der auf Unmögliches führt. Darüber haben viele vielerlei geäußert. Mir scheint der Sinn dieser zu sein." Wie schon im 40. Kapitel der „Astronomia Nova" bei der Herleitung des Flächensatzes (Bd. III, S. 264) sieht er des Rätsels Lösung im Rückgang auf unendlich kleine Teile. Aus der beim Fehlen des begrifflichen Rüstzeugs ungenauen Beschreibung schält sich der Gedankengang so heraus: Die Kreislinie und die mit ihr gleichlange Kathete werden in gleich viele gleiche Teile geteilt, die Teilpunkte mit dem Kreismittelpunkt bzw. mit der gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks verbunden (vgl. Figur II, S. 15). Da die Gleichheit von Kreisfläche und ganzer Dreiecksfläche nach Archimedes feststeht, so sind sich auch die Teile, Kreissektoren und Teildreiecke, gleich. Nun wäre es für Kepler ein leichtes, nach archimedischem Muster in jedem Sektor die Kreislinie einerseits durch die Sehne, andererseits durch die dazu parallele Tangente zu ersetzen, sowohl die kleineren wie die größeren Dreiecke zu je einem einzigen rechtwinkligen Dreieck zu summieren und zu zeigen, daß sich die beiden bei Vergrößerung der Zahl der Teile dem von Archimedes postulierten Dreieck von verschiedenen Seiten her als gemeinsamer Grenze nähern. Statt dessen operiert er sofort mit unendlich kleinen Teilen, deren es ebensoviele gebe als der Kreis Punkte hat. Seine Sektoren schmelzen also zu Linien zusammen, die nach Belieben als Dreiecke oder Sektoren aufgefaßt werden können. Als Dreiecke haben sie alle gleiche Basis und gemeinsame Höhe, jedes einzelne ist daher gleich dem entsprechenden Teil des rechtwinkligen Dreiecks, schließlich also auch die Kreisfläche gleich dem rechtwinkligen Dreieck. Keplers Erklärung schließt mit den Worten: „Das bedeutet die archimedische Zurückführung auf Unmögliches". Dieser Schluß ist nochmals die Bestätigung dafür, daß Kepler sein der nötigen Strenge entbehrendes Verfahren nicht als Beweis betrachtet hat, sondern nur als Versuch, den archimedischen Beweis durchsichtig zu machen.

Hält Kepler seine Infinitesimalmethode auch nicht für beweiskräftig, so hat er doch offensichtlich eine Freude an ihr. Noch zweimal verwendet er sie, beide Male wieder zur Bestätigung und Aufhellung feststehender Sätze von Archimedes. In Theor. IV (S. 19) wird der Satz über das Verhältnis des Zylinders zu dem Kegel gleicher Basis und Höhe aus dem entsprechenden Satz über Prisma und Pyramide hergeleitet, indem der gemeinsame Grundkreis von Zylinder und Kegel wie bei Theor. II vom Mittelpunkt aus in unendlich viele Sektoren bzw. Dreiecke aufgeteilt gedacht wird, die nun als Grundflächen von Elementarprismen bzw. -pyramiden dienen. In Theor. XI (S. 23 f.) bezieht sich Kepler zur Erläuterung des Satzes, daß sich das Volumen einer Kugel zu dem ihr umschriebenen Zylinder wie 2 zu 3 verhalte, direkt auf Theor. II: „Analog zu dem, was bei Theorem II gesagt wurde, enthält die Kugel potentiell unendlich viele Kegel, die mit ihren Spitzen im Mittelpunkt der Kugel zusammenstoßen, indes die Grundflächen, die durch Punkte repräsentiert werden, auf der Oberfläche aufliegen", denn wie der Kreis hat auch die Kugeloberfläche „ebensoviele Teile wie Punkte, nämlich unendlich viele". Da als Theor. X bereits bewiesen wurde, daß die Oberfläche der Kugel dem Mantel des umschriebenen Zylinders gleich sei, so wird nun ein Kegel gebildet, dessen Höhe der Radius, dessen Grundfläche ein Kreis von der Größe der Kugeloberfläche ist. Wie bei Theor. II wird sodann mit Hilfe der beiderseits gleichen Elementarkegel die Gleichheit der Inhalte von Kugel und Kegel demonstriert, woraus alles weitere leicht folgt.

Wie zur Probe versucht Kepler sein Theor. XI auf eine zweite Art zu erhellen, indem er Kugel und Zylinder in andere, direkt vergleichbare Formen transformiert. Bei der Kugel ist es die eben beschriebene Umwandlung in einen inhaltsgleichen Kegel; beim Zylinder ergibt sich die neue Form direkt aus Theor. II. So wie nach Archimedes der Kreis vom Halbmesser r dem rechtwinkligen Dreieck gleich ist, dessen Katheten r bzw. $2r\pi$ sind, so ist der Zylinder von der Höhe h inhaltsgleich dem über dem rechtwinkligen Dreieck stehenden dreiseitigen Prisma von der Höhe h, das auch als die Hälfte eines Quaders mit den Kanten r, $2r\pi$, h betrachtet werden kann, dessen Grundfläche mit den Seiten $2r\pi$ und h die Abwicklung des Zylindermantels ist. Dieser ist hinwiederum der Kugeloberfläche gleich. Es verhält sich daher

Zylinder zu Kugel wie $\frac{r}{2}$ zu $\frac{r}{3}$ oder wie 3 zu 2. Die Umwandlung des Zylinders in ein Prisma gleicher Höhe wird weiterhin eine wichtige Rolle spielen; auf ihr beruht nämlich Keplers Methode der Berechnung von Rotationskörpern, die das Hauptthema der nun folgenden „Ergänzung zu Archimedes" bildet.

Die „Ergänzung zu Archimedes" mit dem Untertitel „Stereometrie der den Konoiden und Sphäroiden nächstfolgenden Körper" beginnt mit folgender Erklärung (S. 37): „Bis hierher kamen Archimedes und die alten Geometer bei ihren Studien über Wesen und Maße der geradlinigen und krummlinigen ordentlichen Figuren und über die Körper, welche von ihnen auf der nächstfolgenden Stufe erzeugt werden. Da sich indes die Faßfigur etwas weiter von den regulären Figuren entfernt, so glaubte ich lohnende Arbeit zu leisten, wenn ich, gleichsam auf einer einzigen Stammtafel zusammengefaßt, ihre und verwandter Figuren Entstehung sowie die Grade der Verwandtschaft mit den regulären Figuren vor Augen führe in der Absicht, einerseits die nachfolgenden Beweise durchsichtiger zu machen, andererseits aber auch den Arbeitseifer der Geometer unserer Zeit anzuspornen. Nachdem jetzt die Tore zu dem endlos weiten Feld der Geometrie aufgestoßen sind, möchte meine Arbeit Klarheit darüber schaffen, was darauf noch zu vervollkommnen, was neu zu erforschen ist".

Im Hintergrund der ganzen Untersuchung, die hier angekündigt wird, stehen immer die gebräuchlichen Formen der Weinfässer mit kreisrunden Böden. Das Ziel ist, diese Formen durch Rotationskörper von Kegelschnitten zu approximieren und dadurch der Berechnung zugänglich zu machen. Die Berechenbarkeit ist daher ein nicht minder wichtiger Gesichtspunkt als der Grad der Annäherung, den Kepler an sich durch hyperbolische Spindeln optimal verwirklicht sieht. Auf jeden Fall hat die Untersuchung mit den Kegelschnitten und den von ihnen erzeugten Rotationskörpern zu beginnen.

Der kurze Abschnitt über die Kegelschnitte (S. 37/38) ist im wesentlichen eine Wiederholung der schon im 4. Kap. der „Astronomiae pars Optica" (Bd. II, S. 90 ff.) vorgetragenen Lehre. Auffallend ist, daß die Entartung in ein Geradenpaar hier nicht erwähnt wird und daß dementsprechend bei den Rotationskörpern der Doppelkegel fehlt. In einem vorausgehenden Entwurf (vgl. Anm. 46.34) hat aber der „Conus duplex" noch seinen Platz.

Archimedes hatte nur Rotation um die Hauptachsen der Kegelschnitte in Betracht gezogen, Kepler aber macht sich frei von dieser Beschränkung. Für die geometrische Beschreibung der Faßformen muß er auch die Rotation um eine zur Hauptachse Parallele zulassen, und, obwohl er am Ende der Beschreibung der solcherweise zustande kommenden Rotationskörper erklärt (S. 43): „Für die Weinfässer hätte es genügt, die Körper soweit zu charakterisieren und zu unterscheiden", so gibt er sich doch die Mühe, seine Betrachtung auf beliebige Lage und Richtung der Rotationsachse auszudehnen. Die Zahl der zu unterscheidenden Körper, die schon vorher bei 25 lag, schwillt jetzt bis gegen 100 an. War Archimedes mit den Bezeichnungen Zylinder, Kegel, Kugel, Sphäroid und Konoid durchgekommen, so hat Kepler nun seine liebe Not mit den Namen, die er mit Vorliebe von Gebrauchsgegenständen und Früchten herholt.

Am einfachsten erledigt sich der Fall des um eine Achse rotierenden Kreises (S. 38 f.), da allein der Abstand der Drehachse vom Mittelpunkt zu berücksichtigen ist. Ist der Halbmesser r, der Abstand der Achse vom Mittelpunkt e, so ergibt $e > r$ den Kreisring (annulus), $e = r$ den geschlossenen Kreisring (annulus strictus), $e = 0$ die Kugel, während bei $e < r$ zwei Kreissegmente entstehen, von denen das größere den „Apfel" (malum), das kleinere die „Zitrone" (citrium) erzeugt. Für die übrigen Kegelschnitte: Ellipse, Parabel und Hyperbel, die in dem langen Kapitel „Von Zahl und Unterschieden der Körper" (S. 39–47) abgehandelt werden, gibt das nachfolgende Schema eine Übersicht über die von Kepler verwendeten Merkmale und die zu jedem Merkmalspaar gehörige Zahl von Körpern, jedoch ohne die Namen, die der Leser selbst aus dem Text entnehmen kann:

Lage der Rotationsachse:	Richtung der Rotationsachse parallel zu:				Kreis
	Hauptachse	Nebenachse	Durchmesser	Tangente	
Durch den Mittelpunkt	3	1	6	—	1
Schneidet nicht	1	3	—	4	1
Berührt	1	3	—	4	1
Schneidet	6	6	16	33	2

Das sind also insgesamt 92 Arten von Rotationskörpern, die von den 4 Kegelschnitten Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel erzeugt werden. In den Pulk. Mss. (Bd. V, Bl. 44v) hat sich ein einfacheres, bereits erwähntes Schema der Klassifizierung der Rotationskörper von Kegelschnitten bzw. Kegelschnittsegmenten erhalten, in dem erst 31 Arten vorgesehen sind (Anm. 46.34). Kepler schließt das eigenartige Kapitel mit der Bemerkung: „Die Geometer mögen sich nun an den einzelnen Figuren versuchen nach dem Beispiel von Archimedes, der von ihnen nur 4 und als fünfte die Kugel der Betrachtung unterzogen hat. Nicht als ob sie die nützlichsten oder gemeinsten wären, denn was hat hier das parabolische Konoid voraus vor Ring, Apfel, Birne, Pflaume, Nuß, sondern weil sie sich als einfachste und der Kugel nächststehende dem denkenden Verstand anbieten. Ich werde für den Augenblick nur die Körper weiter betrachten, welche Zugang zu den hyperbolischen Spindeln eröffnen, deren Stümpfe die einheimischen Fässer bilden". Es sei dazu vermerkt, daß die Spindeln in unserem Schema in die 2. Spalte der 4. Zeile gehören, da sie durch Rotation eines Parabel- oder Hyperbelsegments um eine zur Nebenachse parallele, die Kurve schneidende Gerade entstehen.

Die Erkenntnis, daß die hyperbolischen Spindeln das österreichische Faß bilden, ist für die Doliometrie nur dann belangvoll, wenn es auch gelingt, den Gedanken rechnerisch zu verfolgen. Dieses Ziel schwebt Kepler in dem mit

Theor. XVIII beginnenden „Supplement zu Archimedes" vor; daß es nur indirekt und angenähert erreicht wird, sei vorab bemerkt. Der direkte Erfolg ist ihm nur bei den vom Kreis durch Rotation um eine nicht durch den Mittelpunkt gehende Gerade erzeugten Körpern und ihren nächsten Verwandten beschieden. In erster Linie bieten sich die Ringkörper, offene und geschlossene, zur Inhaltsberechnung an. Theor. XVIII besagt, daß der Inhalt des offenen Ringes mit kreisförmigem oder elliptischem Meridianschnitt durch das Produkt der rotierenden Fläche in den Weg des Mittelpunktes zu messen sei, welch letzterer beim geschlossenen, durch Rotation um eine Tangente entstehenden Kreisring (Theor. XIX) dem Umfang des rotierenden Kreises selbst gleich wird. Den Beweis führt Kepler durch Zerschneiden des Ringes mit Hilfe von Meridianebenen „in unendlich viele kleinste Kreisscheibchen" (Indivisibeln in Cavalieris Sprache), deren jedes einem dünnen Zylinder von der mittleren Dicke des Scheibchens inhaltsgleich ist. Da im Beweis die rotierende Figur lediglich als Mittelpunktsfigur vorausgesetzt werden muß, so lassen sich die beiden Theoreme in den Corollarien sofort verallgemeinern. Als Beispiele behandelt Kepler den offenen Ring mit quadratischem Querschnitt und das geschlossene „corpus cylindraceum", welch letzteres dadurch entsteht, daß ein durch zwei parallele Geraden symmetrisch zum Mittelpunkt beschnittener Kreis um eine der beiden Geraden rotiert.

Die drei folgenden Theoreme XX–XXII führen auf den Höhepunkt des „Supplements". Es handelt sich darin um die Inhaltsberechnung von Apfel und Zitrone durch eine echte Integration, die ohne weiteres auf einen beliebigen Rotationskörper anwendbar ist und zur Guldinschen Regel hätte führen müssen, wenn Kepler auch nur in bescheidenem Umfang analytische Hilfsmittel verwendet hätte. Da dies nicht der Fall ist, muß die Integration geometrisch durch Umformung in einen Zylinderhuf bewerkstelligt werden, und der Erfolg hängt infolgedessen davon ab, ob die Berechnung des Hufs mit elementaren Mitteln gelingt. Das ist jedenfalls bei dem rotierenden Kreissegment der Fall.

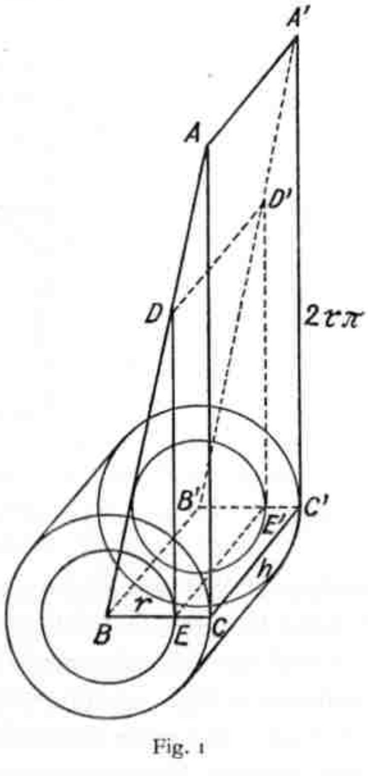


Fig. 1

Keplers Integrationsmethode beruht auf der bereits S. 440f. erwähnten Umwandlung eines Zylinders in ein dreiseitiges Prisma bzw. einen halben Quader gleicher Höhe und der infinitesimalen Zerlegung eines Rotationskörpers in koaxiale Zylinderschalen. Der Zylinder (Fig. 1) habe die Achse BB' = h und den Halbmesser BC = r. Das ihm inhaltsgleiche Prisma ABCC'A'B' ist die

Hälfte des Quaders mit den Kanten BC = r, CC′ = h, AC = $2r\pi$. Seine Grundfläche BCC′B′ ist ein Meridianschnitt des Zylinders, die Neigung der diagonalen Schnittfläche ABB′A′ gegen die Grundfläche ist ausgedrückt durch AC : BC = $\operatorname{tg}\alpha = 2\pi$. Wird dem Zylinder ein zweiter, koaxialer von gleicher Höhe und dem Halbmesser BE = r′ einbeschrieben, so hat sein Quader die Kanten BE = r′, EE′ = h, DE = $2r'\pi$, die Schnittfläche DBB′D′ also dieselbe Neigung $\operatorname{tg}\alpha = 2\pi$. ABB′A′ und DBB′D′ liegen also in derselben Ebene. Will man nur die zwischen den beiden Zylindern liegende Röhre in Betracht ziehen, so ist ihr das Prisma ADECC′A′D′E′ inhaltsgleich, dessen schräge Seitenfläche ADD′A′ wieder dieselbe Neigung $\operatorname{tg}\alpha = 2\pi$ hat und durch BB′ geht. Auch das ist zu bemerken, daß die Grundfläche ECC′E′ einen Meridianschnitt durch die Röhrenwand darstellt.

Die zylindrische Zerlegung des Rotationskörpers kann übrigens auf zweifache Art geschehen (Fig. 2). Entweder man zerschneidet ihn in zylindrische Scheiben von konstanter Dicke, aber variablem Halbmesser senkrecht zur Drehachse (Scheibenmodell), oder aber man legt um die Drehachse eine Folge koaxialer Zylinder, welche zwischen sich dünne Röhren von konstanter Dicke, aber variabler Höhe einschließen (Schalenmodell). Ob man vom einen oder

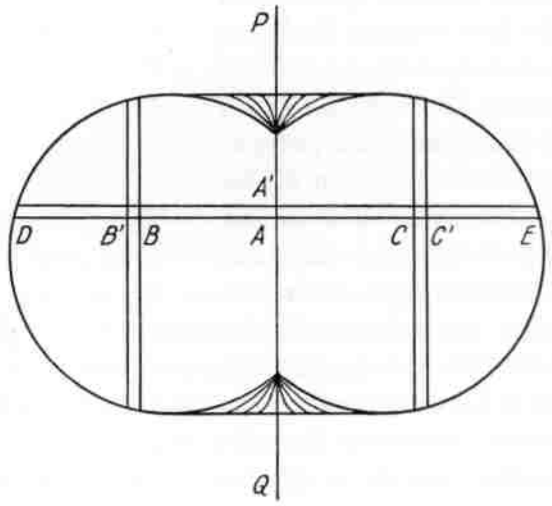


Fig. 2

andern Modell ausgeht: verwandelt man die Scheiben bzw. Röhren oder Schalen in die ihnen inhaltsgleichen Prismen, so bildet ihre Summe, je größer die Zahl der Teile genommen wird, um so genauer einen Zylinderhuf mit der rotierenden Figur als Grundfläche. Die Höhe einer im Abstand r von der Drehachse stehenden Mantellinie wird $2r\pi$, und die Neigung der den Huf vom Zylinder abschneidenden Ebene gegen die Grundfläche $\operatorname{tg}\alpha = 2\pi$ (vgl. Fig. XIV, S. 50). Kepler verwendet bei seinen Überlegungen das Schalenmodell.

Der Methode, einen beliebigen Rotationskörper in einen Zylinderhuf zu transformieren, ist die Eleganz nicht abzusprechen, nur endet sie meist vor dem Huf, denn die Inhaltsberechnung dieser Körpergattung ist mit elementarstereometrischen Hilfsmitteln nicht allgemein, sondern nur kasuistisch, von Fall zu Fall, zu erledigen. Zu den wenigen lösbaren Fällen gehören Apfel und Zitrone. Der Apfel wird in Theor. XX erledigt. Sein Volumen setzt sich offenkundig (Fig. XIV, S. 50) zusammen aus dem bereits in Theor. XIX erledigten „corpus cylindraceum", das durch Rotation des Kreisrestes MNKI um MN entsteht, und dem von dem Segment IKD erzeugten Gürtel, der „zona mali". Das Theorem spricht deshalb nur von der Berechnung dieses Gürtels und behauptet: „Der Apfelgürtel setzt sich zusammen aus dem [entsprechenden] Kugelgürtel und dem geraden Zylindersegment [IKDTV], dessen Basis das Kreissegment ist, das an der den Apfel erzeugenden Figur fehlt, während seine Höhe [FG] gleich dem Umfang des Kreises ist, den der Mittelpunkt [F] des größeren Segmentes beschreibt." Insgesamt wird also der Huf in 3 Bestandteile zerlegt, deren jeder eine bestimmte geometrische Bedeutung hat, auf Grund deren er berechenbar wird. Wäre Kepler imstande, die Inhalte der einzelnen Teile nicht nur zahlenmäßig, sondern auch „cossisch" auszudrücken, dann müßte ihm spätestens hier die Schwerpunktregel begegnen.

Ohne weiteres gelingt jetzt in Theor. XXI auch die Inhaltsberechnung der Zitrone aus denselben Bestandteilen, die in Theor. XX zur Berechnung des Apfel-Zylinderhufs führten. Schließlich wird in Theor. XXII der der Faßform sehr nahekommende Zitronenstumpf, das beiderseits symmetrisch zur Mittelebene gekappte Citrium eingeführt. Da bei ihm der zylindrische Innenteil bekannt ist, handelt es sich nur um die Berechnung des Gürtels, der sich nach dem Theorem zusammensetzt aus dem kleinen Citrium, das durch Rotation des Gürtelsegmentes entsteht, und aus einem über demselben Segment stehenden Zylindersegment. An der räumlichen Figur bei Anm. 52.22 wird das mit einem Blick klar. Alle drei Theoreme XX–XXII lassen sich auch auf die dem Apfel und der Zitrone entsprechenden elliptischen Rotationskörper ausdehnen, wie jeweils als Coroll. II festgestellt wird. Im Episagma zu Theor. XXII ist endlich auch die Stelle, wo der Beweis des „sehr schönen Satzes" von Theor. XVI über das Verhältnis des mittleren Zylinders in einem Kegelstumpf zu dem aufgesetzten Gürtel nachgeholt wird. Als Anhang beschließt S. 57–60 das ausführlich durchgerechnete Beispiel eines Zitronenstumpfs und sein Vergleich mit dem doppelten Kegelstumpf den ersten Teil des „Supplements".

Da Kepler die Form der Faßdauben näher bei der flach auslaufenden Hyperbel sucht als beim Kreis und deshalb das österreichische Faß besser in dem Stumpf einer hyperbolischen Spindel realisiert sieht als in dem Zitronenstumpf, so ist er jetzt genötigt, sein Augenmerk auf die Spindeln zu richten. Das Ziel ist von vornherein wenig aussichtsvoll. In der einleitenden Bemerkung „Über die Spindeln" (S. 60 f.) gesteht er, daß seine bisherige Methode hier versage, weil die jetzt entstehenden Zylinderteile in keiner Weise mehr berechenbar seien. Es bliebe nur die Zuflucht zu den Konoiden, und er schließt: „Sollte mir der Versuch nicht ganz gelingen, so werde ich wegen des Restes die Geometer zu Hilfe rufen."

Die nun folgenden, mehr tastenden als zielsicheren Überlegungen beginnen mit zwei richtigen Sätzen über das Verhältnis der Kegel, die aus einem rechtwinkligen Dreieck entstehen, wenn man dieses einmal um die kürzere, sodann um die längere Kathete rotieren läßt (Theor. XXIII) und über das Verhältnis der Ellipsoide (Sphäroide), die in ähnlicher Weise durch Rotation einer Ellipse um die kleine und die große Achse entstehen (Theor. XXIV). Dann läßt er sich aber auf falsche Fährte führen. In Theor. XXV stellt er die unrichtige Vermutung auf („den regelrechten Beweis mögen andere suchen; was ich nicht unumstößlich sicher beweisen kann, werde ich wenigstens als plausibel erweisen"), das Kugelsegment und die halbe Zitrone, die aus einem und demselben Kreissegment entstehen, wenn es einmal um die Sagitta, ein zweites Mal um die Sehne rotiert, stehen zueinander im Verhältnis der halben Sehne zur Höhe des Segments. Im Wortlaut des Theorems steckt sogar noch ein weiterer Fehler, indem die Behauptung für die ganze Zitrone ausgesprochen wird. Von den Argumenten, welche die Vermutung stützen sollen, beweist die Rechnung das Gegenteil; die Richtigkeit des Satzes in dem Fall, wo das Segment zum Halbkreis wird, nichts; die Analogie mit den ähnlich ineinander liegenden Ellipsoiden des Theor. XXIV ebenfalls nichts. Falsch, weil auf dem unrichtigen Theor. XXV basierend, ist sodann auch das folgende Theorem.

Darin wird das Kreissegment ersetzt durch ein zur Achse ED symmetrisches Ellipsen-, Parabel- oder Hyperbelsegment ACB (Fig. 3). Läßt man ein solches Segment mitsamt der Tangente AD zuerst um die Sehne AB, sodann um ED rotieren, so erzeugt im ersten Fall der Ellipsenbogen eine Pflaume oder Olive, der Parabel- oder Hyperbelbogen eine Spindel, im zweiten Fall dagegen kommt ein Sphäroid- bzw. Konoidsegment zustande, indes die Tangente zwei Kegel mit den Achsen AE bzw. DE beschreibt, deren Verhältnis (Theor. XXIII) ED : AE = b : a ist.

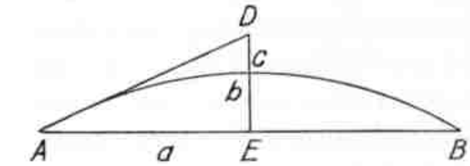


Fig. 3

Das Theor. XXVI stellt nun die Behauptung auf, daß auch das Verhältnis entsprechender Rotationskörper, d. h. halbe Pflaume (Olive) zu Sphäroidsegment bzw. halbe Spindel zu Konoidsegment, sehr nahe gleich b : a sei. Der Satz trifft erheblich neben die Wahrheit, wie in Anm. 64.3 näher dargelegt wird, und zwar aus doppeltem Grund: der eine ist, wie schon gesagt, das falsche Theor. XXV, auf dem der im wesentlichen korrekte Beweis aufbaut, der andere, schwerer wiegende, der unvermutete Sprung von der Sehne AC zur Tangente AD, der bei Kepler besonders auffallen muß, da er in seiner Kegelschnittlehre die Stetigkeit der Übergänge zum Prinzip erhebt.

Die „Analogia" (S. 66) ist danach aber recht aufschlußreich. Zweifelnd fragt Kepler nämlich, ob das in Theor. XXV angegebene Verhältnis der eingeschriebenen Kegel immer gelte. Dabei besinnt er sich auf die Stetigkeit der Übergänge. Wenn nun im Fall der Parabel die Tangente AD gelte, ob dann nicht bei der Ellipse b zwischen EC und ED liegen, bei der Hyperbel aber größer als ED sein müßte. Er mißtraut also selbst den Theoremen XXV und XXVI, obwohl „die Kraft dieser Analogie groß ist und einem Beweis nahekommt". Doch betont er, daß es mit qualitativen Überlegungen nicht getan sei, in jedem einzelnen Fall müsse vielmehr die genaue Größe von b errechnet werden. Der S. 61 angedeutete Versuch, mit Hilfe eines gleichartigen Konoids zur Berechnung der Spindel zu gelangen, ist damit erledigt.

Kepler schlägt deshalb jetzt einen ganz anderen Weg ein: Er fragt nach den Möglichkeiten, die Faßlinie durch Kegelschnitte zu approximieren, und untersucht die Größenordnung der solcherweise entstehenden Rotationskörper. Die neue Problemstellung führt auf die Betrachtung zweier Kegelschnittscharen. In Theor. XXVII hat er die Kegelschnitte im Auge, welche die Faßlinie in ihren Endpunkten, d. h. im Schnittpunkt mit dem Faßboden berühren, in Theor. XXVIII dagegen die Schar derer, welche die Faßlinie im Scheitelpunkt berühren und durch ihre Endpunkte gehen. Die Formulierung der Theoreme ist rein geometrisch: Im ersten Fall ist die Ausgangsfigur ein rechtwinkliges Dreieck ABC (Fig. XVII, S. 67) mit ungleichen Katheten AB und AC, AB $<$ AC. Betrachtet wird die Schar der Kegelschnitte, welche die Hypotenuse BC in B berühren und ihren Scheitel auf AC haben. Wird der bewegliche Scheitel mit X bezeichnet, so findet Kepler, daß der Kegelschnitt eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse ist, je nachdem CX $<$ AX, CX $=$ AX oder CX $>$ AX wird. Innerhalb der Ellipsen ist sodann der Fall CX : AX $=$ CB : AB dadurch ausgezeichnet, daß er den Kreis ergibt, während CX : AX $\lessgtr$ CB : AB steile oder flache Ellipsen zur Folge hat. Im ersten Corollar wird die Stetigkeit der Übergänge ausdrücklich festgestellt, wobei das Geradenpaar CB, CB′ (B′ der zu B symmetrische Punkt in bezug auf AC) als Grenzfall der Hyperbel, BB′ als die Grenze der Flachellipsen genannt werden. Insofern bedeutet dieses Corollar eine Ergänzung zu der in der „Optik" wie auch zu der an früherer Stelle dieses Werkes vorgetragenen Kegelschnittlehre. Im zweiten Corollar zeigt Kepler, wie die gewonnenen Kriterien an der Faßfigur (Fig. XVIII) zu verwerten seien.

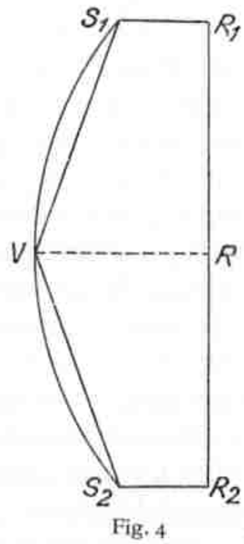


Fig. 4

Im zweiten Fall (Theor. XXVIII), der durch Fig. 4 verdeutlicht wird, stehen $S_1 R_1$, $S_2 R_2$ und VR senkrecht auf $R_1 R_2$, ferner ist $S_1 R_1 = S_2 R_2$, $R_1 R = R_2 R$, $VR > S_1 R_1$; zu betrachten ist die Schar der Kegelschnitte, welche durch S_1, S_2 und V gehen und in V die Parallele zu $R_1 R_2$ berühren. Stillschweigend kommt dazu die Einschränkung, daß der Kegelschnitt eine vernünftige Faßlinie bilden soll. Im Wortlaut des Theorems wird daher der Kreis durch die 3 Punkte S_1, V, S_2 als äußere Grenze, das Geradenpaar $S_1 V$, $S_2 V$ als innere Grenze festgesetzt. Die so beschränkte Kegelschnittschar enthält, wie Kepler zeigt, eine einzige Parabel. Der Übergang vom Kreis zur Parabel wird durch

Ellipsen, der von der Parabel zu dem Geradenpaar durch Hyperbeln vermittelt. Bei Rotation um $R_1 R_2$ ergeben sich also außer Zitrone, parabolischer Spindel und Doppelkegel eine Schar von Pflaumen (Quitten fallen weg) und hyperbolischen Spindeln, die schalenförmig ineinander liegen und daher, wie Theor. XXIX zum Ausdruck bringt, von dem Zitronenstumpf als größtem angefangen bis zum doppelten Kegelstumpf als kleinstem, stetig abnehmende Inhalte ergeben.

Theor. XXX bringt keine Weiterführung des Gedankenganges, sondern stellt ein neues Problem: Segmente der eben genannten Rotationskörper, die durch eine zur Achse parallele Ebene abgeschnitten werden, in ihrem Verhältnis zueinander zu berechnen. Der Zweck dieser Aufgabe könne nicht unbekannt sein, bemerkt Kepler gleich zu Beginn; es handelt sich natürlich darum, die einem Faß entnommene Flüssigkeitsmenge zu ermitteln. Seiner Ankündigung entsprechend ruft er „die Zierde der Geometer unseres Jahrhunderts", Willibrord Snell, den er als jungen Mann von kaum 20 Jahren in Prag kennengelernt hatte (Cantor II^2, 654), zur Lösung auf. Vergeblich jedoch, denn weder Snell noch ein anderer Geometer antwortet auf die Herausforderung.

Damit ist die „Ergänzung zu Archimedes" abgeschlossen. Als wichtigstes Ergebnis ist festzuhalten, daß Kepler jetzt den Zitronenstumpf als Annäherung an die Form des österreichischen Fasses rechnerisch beherrscht. Praktisch ist also sein Ziel, das Fassungsvermögen eines durch seine linearen Abmessungen gegebenen Fasses zu berechnen, erreicht, denn die Approximation der Faßlinie durch einen geeigneten Kreisbogen ist in jedem Falle ausreichend, wie J. H. Lambert (vgl. Anm. 238. 26), dem die Hilfsmittel der Analysis zur Verfügung stehen, noch 1765 feststellt.

Beim Übergang zum zweiten Teil, der als „Stereometrie des österreichischen Fasses im besonderen" betitelt ist, wechselt mit dem Gegenstand auch der ganze Tenor der Untersuchung. Stand bisher das einzelne Faß mit mehr oder weniger zufälligen Abmessungen und seine Inhaltsberechnung zur Debatte, so sind es jetzt Faßtypen, die durch feste Werkstattregeln der Faßbinder gekennzeichnet sind, und die Abhängigkeit des Faßinhaltes vom Typus, innerhalb des Typus von gewissen variablen Faktoren, alles mit dem Endziel, die Zuverlässigkeit der österreichischen Meßrute zu begründen. War ferner im ersten Teil das Bestreben, die bestmögliche Approximation eines gegebenen Fasses durch den beiderseits gekappten Rotationskörper eines Kegelschnittes zu finden, wobei sich allerdings der Zitronenstumpf als Grenze des Berechenbaren erwies, so wird jetzt im Interesse der neuartigen, funktionellen Untersuchungsmethode, die der analytischen Hilfsmittel entbehrt, mit einer viel gröberen Approximation gearbeitet, indem das Faß als doppelter Kegelstumpf, bisweilen sogar als Zylinder vorgestellt wird.

Gleichwohl wird in dem einleitenden Abschnitt „Welcher Gattung der vorausgehend behandelten Körper der des Fasses zugehöre" (S. 72–74) die hyperbolische Spindel erneut als die ideale Verkörperung eines Fasses angesprochen. Einige andere Formen werden als erträgliche Näherung zugelassen, ganz abgelehnt wird dagegen das beiderseits abgeschnittene archimedische Sphäroid. Das ist deshalb zu erwähnen, weil Briggs der Berechnung des englischen Fasses eben dieses Sphäroidmodell zugrunde legt und von seiner Eignung so überzeugt ist, daß er in dem Brief vom 9. Febr. 1625 (Bd. XVIII, S. 221) Kepler sein Befremden über dessen viel umständlichere Behandlung der Doliometrie zum Ausdruck bringt. An einen dem Faß inhaltsgleichen Zylinder, zwar gleicher Länge mit dem Faß, aber mit einem Durchmesser, der zwischen Boden und Bauch liegt, wie Lambert 150 Jahre später das Problem löst, denkt Kepler anscheinend nicht.

Seiner Untersuchungsmethode ist eine kurze Erläuterung vorauszuschikken. In Betracht gezogen werden nur kreisrunde Fässer, die durch Angabe des rotierenden Kurvensegmentes und der Rotationsachse völlig bestimmt sind. Es genügt also, mit dem Achsenschnitt anstelle der räumlichen Figur zu operieren. Da außerdem das Faß im Bauch eine Symmetrieebene besitzt, so kann sich die Untersuchung auf die Hälfte beschränken, der in jedem Fall eine Kugel so umbeschrieben werden kann, daß Boden und Bauch parallele Kugelkreise werden. Ersetzt man das Faß durch den Zylinder zwischen den Böden oder durch den doppelten Kegelstumpf mit dem Bauch als gemeinsamer größerer, dem Boden als kleinerer Grundfläche, so wird die Hälfte wieder ein Zylinder oder ein einfacher Kegelstumpf, der Achsenschnitt ein Rechteck oder gleichschenkliges Trapez mit der Visierlinie als Diagonale. Die zwei Dreiecke, in die das Trapez durch die Diagonale zerschnitten wird, sind zwar ungleich, aber doch ist das eine durch das andere mitbestimmt. Eine letzte Vereinfachung ergibt sich daher, wenn der Faßkörper durch ein Dreieck repräsentiert wird, dessen Seiten Visierlänge, Bodendurchmesser und halbe Daubenlänge darstellen.

In diesem Dreieck, das mit PAC bezeichnet werde, wobei AC die Visierlänge darstellt, PA die Daubenlänge, PC den Durchmesser des Bodens, kann der Winkel bei P nicht kleiner werden als ein Rechter. Die Spitzen P aller möglichen Dreiecke liegen also in dem Halbkreis über AC mit Einschluß der Kreislinie selbst. Jede Lage von P bestimmt eindeutig eine Faßfigur und einen Faßinhalt J, einen Zylinder, wenn P auf dem Halbkreis, einen doppelten Kegelstumpf, wenn P im Inneren des Halbkreises liegt. Es handelt sich für Kepler nun darum, die Änderung von J bei bestimmten Lageänderungen von P zu studieren.

In dem ersten, beiseite gelegten Entwurf, war er, wie er S. 75 gesteht, zunächst dem Trugschluß zum Opfer gefallen, daß dem größten Dreieck auch der größte Faßinhalt entsprechen müsse. Er hatte deshalb unter den Dreiecken mit gegebenem Winkel an der Spitze das größte ausgesucht und den zugehörigen Kegelstumpf als den relativ größten erklärt. Obwohl er seinen Irrtum rasch einsah, handeln trotzdem Theor. I und II von diesem Problem, um, wie er es auch sonst in der Gewohnheit hat, andere nachdrücklich vor seinem Irrtum zu warnen. Schon in Theor. III folgt der Hinweis auf die richtige

Lösung: „Die Inhalte der geraden Zylinder, deren Achsenschnitte dieselbe Diagonale haben, stehen zueinander nicht im gleichen Verhältnis wie die Flächen der Schnittfiguren, und nicht der Achsenschnitt, der die größte Fläche besitzt, gehört zum größten Körper." Der Weg, der ihn zu dieser Erkenntnis führt, ist der der Rechnung, indem er einer Kugel vom festen Durchmesser $d = 20$ Zylinder von variabler Höhe einbeschreibt und feststellt, daß der Zylinder größten Inhalt hat, bei dem sich der Durchmesser des Grundkreises zur Höhe verhält wie $\sqrt{2}:1$. Der geometrische Beweis dafür folgt in den Theoremen IV und V. Erst zeigt Kepler in eleganter Argumentation, daß unter allen einer Kugel einbeschriebenen Quadern mit quadratischer Grundfläche der Würfel den größten Inhalt hat. Daraus folgert er sodann, daß von den der Kugel einbeschriebenen Zylindern der das größte Volumen besitze, bei dem zwischen Grundkreisdurchmesser und Höhe das obengenannte Verhältnis besteht.

Das Corollar II zu Theor. V ist nun ein Lob auf die österreichischen Faßbinder und ihre Werkstattregel zur Herstellung neuer Fässer. Diese wird in Nr. 75 der „Messekunst" anscheinend wörtlich so wiedergegeben, wie sie die Meister ihren Lehrlingen vermittelten. Der Sinn ist: Von der Länge der Dauben wird ein Drittel genommen als Halbmesser für den Faßboden. Das Verhältnis des Bodendurchmessers zur halben Daubenlänge wird danach 2 Teile zu $1^1/_2$ Teilen. Da von der Daubenlänge beiderseits etwas für den Faßrand abgeht, so kommt man sehr nahe auf das Verhältnis 2 zu $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{2}$ zu 1. Hätte das österreichische Faß Zylinderform, dann hätte es also bei gegebener Visierlänge den größten Inhalt. Die Krümmung der Dauben verschiebt zwar die Verhältnisse, bei den engen Grenzen jedoch, die ihr aus technischen Gründen gesetzt sind, nur wenig. Man kann jedenfalls jetzt schon sagen, daß ein guter Instinkt die österreichischen Faßbinder auf eine besonders günstige Faßform geführt hat. In anderen Gegenden werden die Fässer nach anderen Regeln gebaut. Kepler zieht vor allem das längere rheinische Faß zum Vergleich heran, bei dem der Bodendurchmesser der halben Daubenlänge gleich gemacht wurde. Der naheliegende Schluß, daß dieses generell kleineres Fassungsvermögen habe als das österreichische Faß gleicher Visierlänge, stimmt indes nicht. Darauf macht Kepler in der unmittelbar folgenden „Mahnung" (S. 86) den Leser aufmerksam, indem er die Geschichte eines zweiten Irrtums erzählt. Das Zylindermodell mit den Böden als Grundkreisen ist eine viel zu rohe Näherungskonstruktion. Schon im ersten Entwurf, der nach Augsburg geschickt worden war, hatte Kepler zwar mit dem doppelten Kegelstumpf operiert, in falscher Weise jedoch, indem er analog zum Zylinder denjenigen Stumpf für den größten hielt, bei dem das Verhältnis des kleineren Bodendurchmessers zur Mantellinie $\sqrt{2}$ zu 1 betrug. Auf diesen Fehler war er erst bei der Rückkehr des Manuskripts aufmerksam geworden. Aus dem Zwang, seine falsche Argumentation zu korrigieren, erwuchs sodann in kürzester Zeit die folgende schöne Theorie, das eigentliche Glanzstück der ganzen „Stereometria".

Im Achsenschnitt, mit dem Kepler arbeitet, und in die geometrische Sprache übersetzt, lassen sich die Werkstattregeln der österreichischen und rheinischen Faßbinder so ausdrücken: Ist AC die als gegeben betrachtete Visierlänge, PA die Mantellinie oder halbe Daubenlänge, PC der Durchmesser des Faßbodens, dann gilt die Beziehung PC: PA $= \sqrt{2}:1$ beim österreichischen, PC:PA $=$ $1:1$ beim rheinischen Faß, PC:PA $= \varkappa$ bei einem Faß irgendwelcher Bauart. Zu jedem Wert von $\varkappa$ gehört eine Schar von Kegelstümpfen, die Kepler als konjugiert bezeichnet, ohne jedoch zu sagen oder davon Gebrauch zu machen, daß der geometrische Ort für die Punkte P der sog. Kreis des Apollonius sei.

Außer dem eben genannten Verhältnis tritt im Gang der Untersuchung vielfach auch das der Durchmesser der beiden Grundkreise des Kegelstumpfes auf. Obwohl Kepler dafür keine eigene Bezeichnung einführt, sollen doch im Interesse einer möglichst klaren Darstellung seines Gedankenganges Kegelstümpfe, die bei gleichem Visier CA dasselbe Verhältnis der Grundkreisdurchmesser aufweisen, assoziiert heißen. Das Verhältnis selbst, näherhin das des kleineren zum größeren Durchmesser, wird im folgenden mit λ bezeichnet; es ist also $0 \leqq \lambda \leqq 1$, wobei $\lambda = 0$ einem Kegel, $\lambda = 1$ einem Zylinder entspricht. Wie für die konjugierten Kegelstümpfe gilt auch für die assoziierten, daß jede Linie $\lambda =$ const bei fester Visierlänge CA (vgl. Anm. 99. 23) ein Kreis ist, näherhin der Halbkreis über dem Teil CK von CA, welcher der Gleichung $CK:CA = 2\lambda:(1+\lambda)$ genügt; dabei ist $\lambda = 1$ der Halbkreis über CA selbst.

Jedem Punkt im Halbkreis über CA entspricht nun ein bestimmtes Wertepaar $(\varkappa, \lambda)$. Soll umgekehrt dem Wertepaar $(\varkappa_0, \lambda_0)$ ein bestimmter Punkt des Halbkreises entsprechen, dann muß der Kreis λ_0 den Kreis $\varkappa_0$ treffen. Das ist aber dann der Fall, wenn $\lambda_0 > \frac{\varkappa_0}{\varkappa_0 + 2}$ ist, beim rheinischen Faß also $\lambda_0 > \frac{1}{3}$, beim österreichischen $\lambda_0 > (\sqrt{2} - 1)$. Da λ im wesentlichen die Krümmung der Dauben bestimmt, so kann es sich praktisch nicht allzuweit vom Wert 1 entfernen.

Bei einem Teil der nun folgenden Theoreme handelt es sich nur um Hilfssätze, auf deren Wiedergabe wir hier verzichten müssen, da es nur auf einen klaren Überblick über die Hauptpunkte der Untersuchung ankommt. Um diesen zu erreichen, müssen wir uns entschließen, Keplers Ergebnisse aus seiner umständlichen Beschreibung in die uns geläufige Zeichensprache zu übertragen. Es seien also (wie in Fig. XXI von Kepler) CA $= c$ die feste Visierlänge, T der im Innern des Halbkreises über CA veränderliche Punkt, ATCV der Achsenschnitt des Kegelstumpfes, CT $= a$ und VA $= b$ seine Grundkreisdurchmesser, AE $= h$ seine Höhe, TA $= s$ die Mantellinie (halbe Daubenlänge). Nach den vorausgeschickten Definitionen ist $a:s = \varkappa$, $a:b = \lambda$ zu setzen. Verwendet man im Halbkreis CEA die Größen $\varkappa$ und λ als Koordinaten, dann erhält man $a = \frac{c \cdot \varkappa \cdot \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda + \varkappa^2}}$ $\quad h = c \cdot \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{\lambda + \varkappa^2} \cdot \frac{(1+\lambda)^2}{4\lambda}}$ und für das Volumen des zum Punkt T $(\varkappa, \lambda)$ gehörigen Kegelstumpfs

$$V(\varkappa, \lambda) = \frac{c^3 \pi}{3} \cdot \frac{\varkappa^2}{\lambda + \varkappa^2} \cdot \frac{1 + \lambda + \lambda^2}{4\lambda} \cdot \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{\lambda + \varkappa^2} \cdot \frac{(1+\lambda)^2}{4\lambda}}.$$

Da $\lambda = 1$ der Halbkreis CEA ist, so wird $V(\varkappa, 1)$ das Volumen des Zylinders $\varkappa$. Wird speziell $\varkappa_m = \sqrt{2}$ gesetzt, so ist der Inhalt von Theor. V kurz $V(\varkappa_m, 1) \geqq V(\varkappa, 1)$. Betrachtet man ferner den Stumpf $(\varkappa_0, \lambda)$ mit den Grundkreisdurchmessern a und b und den ihm konjugierten Zylinder $(\varkappa_0, 1)$ mit Grundkreisdurchmesser CG und Höhe $AL = h'$, so erhält man durch Einsetzen $h'^2 = c^2 \left(1 - \frac{\varkappa_0^2}{1 + \varkappa_0^2}\right)$, also $CG^2 = \frac{c^2 \varkappa_0^2}{1 + \varkappa_0^2}$. Da andererseits das Produkt $a \cdot b = \frac{a^2}{\lambda} = \frac{c^2 \varkappa_0^2}{\lambda + \varkappa_0^2}$ wird, während $a^2 = \frac{c^2 \varkappa_0^2 \lambda}{\lambda + \varkappa_0^2}$ ist, so ist wegen $0 < \lambda < 1$, $a^2 < (CG)^2 < a \cdot b$. Setzt man daher $CG^2 = a \cdot u$, wobei $a < u < b$, so wird

$$u - a = \frac{CG^2 - a^2}{a} \qquad \frac{u - a}{b - u} = \varkappa_0^2 = \frac{CT^2}{AT^2} = \frac{CG^2}{AG^2},$$
$$b - u = \frac{a^2 - \lambda \cdot CG^2}{a \cdot \lambda}$$

wie Theor. VII behauptet. Man bestätigt auch sofort das Theor. VIII, wonach für das Verhältnis der Höhe $EA = h_{St}$ des Stumpfs und $GA = h_Z$ des mit dem Stumpf konjugierten Zylinders die Gleichung gilt

$$h_Z : h_{St} = (CG : CT) : (TR : AT).$$

Nach dieser Vorbereitung sollen die Keplers Theorie tragenden Sätze der Reihe nach aufgeführt werden:

Theor. IX. Gegeben sei der Kegelstumpf $(\varkappa_0, \lambda)$ vom Volumen $V = V(\varkappa_0, \lambda)$ und der Höhe h_{St}, ferner der zu dem Stumpf konjugierte Zylinder $(\varkappa_0, 1)$ mit dem Volumen $V_Z = V(\varkappa_0, 1)$ und der Höhe h_Z. Mit den eingeführten Bezeichnungen erhält man die vielbenützte Beziehung

$$\frac{V_{St}}{V_Z} = \frac{(1 + \lambda + \lambda^2)(1 + \varkappa_0^2)}{3\lambda(\lambda + \varkappa_0^2)} \cdot \frac{h_{St}}{h_Z} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3(CG)^2} \cdot \frac{h_{St}}{h_Z} = \frac{a \cdot b + \frac{(b - a)^2}{3}}{a \cdot u} \cdot \frac{h_{St}}{h_Z}.$$

Theor. X. Zu jeder Konjugation $\varkappa_0$ gibt es λ-Kreise, welche den $\varkappa_0$-Kreis schneiden, und solche, die ihn nicht schneiden. Die Grenze liegt bei $\lambda_0 = \frac{\varkappa_0}{\varkappa_0 + 2}$. Dieser Kreis berührt den Kreis $\varkappa_0$ in einem Punkt von CA, der zugehörige Stumpf $(\varkappa_0, \lambda_0)$ hat daher verschwindendes Volumen.

Theor. XI. Gegeben ist ein Kegelstumpf mit den Grundkreisdurchmessern a und b. Ein ihm inhaltsgleicher Zylinder von gleicher Höhe (aber verschiedener Diagonale) genügt nach Theor. IX der Gleichung $\pi \left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{ab}{3}\right) = \pi x^2$, unter x der Durchmesser des Zylinders verstanden, d. h. die Grundfläche des Zylinders setzt sich zusammen aus je einem Drittel der Grundkreise des Stumpfs und deren mittlerer Proportionale.

Theor. XII. Der Zylinder mit dem Grundkreisdurchmesser CE und der Höhe AE, der also mit dem Kegelstumpf CTAV gleiche Höhe und Diagonale hat, hat $CE = \frac{a + b}{2}$.

Theor. XIII. Der Stumpf $(\varkappa, \lambda)$ und der Zylinder $(\varkappa', 1)$ von gleicher Diagonale sollen gleiche Höhe haben. Es ist also $\frac{\varkappa^2}{\lambda + \varkappa^2} \cdot \frac{(1+\lambda)^2}{4\lambda} = \frac{\varkappa'^2}{1 + \varkappa'^2}$ und daher

$$\frac{V_{St}}{V_Z} = \frac{V(\varkappa, \lambda)}{V(\varkappa', 1)} = \frac{4(1 + \lambda + \lambda^2)}{3(1+\lambda)^2}, \text{ also } \frac{V_{St} - V_Z}{V_Z} = \frac{(1-\lambda)^2}{3(1+\lambda)^2} = \frac{\frac{1}{12}(b-a)^2}{\left(\frac{b+a}{2}\right)^2}.$$

Läßt man T auf dem Strahl CE von E nach C wandern, wobei der Stumpf die Höhe EA behält, so wächst V_{St} von V_Z bis zum Wert $\frac{4}{3} V_Z$, wobei der Zylinder den Durchmesser CE und die Höhe EA hat. Im Punkt C ist also die Funktion $V(\varkappa, \lambda)$ unendlich vieldeutig.

Theor. XV ist Ausdruck der bereits erwähnten Ungleichung $\lambda > \frac{\varkappa}{\varkappa + 2}$, oder umgekehrt $\varkappa < \frac{2\lambda}{1-\lambda}$. Schneidet der Kreis $\lambda = \lambda_0$ den Kreis $\varkappa = \varkappa_0$, so schneidet er auch alle Kreise $\varkappa < \varkappa_0$. (Es ist zu bedenken, daß Kepler das Konjugationsverhältnis als reziproken Wert von $\varkappa$ versteht und deshalb vom größeren Verhältnis $\varkappa$ spricht).

Theor. XVI. Da die stetige Funktion $V(\varkappa, 1) = \frac{\pi c^3}{4} \frac{\varkappa^2}{1+\varkappa^2} \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{1+\varkappa^2}}$ sowohl mit $\varkappa = 0$ als auch mit $\varkappa = \infty$ verschwindet, bei $\varkappa = \varkappa_m$ aber ihr Maximum $\frac{\pi c^3}{18} \cdot \sqrt{3}$ erreicht, so gibt es zu jedem $\varkappa_1 < \varkappa_m$ ein $\varkappa_2 > \varkappa_m$ so, daß $V(\varkappa_1, 1) = V(\varkappa_2, 1)$ wird. Der Zylinder $(\varkappa_2, 1)$ heißt der „Subcontrarius" zu $(\varkappa_1, 1)$.

Theor. XVII. Es sei $\varkappa_1 < \varkappa_m$, dann ist $V(\varkappa_1, \lambda) > V(\varkappa_1, 1)$, wenigstens so lange, als die Höhe $h(\varkappa_1, \lambda)$ nicht kleiner ist als die des Subcontrarius $h(\varkappa_2, 1)$. Die Richtigkeit folgt aus Theor. XIII.

Theor. XVIII. Es sei wieder $\varkappa_1 < \varkappa_m$ und $(\varkappa_2, 1)$ der Subcontrarius zu $(\varkappa_1, 1)$, ferner $V(\varkappa_1, \lambda_1) = V(\varkappa_1, 1)$. Dann muß die Höhe $h(\varkappa_1, \lambda_1) < h(\varkappa_2, 1)$ sein. Die Begründung folgt wieder aus Theor. XIII.

Theor. XIX. Wieder sei $\varkappa_1 < \varkappa_m$, dann gibt es zweit Werte λ_1 und λ_2 von der Art, daß $V(\varkappa_1, \lambda_1) = V(\varkappa_1, \lambda_2) = V(\varkappa_m, 1)$ wird.

Theor. XX. $\varkappa$ sei veränderlich, $\lambda = \lambda_0$ fest, dann hat $V(\varkappa, \lambda_0)$ seinen größten Wert, wenn die Höhe $h(\varkappa, \lambda_0) = h(\varkappa_m, 1)$ ist. (Nach Theor. XIII besteht zwischen den Werten von V in den Schnittpunkten irgendeines Strahls durch C mit den Halbkreisen $\lambda = \lambda_0$ und $\lambda = 1$ das feste Verhältnis $\frac{4}{3} \cdot \frac{1 + \lambda_0 + \lambda_0^2}{(1+\lambda_0)^2}$. Der Strahl von C nach dem Punkt $(\varkappa_m, 1)$ schneidet also den Halbkreis $\lambda = \lambda_0$ in dem Punkt, wo $V(\varkappa, \lambda_0)$ sein Maximum erreicht.)

Theor. XXI. $\varkappa_0$ sei fest, λ veränderlich; dann vermutet Kepler (den strengen Beweis oder die Widerlegung überläßt er den „Apollonii Belgae" Snell und van Roomen), daß, dem Theorem XX entsprechend, $V(\varkappa_0, \lambda)$ seinen größten

Wert dann erreiche, wenn $h(\varkappa_0, \lambda) = h(\varkappa_m, 1)$ ist. Der Satz ist unrichtig, wie sich leicht an Beispiel $\varkappa_0 = 1$ (Mittelsenkrechte auf CA) zeigen läßt. Damit die Höhe des Stumpfes $(\varkappa_0, \lambda)$ der des größten Zylinders $h(\varkappa_m, 1) = \frac{c}{3}\sqrt{3}$ gleich wird, ist $\lambda_1 = \frac{3}{5}$ zu setzen. Es sei sodann $\lambda_2 = 0{,}59$. Dann wird $V(1, \lambda_1) = 1{,}178 \cdot \frac{c^3\pi}{3}$, $V(1, \lambda_2) = 1{,}181 \frac{c^3\pi}{3}$, entgegen dem Wortlaut des Theorems.

Theor. XXII lautet wieder richtig: Ist $\varkappa_2 \geqq \varkappa_m$, dann wird $V(\varkappa_2, \lambda) < V(\varkappa_2, 1)$.

So weit kommt Kepler auf seinem schwierigen, ohne Zweifel aber auch bewundernswerten Weg, ehe er sich an die Cossisten wendet. Was ihm zur Beurteilung seiner Fässer noch fehlt, ist die Kenntnis der Linien im Innern des Halbkreises über CA, längs denen $V(\varkappa, \lambda) = V(\varkappa_m, 1) = \frac{c^3\pi}{18}\sqrt{3}$ wird. Auf Grund von Theor. XIX weiß er, daß die Niveaulinie, die von dem Punkt $G(\varkappa_m, 1)$ ausgeht, im Bereich $\varkappa < \varkappa_m$ zwei Äste hat, die in C wieder zusammenlaufen, nach Theor. XXII dagegen hat sie keinen Punkt im Bereich $\varkappa > \varkappa_m$ und außer C und G auch keinen Schnittpunkt mit CG. Die Punkte des Innern dieser blattförmigen Kurve (vgl. Anm. 111.22) repräsentieren die Kegelstümpfe, deren Volumen größer ist als das des größten Zylinders. Sie ist deshalb für die Theorie der Fässer von grundlegender Bedeutung. Anschaulich zeigt sie, wie die kurzen Fässer $(\varkappa \geqq \varkappa_m)$ mit wachsendem λ, d. h. mit flacher werdender Krümmung, an Fassungskraft gewinnen, die beim österreichischen Faß in $V(\varkappa_m, 1) = \frac{c^3\pi}{18}\sqrt{3}$ ihr Maximum erreicht, während die langen Fässer $(\varkappa < \varkappa_m)$, wozu das rheinische mit $\varkappa = 1$ gehört, mit abnehmendem λ, d. h. zunehmender Krümmung der Dauben, an Inhalt gewinnen und dem österreichischen nahekommen, wie Kepler in den Corollarien zu Theor. XVIII und XXII vermerkt.

Das sind jedoch nur Vorüberlegungen, die zu einer numerisch exakten Lösung drängen. Hier liegt aber, wie in der Einleitung zum Nachbericht ausgeführt wurde, eine ausgesprochene Schwäche des Mathematikers Kepler. Er wendet sich deshalb an die „Geometer". In Theor. XXIII legt er ihnen die Aufgabe vor, bei fester Assoziation $\lambda = \lambda_0$ die Konjugation $\varkappa$ (so sagt er nicht ganz korrekt) zu berechnen, welche $V(\varkappa, \lambda_0) = V(\varkappa_m, 1) = \frac{c^3\pi}{18}\sqrt{3}$ macht, und anschließend als Theor. XXIV die umgekehrte Aufgabe, zu gegebener Konjugation $\varkappa = \varkappa_0$ die zwei Assoziationen (so heißt es hier richtig) λ_1 und λ_2 zu bestimmen, welche $V(\varkappa_0, \lambda) = \frac{c^3\pi}{18}\sqrt{3}$ machen. „Problema Geometris propositum" heißt es beide Male, trotzdem stellt er im ersten Fall die kubische Gleichung auf, im zweiten, schwierigeren, versucht er wenigstens die Gleichung, die er für eine des 5. Grades hält, während sie in Wirklichkeit vom 6. Grad ist, allgemein zu charakterisieren; die Auflösung jedoch überläßt er in seiner Scheu vor cossischen Rechnungen ganz den aufgerufenen Cossisten. Es meldet sich indes, wie schon S. 430 gesagt wurde, nur der Vieta-Schüler

Alexander Anderson mit der Lösung der ersten Aufgabe, und zwar nicht mit der algebraischen, sondern einer geometrischen.

In einem letzten Theorem XXV wird als Abschluß der Untersuchung die Formel für das Verhältnis zweier Kegelstümpfe verschiedener Konjugation, aber gleicher Assoziation mit Worten beschrieben. Die Anwendung davon, der Vergleich des österreichischen Fasses mit dem rheinischen, wird in Coroll. II tabellenmäßig vorgeführt, während die Folgerung daraus in Coroll. III gezogen wird, die nämlich, daß das rheinische Faß das österreichische mit gleichem Visier und gleichem Verhältnis der Durchmesser nicht erreicht, weil das Verhältnis 4 zu 3 von Bauch zu Boden, bei dem Gleichheit des Inhaltes eintreten würde, praktisch schon nicht mehr vorkommt.

Ganz von selbst kommt so die Untersuchung an ihren Ausgangspunkt zurück, zur kubischen Meßrute und der Frage ihrer Verwendbarkeit. Nach der sehr gründlichen Vorbereitung ist dieses Thema in den 4 kurzen Theoremen XXVI–XXIX zu erledigen. Unter der nur näherungsweise gültigen Voraussetzung, daß die nach einer bestimmten Werkstattregel angefertigten Fässer unter sich geometrisch ähnliche Körper seien – die Krümmung der Dauben bleibt ja in engen Grenzen frei –, wächst ihr Volumen mit den Kuben entsprechender Linearabmessungen, deren wichtigste die Visierlänge ist. In Coroll. II von Theor. XXVI wird aber auch von der Summe des Bodendurchmessers und der halben Daubenlänge als gebräuchlichem Maß gesprochen. Die Eichung der Meßrute geschieht an einem Faß bekannten Inhalts. In Theor. XXVII wird festgestellt, daß beim österreichischen Faß kleine Ungleichheiten der beiden Faßhälften nicht merklich stören, wenn nur die Rute beiderseits gleich anzeigt. Ist aber darin ein Unterschied festzustellen, dann wird das arithmetische Mittel genommen (Theor. XXVIII). Zum Schluß wird in Theor. XXIX die Krümmung der Dauben berücksichtigt und gesagt, daß das österreichische Faß innerhalb gewisser Grenzen auch gegen Änderungen der Krümmung unempfindlich sei, während bei längeren Fässern wachsende Krümmung den Inhalt vergrößere, die Rute dementsprechend zu wenig anzeige, bei kurzen Fässern aber der umgekehrte Effekt eintrete. (Diese Verhältnisse sind an der Tabelle S. 114 oder an der Figur zu Anm. 111. 22 abzulesen.) Dabei ist immer vorausgesetzt, daß jede Faßart mit der ihr angepaßten Rute gemessen wird. Die zuverlässigste Bestimmung mit der Meßrute ist also die beim österreichischen Faß.

Die zwei ersten Teile der „Stereometria" hat Kepler ohne Zweifel im Auge, wenn er in Nr. 86 der „Messekunst" (S. 235) mit unverhohlenem Stolz bemerkt: „Andere Geometrae mögen auch suchen, ich hab im Lateinischen Werck mit erfindung viler newer demonstrationum meinen ehren gnug gethan". Denn neue Demonstrationen enthält der 3. Teil, „die Anwendung des ganzen Buches auf die Fässer", nicht mehr, obwohl sie dringend nötig wären, weniger in den vier ersten Kapiteln als im letzten.

Es geht in den ersten Kapiteln um die praktische Frage, ob die österreichische Meßrute, deren kubische Teilung auf das österreichische Faß zugerichtet ist, ohne Schaden für Käufer und Verkäufer auch bei nicht österreichischen Fässern verwendet werden könne, in welchen Fällen sie tolerabel sei und in welchen nicht. Selbst die Frage, ob Fässer österreichischer Bauart von ungewöhnlicher Größe mit der Rute ausgemessen werden dürfen, ist zu stellen und zu verneinen. Da man also nicht ganz ohne Rechnung auskommen kann, ist auch zu fragen, wie gegebenenfalls die dafür nötigen Abmessungen am Faß (Durchmesser von Boden und Bauch, Visier, Länge des Fasses) zu gewinnen, wie auch die Krümmung der Dauben und ihr Charakter (kreisförmig, elliptisch, parabolisch, hyperbolisch) mit Hilfe einer Art Punktiergerät zu ermitteln, wie selbst die Böden auf richtige Kreisform zu prüfen seien.

Im 5. und letzten Kapitel kommt Kepler schließlich auf das Problem zurück, dessen exakt geometrische Behandlung er am Ende des 1. Teiles Snell als Aufgabe gestellt hatte: „Eine Methode zu finden, nach der man das Verhältnis des geleerten Teils zum Rest der Flüssigkeit messen kann, wenn das Faß liegt und die Durchmesser von Bauch und Böden senkrecht stehen." Eine gute Näherungslösung dieser Aufgabe ist ohne Zweifel nicht weniger wichtig als die für den Inhalt eines vollen Fasses, wenn auch die Begründung Keplers, sie sei „nützlich für Familienväter zum Erweis und zur Entdeckung von Diebstählen" nicht besonders stichhaltig erscheinen mag. Über seinen Versuch urteilt er selbst in Nr. 88 der „Messekunst" (S. 237): „Zwar hab ich im lateinischen werck auch einen process gezeigt / der fundiert sich aber auff No. 18. vnd 55. welche noch nicht erleuttert / hat auch sonsten seine rechtmäßige demonstration nicht / sonderlich der mit eingeführte Circulus Metator." Dieses Urteil enthebt uns der Verpflichtung, ausführlich auf den Gedankengang einzugehen. In aller Kürze sei nur der Sinn des „Circulus Metator" erklärt.

Geht man von der Vorstellung des Fasses als doppeltem Kegelstumpf aus mit den Grundkreisdurchmessern a und b, $a < b$, denkt man ferner den Doppelstumpf durch eine Ebene parallel zur Achse im Abstand d von ihr, $\frac{a}{2} < d < \frac{b}{2}$, geschnitten, so ähnelt das abgeschnittene Stück einem doppelten Kegel über dem Segment S des gemeinsamen Grundkreises, wobei die Kegelhöhe h gleich ist dem Abstand des Scheitels der Schnitthyperbel von der Sehne des Segments S. Würde man danach den Inhalt des abgeschnittenen Stückes mit $J = 2 \cdot \frac{S \cdot h}{3}$ rechnen, dann käme es zu klein heraus. Um zu einem besseren Resultat zu gelangen, will Kepler die Höhe des Kegels vergrößern; das Maß der Vergrößerung soll aber durch den ad hoc eingeführten „Metator" gefunden werden, für den es keine sachliche Begründung gibt, sondern nur ein ungefähres Ziel, das erreicht werden soll („wir werden die Wahl so treffen, daß sie der Wahrheit nahekommt"). Man kann sich denken, daß die Eile, mit der Kepler des Druckes wegen zum Ende seiner Arbeit kommen mußte, einen derartigen Kurzschluß begünstigt hat; in der „Messekunst" greift er das Problem sachgemäß wieder auf und erreicht eine für die Praxis befriedigende Lösung.

In einer ganz kurzen „Conclusio libri“ erinnert Kepler daran, daß seine Absicht gewesen sei, die Irrtümer anderer aufzudecken und für eine wirkliche Faßrechnung die Grundlagen zu schaffen. Dabei sei sein Buch von ursprünglich kaum 10 Theoremen zu dem großen Umfang angewachsen, vor dem Briggs so erschrak, daß er es ungelesen beiseite legte. Anscheinend übersah auch Briggs, daß es die geometrische Grundlegung ist, welche die Vermehrung des Umfanges verursachte; in ihr liegt das Neue, das Kepler in die Stereometrie hineingebracht hat, vergleichbar den neuen Ideen, mit denen er Astronomie und Optik bereichert hat. In einem einzigen Satz und einem Dichterzitat klingt das Thema „Weinfaß“ aus: „Mögen die bei ihren Irrtümern bleiben, die ihre Freude daran haben; wir wollen uns unseren Vorsprung zunutze machen, und beten werden wir, es möge uns bei guter Gesundheit von Körper und Geist der Stoff zum Genießen in genügender Menge zur Verfügung stehen“. Das nun folgende Zitat

„Et cum pocula mille mensi erimus,
Conturbabimus illa, ne sciamus“

ist die Variation eines bekannten Catull-Verses aus Carmina 5, 7–11:

„Da mihi basia mille, deinde centum,
Dein mille altera, dein secunda centum,
Dein usque altera mille, dein centum,
Dein, cum milia multa fecerimus
Conturbabimus illa, ne sciamus.“

2. MESSEKUNST ARCHIMEDIS

Der Aufbau der „Messekunst“ verläuft zu dem der „Stereometria“ merklich parallel. Wie diese hat sie 3 Teile: der erste (Nr. 4–67) enthält die wichtigsten Lehrsätze aus der „Archimedischen Stereometrie“ und dem „Supplement“ Keplers; der zweite, wesentlich kürzere Teil (Nr. 69–79), behandelt fast ausschließlich Themen aus dem zweiten Teil der „Stereometria“ (Problem des größten Quaders bzw. Zylinders in einer gegebenen Kugel; österreichische Visierrute; österreichisches Faß und seine Vergleichung mit Fässern anderer Bauart, vornehmlich der rheinischen). Nur das Kapitelchen über die Berechnung von Faßlänge und Visierlinie greift bereits in den dritten Teil der „Stereometria“ hinüber, an den sich im übrigen Teil 3 der „Messekunst“ „Von zubereitung vnnd gebrauch der Oesterr. Weinvisierruthen“ als Ganzes anlehnt. Neu kommt in der „Messekunst“ der metrische Anhang „Von dem Oesterr. Gewicht u. s. w.“ (Nr. 91–100) hinzu.

Die von Kepler selbst durch Marginalien hervorgehobene Parallelität ist lediglich Ausdruck für die inhaltliche Entsprechung der beiden Schriften, für die Tatsache, daß „dem Teutschen Leser zum besten . . . in disem Teutschen

Büchlein" aus dem lateinischen Traktat „die summen eines jeden postens vnd was sonsten nutzliches oder notwendiges darbey zu mercken ... für Augen gestelt" (S. 143) wird; wer unter den Begriff „Teutscher Leser" fallen soll, ist im Titel (S. 137) erläutert. Durch die Erklärung Keplers sind wir der Notwendigkeit enthoben, die „Messekunst" inhaltlich eingehend zu analysieren. Notwendig ist es aber, deutlich auf die Unterschiede der beiden Schriften in Materie und Form, Inhalt und Darstellung aufmerksam zu machen.

Beginnen wir mit dem soeben erwähnten Anhang! Er ist keineswegs, wie fast immer geglaubt wird, eine bloße Sammlung und Anhäufung von Daten aus dem komplizierten Maß- und Münzwesen der Zeit, sondern zielt nach Keplers eigener Erklärung (S. 143) auf eine Systematisierung der Maßeinheiten hin: „Demnach aber von der alten Römischen Republica bekandt, das sie ihre gewichte, Elen vnnd Maaß also an ainander gehengt vnnd verknüpfft, das eines ohne das ander nicht hat könden verlohren oder verendert werden. Als haben jetzvermelte Kunstverstendige ... für gut angesehen, das ich dergleichen auch an den Oesterreichischen viererley Meßsorten ... versuchen solle". Deshalb habe er die viererlei Maße „also zusamen gebracht, das eines auß dem andern hergenommen, erkundigt, bewäret vnd verbessert werden, vnnd also alle mit einander zu mehrer bestendigkeit gereichen könden".

Das ist bei Kepler kein neuer Gedanke. Er hatte ihn schon 1605 in einem Gutachten für den Kölner Erzbischof Ernst von Wittelsbach über die Reform des gesamten Maßwesens als das am ehesten zu verwirklichende Nahziel ausgesprochen.[1] Ausgeführt hat er ihn 1627 in dem Maßkessel, den er im Auftrag des Ulmer Magistrats neben Druck und Herausgabe der Rudolphinischen Tafeln entwarf und in den letzten Tagen seines Ulmer Aufenthaltes noch prüfte und korrigierte. In diesem Modellgefäß sind die Ulmer Längenmaße als Durchmesser und Höhe, Eimer und Imi durch das Volumen, der Zentner durch das Wassergewicht des Inhaltes festgelegt, natürlich nicht ohne vorausgehende Änderungen, vor allem bei den Längenmaßen, indes das Gewicht als Bezugsmaß absolut unverändert übernommen wird. Die Bindung an die geometrische Figur des Kessels sichert die einzelnen Maße vor den willkürlichen, besonders bei Hohlmaßen häufigen Änderungen, solange nicht das geometrisch festgelegte Verhältnis und das Modellgefäß selbst aufgegeben werden. Dieselbe Arbeit, nur auf dem Papier statt an dem massiven Metallkessel, leistet Kepler in dem Anhang, indem er die Relationen zwischen den einzelnen Maßen erarbeitet. Das ist wirklich eine Aufgabe der praktischen Stereometrie, eine bloße Sammlung von Daten wäre es nicht gewesen.

Die zweite, wesentlich wichtigere Stelle, an der die „Messekunst" über die Erkenntnisse der „Stereometria" hinausgreift, ist die Nr. 88 mit der Überschrift: „Zurechnen wie viel Weins auß einem Faß kommen oder noch drinnen seye, wann es gerad aufligt vnd nicht gehebt ist". Es handelt sich also um das Problem des unvollständig gefüllten, bzw. geleerten Fasses, praktisch von

[1] Dieses in Mss. Pulk. V, 189 ff. im Entwurf erhaltene Gutachten kommt erst in einem späteren Band zur Veröffentlichung. Bei Frisch ist es abgedruckt in Vol. V, pag. 616–627.

gleicher Bedeutung wie die Inhaltsberechnung des ganzen Fasses, aber ungleich schwieriger und vor allem nicht graphisch mit der Visierrute zu bewältigen. Es sei „ein rechtes Creutz für die Künstler, vnd gar nicht jedermans ding" (S. 237). Seiner Wichtigkeit wegen hatte Kepler es noch im letzten Kapitel des dritten Teiles der „Stereometria" auf Anhieb zu lösen gesucht, mit wenig Glück allerdings (vgl. S. 456).

Jetzt unterscheidet er die zwei Fälle $h \leqq b - a$ und $h > b - a$, wenn h die Höhe des leeren Segmentes, b und a die Halbmesser von Bauch und Boden bedeuten. Wird die Krümmung der Faßdauben als kreisförmig betrachtet, was auf alle Fälle eine gute Näherung bedeutet, so ist das Faß eine beiderseits gekappte Zitrone und das bei $h \leqq b - a$ entstehende Segment in Keplers Sprache ein Zitronenschnitz. Für diesen hat er schon in Nr. 67 (S. 202) eine genäherte Berechnung angegeben. Ist aber $h > b - a$, dann sucht er seine Aufgabe richtig darin, eine solche Zerlegung des leeren oder vollen Faßteiles zu finden, daß die einzelnen Bestandteile möglichst exakt berechenbar werden oder daß wenigstens die nur näherungsweise berechenbaren keinen wesentlichen Einfluß mehr auf das Resultat haben können. Es gelingt ihm, eine solche Zergliederung zu finden, nebenbei erwähnt dieselbe, zu der 150 Jahre später J. H. Lambert seine Zuflucht nimmt, weil man „noch gar keine genaue Methode sie zu visieren" habe finden können. Keplers Zerlegung ist in Anm. 238.26 genau erläutert.

Mit dieser Berechnung – die Visierrute scheidet hier völlig aus – setzt er seiner Doliometrie die Krone auf. Ihr eigentlicher Platz wäre am Schluß der „Stereometria" gewesen, da Kepler aber die Lösung der Aufgabe erst nach dem Abschluß des lateinischen Werkes gelingt, muß sie sich mit einem bescheideneren Platz begnügen und in den Rahmen der „Messekunst" drängen lassen. Dabei hat diese Berechnung sogar den Vorzug, „daß im Lateinischen auß einem doppelten Kegelstock gerechnet worden, hie aber auß der Citronenrundung". Wenn hier vom Rahmen der „Messekunst" die Rede ist, so ist damit die formale Seite des Werkes gemeint: die Art der Darstellung nach Sprache und Methode.

In der „Dissertatio cum Nuncio Sidereo" hatte Kepler (Bd. IV, S. 286) einige Jahre früher geschrieben: „Es gibt Leute, die ihre Wissenschaft mit gestrenger Miene vortragen, um dadurch ihren Behauptungen Gewicht zu verleihen; dabei machen sie sich aber oft genug nur lächerlich, ohne es zu wollen. Mir scheint, daß ich von Natur dafür geschaffen bin, die schwere Mühe wissenschaftlicher Arbeit durch aufgelockerte Darstellung zu mildern". Dieses Satzes muß man sich erinnern, wenn man den „Bericht über das Geburtsjahr Christi" (1613) und die „Messekunst", die beide den Stoff eines lateinischen Werkes deutschen Lesern erschließen, richtig beurteilen will. Beide sind sie geradezu Musterbeispiele einer guten Popularisierung. Bei der „Messekunst" handelt es sich darum, Leuten, die nicht über die Anfangsstufe geometrischen und arithmetischen Wissens hinausgekommen sind, schwierige Begriffe und Rechnungen der Stereometrie beizubringen. Bei noch so guter schulmeisterlicher

Unterweisung, die natürlich nicht fehlen darf, würden sie erliegen; es bedarf immer wieder der Aufmunterung durch ein gut gewähltes Bild, eine freundliche Zwischenbemerkung oder ein paradoxes Beispiel. So entsteht im ganzen ein Buch, das heute noch eine genußreiche Lektüre bietet. Eine Schwierigkeit aber bereiten Kepler die Fachausdrücke, für die er gute deutsche Wörter braucht, wenn er verständlich werden will, die es aber in der Stereometrie noch gar nicht gibt. Erst für die Euklid-Übersetzung liegen einige Versuche vor. Seine Meinung über die Verdeutschung der Fachterminologie spricht er in einem Brief an Nikolaus Vicke in Wolfenbüttel vom Juli 1611 aus (Bd.XVI, S. 388 f.): „Marius [= Simon Maier] lehrt den Euklid deutsch zu sprechen ... ich möchte gerne Einblick in das Buch bekommen, ob etwas gegenüber der Übersetzung von Xylander geändert ist ... Aus Liebhaberei schlage ich mich mit derselben Arbeit herum, als vornehmstes Ziel schwebt mir aber vor, daß auch die Fachausdrücke deutsch sein sollen. Es ist doch eine Schande, Parallelen im Deutschen nicht anders nennen zu können als Parallelen. Hier bräuchte es aber gemeinsame Bemühung, damit die Fachausdrücke in allgemeinen Gebrauch übergehen und nicht der eine so, der andere anders redet. Und ich meine, im 10. Buch [Euklids] darin etwas weiter gekommen zu sein. Mit demselben Recht, mit dem Euklid in griechischer Sprache neue Namen bildete, habe ich es in unserer eigenen Sprache getan".

Die von ihm verwendeten oder gebildeten deutschen Fachwörter stellt Kepler in einem besonderen, nicht ganz vollständigen Verzeichnis (S. 270/71) zusammen. Manche seiner Bildungen gehört heute zum festen Bestand der mathematischen Fachsprache, der größere Teil hat sich jedoch nicht durchgesetzt. Trotzdem bleibt die „Messekunst" ein bedeutsames Glied in der Geschichte der deutschen mathematischen Fachsprache (vgl. A. Götze: Anfänge einer mathematischen Fachsprache in Keplers Deutsch [= Germanische Studien Heft 1], Berlin 1919).

Die Übermittlung des stereometrischen Lehrstoffes an seine „teutschen Leser", von den Obrigkeiten über die Handelsleute und Eichmeister bis hinunter zu den Antiquitätenliebhabern, muß natürlich andere Wege gehen, als sie in der „Stereometria" möglich waren. Zunächst wird alles weggestrichen, was nicht unmittelbaren Bezug auf die praktische Doliometrie hat. So scheidet von vornherein die ganze Theorie der konjugierten und assoziierten Kegelstümpfe aus. Ferner wird auf geometrische Beweise grundsätzlich verzichtet, nur Ergebnisse und Rechenvorschriften werden mitgeteilt und durch zahlreiche, schulmäßig durchgerechnete Beispiele erläutert. Für oft wiederkehrende Rechnungen, wie die der Kreisbogen, Kreissektoren, Kreissegmente, Kugelsegmente, werden Tabellen aufgestellt. Als wesentliche Erleichterung für die ungewandten Rechner, die weder mit den damals üblichen großen Zahlen noch mit Brüchen sicher operieren, führt er in Nr. 60 die Dezimalbrüche nach Bürgi'scher Symbolik ein („Ein behende Bruchrechnung") und verwendet sie von da ab konsequent, während in der ganzen „Stereometria" nur ein einziger Dezimalbruch zu finden ist. Zu allem hin unterscheidet Kepler zwischen „teutschen kunstliebenden Lesern" und „mehr einfältigen Lesern" (S. 145), bezüglich derer er „guter Hoffnung" ist, daß sie „sich solche außschweiffe" (gemeint ist die Grundlegung der Stereometrie nach dem ersten Teil der lateinischen Schrift) „nicht irren lassen, sondern die vberhupffen, biß sie im andern Theil zu der Visierruthen selber kommen". In Wirklichkeit ist es erst der dritte Teil, bei dem die „Messekunst" für die einfachste Kategorie von Lesern beginnen soll. So bietet also das Werk ein völlig anderes Gesicht als seine lateinische Schwester bzw. Mutter. Stoffmäßig ist sie einerseits gegenüber der „Stereometria" wesentlich reduziert zugunsten einer meisterhaften Didaktik, auf der anderen Seite aber ragt sie mit zwei wichtigen Spitzen über sie hinaus.

Ohne genaue Kenntnis der lateinischen Schrift ist es natürlich nicht möglich, die eine dieser Spitzen, die Inhaltsberechnung des nur teilweise gefüllten Fasses, zu sehen; und selbst dann übersieht man sie nur zu leicht, da sie als Bestandteil der „Messekunst" ohne Figur und ohne die nötige geometrische Einkleidung lediglich als Rechnungsvorschrift vorgetragen wird. Und ohne Kenntnis der Zusammenhänge ist es auch schwer, den Sinn des metrischen Anhanges zu durchschauen. Diese beiden Umstände haben sehr zu der unrichtigen Beurteilung der „Messekunst" beigetragen.

Daß die Manuskriptvorlagen zu den beiden stereometrischen Schriften fehlen, dieses Schicksal teilen sie mit allen anderen gedruckten Arbeiten Keplers. Zu bedauern ist jedoch, daß auch der erste Entwurf fehlt, der nach Augsburg geschickt wurde und von dort wieder zurückkam. Erhalten sind in Band V des Pulkowoer Nachlasses lediglich 25 unter sich zusammenhangslose Blätter zur zweiten Bearbeitung der „Stereometria" (Bl. 33–37, 39–58), außerdem 17 Blätter mit Materialien zum metrischen Anhang der „Messekunst" (Bl. 139–156). Von den letzteren trägt eines das Datum 9. Dezember [1615].

B. DIE LOGARITHMISCHEN SCHRIFTEN

ENTSTEHUNGSGESCHICHTE

Bibliographisch bilden die logarithmischen Schriften Keplers zwei Einheiten, die „Chilias Logarithmorum" und das „Supplementum Chiliadis Logarithmorum", im Folgenden kurz als „Chilias" und „Supplementum" bezeichnet; inhaltlich sind sie jedoch als ein Ganzes zu betrachten. Ihre Vorgeschichte beginnt im Frühjahr 1617, wo der Kaiser seinen Mathematiker auf etwa zwei Monate nach Prag beorderte. In dieser Zeit wurde ihm von einem Bekannten die 1614 in Edinburgh erschienene „Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio" John Nepers gezeigt. Mehrfach – so in dem Brief an Mästlin vom 3. Dez. 1618 (Bd. XVII, S. 297) – vermerkt Kepler, daß ihm nur ein flüchtiger Einblick in das Buch vergönnt gewesen sei. Der Eindruck, der ihm davon blieb, wird in einem Brief an W. Schickard am 11. März 1618 (Bd. XVII,

S. 258) so zusammengefaßt: „Ein schottischer Baron, dessen Namen ich nicht behalten habe, ist mit einer glänzenden Leistung hervorgetreten, indem er jede Multiplikations- und Divisionsaufgabe in reine Additionen und Subtraktionen umwandelt, ohne daß er die Sinus verwendet [wie die Prosthaphäretiker]. Dagegen braucht er den Kanon der Tangenten, und die Mannigfaltigkeit, Vielzahl und Schwierigkeit der Additionen und Subtraktionen übersteigt irgendwo die Mühe der Multiplikationen und Divisionen."

Mit einem so groben Mißverständnis beginnt also die Bekanntschaft Keplers mit den Logarithmen, mit der irrigen Auffassung nämlich, daß die mittlere, mit „Differentia" überschriebene Spalte in Nepers Tafel, die tatsächlich die Logarithmen der Funktion Tangens enthält, nur den Sinn habe, die Funktion Sinus zu ersetzen. In anderer Wendung ist dieses Mißverständnis aus einer Stelle der „Weltharmonik" (4. Buch, 7. Kap., Bd. VI, S. 277) herauszuhören: „Von den mathematischen Arten wohnt jene, die Kreis genannt wird, in ganz anderer Weise dem Geist inne, nicht nur als Idee äußerer Dinge, sondern auch als gewisse Form des Geistes selbst, schließlich als einzigartige Vorratskammer alles geometrischen und arithmetischen Wissens. Davon wird jenes in der Lehre von den Sinus, dieses in dem wunderbaren Arbeiten mit den Logarithmen ganz deutlich: Aus dem Kreis entstanden, stellen sie eine Art fertiger Zahlentafel dar für alle Multiplikationen und Divisionen, die je vorkommen können." Noch 7 Jahre später, in der Einleitung zum „Supplementum" (S. 356), glaubt er den Leser eigens darauf aufmerksam machen zu müssen, daß „die Logarithmen nicht primär mit den Sinus bzw. den Geraden im Kreis entstehen, wie die Nepersche „Descriptio", wenn sie zu unvorsichtig gelesen wird, es auszusprechen scheint, sondern ganz außerhalb der Geometrie des Kreises begründet werden, gleichsam im Gebiet des 5. Buches Euklids [Lehre von den Proportionen]."

Wir haben kein Recht, Kepler seinen anfänglichen Irrtum vorzuwerfen, und doch bedarf etwas daran der Aufklärung. Es ist nämlich zu fragen, ob ihm die Idee des logarithmischen Rechnens so völlig neu war, daß ihm die Möglichkeit der richtigen Eingliederung fehlte. Wir wissen heute, daß Neper seinen Ruhm mit Jost Bürgi teilen muß, der zwar seine „Arithmetische vnd Geometrische Progreß-Tabulen" erst 1620 und dazu ohne den angekündigten „Unterricht" in Prag drucken ließ, aber nicht nach Neper und unabhängig von ihm ein logarithmisches Rechnen entwickelt hatte. Nur wenige wußten davon, zu diesen wenigen gehört aber Kepler, der mit Bürgi in der Zeit des gemeinsamen Prager Aufenthaltes (1605–1612) in ständigem Gedankenaustausch stand. Das geht aus der oft zitierten Bemerkung pag. 11 der Rudolphinischen Tafeln hervor: „Diese logistischen Apices waren es auch, die Jost Bürgi viele Jahre vor der Neperschen Publikation den Weg zu genau diesen Logarithmen gewiesen haben." Er fährt dann aber fort: „Allerdings hat der Zauderer und Geheimtuer das neugeborene Kind verkommen lassen, statt es zum allgemeinen Nutzen groß zu ziehen". In diesem Nachsatz, aus dem man unschwer einen Ärger heraushört, steckt wohl des Rätsels Lösung. Kepler konnte von sich bekennen (Bd. IV, S. 286 f.): „Ich habe mich immer an die Regel gehalten, zu loben, was andere meiner Meinung nach gut gemacht haben. ... Niemals habe ich fremdes Wissen verachtet oder verhehlt, wo mir eigenes fehlte". Man darf es ihm deshalb glauben, daß er auch Bürgis Leistung voll gewürdigt hätte, wenn er etwas darüber zu sagen gewußt hätte. Da er es nicht getan hat, muß man den Schluß ziehen, daß Bürgis Mitteilungen nicht über vage Andeutungen hinausgingen. Mit Recht sah also Kepler in Nepers Logarithmentafel etwas ganz Neues, und Bürgi war im Unrecht, wenn er, wie es den Anschein hat, Kepler seinen Enthusiasmus übelnahm.

Erst im Juli 1619 kommt endlich ein Exemplar der „Descriptio" nach Linz; seine irrtümliche Auffassung vom Wesen der Logarithmen hatte Kepler inzwischen bereits korrigiert. Sein ehemaliger Gehilfe in Prag und Linz, Benjamin Ursinus, hatte nämlich im Lauf des Jahres 1618 eine „Trigonometria Logarithmica Joh. Neperi" herausgebracht, um die deutschen Leser mit Nepers Logarithmen und ihren Anwendungen bekannt zu machen, jedoch mit fünf- statt siebenstelligen Logarithmen. Jetzt ist sich Kepler nicht nur über das Wesen der Logarithmen klar, sondern auch über die Notwendigkeit, die Rudolphinischen Tafeln im letzten Moment von Prosthaphärese auf logarithmische Rechnung umzustellen. So kommt es in den zwei fast gleichzeitig, Anfang Dezember 1618 geschriebenen Briefen an Joh. Remus und Mästlin zum Ausdruck (Bd. XVII, S. 293 und S. 297 ff.). In heller Begeisterung widmet er die Ephemeride auf das Jahr 1620, deren Vorwort das Datum 28. Juli 1619 trägt, „dem Erlauchten und Edlen Herrn, Herrn Joh. Neper, Baron von Merchiston in Schottland".

Die Nepersche Tafel ist vorzugsweise für trigonometrische Rechnung gedacht und eingerichtet, Kepler dagegen hat vor allem logistische Rechnungen im Auge. Sofort spricht er deshalb von einer Umarbeitung der Neperschen Tafel für seine Zwecke. Das bezieht sich jedoch nur auf Form und Einrichtung der Tafel, nicht auf die Logarithmen selbst. Die Kritik an ihnen kommt erst mit einer eigenen Theorie des Neperschen Logarithmus. Zu dieser wird er von seinem alten Lehrer Mästlin veranlaßt. Auf den erwähnten Brief Keplers vom 3. Dez. 1618 hatte dieser nämlich in einer späten Antwort am 2. März 1620 (Bd. XVII, S. 423) eine ganz negative Haltung zum Rechnen mit Neperschen Logarithmen eingenommen. Er stößt sich an ihrer Einführung durch das Bild zweier gegenläufig bewegter Punkte, unterstellt ihrem Urheber sogar, daß er wohl mit Absicht eine nicht runde Zahl als Basis gewählt habe, um die Sache zu verschleiern, und schließt wörtlich: „Ich halte es für unwürdig eines Mathematikers, mit fremden Augen sehen zu wollen und sich auf Beweise zu stützen oder als solche auszugeben, die er nicht verstehen kann. ... Deshalb mache ich mir einen Kalkül nicht zu eigen, von dem ich glaube oder annehme, daß er bewiesen sei, sondern nur einen, von dem ich das weiß."

Sofort bemüht sich nun Kepler um einen arithmetischen, auf euklidischer Grundlage ruhenden Beweis. Er teilt ihn Mästlin zu Beginn des langen Briefes mit, der am 12. April 1620 angefangen, besonderer Umstände halber jedoch erst am 19. Juni abgeschlossen wurde (Bd. XVIII, S. 7 ff.), und schließt ihn mit der Aufforderung: „Nach diesem Beweis dürft Ihr nicht länger an den Logarithmen herumzweifeln". Wichtiger ist für uns aber die Konsequenz aus der neuen Theorie für Kepler selber, die in einer Randnote zu dem Brief angedeutet ist: „Die Logarithmen sind freilich jetzt noch genauer. Man muß nämlich von einer noch viel kleineren Proportion ausgehen, so daß das Verhältnis von 100000.00 zu 99999.99 eine Benennung [statt „nomen" sagt er später „mensura"] erhält, die etwas größer als die Einheit ist. Da Neper nicht mit einer hinreichend kleinen Proportion beginnt, so gibt er als Logarithmus der Verdopplung, des Verhältnisses 100000.00 zu 50000.00, die Zahl 69314.69 an. Ich jedoch ... fand für den Logarithmus dieses Verhältnisses 69314.72, drei Einheiten mehr als Neper. Wenn es auch nicht so wichtig ist, mit welcher Zahl die als kleinste angenommene Proportion benannt wird, so zieht sich diese Benennung eben doch durch die ganze Tafel hindurch." Kepler wird danach die Logarithmen für die Rudolphinischen Tafeln umberechnen müssen. Daß er auf seine Verbesserung stolz ist, beweist die Tatsache, daß er sie auf dem Titelbild der Tafeln verewigen ließ: Die auf dem Dach des Tempels stehende „Arithmetica" trägt nämlich um den Kopf eine Gloriole mit der Zahl 69314 72, während sie in den Händen zwei Stäbe trägt, deren einer genau halb so lang ist wie der andere, das Verhältnis 2 : 1 andeutend. Von der Absicht, die neue Theorie des Logarithmus zu publizieren, ist vorerst aber nicht die Rede; dieser Entschluß reift vielmehr erst im folgenden Jahr 1621 in Tübingen, als sich Kepler des Hexenprozesses seiner Mutter wegen über ein Jahr, von Sept. 1620 bis Nov. 1621, in Württemberg aufzuhalten genötigt sah. „Da und dort" kam er in dieser Zeit in Diskussion über die Nepersche Erfindung, vor allem in Tübingen mit Mästlin und Schickard, letzterer aufgeschlossen für das neue Rechnen, Mästlin dagegen immer noch auf seiner ablehnenden Haltung beharrend. Ganz eindeutig ist dieser gemeint, wenn Kepler in der Einleitung zum „Supplement" (S. 355) von Leuten spricht, denen das Alter wohl die Klugheit vermehrte, dafür aber die Auffassung verlangsamte und die deshalb dem neuen Rechnen, das anstelle der Prosthaphärese in Aufnahme kommen soll, abwartend gegenüberstehen. Und man glaubt Mästlin selbst zu hören bei dem Gegenargument, es stehe einem Mathematiker schlecht an, sich kindlich über einen Kalkül zu freuen, der noch kein solides Fundament besitze und deshalb unvermutet in die Fallgrube des Irrtums führen könne. Denn Nepers Begründung durch fiktive Bewegungen könne nicht als vollgültiger Beweis gelten. Dann fährt Kepler wörtlich fort: „Das war für mich der Anlaß, auf der Stelle probeweise einen regelrechten Beweis zu entwerfen, den ich nachher, sobald ich nach Linz zurückgekehrt war, sorgfältiger ausarbeitete."

Die Erfahrungen in Tübingen und anderwärts führen ihn also zu dem Entschluß, eine für die Publikation gedachte, auf Proportionen aufgebaute Theorie des Neperschen Logarithmus zu schaffen und dadurch die zögernden Mathematiker der strengen euklidischen Observanz von der Gültigkeit des logarithmischen Rechnens zu überzeugen. Mit der Theorie allein ist es jedoch nicht getan, solange die Logarithmen selbst noch nicht Gemeingut der Rechner sind. Er muß der Theorie eine Logarithmentafel beigeben, die selbstverständlich die verbesserten Zahlen enthalten und die für die Rudolphinischen Tafeln zweckmäßige Form bekommen wird. Während nämlich Neper im Titel der „Descriptio" die „Anwendungen in beiderlei Geometrie" an erster Stelle nennt, fordert Kepler (Rudolphinische Tafeln pag. 10): „Weil die alten logistischen Additionen [müßte heißen: Multiplikationen] und Divisionen auch den Geübten sehr viel Arbeit und Mühe bereiten, weil es aber doch ein Hauptzweck der Tafeln sein soll, die Rechenarbeit zu verringern, die Kräfte des angestrengten Geistes zu schonen und Zeit zu gewinnen, so faßte ich in den vergangenen 6 Jahren den Entschluß, die Neperschen Logarithmen, eine hervorragende Erfindung, auch in die Logistik einzuführen." Der Gedanke, die beiden Tafelarten nebeneinanderzustellen, ist zu dieser Zeit noch nicht reif. Schließlich bedürfen die beiden Teile, Theorie und Tafel, dringend einer ausführlichen Anleitung zum Rechnen mit Logarithmen. Aus dem einen Entschluß entwickelt sich also zwangsläufig ein größeres Programm, das in der Folge durchgeführt wird.

Die innere Vorgeschichte der logarithmischen Schriften ist damit aber nicht zu Ende, es folgt vielmehr ein heikles Nachspiel um die Frage: Nepersche oder Briggs'sche Logarithmen. Kaum daß nämlich die Neperschen Logarithmen geboren sind, werden sie durch die dekadischen schon wieder verdrängt. Die erste Ankündigung dieser letzteren steht im Appendix von Nepers „Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio" (1619) mitsamt einer Anweisung zu ihrer Berechnung mit Hilfe fortgesetzter Mittelbildung, derselben, die Kepler unabhängig davon in dem Brief an Mästlin für seine eigenen Logarithmen entwickelt hatte. Da Kepler dieses Büchlein in Tübingen im Sommer 1621 vorfand, müßte man auch ohne seine ausdrückliche Bestätigung annehmen, daß er seit dieser Zeit von der Möglichkeit dekadischer Logarithmen wußte. Seine Stellungnahme dazu erfahren wir aber erst, nachdem ihm Edmund Gunter, ein Freund von Briggs, seinen „Canon triangulorum", eine siebenstellige Tafel mit den dekadischen Logarithmen der trigonometrischen Funktionen (vgl. Tropfke II^2, 183), mit einem leider nicht erhaltenen Begleitbrief zugesandt hatte – nebenbei gesagt: eine vornehme englische Geste, denn die Sendung war ohne Zweifel die Antwort auf Keplers Bitte an den bereits toten Neper in der Ephemeride auf das Jahr 1620, ihn über alle Fortschritte auf dem laufenden zu halten.

Gunter hatte sein Paket im Febr. 1622 abgeschickt, am 1. Nov. 1623 kam es in Linz an; gerade in die Zwischenzeit fällt aber Keplers „Chilias", und jedenfalls vor dem 4. Dez. 1623, an dem der Dankbrief an Gunter geschrieben wird (Bd. XVIII, S. 144 f.), trifft auch die „Chilias" von Briggs bei Kepler ein. Nach kurzer Einleitung schreibt er nun an Gunter: „Sehr erfreut bin ich über diese Form [der Logarithmen], von der ich kurz zuvor in Tübingen in Württemberg aus dem posthumen Büchlein Merchistons (oder ist es vielleicht sein Sohn?) Kunde bekommen hatte. Ich habe auch einige Mühe auf diese

Art verwandt, sobald ich im November 1621 nach Linz zurückgekehrt war." Er begründet nun eingehend seinen Verdacht, daß in der Briggs'schen „Chilias" ein Fehler stecke, der aber in Wirklichkeit auf seinen eigenen, nicht hinreichend genauen Wert für den Logarithmus der Verzehnfachung zurückfällt. Dann fährt er fort: „Ich sehe, daß Eure Logarithmen um die lästigen cossischen Sicherungen [des Vorzeichens wegen] herumkommen; ich sehe sie wachsen mit wachsendem Wert des Verhältnisses und in der Toga der Sinus prächtig geschmückt einherschreiten. Da sie sich aber zu weit von ihrem Ursprung entfernen und doch, meiner festen Meinung nach, auf keine andere Weise als durch Ableitung aus der ersten Neperschen Form herzustellen sind, wie ich es vorhin getan habe, so bin ich sehr in Zweifel, welchen Weg ich in den Rudolphinischen Tafeln wählen soll. Fast will es mir scheinen, daß ich bei der bereits fertig gerechneten Tafel bleiben solle. Denn in den Anleitungen zu den Rudolphinen brauche ich ja nicht die ganze Lehre von den Logarithmen ... und der Verdruß mit den cossischen Vorsichtsmaßnahmen wird so weit wie möglich behoben. Wenn es mir möglich ist, will ich jedoch versuchen, die Heptacosias, die ein Bestandteil der Rudolphinen werden soll, mit geringstem Arbeitsaufwand nach Euren Logarithmen umzugestalten." Man spürt es deutlich, daß Kepler nur mit halbem Herzen bei den neuen Logarithmen ist, obwohl er zu dieser Zeit seine einzige Dreiecksberechnung in dekadischen Logarithmen durchführt (Brief an Landgraf Philipp von Hessen, Bd. XVIII, S. 150), daß vielmehr die Neperschen bei ihm „Erstlingsrecht" genießen, wie er sich Guldin gegenüber ausdrückt (Bd. XVIII, S. 253). Nachdem vollends seine „Chilias" im Herbst 1624 gedruckt vorlag, war praktisch keine Möglichkeit mehr, in den Rudolphinen auf dekadische Logarithmen überzugehen. Dieses Gefühl hat auch Briggs, der für Gunter im März 1625 antwortet (Bd. XVIII, S. 221): „In Eurem soeben erschienenen Buch über die Logarithmen anerkenne ich den Scharfsinn und lobe ich den Fleiß. Hättet Ihr jedoch auf den Erfinder Merchiston gehört und wäret Ihr mir gefolgt, dann hättet Ihr meiner Meinung nach denen, die am Gebrauch der Logarithmen ihre Freude haben, einen besseren Dienst erwiesen." Keplers Antwort an Briggs, die wohl gegeben werden mußte, da dieser ihm mit dem Brief seine „Arithmetica logarithmica" geschickt hatte, ist verlorengegangen, sie dürfte aber, was die Logarithmen betrifft, etwa mit dem übereingestimmt haben, was er in den Rudolphinischen Tafeln (Praecepta, pag. 18) zu dem Thema sagt: „Gleichwohl, um beiläufig daran zu erinnern, ist zum Rechnen mit Absolutzahlen weder meine Chilias recht geeignet (da sie nicht für diesen Zweck geschaffen wurde), noch die Nepersche Form der abnehmenden Logarithmen überhaupt, die ich in dieser Heptacosias trotzdem als besonders geeignet für die Logistik beibehalten habe. Die andere Form der wachsenden Logarithmen, welche der Engländer Edmund [sic!] Briggs in einem großen Folioband [der „Arithmetica logarithmica", vgl. Tropfke II², 183] ausgearbeitet hat, ist für Multiplikation und Division von Absolutzahlen mit jeder wünschenswerten Genauigkeit weitaus am befriedigendsten und bequemsten. Es ist gut, mit einem Wort daran zu erinnern, damit die Arithmetiker wissen, wo sie sich Hilfe holen sollen, um die Schwierigkeiten zu beheben, die im 8. Kapitel meines Supplements [S. 389 ff., speziell S. 401 ff.] und auch sonst mit Absolutzahlen begegnen."

Subjektiv ist Kepler mit dieser Erklärung gerechtfertigt; objektiv ist dagegen zu sagen, daß die Entscheidung falsch war, der Winkel- und Zeitberechnung mit ihren 60- bzw. 24-teiligen Einheiten wegen die dekadischen Logarithmen zu opfern. Wäre das Gewicht der Rudolphinischen Tafeln nicht so ungeheuer groß gewesen, dann hätte es geschehen können, daß sie mit den rasch veralteten Neperschen Logarithmen beiseite gelegt worden wären. So aber, da man ihrer in den nächsten hundert Jahren nicht entraten konnte, haben sie den Neperschen Logarithmen zu einer unverdient langen Weiterexistenz verholfen. Es passiert dabei das Kuriose, daß die „Tabulae manuales logarithmicae" von Keplers Schwiegersohn Jakob Bartsch, ein von Fehlern strotzendes Tabellenwerk, nach fast 70 Jahren, i. J. 1700, von Joh. Casp. Eisenschmid neu herausgegeben werden müssen, nur mit Rücksicht auf die Benützung der Rudolphinischen Tafeln.[1]

Die Bedeutung von Keplers neuer Begründung der Neperschen Logarithmen wird durch deren kurze Lebensdauer nicht berührt, da sie weniger in sachlicher als methodischer Richtung zu suchen ist. Man kann sogar die Vermutung aussprechen, daß uns diese Arbeit, die wir heute zu den frühesten Vorläufern der Infinitesimalrechnung zählen müssen, nicht geschenkt worden wäre, wenn sich Kepler die Briggsschen Logarithmen zu eigen gemacht hätte.

DRUCKGESCHICHTE

Ganz durchsichtig ist die Druckgeschichte der „Chilias" nicht. Das Manuskript wird jedenfalls im Winter 1621/22 fertig. Gewidmet ist es dem Landgrafen Philipp von Hessen-Butzbach, den Kepler 1621 von Württemberg aus besuchte und mit dem er sich ebenfalls über die Logarithmen unterhielt, wie aus dem Brief des Landgrafen vom Juni 1623 (Bd. XVIII, S. 131) zu entnehmen ist. Als Druckort hat Kepler zunächst Tübingen im Auge; er schickt daher die „Demonstrationem Logarithmorum" „sampt der Chiliade Logarithmorum" an Mästlin, „ob etwa solliche unter seiner correction alda gedruckt werden möchten" (Bd. XVIII, S. 151). Bei diesem bleibt nun aber das Manuskript liegen, so lange, daß Keplers „Interesse an dem Büchlein erkaltete" (S. 356). Erst nach der Mitte des Jahres 1623 wird Schickard beauftragt, Mästlin zur Herausgabe der Arbeit zu bewegen, vermutlich, weil sich der Landgraf inzwischen angeboten hatte, den Druck der Arbeit zu besorgen. Der Gang der Dinge läßt sich nun so rekonstruieren: Am 20. Sept. 1623 berichtet Schickard (Bd. XVIII, S. 142): „Bis zu diesem Zeitpunkt hat mich Mästlin

[1] Joh. Kepleri et Jacobi Bartschii Tabulae manuales logarithmicae ad calculum Astronomicum, in specie Tabb. Rudolphinarum compendiose tractandum mire utiles. ... Curante Joh. Casp. Eisenschmid. Argentorati 1700.

vertröstet, obwohl ich ihn die ganze Woche her täglich wegen Rückgabe Deiner Logarithmen gemahnt habe. Ich verstehe gar nicht recht, warum er sich so schwierig anstellt." In der Nachschrift zu diesem Brief kann er aber melden: „Inzwischen habe ich nach langer Weigerung die Logarithmen endlich von Mästlin zurückbekommen." Im Dezember teilt Kepler dem Landgrafen mit, er habe „diß wercklin zuruckh abfordern lassen, wölches anjetzo bey Schickharden ... behaltsweis hinterlegt ist. Weil dan E. F. Gn. diß wercklin dedicirt ist, also stelle E. F. Gn. Ich es haim, ob sie solches zu Tübingen vnter Schickards Correctur wollen zudruckhen befehlen, oder ob sie zu Franckfort Jemand Tauglichen haben, der vleissig corrigire, weil alda schöne Typi seind, auff wöllichen fall E. F. Gn. solches wercklin bey Schickarden zuerheben haben werden" (Bd. XVIII, S. 151).

Nun hört Kepler lange nichts von seinem Manuskript. Erst am 6./16. Juni 1624 schreibt Schickard, wohl auf eine verlorene Anfrage hin: „Deine Logarithmen habe ich im vergangenen Herbst [müßte wohl heißen: Frühjahr] richtig und sorgfältig besorgt. Ich zweifle nicht, daß der Landgraf sie bekommen hat, obwohl niemand zurückgeschrieben hat" (Bd. XVIII, S. 185 f.). Am 7./17. Sept. teilt sodann der Landgraf selbst Kepler mit (Bd. XVIII, S. 214): „Mögen darauff in gnaden Euch vnverhalten, daß vns in nechst verschiener Fastenmeß die Logarithmi gleichfalß zugeschickt worden, welche wir zwar dem bono publico nicht verhalten, sondern gern zu Franckfurtt getruckt sehen mögen. Weil aber daselbsten Niemandt sich dessen vnterfangen wöllen, haben wir das werck einem Buchtrucker zu Gießen, Caspar Chemlin genandt, zu trucken vntergeben, welcher es auch also außgeferttiget, wie Ihr selbsten auß beygefügten exemplarien (deren wir Euch hiermit zehen vberschicken) zusehen". Zugleich läßt er Kepler „hinwider" 50 Reichstaler als Remuneration zugehen „beneben fernerm gnädigen gesinnen, Ihr den usum gedachter Logarithmorum Vns zu communiciren". Über ein Jahr dauert es aber, bis Kepler diesen Brief mit dem Geld, was beides bei dem Buchhändler Tampach in Frankfurt zur Weitergabe hinterlegt war, erhält. Die „Chilias" war inzwischen auf der Frankfurter Herbstmesse 1624 zu kaufen und im Meßkatalog angezeigt. Auf diesem Weg mußte also Kepler erfahren, was geschehen war. Zum Überdruß schreibt Schickard unterm 30. Sept./10. Okt.: „Deine Logarithmen sind in Marburg gedruckt worden, ein Exemplar hat mir der Landgraf geschickt, Dir ohne Zweifel schon längst mehr auf anderem Weg, sonst würde ich Dir meines inzwischen zur Verfügung stellen" (Bd. XVIII, S. 214).

Obwohl der Brief Philipps ihn noch längst nicht erreicht hat, fühlt sich Kepler jetzt doch veranlaßt, die fehlende Anleitung zum Gebrauch der Logarithmen schleunigst in Angriff zu nehmen. Sinngemäß gibt er ihr die Bezeichnung „Supplementum Chiliadis". Am 23. April bestätigt der Landgraf den Empfang des Manuskripts und teilt mit: „Eben derselbige Buchtrucker, welcher nunmehr zu Marpurg sein haußliche wohnung helt, der will auch itzige vberschickte praecepta zutrucken sich vnterfangen, vnd vff kunfftige Herbstmeß außferttigen, auch die typos numericos apicatos sonderlich darzu gießen lassen, wofern er nur in zeitten den Titulum, dedicationem, appendicem vnd indicem ... bekommen kan" (Bd. XVIII, S. 233 f.). Tatsächlich lag das „Supplementum" zur Herbstmesse 1625 fertig vor.

Aus dem heutigen Bestand der erhaltenen Exemplare läßt sich der Schluß ziehen, daß die zwei Teile, „Chilias" und „Supplementum", in den meisten Fällen zusammen verkauft wurden. Kepler kam, wie aus dem Brief an Guldin vom 10. Dez. 1625 (Bd. XVIII, S. 252) hervorgeht, am 4. Dezember endlich in den Besitz seiner 10 Exemplare der „Chilias" und der 50 Reichstaler, vom „Supplementum" erhielt er mit derselben Sendung nur 2 Exemplare.

DIE NEPERSCHEN UND DIE KEPLERSCHEN LOGARITHMEN

Keplersche Logarithmen im eigentlichen Sinn gibt es zwar nicht; aus der Entstehungsgeschichte geht deutlich genug hervor, daß Kepler nichts anderes will als eine strengere Begründung und genauere Berechnung der Neperschen Logarithmen. Der Kürze halber mag es aber trotzdem gestattet sein, vom Keplerschen Logarithmus zu sprechen und ihn durch das Symbol Log zu bezeichnen, während der Nepersche durch 𝔩𝔬𝔤 angedeutet werden soll.

Beide, Neper und Kepler, gehen in gleicher Weise aus von der Zuordnung einer geometrischen zu einer arithmetischen Reihe, welch letztere von 0 bis ∞ wächst, während die erste von einer angenommenen größten Zahl z bis 0 abnimmt. Die Verschiedenheit beginnt bei der Herstellung der Zuordnung und wirkt sich aus bis zur Berechnung des Logarithmus, der nichts anderes ist als die zu einer gegebenen Zahl der geometrischen Reihe zugeordnete Zahl der arithmetischen Reihe.

Neper läßt die beiden Zahlenreihen durch die Bewegung zweier Punkte P und Q auf den parallelen, gleichsinnig orientierten Zahlengeraden g und h entstehen. Zur Zeit $t = t_0$ befinde sich P in $P_0 = z$, der entsprechende Punkt Q in $Q_0 = 0$, zu den Zeitpunkten $t_1 = a$, $t_2 = 2a$, $t_3 = 3a \, .. \, t_i = i \cdot a$ sollen für die zugehörigen Punkte $P_1, P_2, P_3, \dots P_i$ bzw. $Q_1, Q_2, Q_3, \dots Q_i$ die Beziehungen gelten $P_0P_1 : P_1P_2 : P_2P_3 : \dots : P_{i-1}P_i = \frac{1}{q} > 1$ und $Q_0Q_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = \dots = Q_{i-1}Q_i$. Der Punkt Q bewegt sich also mit konstanter Geschwindigkeit v' in einer Richtung auf h, indes P sich auf g gegenläufig und mit einer in geometrischer Progression abnehmenden Geschwindigkeit v bewegt. Über das Verhältnis dieser Geschwindigkeiten verfügt Neper in der Weise, daß er die Anfangsgeschwindigkeiten v_0 von P und v'_0 von Q einander gleichsetzt. Die strenge Durchführung dieser Vorschrift ist eine Aufgabe der Infinitesimalrechnung. Neper nimmt in erster Näherung v_0 als die gleichförmige Geschwindigkeit, die $P_0 = z$ in der Zeiteinheit nach $P_1 = z\left(1 - \frac{1}{z}\right)$ bringt. Da also $P_0P_1 = 1$ wird, so ist $v_0 = 1$ und $P_i = z\left(1 - \frac{1}{z}\right)^i$.

Größere Annäherung an den wahren Wert der Anfangsgeschwindigkeit v_0 erreicht Neper durch folgende Überlegung: Die Bewegung des Punktes P von P_0 nach P_1 ist ungleichförmig und abnehmend. Also ist $v_0 > 1$, $v_1 < 1$ und $1 < v_0 < \left(1 + \frac{1}{z}\right)$.* Neper setzt daher $v_0 = \frac{1 + \left(1 + \frac{1}{z}\right)}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z}$ mit $z = 10^7$, also $P_i = 10^7 (1-10^{-7})^i$, $Q_i = i \cdot v_0 = i\,(1 + \frac{1}{2} \cdot 10^{-7})$. Q_i ist der Nepersche Logarithmus zum Numerus P_i. Da der Quotient $q = (1 - 10^{-7})$ nur sehr wenig von 1 verschieden ist, so rechnet Neper mit ihm direkt nur bis P_{100}, geht von da ab zum Quotienten $q' = (1-10^{-7})^{100}$ über und schließlich, nach weiteren 50 Schritten mit q', zum Quotienten $q'' = (1-10^{-7})^{5000}$. (Dies ist das Schema, das jedoch mit Rücksicht auf runde Tafelwerte leicht modifiziert wird.) Um zum Logarithmus der Zahl $P_n = \frac{1}{2} z = 5 \cdot 10^6$ zu gelangen, wären mit dem Quotienten q mehr als $5 \cdot 10^6$ Schritte erforderlich gewesen, die sich jetzt auf $(100 + 50 + 21 \cdot 69)$ reduzieren. Für die Genauigkeit bleibt aber die Zahl n bestimmend. Ist nämlich v_0 mit dem Fehler ε behaftet, so wird $Q_n = \mathfrak{log}\, P_n$ um $n \cdot \varepsilon$ falsch. Der Fehler der Neperschen Logarithmen wächst mit wachsendem n oder abnehmendem Numerus.

Es ist also

$$\mathfrak{log}\, 10^7 (1-10^{-7})^n = n \left(1 + \frac{1}{2}\, 10^{-7}\right) = n \cdot \alpha \qquad \alpha = 1 + \frac{1}{2}\, 10^{-7}.$$

Ist nun $x = 10^7 (1-10^{-7})^y = z \left(1 - \frac{1}{z}\right)^y$, so wird $\mathfrak{log}\, x = y \cdot \alpha$ und

$$\log x = \log z + y\,[\log (z - 1) - \log z]$$

$$y = \frac{\log z - \log x}{\log z - \log (z-1)} = \frac{\log \frac{z}{x}}{\log \frac{z}{z-1}} = \frac{\ln \frac{z}{x}}{\ln \frac{z}{z-1}} = \frac{\mathfrak{log}\, x}{\alpha}$$

$$\mathfrak{log}\, x = \frac{\alpha}{\ln \frac{z}{z-1}} \cdot \ln \frac{z}{x} = \beta \cdot \ln \frac{z}{x}$$

wenn $\beta = \alpha : \ln \frac{z}{z-1}$ gesetzt wird.

Diese Beziehung gilt zwischen dem Neperschen und dem natürlichen Logarithmus einer Zahl x.

Dieser anschaulich geometrischen Begründung der Neperschen Logarithmen stellt Kepler eine rein begriffliche, arithmetische gegenüber, die, den Zahlencharakter des Logarithmus wahrend, zugleich zu einer genaueren Berechnung führen soll. Die Grundlage seiner Theorie ist die Unterscheidung eines Verhältnisses a : b von seiner Maßzahl („mensura"), die hier durch $\left\{\frac{a}{b}\right\}$ bezeichnet werden soll. Er nimmt also den Begriff Logarithmus ganz wörtlich als „Zahl eines Verhältnisses"; es wird sich nämlich zeigen, daß $\left\{\frac{a}{b}\right\}$ bei

* Es ist $v_0 : v_1 = 1 : \left(1 - \frac{1}{z}\right)$, also $v_0 \approx v_1 \left(1 + \frac{1}{z}\right)$ und $v_0 < \left(1 + \frac{1}{z}\right)$.

bestimmter Wahl von a der Keplersche Logarithmus von b wird. Für Kepler fallen die Logarithmen „nicht eigentlich unter die Gattung der Linien bzw. der Bewegung und des Fließens, oder unter die einer anderen sinnlichen Quantität, sondern (wenn man so sagen darf) unter die Gattung der Relationen und der geistigen Quantität" (S. 355). Geistige Quantitäten sind wie die sinnlichen beliebig unterteilbar. Bei Proportionen geschieht diese Teilung wieder durch Proportionen, deren Produkt dem Ausgangsverhältnis gleich ist. $\frac{a}{b}$ (wobei $a > b$ vorausgesetzt sei) wird durch ein Zwischenglied x, $a > x > b$, in die zwei Teilverhältnisse $\frac{a}{x}$ und $\frac{x}{b}$ geteilt, deren jedes kleiner ist als $\frac{a}{b}$. Von den Maßzahlen $\left\{\frac{a}{x}\right\}$ und $\left\{\frac{x}{b}\right\}$ wird verlangt, daß $\left\{\frac{a}{x}\right\} + \left\{\frac{x}{b}\right\} = \left\{\frac{a}{b}\right\}$ werde, außerdem sollen gleichen Verhältnissen gleiche Maßzahlen entsprechen, woraus sofort $\left\{\frac{1}{1}\right\} = 0$ folgt.

Zur Berechnung der Maßzahl $\left\{\frac{a}{b}\right\}$ bildet Kepler der Reihe nach die mittleren Proportionalen $x_1 = \sqrt{ab}, x_2 = \sqrt{ax_1}, x_3 = \sqrt{ax_2}, \ldots, x_n = \sqrt{ax_{n-1}}$ wobei also $x_n = \sqrt[2^n]{a^{2^n-1} \cdot b}$ und $\left(\frac{a}{x_n}\right)^{2^n} = \frac{a}{b}$. Für die Maßzahlen gilt $\left\{\frac{a}{x_1}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{a}{b}\right\}$, $\left\{\frac{a}{x_2}\right\} = \frac{1}{4}\left\{\frac{a}{b}\right\}$, allgemein $\left\{\frac{a}{x_n}\right\} = \frac{1}{2^n}\left\{\frac{a}{b}\right\}$. Da sich $\left\{\frac{a}{x_n}\right\}$ mit $(a-x_n)$ bei wachsendem n dem Wert 0 nähert, so setzt Kepler bei hinreichend großem n $a-x_n = \left\{\frac{a}{x_n}\right\}$, also $\left\{\frac{a}{b}\right\} = 2^n\left\{\frac{a}{x_n}\right\} = 2^n\,(a-x_n)$.

Bei Kepler entsprechen sich also die geometrische Reihe $1, \frac{a}{x_n}, \left(\frac{a}{x_n}\right)^2, \ldots$ $\ldots \left(\frac{a}{x_n}\right)^{2^n} = \frac{a}{b}$ und die arithmetische Reihe $0, \left\{\frac{a}{x_n}\right\}, 2\left\{\frac{a}{x_n}\right\}, \ldots \left\{\frac{a}{b}\right\}$. Der Übergang von der Maßzahl zum Logarithmus wird durch die Definition $\left\{\frac{z}{x}\right\} = \text{Log } x$ vollzogen, wobei z der Sinus totus ist, dessen Logarithmus 0 werden soll. Wie Neper wählt Kepler $z = 10^7$, nur schreibt er es 100000.00, so daß es auch als 10^5 verstanden werden kann. Als Beispiel berechnet er (S. 281) Log 70000 mit Hilfe der 30. mittleren Proportionale auf 20 Stellen genau. Diese Methode, die er schon 1618 in dem Brief an Mästlin entwickelt hatte, ehe er sie im Anhang zur „Constructio" Nepers angedeutet fand, hat den Vorzug, daß die Zahl n der mittleren Proportionalen an den Numerus x angepaßt werden kann, sie macht aber auch den Grenzwertcharakter und die Irrationalität der Logarithmen deutlich. Natürlich kann Kepler den Grenzübergang noch nicht vollziehen, klar genug hat er ihn aber im Sinn und vor allem stimmen seine Zahlen innerhalb der berücksichtigten Stellenzahl mit dem strengen Grenzwert überein. Praktisch gilt daher, wenn in den vorausgehenden Gleichungen $a = z$, $b = x$ und daher $z - x_n = z\left[1 - \left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{2^n}}\right]$ gesetzt wird,

$$\text{Log } x = \lim_{n\to\infty} 2^n \cdot z \cdot \left[1 - \left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{2^n}}\right] = z \ln \frac{z}{x}.$$

Der Unterschied zwischen dem Keplerschen Log x und dem Neperschen $\mathfrak{log}$ x ist daher Log x — $\mathfrak{log}$ x = $(z-\beta) \ln \frac{z}{x}$.
Zur Bestimmung des konstanten Faktors $(z-\beta)$ ziehen wir die von Kepler wie von Neper mit großer Stellenzahl berechneten Vervielfachungslogarithmen heran. So ist der Logarithmus der Verhundertfachung ($z : x = 100$, $z = 10^7$, $x = 10^5$) bei Kepler 460 517 02. 82, bei Neper 460 516 84.68. Daher wird Log 10^5 — $\mathfrak{log}$ $10^5 = 18{,}14 = (z-\beta) \ln 100 = (z-\beta) \cdot 4{,}60517$ und $z-\beta = 3{,}94$ oder hinlänglich genau $z-\beta = 3{,}9$, also

$$\Delta = \text{Log } x - \mathfrak{log}\ x = 3{,}9 \cdot \ln \frac{z}{x}.$$

Der Unterschied Δ, der bei $x = z$ natürlich 0 ist, wächst also mit abnehmendem Numerus x. Bei $x = 50000.00$, $z : x = 2$, beträgt er theoretisch $\Delta = 2{,}7$, nach den 9stelligen Verdoppelungslogarithmen 6931471.92 — 6931469.22 = 2,7, während die Logarithmentafeln die Differenz 69314 72 — 69314 69 = 3 ausweisen. Die immer wieder zu hörende Meinung, die Unterschiede in den beiden Tafeln seien zufälliger Natur, ist danach zu korrigieren.*

NEPERS „CANON“ UND KEPLERS „CHILIAS“

Die uns heute geläufige Zweiteilung einer Logarithmentafel in einen numerischen und einen trigonometrischen Teil wird erstmals in den Rudolphinischen Tafeln durchgeführt; bis dahin sucht Kepler wie Neper mit einer einzigen Tafel auszukommen. Bestimmend für deren Gestalt ist der hauptsächliche Zweck, den der Autor im Auge hat. Da Neper die „Anwendungen in beiderlei Trigonometrie“ voransetzt, so ist sein „Canon“ im wesentlichen eine logarithmisch-trigonometrische Tafel mit dem von Minute zu Minute fortschreitenden Winkel als Argument. Auf die Argumentspalte folgt die Spalte der Sinus und die der Logarithmen der Sinus. Da der „Canon“ als Halbtafel angelegt ist, so wiederholen sich diese 3 Spalten von rechts nach links mit den Komplementen des Winkels. Schließlich hat Neper noch eine mit „Differentia“ überschriebene Mittelspalte, in der die Differenzen der links und rechts davon stehenden log sin α und log sin $(90^0 - \alpha)$, also die Werte von $\mathfrak{log}$ tg α stehen. Um diese Tafel auch für arithmetische Rechnungen nutzbar zu machen, verwendet Neper die natürlichen Sinuswerte als Numeri mit der Wirkung, daß die Logarithmen der natürlichen Zahlen erst durch eine Interpolationsrechnung gefunden werden müssen.

Im Gegensatz zu Neper hat Kepler vor allem Rechnungen mit benannten und unbenannten Zahlen im Auge, speziell Rechnungen mit Zeit- und Winkel-

* Paul Epstein kommt in seiner Arbeit „Die Logarithmenberechnung bei Kepler“ in: Zeitschrift f. math. u. naturw. Unterricht 55 (1924) S. 148 zu dem falschen Ergebnis: „Die Keplerschen Logarithmen stimmen mit den Neperschen überein.“ Der Fehler liegt bei ihm im Ansatz der Neperschen Logarithmen $y_n = M\left(1 - \frac{1}{v}\right)^n$, $x_n = M \frac{n}{v}$, aus dem, $M = z$ gesetzt, $\mathfrak{log}\ x = z \cdot \ln \frac{z}{x}$ folgt, also genau der Keplersche Logarithmus.

größen, seine Tafel hat daher die natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 zum Argument, wenn der Sinus totus z als 10^3 gelesen wird, andernfalls, wenn $z = 10^5$, alle vollen Hunderter. Jedenfalls enthält sie 1000 Zeilen (daher der Name „Chilias") im Vergleich zu den 45 mal 60 Zeilen bei Neper. Die Spalte der Numeri wird ergänzt durch zwei weitere, die mit „Partes vicesimae quartae" und „Partes sexagenariae" überschrieben sind und der einfacheren Berechnung der Zeit nach Stunden, Minuten und Sekunden bzw. eines Winkels dienen. Beim Numerus N steht in der Zeitspalte die Zahl $\frac{N}{z} \cdot 24.0.0$, in der Winkelspalte $\frac{N}{z} \cdot 60.0$ (im Fall $\frac{N}{z} = \frac{7}{10}$ also 16.48.0 bzw. 42.0). Über den damit verbundenen Rechenvorteil wird in den Anmerkungen zu sprechen sein. Um die Tafel auch für trigonometrische Rechnungen verwendbar zu machen, gibt Kepler seinen ganzzahligen Numeri zugleich die Bedeutung von Sinuswerten, $N = \sin \alpha$. Er braucht also noch eine Spalte der zugehörigen Winkel α, die er als „Arcus circuli" überschreibt. Da die Sinus konstante Differenz besitzen, wächst die Spalte der α ungleichmäßig von $0°$ bis $90°$. In der zum Numerus N gehörigen Zeile stehen demnach in der Keplerschen „Chilias" folgende 5 Werte: 1. α; 2. $N = \sin \alpha$; 3. $\frac{N}{z} \cdot 24.0.0$; 4. Log N; 5. $\frac{N}{z} \cdot 60.0$. Zur Erleichterung der Interpolation sind in der ersten und vierten Spalte die Differenzen eingetragen.

Diese Tafel Keplers hat nun aber einen schwerwiegenden Nachteil. Sie läßt sich nämlich nicht als Halbtafel anlegen, und dadurch entfällt die mittlere Spalte der Mesologarithmi, wie der Log tg bei Kepler heißt. Er sieht sich deshalb genötigt, bei der Berechnung ebener und sphärischer Dreiecke auf die Tangensfunktion zu verzichten. Diesen Mangel gesteht er offen ein (S. 377), indem er zugleich die bessere Eignung des Neperschen „Canons" für trigonometrische Rechnungen anerkennt. Auch Schickard kritisiert diesen Punkt in dem Brief vom 30. Sept. 1624 (Bd. XVIII, S. 215): „Ich freue mich, daß sie [die Logarithmen] nun allgemein zugänglich gemacht sind und beglückwünsche mich selbst zu einem so feinen Rechenhilfsmittel. Sie werden mir auch zu anderen Berechnungen nützlich sein, weil sie nach den Zahlen 1 bis 1000 angeordnet sind; um dessentwillen ziehe ich sie den Neperschen Logarithmen vor. Um aber die Wahrheit nicht zu verschleiern: in der Trigonometrie gebrauche ich lieber diese, die für die Sinus voller Minuten berechnet sind, als Deine, bei denen eine Reduktion nötig ist und das Aufsuchen des Proportionalteiles, was ziemlich aufhält, wenn man es eilig hat."

Die Differenzen der Logarithmen, die als Rechenhilfsmittel gedacht sind, ermöglichen auch eine bequeme Kontrolle von Keplers Zahlen. Sind nämlich a_1 und a_2 benachbarte Argumente, $a_1 < a_2$, dann gilt

$$\text{Log } a_1 - \text{Log } a_2 = z \cdot \ln \frac{a_2}{a_1} = z \cdot (\ln a_2 - \ln a_1).$$

Dabei dürfen in der letzten Differenz a_1 und a_2 mit derselben Potenz von 10 dividiert oder multipliziert werden. Beispielsweise wird Log 26 600 — Log 26700 $= 10^5 (\ln 267 - \ln 266) = 375.235$. Kepler gibt als Differenz 375.23 an.

„DER ZAHLEN INVENTARIVM"

In Bd. V der Pulkowoer Kepler-Mss. befindet sich eine druckfertige Abhandlung von 13 Seiten (Bl. 157–163) mit dem sehr langen Titel: „Der Zahlen Inventarium oder Schottische Practica, das ist: Ein wunderbarliche newe ganz behende Art, die Regl Detri ohne Multipliciern vnd Dividiern (welche species in großen Zahlen sehr beschwärlich seind) nur allain durch die aller ainfeltigste addition oder subtraction der Zahlen haab zuverrichten, beyleiffig zu quadrieren, cubieren, sursolidieren etc. vnd allerhands Wurzel zu suechen, baides in der gemeinen Arithmetica vnd in der Logistica ... alles durch hilff einer kurzen Tafel Logarithmorum (teütsch der Zahlen haab) welche ain tausent linien hat."

Das Ms. stammt nicht von Keplers Hand, trotzdem kann an seiner Autorschaft nicht gezweifelt werden. Die wenigen Korrekturen in der Reinschrift sind von ihm eingetragen, im Titel ist ferner auf die „Chilias" Bezug genommen und die Beispiele sind mit Keplerschen Logarithmen gerechnet (mit auffallenden kleinen Abweichungen von der „Chilias" allerdings), ausschlaggebend ist jedoch der Umstand, daß ein weiteres Manuskript von 3 Blatt (ebenda XVIII, 103–105), das von Kepler selbst geschrieben ist, sich bei näherem Zusehen als Entwurf zu „Der Zahlen Inventarium" erweist.

Die beiden Stücke sind deshalb interessant, weil sie zeigen, daß Kepler seine verbesserte Logarithmentafel sofort mit einer deutschen Unterweisung einem möglichst breiten Kreis von Rechnern zugänglich machen wollte. Das muß etwa 1620 gewesen sein. Die Logarithmentafel, die er der Unterweisung beigeben will, ist nur für gewöhnliche Zahlenrechnungen gedacht. Sie hat deshalb nicht 5, sondern „4 Columnas; in der ersten stehen die gemainen Zahlen nach einander von 100 000.00 bis 100.00. In der andern vnd vierten stehen eben dise aintausend Zahlen, doch in die Logistische Form verkhlaidet. Die dritte Columna mit rother Dinten hält die Logarithmos oder haaben selbsten." Zur Erleichterung der Rechnung durch Wegfall der lästigen Proportionalteile hat Kepler aber zunächst im Sinn, die Tafel wesentlich zu erweitern. Der Entwurf beginnt mit dem Satz: „Nachfolgende praecepta seind fürnemlich auff ein solche Tafel gerichtet, in wölcher halbem Thail [Numeri > 50000.00] die Zahlen mit 10.00 springen." Da in der Reinschrift davon nicht mehr, sondern nur noch von der Tafel mit 1000 Linien die Rede ist, so kann man schließen, daß der Plan gleich wieder fallen gelassen wurde.

Die roten Logarithmen könnten an Bürgis rote Zahlen erinnern. Die Verwendung des deutschen Wortes „Haab" für Logarithmus mit dem Plural „Haaben" gleich Logarithmi und „der Zahlen Haab" für Logarithmentafel wird wohl als Verdeutschung von „mensura" zu verstehen sein.

DER INHALT DER SCHRIFTEN

Die Entstehungs- und Druckgeschichte erklärt, warum das, was ein einziges Buch sein sollte, als zwei getrennte Stücke erschien. Die Originaltitel sind S. 277 und S. 353 abgebildet. Das Mittelstück bildet die Tafel, die 1000 Numeri umfassende „Chilias", ihr voraus geht die Demonstratio, die kunstgerechte Herleitung der Logarithmen, das Prinzip ihrer Verwendung und ihre praktische Berechnung; es folgt ihr das „Supplementum", die ins einzelne gehende, an zahlreichen Beispielen illustrierte Anwendung der Tafel in Arithmetik, Logistik und Trigonometrie. Ein Sonderstück ist die Einleitung zum „Supplement", die ihrem Charakter nach zum Ganzen gehört und von Frisch deshalb an die Spitze der Demonstratio gestellt wurde.

I. „CHILIAS LOGARITHMORVM"

1. Demonstratio Structurae Logarithmorum.

Man muß sich der Veranlassung zu dieser Schrift erinnern, des Anstoßes, den Nepers anschaulich-kinematische Begründung der Logarithmen bei dem strengen Mästlin erregte, um sich klar zu sein, daß Kepler more geometrico, d. h. deduktiv vorgehen wird. Seine Demonstratio ist schulgerecht aus 30 Propositionen aufgebaut, denen 3 Postulate und 2 Axiome vorangehen. Die Eigenart seines Beweisganges besteht darin, daß er nicht direkt auf den Logarithmus ausgeht, sondern zunächst von einer allgemeinen Theorie des Maßes von Proportionen handelt und erst von Prop. 20 ab den Logarithmus der Zahl a als Maß der Proportion $\frac{z}{a}$ einführt, wobei z die als sin tot fungierende größte Zahl ist. Es bleiben also auch die zwei Reihen, von denen Neper ausgeht, ganz im Hintergrund.

Hinter Prop. 20 ist also der Haupteinschnitt. Der vorausgehende Teil hat theoretischen Charakter, in seinem Mittelpunkt steht die independente Berechnung einer Maßzahl $\left\{\frac{a}{b}\right\}$; der nachfolgende Teil hat die praktische Aufstellung einer Logarithmentafel zum Gegenstand, in dem Methoden der näherungsweisen Berechnung neuer Logarithmen aus bereits bekannten entwickelt werden. Der Aufbau der Demonstratio ist also straff und – gelegentlich geäußerten Zweifeln zum Trotz – ganz klar. Er wird vielleicht dadurch etwas verschleiert, daß Kepler mit Worten umständlich beschreibt, was mit mathematischer Symbolik viel einfacher auszudrücken wäre. Um so mehr fühlen wir uns berechtigt, die Wiedergabe seines Gedankenganges in moderner Zeichensprache zu verdeutlichen.

Der erste Teil bis Prop. 20 läßt 3 Abschnitte erkennen. Der erste umfaßt neben den 3 Postulaten und 2 Axiomen die Propositionen 1–7, der zweite Prop. 8–11, der dritte schließlich Prop. 12–20.

Im ersten Abschnitt können wir die Axiome außer Betracht lassen. Wichtig sind dagegen die Postulate für die Grundlegung des Maßes einer Proportion („mensura proportionis"). Gleich im ersten Postulat wird verlangt, daß alle unter sich gleichen Proportionen durch dieselbe Quantität zu messen seien. Im zweiten Postulat ist von der Teilung eines gegebenen Verhältnisses die Rede. Speziell soll ein Verhältnis $a : b$ durch die mittlere Proportionale x in zwei gleiche Teilverhältnisse $a : x = x : b$ geteilt werden, jedes dieser beiden durch die mittleren Proportionalen y_1 und y_2 wieder in die gleichen Teilverhältnisse $a : y_1 = y_1 : x$ und $x : y_2 = y_2 : b$, woraus $a : y_1 = y_1 : x = x : y_2 = y_2 : b$ folgt. Nach der nten Wiederholung desselben Verfahrens hat man $2^n - 1 = m$ Zwischenglieder $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_m$, welche die fortlaufende Proportion $a : u_1 = u_1 : u_2 = \ldots = u_m : b$ bilden (Prop. 7). Verlangt wird in dem Postulat 2, daß die Teilung bis zu einer solchen Zahl m weitergetrieben werde, bis die Differenzen zwischen den Gliedern der Teilverhältnisse alle kleiner werden als irgendeine vorgegebene Größe. Diese größte Zahl m, bei der also der Teilungsprozeß beendet wird, bestimmt das „kleinste Proportionselement". Das Maß für dieses Element, das an sich willkürlich gewählt werden kann, soll nach Postulat 3 die Differenz der beiden Glieder des Verhältnisses sein. Stillschweigend steckt in den Postulaten auch die Forderung $\left\{\frac{a}{x} \cdot \frac{x}{b}\right\} = \left\{\frac{a}{x}\right\} + \left\{\frac{x}{b}\right\}$.

Im ersten Abschnitt ist weiterhin nur von fortlaufenden Proportionen zwischen den Endgliedern a und b ($a > b$) die Rede. Für sie folgt aus $\frac{a}{u_1} = \frac{u_1}{u_2} = \ldots = \frac{u_n}{b}$ die Proportion $\frac{a - u_1}{u_1 - u_2} = \frac{u_1 - u_2}{u_2 - u_3} = \ldots\ldots = \frac{u_{n-1} - u_n}{u_n - b} = \frac{a}{u_1}$ (Prop. 2). Es ist daher $a - u_1 > u_1 - u_2 > u_2 - u_3 > \ldots > u_n - b$, wie Prop. 3 behauptet. Wird nun $\left\{\frac{a}{u_1}\right\} = a - u_1$ angenommen, dann wird $\left\{\frac{u_i}{u_{i+1}}\right\} > u_i - u_{i+1}$ (Prop. 4) und $\left\{\frac{a}{u_i}\right\} = \left\{\frac{a}{u_1} \cdot \frac{u_1}{u_2} \cdot \ldots \cdot \frac{u_{i-1}}{u_i}\right\} = i \cdot (a - u_1) > a - u_i$ (Prop. 5). Wird dagegen die Wahl des Maßes so getroffen, daß $\left\{\frac{a}{u_i}\right\} = a - u_i$, dann folgt wegen $\left\{\frac{u_k}{u_{k+1}}\right\} = \frac{a - u_i}{i}$ die Gleichung $\left\{\frac{a}{u_k}\right\} = k \cdot \frac{a - u_i}{i}$ und $\frac{a - u_i}{i} \gtrless \frac{a - u_k}{k}$ für $k \gtrless i$; also $\left\{\frac{a}{u_k}\right\} \gtrless (a - u_k)$, je nachdem $k \gtrless i$ ist. (Prop. 6).

Die 4 Lehrsätze des zweiten Abschnitts handeln im Gegensatz dazu von Zahlenfolgen, die keine fortlaufende Proportion bilden. Sofort treten jetzt inkommensurable Verhältnisse auf, für die in Prop. 8 die Erklärung gegeben wird. Es ist da die Rede von Quantitäten, die in der Reihenfolge ihrer Größe angeordnet sind, den Endgliedern a und b der Reihe und von den Zwischengliedern. Inkommensurabel werden die Teilverhältnisse $a : x$ und $x : b$ im Vergleich mit $a : b$ genannt, wenn x bei keiner wirklichen oder möglichen Wahl der kontinuierlichen Reihe $a : u_1 = u_1 : u_2 = u_2 : u_3 = \ldots = u_n : b$ einem Zwischenglied u_k gleich wird.

In den folgenden Propositionen 9–11 werden a und b als aussprechbare, d. h. hier als rationale Größen vorausgesetzt. Abgesehen von dem Fall, daß a und b sich zueinander verhalten wie Potenzen von ganzen Zahlen, behauptet Prop. 9, daß eine fortlaufende Proportion zwischen a und b kein aussprechbares Zwischenglied enthalten könne; während Prop. 10 umgekehrt aussagt, daß in der Reihe aussprechbarer Größen $a > u_1 > u_2 > \ldots > b$, sofern sich a und b wieder nicht wie Potenzen ganzer Zahlen verhalten, keines der Zwischenglieder u_k das Verhältnis $a : b$ in kommensurable Teile teilt. Prop. 11 hat den speziellen Fall im Auge, daß die Glieder eine arithmetische Reihe bilden, und sagt aus, daß dann die Verhältnisse konsekutiver Glieder ohne Einschränkung unter sich inkommensurabel seien. Den Beweis dafür bleibt Kepler schuldig; er verifiziert ihn nur am Beispiel $a : b = 18 : 8 = 3^2 : 2^2$.

Der dritte, von Prop. 12 bis 20 reichende Abschnitt dient der Maßberechnung im allgemeinen Fall. Zur Vorbereitung werden einige Ungleichungen entwickelt. Ist $a > u_1 > u_2 > \ldots > u_n > b$, dann ist nach Prop. 12 $\left\{\frac{u_i}{u_k}\right\} > u_i - u_k$, wenn $\left\{\frac{a}{u_1}\right\} = a - u_1$, $\left\{\frac{u_i}{u_k}\right\} < u_i - u_k$, wenn $\left\{\frac{u_n}{b}\right\} = u_n - b$ gewählt wurde. Diese Aussage ist nach Prop. 6 und 3 richtig, wenn die u_i eine fortlaufende Proportion bilden. Andernfalls kann man – eine typische Infinitesimalbetrachtung – die Voraussetzung durch ein genügend dichtes Netz von mittleren Proportionalen mit jeder beliebigen Annäherung erzwingen. Nach Lehrsatz 13 bestehen zwischen den drei Größen $a > u > b$ die Ungleichungen $\left\{\frac{a}{b}\right\} : \left\{\frac{u}{b}\right\} < \frac{a-b}{u-b}$ und $\left\{\frac{a}{b}\right\} : \left\{\frac{a}{u}\right\} > \frac{a-b}{a-u}$, woraus Kepler irrtümlich schließt, daß dieselben Ungleichungen auch für die Verhältnisse $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{u}$ und $\frac{u}{b}$ gelten. Richtig ist dagegen für den Sonderfall $a - u = u - b$, daß aus $\left\{\frac{a}{u}\right\} < \left\{\frac{u}{b}\right\}$ auch $\frac{a}{u} < \frac{u}{b}$ folgt. Für eben diesen Fall gilt auch Lehrsatz 14 des Inhalts, daß $\frac{a}{b} > \left(\frac{a}{u}\right)^2$ sei, was man durch $\frac{a}{b} < \left(\frac{u}{b}\right)^2$, also $\frac{a}{u} < \sqrt{\frac{a}{b}} < \frac{u}{b}$ ergänzen könnte. Die Voraussetzung $a - u = u - b$ wird insbesondere durch die drei Größen a, b, $(2b-a)$ erfüllt, wenn $a > b > \frac{a}{2}$. Daher wird $\frac{a}{2b-a} > \left(\frac{a}{b}\right)^2$, wie Lehrsatz 15 behauptet. Die Vorbereitung schließt mit dem allgemeinen Lehrsatz 16, nach dem aliquote Teile inkommensurabler Verhältnisse wieder inkommensurabel sind.

Mit der umfangreichen Prop. 17, die übrigens deutlich macht, daß sich Kepler an die aus der Antike stammende Übung hielt, eine noch so lange Sentenz als einzigen Satz zu formulieren, beginnt die eigentliche Berechnungslehre von Maßzahlen $\left\{\frac{z}{a}\right\}$, wobei z bereits den Sinus totus, a eine Zahl kleiner als z bedeutet, im Hinblick auf die „Chilias" also $z = 1000$. Das Grundverfahren zur Berechnung von $\left\{\frac{1000}{a}\right\}$ durch fortgesetzte Bisektion des Verhältnisses $\frac{1000}{a}$ und Rückführung auf das Elementarmaß $e = 1000 - x_n$ wurde bereits erläutert. Die Frage ist jetzt die nach der Größe von n in Abhängigkeit von a.

Ausgangspunkt ist das Verhältnis $\frac{1000}{999}$ und der „Exzess" von $\frac{999}{998}$ über $\frac{1000}{999}$, als welcher der Quotient oder $\delta = 998001 : 998000$ verstanden wird.

Die Reihe der mittleren Proportionalen $x_1 = \sqrt{1000 \cdot 999}$, $x_2 = \sqrt{1000 \cdot x_1}$ usw. bis $x_n = \sqrt{1000 \cdot x_{n-1}}$ soll nämlich so weit fortgeführt werden, bis $\frac{1000}{x_n} < \delta$ geworden ist. Setzt man dann $1000 - x_n = \varepsilon$, $\delta = 1 + \frac{1}{998\,000}$, so muß also $\frac{1000}{x_n} = \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{1000}} = 1 + \frac{\varepsilon}{1000} < 1 + \frac{1}{998\,000}$ oder $\varepsilon < \frac{1}{998}$ werden. Da aber $x_n = 1000 \cdot \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{\frac{1}{2^n}} = 1000 - \frac{1}{2^n} = 1000 - \varepsilon$ ist, so muß $2^n = 998$ werden. Um das zu erreichen, genügt es, $n = 10$ zu wählen. Die so erreichte Genauigkeit, d. h. $1000 - x_n = \varepsilon$, soll nun auch für jeden anderen Wert von a als Maßstab gelten; näherhin soll n bei beliebigem a so gewählt werden, daß $\frac{3}{4}\varepsilon < 1000 - x_n < \frac{3}{2}\varepsilon$ wird. Soll beispielsweise $\left\{\frac{1000}{998}\right\}$ berechnet werden, so ist $\frac{1000}{998} > \left(\frac{1000}{999}\right)^2$, genauer $\frac{1000}{998} = \left(\frac{1000}{999}\right)^2 + \frac{1}{998 \cdot 998{,}001}$ und $\left\{\frac{1000}{998}\right\} \approx 2 \cdot \left\{\frac{1000}{999}\right\}$, weshalb hier $n = 11$ genommen werden muß.

Die direkte Berechnung von $\left\{\frac{1000}{a}\right\}$ hat auf alle Fälle mit $a = 500$ ihr Ende. Wird nämlich $a < 500$, so ist

$$\frac{1000}{a} = \frac{1000}{500} \cdot \frac{500}{a} = \frac{1000}{500} \cdot \frac{1000}{2a}.$$

Sind also die Maßzahlen für alle $a \geqq 500$ bekannt, so hat man sie auch für $500 > a \geqq 250$, ferner wegen $\frac{1000}{a} = \frac{1000}{250} \cdot \frac{1000}{4a}$ für $250 > a \geqq 125$ u. s. f.

Es bestehen aber noch andere Beziehungen, die zur Berechnung unbekannter Maßzahlen aus bekannten führen. Sie sind Gegenstand der Propp. 18–20. Ist $a_1 : a_2 = a_2 : a_3 = a_3 : a_4 = \ldots$ eine fortlaufende Proportion, so wird (Prop. 18) $\left\{\frac{a_1}{a_3}\right\} = 2\left\{\frac{a_1}{a_2}\right\}$, $\left\{\frac{a_1}{a_4}\right\} = 3\left\{\frac{a_1}{a_2}\right\}$ u. s. w., aber auch, da $\frac{a_1}{a_3} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2$, $\frac{a_1}{a_4} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$, $\left\{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\right\} = 2\left\{\frac{a_1}{a_2}\right\}$, $\left\{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right\} = 3\left\{\frac{a_1}{a_2}\right\}$ u. s. f. und umgekehrt $\left\{\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{a_1}{a_2}\right\}$ u. s. w. Kennt man ferner $\left\{\frac{1000}{b}\right\}$ und $\left\{\frac{1000}{c}\right\}$ und ist $\frac{1000}{b} = \frac{c}{x}$, so ist auch $\left\{\frac{1000}{x}\right\}$ bekannt als $\left\{\frac{1000}{b}\right\} + \left\{\frac{1000}{c}\right\}$ (Prop. 19). In dieser Regel steckt zugleich die Vorschrift zur Berechnung von Aufgaben nach der Regel de tri. Prop. 20 erweitert schließlich die vorhergehende, indem aus 3 bekannten Maßzahlen eine vierte gewonnen wird. Ist nämlich $\frac{b}{c} = \frac{d}{x}$ und $\left\{\frac{1000}{b}\right\}$, $\left\{\frac{1000}{c}\right\}$, $\left\{\frac{1000}{d}\right\}$ bekannt, so wird

$$\left\{\frac{1000}{x}\right\} = \left\{\frac{1000}{c}\right\} + \left\{\frac{1000}{d}\right\} - \left\{\frac{1000}{b}\right\}.$$

An dieser Stelle tritt endlich der Logarithmus in Erscheinung durch die Definition, daß $\left\{\frac{1000}{a}\right\} = \text{Log}\ a$ sein soll. Zwar wird auch in der Folge noch mit Maßzahlen operiert, sie lassen sich aber nach der Beziehung $\left\{\frac{a}{b}\right\} = \left\{\frac{1000}{b} : \frac{1000}{a}\right\} = \text{Log}\ b - \text{Log}\ a$ leicht in Logarithmen verwandeln.

Der mit Lehrsatz 21 beginnende 2. Teil der Demonstratio entwickelt vor allem Ungleichungen zur näherungsweisen Berechnung von Logarithmen aus bereits bekannten. Das Ziel ist eine vereinfachte Berechnung größerer Reihen von Logarithmen, wie sie eine Tafel verlangt. Da Kepler seine Chilias im Auge hat, in der sowohl der Arcus wie der Sinus bzw. Numerus absolutus als Argument fungieren können, so braucht er Näherungsformeln für beide Zwecke. Wird der Arcus mit α bezeichnet, der Sinus totus, der zugleich „Numerus primus" der Tabelle ist, mit z, dann besagt

Prop. 21: $z - \cos\alpha < \mathrm{Log}\cos\alpha < \sec\alpha - z$,

Prop. 22: $\mathrm{Log}\cos\alpha < \frac{\sec\alpha - \cos\alpha}{2}$ und $\mathrm{Log}\sin\alpha < \frac{\operatorname{cosec}\alpha - \sin\alpha}{2}$.

Die Sätze 23 und 24 sind geometrisch eingekleidet. Arithmetisch laufen sie auf die Ungleichungen $\frac{a+1}{a} < \left\{\frac{a}{a-1}\right\} : \left\{\frac{a+1}{a}\right\} < \frac{a}{a-1}$

und $\left\{\frac{a}{a-1}\right\} : \left\{\frac{a+1}{a}\right\} < \frac{a+1}{\sqrt{(a+1)(a-1)}} = \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}$ hinaus.

Aus ihnen folgert Kepler den wichtigen Satz 25:

$$\frac{1000}{a+1} < \left\{\frac{a+1}{a}\right\} : \left\{\frac{1000}{999}\right\} < \frac{1000}{a}$$

und

$$\left\{\frac{a+1}{a}\right\} : \left\{\frac{1000}{999}\right\} < \frac{1000}{\sqrt{a(a+1)}}.$$

Der Satz wird wieder nicht allgemein bewiesen, sondern nur anhand des Zahlenpaares $a + 1 = 501$, $a = 500$ bestätigt und danach stillschweigend als gültig angenommen. Die Differenz $\mathrm{Log}\,a - \mathrm{Log}\,(a+1) = \left\{\frac{a+1}{a}\right\}$ wird durch diesen Satz in direkte Relation zu Log 999 gesetzt. Die Lücken der Chilias schließen sich mit seiner Hilfe, wie Kepler in Coroll. 2 ausdrücklich bemerkt.

Sind allgemeiner a und b konsekutive Numeri, dann wird als Satz 26 bewiesen

$$\frac{1000}{b} < \frac{\mathrm{Log}\,a - \mathrm{Log}\,b}{b-a} < \frac{1000}{a}.$$

In Prop. 27 werden schließlich noch die Sätze 25 und 26 in trigonometrische Form übertragen, indem $a = \sin(90^\circ - \alpha)$, $b = \sin(90 - \beta)$ und $\sin \mathrm{tot} = 1000$ gesetzt wird: $\sec\beta < \frac{\mathrm{Log}\,a - \mathrm{Log}\,b}{b-a} < \sec\alpha$

$$\frac{\mathrm{Log}\,a - \mathrm{Log}\,b}{b-a} < \sqrt{\sec\alpha \cdot \sec\beta}.$$

Mit den Anwendungen dieser Ungleichung schließt dieser Abschnitt, der durch die große Zahl von Näherungsformeln bemerkenswert ist, während Neper mit der einzigen $\mathrm{log}\,a - \mathrm{log}\,b \approx \frac{(b-a)z}{b}$ oder $\mathrm{log}\,a \approx \mathrm{log}\,b + \frac{(b-a)z}{b}$ arbeitet.

Es folgen zum Schluß noch 3 Sätze. In Prop. 28 und 29 beweist Kepler ausdrücklich die Irrationalität des Logarithmus, wenn der Numerus eine von z verschiedene Rationalzahl ist. Lehrsatz 30 hat endlich die Berechnung eines Logarithmus zum Gegenstand, wenn der Numerus größer als z ist.
Ist $b : z = z : a$, $a < z$, so wird $\text{Log } z - \text{Log } b = \text{Log } a - \text{Log } z$, d. h. $\text{Log } b = -\text{Log } a$. Die Logarithmen der Zahlen $b > z$ sind also negativ.

2. Chilias Logarithmorum.

Formell gehört zwar „Die vorteilhafteste Methode der Herstellung einer Chilias Logarithmorum“ noch zur Demonstratio, sachlich ist sie aber die Überleitung zur Tafel selbst und enger zur ihr gehörig. Die Skizze des Gedankengangs dieses Abschnitts führt zugleich in die Praxis des Rechnens mit Keplerschen Logarithmen ein.

Es sei jetzt $z = 1000.00$, die Differenz der Numeri 1. Gegeben ist also $\text{Log } 1000 = 0$, durch direkte Berechnung wird ferner $\text{Log } 1024 = -\text{Log } 976{,}5625$ und Log 500 gefunden. Danach ergibt sich aus

$$\left\{\frac{1024}{1}\right\} = \left\{\frac{1024}{512} \cdot \frac{512}{256} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{1}\right\} \text{Log } 1 = \text{Log } 1024 + 10 \cdot \text{Log } 500, \text{ und}$$

nach der Proportion $1000 : 100 = 100 : 10 = 10 : 1$ auch $\text{Log } 100 = \frac{1}{3} \text{Log } 1$ und $\text{Log } 10 = \frac{2}{3} \cdot \text{Log } 1$.

Da $31^2 < 1000$, $37^2 > 1000$, so enthält jeder Numerus der Chilias, der nicht selbst Primzahl ist, einen Primfaktor $\leqq 31$. Für den weiteren Aufbau sind daher die Logarithmen der Primfaktoren $\leqq 31$ grundlegend. Der Logarithmus des Multiplikators p ist nichts anderes als die Maßzahl $\left\{\frac{p}{1}\right\}$ oder $\text{Log } 1 - \text{Log } p$; er ist also mit Log p bekannt. Mit seiner Hilfe gewinnt man aus Log a sofort $\text{Log } (p \cdot a) = \text{Log } a + \text{Log } p - \text{Log } 1$ und $\text{Log} \frac{a}{p} = \text{Log } a - \text{Log } p + \text{Log } 1$. Der Aufbau der Tafel geht nun so vor sich: Zuerst werden die Logarithmen der Zahlen $1000 > a \geqq 900$ direkt und nach Näherungsverfahren berechnet. Aus ihnen und den bereits bekannten Logarithmen der Zahlen 1, 10, 100, 500 und 1024 werden der Reihe nach die Logarithmen der Primzahlen $p \leqq 31$, der ihnen entsprechenden Multiplikatoren und aller der Zahlen a gebildet, von denen ein Vielfaches der Form $P \cdot a$, wobei P die Primfaktoren $p \leqq 31$ enthält, zwischen die Zahlen 900 und 1000 fällt. Durch Abzählen findet man, daß auf diese Weise insgesamt 162 Logarithmen von Zahlen < 900 nicht erreicht werden. Diese Lücken müssen zuletzt noch nach einem der entwickelten Interpolationsverfahren ausgefüllt werden.

Die Tafel mit ihren 1000 Numeri ist von Kepler vollständig neu berechnet. Als Gehilfen hat er zu dieser Zeit (Sommer 1620) den Genfer Jean Gringallet zur Verfügung. Wesentliche Fehler enthält die Tafel nicht, und selbst Druckfehler, die in unserer Ausgabe stillschweigend korrigiert sind, sind es nur wenige. Von den 5 Spalten haben 3, nämlich die zweite mit den Numeri absoluti = Sinus, die dritte mit den Partes vicesimae quartae und die fünfte mit den Partes sexagenariae, über deren Bedeutung S. 473 gesprochen wurde, konstante Differenzenreihe. In den restlichen Spalten, bei den Arcus der ersten und den Logarithmen der vierten Spalte, sind sie variabel und werden von Kepler (im Gegensatz zu Neper) interlinear angegeben. Wie Neper hat Kepler den Sinus totus $z = 10^7$. Da der Logarithmus von a die Maßzahl $\left\{\frac{z}{a}\right\}$ ist, so können z und a nach Belieben um die gleiche Zahl von Stellen gekürzt werden. Den (irrationalen) Logarithmus gibt Kepler mit der gleichen Stellenzahl wie Neper, nur daß er die letzten zwei durchgehend durch einen Punkt abtrennt, um das Rechnen mit weniger Stellen zu erleichtern. Dementsprechend ist bei ihm Log 50000.00 = 69314.72 (Neper: 6931469) und Log 10000.00 = 230258.52 (Neper: 23025842).

Zu beachten ist vor allem das „Vestibulum Chiliadis", die Vortabelle, die im Marburger Druck nicht nach Keplers Wunsch gesetzt war, in unserer Wiedergabe jedoch seiner Intention entspricht. Sie hat nur 2 Spalten: In der ersten die 36 Numeri bzw. Sinus $\frac{k \cdot z}{10^n}$, $k = 1, 2, 3, \ldots 9$, $n = 7, 6, 5, 4$. Sie beginnt also mit 1, wenn $z = 10^7$, mit 0,01, wenn $z = 10^5$ gelesen wird. Selbstverständlich gilt in jedem Fall $\text{Log } 10^{n-1} - \text{Log } 10^n = 230258.52$ für jedes ganzzahlige n. Da sowohl bei der Multiplikation wie bei der Division der Log 1 auftritt, so ist die Frage nach der Einheit jeweils zu prüfen.

Für die Differenz benachbarter Logarithmen der Chilias wurde schon früher (S. 473)

$$\text{Log } a_1 - \text{Log } a_2 = z \cdot \ln \frac{a_2}{a_1} = z(\ln a_2 - \ln a_1) \text{ ermittelt.}$$

Die Differenz aufeinander folgender Werte α_1 und α_2 der Arcus-Spalte ist

$$0{,}001 = \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 = 2 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \approx (\alpha_2 - \alpha_1) \cos \alpha_1,$$

umgerechnet auf Gradmaß also

$$\alpha_2 - \alpha_1 \approx \frac{0{,}001 \cdot 180}{\pi \cdot \cos \alpha_1} = \frac{3{,}438}{\cos \alpha_1}.$$

Sie wächst daher mit wachsendem α_1; für $\alpha_1 = 0$ wird $\alpha_2 - \alpha_1 = 3{,}438' = 3'26{,}4''$. Bei größerer Differenz kommt man mit Wiederholung zum Ziel, etwa so: Erste Näherung $\alpha_2^* - \alpha_1 = \frac{3{,}438}{\cos \alpha_1}$, zweite Näherung $\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{3{,}438}{\cos\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2^* - \alpha_1}{2}\right)}$

(Beispiel: $93\,000 = \sin 68°26'6''$, $\alpha_2^* - \alpha_1 = 9'21''$, $\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{3{,}438}{\cos 68°30'46''} = 9'23''$.

II. „SVPPLEMENTVM“

Daß bei Kepler die zeitliche Folge der Schriften die umgekehrte ist gegenüber Neper, kann geradezu als symbolhaft bezeichnet werden. Hatte der letztere den Canon mit der Descriptio vorausgeschickt und erst hintennach die Constructio folgen lassen, so geht bei Kepler die Demonstratio mit der Chilias voran, ein Jahr später erst folgt das „Supplementum“. Tatsächlich liegt bei ihm der Schwerpunkt in der Demonstratio.

Das „Supplementum“ beginnt mit der zum ganzen Werk gehörigen Einleitung, in der er ausführlich Rechenschaft ablegt über seine Beschäftigung mit den Neperschen Logarithmen, dem Leser die Geschichte seiner Theorie erzählt (wobei hier dem Baron von Strahlendorf ein besonderes Verdienst eingeräumt wird, weil er ihn durch seine Fragen mehr gefördert habe, als ein dickes Buch es vermocht hätte) und den Kern seiner Problemstellung erläutert. Nicht zur Gattung der Linien und Bewegungen, also realer Quantitäten, gehören für ihn die Logarithmen, sondern zu der der Relationen, d. h. abgeleiteter, nur geistig faßbarer Quantitäten. Genauso wie die realen Quantitäten sind auch diese unbegrenzt teilbar, denn eine Proportion $a:b$, $a > b$, wird durch eine Zahl c, $a > c > b$ in zwei Teilproportionen $a:c$, $c:b$ geteilt, deren jede $< a:b$ ist. Mit dieser Grunderkenntnis hatte sein neuer Beweis die Richtung bekommen; das wahre und gemeinsame Maß aller gleichen Proportionen ist selbst von der Gattung der Proportion. Die Wahl des Proportionselementes, das als kleinste Maßeinheit dienen soll, ist dem freien Ermessen anheimgestellt. Nun sind aber die Proportionen in der Regel unter sich „inkommunikabel“; das gewählte Proportionselement kann deshalb nicht auch das wirkliche Maß einer anderen Proportion bilden. Man steht deshalb vor der zweiten Wahl, welcher Fehler als erträglich gelten soll. Als Ergebnis kommt schließlich etwas heraus, „was dem Mathematiker absurd klingt, dem Rechner aber von größtem Nutzen ist“: der Logarithmus als gemeinsames Maß inkommunikabler Proportionen.

Kepler schildert sodann die Geschichte des Druckes durch den Landgrafen Philipp von Hessen-Butzbach und die Entstehung des Supplements. Schon der erste Titel hatte die Instruktion über die Anwendung der Logarithmen in Aussicht gestellt. Damit seien aber nur die Grundregeln gemeint gewesen; für die „pulli Arithmeticorum implumes“ („die ungefiederten arithmetischen Kücken“) habe jedoch mehr geschehen müssen. Wenn auf dem Titel von einer neuen Arithmetik die Rede gewesen sei, so habe er damit nicht sich und seine Arbeit rühmen wollen, sondern die Erfindung Nepers. Nur das eine sei sein Ziel, den Käufer die Verwendungsmöglichkeiten der einzelnen Spalten der Chilias zu lehren.

Die Schrift selbst ist durch ihre Einteilung in 9 Kapitel so klar aufgegliedert, daß eine kurze Übersicht genügt:

Kap. 1. Generelle Erläuterung der Chilias und der darin verwendeten Zeichen. Begründung der Wahl von $z = 10^7$ und der Schreibung 100000.00.

Kap. 2–6. Rechnungen mit je zwei Spalten der Chilias, insbesondere die logistischen Rechnungen mit Spalte 3 und 4 bzw. 5 und 4.

Kap. 7. Rechnungen mit den Spalten 1, 2 und 4, d. h. trigonometrische Rechnungen. Zuerst werden die ebenen, sofort anschließend die sphärischen Dreiecke behandelt, wobei sich das Fehlen des Mesolog = Log tg nachteilig bemerkbar macht.

Kap. 8. Rechnungen mit Spalte 2 und 4. Aufsuchen des Logarithmus zu einem gegebenen Numerus und umgekehrt. Gebrauch der Interlineardifferenzen bei den Logarithmen; hier finden auch alle gewöhnlichen Zahlenrechnungen ihren Platz. Besonders zu erwähnen ist die in Praeceptum XIV (S. 411/12) gegebene Herleitung des dritten Keplerschen Gesetzes als Teilung einer gegebenen Proportion in zwei Teilverhältnisse, die selbst in gegebenem Verhältnis zueinander stehen.

Kap. 9. Verknüpfung von je zwei der Spalten 1, 2, 3, 5 mit Spalte 4. Das ergibt wieder mannigfaltige Aufgaben, vor allem „allein mit den Logarithmen der Numeri und Arcus oder Winkel alle ebenen Dreiecke aufzulösen" auf anderem Wege als in Kap. 7. Einen breiten Raum nimmt dabei ein Probierverfahren ein, das zu zwei gegebenen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel direkt die beiden andern Winkel liefern soll.

Die schon beim Erscheinen der logarithmischen Schriften Keplers wirksame Konkurrenz der dekadischen Logarithmen von Briggs mußte sich zum Schaden des Marburger Druckers und Verlegers bemerkbar machen. Diese Vermutung wird gestützt durch die Tatsache, daß Chemlin den offenbar noch großen Rest der 1. Auflage 1639 mit neuem Titel als Editio 2. auf den Markt zu bringen suchte. Zu dieser Zeit hatten sich aber die Briggs'schen Logarithmen so ziemlich durchgesetzt; nur die Benützer der Rudolphinischen Tafeln waren weiterhin auf Neper-Keplersche Logarithmen angewiesen, für ihre Bedürfnisse war aber in den Tafeln selbst vorgesorgt.

Bei Frisch sind „Chilias" und „Supplementum" in Vol. VII, pag. 317–408 neu gedruckt mit dem üblichen „Prooemium Editoris", jedoch ohne „Notae Editoris". Der handschriftliche Nachlaß Keplers enthält, von den Briefen abgesehen, nichts, was auf die Vorarbeiten zu den Logarithmen Bezug hätte.

ANMERKUNGEN

9. 3. Über Maximilian von Liechtenstein (1578–1645) siehe *Wurzbach*: Biographisches Lexikon des Kaiserthums Österreich XV, 132f.; über Helmhard Jörger († 1623) ebenda X, 230. Von dem engen Verhältnis zwischen Kepler und Jörger zeugt folgende Stelle eines Briefes von Kepler an eine unbekannte Frau (Bd. XVII, S. 40): „Der Herr Helmhard Jörger würt schon allberaitt zu Wien der Junge Keppler genennet, villeicht auch der Junge sternseher".

10. 26. *J. Wodderborn*, der hier als Leibarzt Liechtensteins erscheint, war 1610 mit einer Verteidigungsschrift für Galilei gegen Horky (vgl. Bd. IV, S. 448) hervorgetreten („Quatuor Problematum, quae M. Horky contra Nuncium Sidereum de quatuor Planetis novis proposuit, confutatio". Padua 1610). Er gehörte also damals zum Freundeskreis von Galilei. Im „Dictionary of National Biography" fehlt sein Name.

13. 19. Dimensio Circuli, Prop. 3. Ed. Heiberg I, 237–243. Kepler stellt diesen Satz richtig an die Spitze.

14. 7. *Paul Guldin S. J.* (1577–1643), der Entdecker der Guldinschen Regel, die er in dem umfänglichen Werk „De Centro Gravitatis lib. I–IV", Wien 1635–41, sehr breit behandelt, ein wegen seines Einflusses am Kaiserhof geschätzter und respektvoll behandelter Bekannter Keplers, übt in dem genannten Werk, das seine Abhängigkeit von der „Stereometria" weder verleugnen kann noch will, vielfach Kritik an Keplers Methoden und Ergebnissen, wobei ausdrücklich gesagt werden muß, daß diese Kritik durchaus sachlich und maßvoll im Ton gehalten ist. Zu den Stellen 14.4–6 („Licet autem ...") und 14.7–12 („Quanquam inter ea ...") meldet Guldin (lib. IV, pag. 323) seine ersten Bedenken an. Zur ersten Stelle bemerkt er, aus keinem geometrischen Beweis könne man den Sinn herauslesen, daß ein noch so kleiner Kreisbogen einer geraden Linie gleichgesetzt werden dürfe. An der anderen Stelle kritisiert er: „Wäre das evident, dann hätte Archimedes nicht nötig gehabt, den ersten Lehrsatz in „De Sphaera et Cylindro" zu beweisen" (daß nämlich der Umfang eines dem Kreis umbeschriebenen Polygons größer sei als der des Kreises). Und er schließt: „In der Geometrie ist also auf die Evidenz nicht allzuviel Verlaß."

15. 9. Setzt man die große Achse der Ellipse gleich 2a, die kleine gleich 2b, dann wäre nach Kepler der Umfang $U \approx (a + b)\pi$. Auf das Ungenügende dieser Näherungsformel macht *Guldin*, l.c. lib. II, pag. 39 und lib. IV, pag. 323 aufmerksam. Er versucht selbst (lib. II, pag. 83–85) den Umfang der Ellipse $a = 10^5$, $b = 5 \cdot 10^4$ mit Hilfe einbeschriebener Polygone zu berechnen und findet $U > 481\,304$, während bei Kepler $U \approx 471\,238$ herauskommen würde.

Die exakte Berechnung von U führt bekanntlich auf ein elliptisches Integral, das sich in die Reihe

$$U = 2a\pi\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{16}e^4 - \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{5}{36}e^6 - \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{36}\cdot\frac{7}{64}e^8 - \cdots\right)$$

mit $ae = \sqrt{a^2 - b^2}$ entwickeln läßt. Bei den Ellipsenbahnen der Planeten mit $e < \frac{1}{230}$ war Keplers grobe Näherungsformel ausreichend. Die Stelle der „Astronomia Nova", auf die Z. 6/7 verwiesen wird, ist Cap. 59, Protheorema 5 (Bd. III, S. 368).

15. 13. Der Wortlaut des Theorems ist der zweite Satz der „Kreismessung“ von *Archimedes* (Heiberg I,235). Der erste Satz tritt bei Kepler nicht selbständig in Erscheinung, sondern nur als Hilfssatz zum Beweis von Theor. II. Keplers Interpretation des ersten Satzes von Archimedes und vor allem die Anwendung auf Zylinder und allgemeine Rotationskörper wird von *Alexander Anderson* schon 1616 in dem kleinen Schriftchen „Vindiciae Archimedis sive Elenchus Cyclometriae Novae a Philippo Lansbergio nuper editae“ (Paris 1616) heftig kritisiert. Obwohl es dem Titel nach gegen Lansberge gerichtet ist, beschäftigt sich der größere Teil des Textes mit Kepler, „dem kaiserlichen Mathematiker und dem Ersten unter den deutschen Mathematikern“. Sein Urteil gipfelt in der Feststellung, daß das, was Kepler mache, gegen den archimedischen Geist verstoße. *Guldin* gibt Keplers Erklärung zu Theor. II von „Archimedes utitur ...“ bis zum Schluß im vollen Wortlaut wieder, weil er dieses Beweisverfahren öfters anwende (l. c. lib. IV, pag. 324). Er zitiert auch (pag. 330/31) ausgiebig die „Vindiciae“ von Anderson, den er zu den „einer reineren Geometrie verschworenen Leuten“ zählt, aber sein Urteil ist umsichtiger: „Zwar will der archimedische Beweis auf dasselbe hinaus, aber nicht mit den Mitteln, derer sich Kepler zur Herleitung bedient. Es handelt sich da um eine neue Beweismethode, freilich weder archimedisch noch euklidisch, jedoch, um der Wahrheit die Ehre zu geben, durchaus nicht zu verschmähen. Hier hat nämlich Bonaventura Cavalieri die Handhabe und Anregung gefunden, seine «Methode der Indivisibeln», durch welche nach seinem Urteil die Geometrie gefördert wurde, zu schaffen, wie er im Vorwort dieses Buches selbst andeutet.“

17. 5. *Archimedes*: De Conoidibus et Sphaeroidibus, Prop. 3 (Heiberg I, 271 f.).

17. 9. Heiberg II, 299 und 313.

17. 13. De Conoid. et Sphaeroid. Prop. 4–6 (Heiberg I, 276 ff.). Die notwendige Voraussetzung, daß der Durchmesser des Kreises der großen Achse der Ellipse gleich sei, ist bei Archimedes im Wortlaut des Satzes enthalten.

17. 22. Zu diesem Archimedes-Zitat von Kepler bemerkt *Guldin* (lib. IV, pag. 325): „Kepler zitiert zwar Archimedes, man kann aber beide Bücher von „De Sphaera et Cylindro“ durchlesen, man wird nichts davon finden.“ Er weist auf seinen eigenen Beweis hin und kritisiert, daß die Auffassung Keplers, Zylinder und Prisma seien „so etwas wie körperlich gewordene ebene Figuren“ („veluti quaedam plana corporata“) für Leute vom Geiste Archimeds und Euklids zu knapp formuliert sei, daß aber trotzdem Cavalieri sich hier sein Prinzip geholt habe.

19. 16. *Guldin* fragt (lib. IV, pag. 325/26), was wohl Cavalieri zu dieser Stelle sagte. Er würde ausweichen, meint er, und zur Antwort geben, daß

Kepler hier nicht mit unendlich vielen Ebenen, sondern mit körperlichen Teilen arbeite, und auf diese Weise bei seiner Meinung beharren. Die Bemerkung hat also eher eine Spitze gegen Cavalieri als gegen Kepler.

19.22. Den fehlerhaften Wortlaut des Theorems beanstandet *Guldin* (lib. IV, pag. 326) und korrigiert „dimidia Baseos Coni" in „dimidia superficiei Coni", was *Frisch* (IV, 647) zu „dimidia curvae superficiei" verdeutlicht. Diese Korrektur ist zwar richtig, mit Rücksicht auf den Beweis scheint jedoch die von uns vorgenommene näher zu liegen, bei der an Keplers Worten nichts geändert, sondern ein dem Setzer entfallener Satzteil ergänzt wird.

20.9. Zu der Stelle „Eodem vero modo ..." bemerkt *Guldin* (lib. IV, pag. 326), daß zwar die Behauptung richtig sei, es wolle ihm aber nicht einleuchten, wie das „aus dem Sinn des Beweises" von Theor. II hervorgehen solle. Keplers Coroll. I zu Theor. II ist ihm also offenbar entgangen.

20.24. De Sphaera et Cyl. I, Prop. 33 (Heiberg I, 120–125). Keplers Beweis wird von *Guldin* (lib. IV, pag. 327) mit Recht angezweifelt. Er hat jedoch sofort für ihn die Entschuldigung, daß er ja kein strenges Lehrbuch der Geometrie habe schreiben wollen, sondern sein Augenmerk auf die Faßrechnung, wenn auch in geometrischer Begründung, gerichtet habe. Dagegen kann man *Wieleitner* nicht beipflichten, wenn er zu dem bewußt abkürzenden Schlußverfahren Keplers sagt (Unterrichtsbll. f. Math. u. Naturw. 36 (1930) S. 179): „Siehe da, es ist richtig! Aber Kepler bedachte nicht, daß derselbe ‚Wahrscheinlichkeits'schluß ja auch für den Rauminhalt der Halbkugel gelten müßte, und da ist das Resultat falsch." Kepler ist mit Analogieschlüssen vorsichtig; er verwendet sie vor allem zum Projektieren neuer Sätze; ihre Gültigkeit wird am Exempel entschieden. Wäre der Inhalt der Halbkugel das geometrische Mittel aus den beiden Kegeln K_1 und K_2 (tatsächlich ist er aber gleich $\sqrt[4]{2}\sqrt{K_1 \cdot K_2}$), dann hätte er es mit Genugtuung registriert.

21.25. De Sphaera et Cyl. I, Prop. 42.43 (Heiberg I, 156ff.). Zu der Analogie bemerkt *Guldin* (lib. IV, pag. 327): „Um die Wahrheit zu sagen: diese Analogie mißfällt mir keineswegs, sie ist vielmehr schön und eines Kepler würdig. Jedoch, meine ich, dienen solche Analogien mehr der Erfindung als dem Beweis, was Kepler ebenfalls anerkennt und deshalb hinzufügt: Den Beweis lies bei Archimedes nach!" Im übrigen handelt es sich hier überhaupt um keinen eigentlichen Analogieschluß, sondern um Stichproben mit Spezialfällen und eine daran geknüpfte Vermutung. Der Verdacht Wieleitners, daß es sich um einen „scholastischen" Analogieschluß handle, ist gegenstandslos.

23.1. Kepler hat bei dem Theorem nur den Mantel des Zylinders im Auge, während *Archimedes* bei dem entsprechenden Satz (De Sphaera et Cyl. I, Prop. 34, Coroll.) die Grundfläche einbezieht. Die kleine Rechnung soll lediglich die triviale Tatsache illustrieren, daß das Rechteck mit den Seiten 2a und 2b gegenüber dem mit den Seiten a und b vierfachen Inhalt besitzt.

23.28. Die Glosse *Guldins* zu diesem Theorem ist sehr aufschlußreich. Nachdem er zuerst Keplers Verfahren erläutert hat, die Kugel als Bündel von unendlich vielen Kegeln aufzufassen und danach einen der Kugel inhaltsgleichen Kegel zu formieren, fährt er fort (lib. IV, pag. 328): „Endlich schließt er, daß sich der (umbeschriebene) Zylinder zum Volumen der Kugel verhalte wie 3 zu 2. Wie seinerzeit der König Agrippa, als Paulus vor ihm disputierte, diesem zurief ‚beinahe überredest du mich, ein Christ zu werden', so bringt auch mich Kepler mit seinen Argumenten beinahe soweit, ein Keplerianer zu werden, aber mich schreckt der Gebrauch unendlich vieler Teile ebenso ab, wie die Meister, Vertreter und Anhänger einer reineren Geometrie." Zum zweiten Beweis Keplers, bei dem er sich den Zylinder in ein Bündel von unendlich vielen Prismen mit der Achse des Zylinders als gemeinsamer Kante zerlegt denkt, „vielleicht deshalb, weil er gesehen hat, daß die Kegel ihren Zweck nicht ganz erfüllen", bemerkt Guldin: „Ohne besondere Figur, die Kepler weggelassen hat, ist dieser Modus für die Phantasie schwer vorzustellen."

26.26. De Conoid. et Sphaeroid. Prop. 28 (Heiberg I, 405), nicht 29 und 30, wie Kepler angibt.

26.30. De Conoid. et Sphaeroid. Prop. 21.22 (Heiberg I, 345.355). Die folgende Aussage, daß beim hyperbolischen Konoid das Verhältnis von Segment zu Kegel zwischen 3 zu 2 und 1 zu 1 liege, ist bei *Archimedes* der Inhalt der Propositionen 25 und 26.

27.13. De Sphaera et Cyl. II, Prop. 2 (Heiberg I, 174–183). Der im folgenden Abschnitt angezogene Satz, wonach für die Oberflächen und Volumina der beiden Segmente, in die eine Kugel durch eine schneidende Ebene zerfällt, die Ungleichung $O_1^{3/2} : O_2^{3/2} < V_1 : V_2 < O_1^2 : O_2^2$ gilt, ist die 8. Propositio von De Sphaera et Cyl. II (Heiberg I, 210–223).

28.10. De Conoid. et Sphaeroid. Prop. 11.12.13.14 (Heiberg I, 306–319).

29.39. Die Ausstellung *Wieleitners* (UMN 36 (1930) S. 181 f.), daß der Kugelsektor HDKA von Kepler nicht abgeleitet sei, trifft nicht zu. Ausdrücklich stellt er nämlich (Z. 19 ff.) fest:

$$\mathrm{HDKA} = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{AD} \cdot (\mathrm{KD})^2 \pi \left[= \frac{2}{3} r^2 \pi h, \ \mathrm{AD} = r, \ \mathrm{DI} = h \right].$$

30.3. De Conoid. et Sphaeroid. Prop. 24 (Heiberg I, 366–371).

30.23. De Sphaera et Cyl. I, Prop. 16, Lemma 1 (Heiberg I, 72 f.).

31.19. Die Vermutung Keplers, über die er selbst noch im unklaren ist, besagt nach der nebenstehenden Figur, daß der durch die Ebene NA von dem geraden Kegel GNY schräg abgeschnittene Kegel GNR von der Höhe GZ, dessen Grundfläche NR eine Ellipse mit dem Mittelpunkt M ist, inhaltsgleich sei dem geraden Kegel GOT, dessen Grundfläche durch M geht. Daß diese Vermutung nicht zutreffen kann, ist ziemlich evident. Die geometrisch strenge Inhaltsberechnung der beiden zu vergleichenden Kegel ergibt, wenn die Durchmesser der Grundkreise NY, PR, mit $2r$ bzw. $2r'$, die zugehörigen Höhen der Kegel GNY, GPR mit h und h', bezeichnet werden

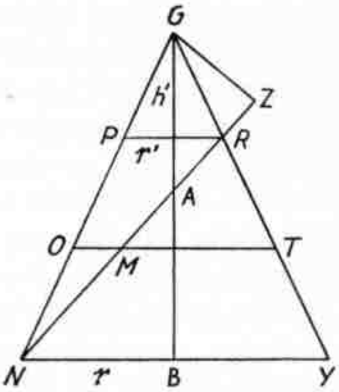


Fig. 5

$$\text{Kegel GOT} = \frac{\pi}{3}\,\frac{(r + r')^2 (h + h')}{8}$$

$$\text{Kegel GNR} = \frac{\pi}{3}\, h' r \sqrt{2 r r'},$$

also keinesfalls Gleichheit.

Mit der Vermutung wird auch der zweite Teil von Coroll. II zu Theor. XVII hinfällig, weil er die Gültigkeit der Vermutung voraussetzt.

31.29. Diese Rechenvorschrift widerspricht der vorausgehenden, richtigen Begründung. Das Verhältnis des Segmentes GNR zum Kegel GNY ist dasselbe wie das des Produktes der Ellipse NR in die Höhe GZ zu dem Produkt der Kreisfläche NY in die Höhe GB. Nur so ergibt sich die Richtigkeit des folgenden Satzes:

$$\text{Kegel GPR} : \text{Kegel GNY} = r'^3 : r^3 = h'^3 : h^3 = F'^{3/2} : F^{3/2}.$$

32.15. In den zwei vorhergehenden Abschnitten hat Kepler für das Verhältnis eines Kegels vom Grundkreishalbmesser R zu dem von ihm abgeschnittenen geraden Kegelstumpf mit dem kleineren Grundkreishalbmesser r die Beziehung $R^3 : (R^3 - r^3)$ aufgestellt. *Clavius* hat dagegen in „Geometria Practica" V, 3, 3 die Gleichung

$$\text{Gerader Kegelstumpf} = \frac{h}{3}\left(G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2\right) = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right).$$

Die Clavius'sche Lösung sei „geistreicher", rechnerisch jedoch komplizierter als seine eigene, bemerkt Kepler. Der vielfachen Anwendung des Kegelstumpfs in der Faßrechnung wegen gibt er noch eine dritte Form, „ein prachtvolles Theorem und eine höchst erwünschte Arbeitsersparnis". Er denkt sich den Kegelstumpf aufgeteilt in den Zylinder über dem kleineren Grundkreis und die darumliegende Tunica und findet für deren Verhältnis

$$\text{Tunica} : \text{Zylinder} = [(R + 2r) \cdot (R - r)] : 3r^2.$$

33.35. Strictum = annulus strictus ist der geschlossene Ring, der durch Rotation des Kreises um eine seiner Tangenten entsteht. Er ist, wie sich im „Supplementum“ zeigen wird, inhaltsgleich mit dem Zylinderhuf, der von dem Zylinder über dem rotierenden Kreis mit der Höhe $2d\pi$ (d der Durchmesser des Kreises) durch eine Ebene abgeschnitten wird, welche beide Grundkreise berührt. Dagegen ist das Kugelvolumen nicht dem halben Zylinder gleichzusetzen, sondern dem Huf über dem Halbkreis von der Höhe $2r\pi$, der sich zum Halbzylinder verhält wie 4 zu 3π.

Archimedes hatte, wie schon im Nachbericht gesagt wurde, in umständlicher, indirekter Weise das Volumen des über dem Halbkreis vom Durchmesser d stehenden Hufs von der Höhe d zu $\frac{d^3}{6} = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{d^3\pi}{8}$ berechnet, wo $\frac{d^3\pi}{8}$ der halbe Zylinder von der Höhe d und dem Halbmesser $\frac{d}{2}$ ist. Die Entdeckung Keplers, daß ein Zylinderhuf von bestimmter Höhe als Volumen eines Rotationskörpers aufgefaßt werden kann, gibt der Berechnung von Zylinderhufen eine neue Grundlage. Ohne weiteres ist danach klar: Wenn der volle Rotationskörper zu dem Huf von der Höhe h gehört, so entspricht der Huf von der Höhe $h' < h$ einem Sektor des Rotationskörpers von solchem Öffnungswinkel α, daß $h' : h = \alpha : 2\pi$ wird. Es folgt daraus die Proportionalität der Hufe über derselben Grundfläche mit ihren Höhen. Besonders fruchtbar wird aber die Beziehung, wenn für das Volumen des Rotationskörpers die Guldinsche Regel herangezogen wird. Läßt man die zu DB symmetrische Figur ABC um AC rotieren, ist Σ der Schwerpunkt ihrer Fläche, $D\Sigma = \eta$, $DB = s$, die Fläche f, V das Volumen des Rotationskörpers, Z das des Zylinders, der mit dem Huf H gleiche Grundfläche und Höhe hat, so wird $V = 2\pi\eta \cdot f = H$, $Z = 2\pi s \cdot f$, $H : Z = \eta : s$. Diese Beziehung gilt für jeden Zylinder und den Huf gleicher Grundfläche und Höhe. Ist also ABC ein Halbkreis vom Halbmesser r, $\eta = \frac{4r}{3\pi}$, $s = r$, so ist $H : Z = 4 : 3\pi$, also $H : 2Z = 2 : 3\pi$ (= 14 : 66).

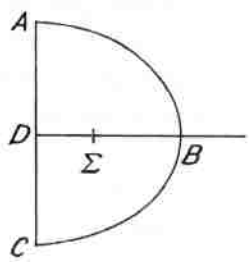


Fig. 6

34.23. Von den zwei „medietates arithmeticae“ $\frac{a+2b}{3}$ und $\frac{2a+b}{3}$ ist mehrfach die Rede, so Theor. VII, Coroll. III in Teil 2. Der Zweifel *Wieleitners* an dieser Erklärung (Kepler-Festschrift S. 303, Anm. 42) ist unbegründet und führt ihn selbst in die Irre.

35.7. Errichtet man über jeder der beiden Grundflächen des Kegelstumpfs den Zylinder bis zur andern, so wird der Limbus zwischen den Mantelflächen der Zylinder durch den Mantel des Stumpfs in zwei ringförmige Teile zerlegt, deren innerer „Tunica“ genannt wurde (Theor. XVI), während der äußere „Restlimbus“ („Residuum Limbi“) heißt. Von ihnen beweist Kepler S. 34/35, wenn man die Durchmesser der Grundkreise mit D bzw. d bezeichnet:

$$\text{Tunica} : \text{Restlimbus} = \frac{D+2d}{3} : \frac{2D+d}{3}.$$

Nach Theor. XVI ist aber

$$\text{Tunica: kleinerem Zylinder} = \frac{(D + 2d)(D - d)}{3} : d^2, \text{ also}$$

kleinerer Zylinder : Tunica : Restlimbus : größerem Zylinder =

$$d^2 : \frac{(D + 2d)(D - d)}{3} : \frac{(2D + d)(D - d)}{3} : D^2.$$

Nach dieser Proportion geht die erste Rechnung vor sich; lediglich, um ganze Zahlen zu bekommen, werden D und d durch $D' = 3D$, $d' = 3d$ ersetzt. In der zweiten Rechnung wird mit der Beziehung

$$Dd + \frac{(D - d)^2}{3} = \frac{1}{3}(D^2 + Dd + d^2)$$

gearbeitet. Damit wird

$$\text{Stumpf: kleinerem Zylinder} = \left[Dd + \frac{(D - d)^2}{3}\right] : d^2.$$

37.16. Ausführlicher hat Kepler seine Kegelschnittlehre anhand derselben Figur in der „Astronomiae Pars Optica" (Bd. II, S. 90–93) dargelegt.

46.34. Die Klassifizierung der Rotationskörper von Kegelschnitten nach Lage und Richtung der Rotationsachse zeitigt erst allmählich die große Zahl von 92 Körpern. Bei den Pulkowoer Mss. (V, 44v) hat sich der Entwurf eines Schemas erhalten, das außer mit den 5 verschiedenen Lagen der Rotationsachse entsprechend den 5 Fällen beim Kreis (vgl. Fig. XI, S. 39) nur mit den Richtungen „parallel zur Hauptachse", „parallel zur Nebenachse", „schief gegen beide" als Merkmalen arbeitet und mit Hinzunahme des doppelten Kegels auf insgesamt 31 Körper kommt:

„Figurae"

1. Annulus	2. Annulus arduus	3. Annulus pressus	4. Annulus connivens	
5. Strictus	6. Strictus arduus	7. Strictus pressus	8. Strictus connivens	
9. Malum	10. Sydonium 11. Aetna parabolica 12. Aetna hyperbolica	13. Malum pressum	14. Pyrum cavum	
15. Globus	16. Sphaeroides longum 19. Conoides parabolicum rectum 20. Conoides hyperbolicum rectum	17. Sphaeroides latum	18. Pyrum plenum	
21. Nux	22. Prunum longum 25. Cornu rectum parabolicum 26. Cornu rectum hyperbolicum	23. Prunum pressum 27. Conoides parabolicum circulare 28. Conoides hyperbolicum circulare	24. Pyrum acutum 29. Fusum parabolicum 30. Fusum hyperbolicum	27. Conus duplex
5	11	7	7	1

Eine sofort daran anschließende Notiz, die leider nicht mehr vollständig ist, kommt schon mindestens auf die Zahl 37.

Die Nummer 27 tritt in dem wiedergegebenen Schema versehentlich doppelt auf. Bei der Benennung fällt vor allem auf, daß das Citrium als Nux erscheint, während es noch kurz vorher Pepo (Melone) heißt.

Die Klassifizierung nach der Lage der Rotationsachse übernimmt *Guldin* (lib. II, Cap. 8, Prop. 1) von Kepler, ohne seinen Namen zu nennen. Später (lib. IV, pag. 328) bemerkt er, die Typenlehre Keplers sei es „wirklich wert, von jedem der Geometrie Beflissenen gelesen und wohl beachtet zu werden". Ihm selbst, meint er, habe bei seinem Alter Vorstellungskraft und Gedächtnis nicht mehr ausgereicht für so viele Unterscheidungen und Namen. Er habe deshalb das Kapitel nur oberflächlich durchgelesen.

47.13. Da Kepler die Gültigkeit des Theorems ausdrücklich auf alle Mittelpunktsfiguren ausdehnt, so fordert er *Guldin* geradezu zu einem Vergleich heraus. Dieser benützt denn auch die Gelegenheit, auf die klare Lösung in seiner Theorie aufmerksam zu machen. Ganz sachlich stellt er fest: „Nichts fehlte Kepler wahrlich zu meiner Art der Berechnung als der Begriff des Rotationsweges". Zum Widerspruch fordert ihn die Bemerkung Keplers heraus (S. 47, Z. 18/19), der Beweis könne aus den Archimedischen Prinzipien der Stereometrie als Elementen geführt werden, indem er meint: „Die Überlegung mit den Kreisscheibchen riecht nicht nach Archimedischen Prinzipien".

Dieses und die nachfolgenden Theoreme XIX bis XXI sind Gegenstand der Dissertation „Kepleri Methodus solida quaedam sua dimetiendi illustrata et cum Methodis Geometrarum posteriorum comparata" von *Chr. Pfleiderer*, Tübingen 1795. Der vollständige Text Keplers wird darin analytisch kommentiert.

49.15. Die überraschende Zerlegungsgleichheit des Apfels und des Zylinderhufs läßt sich unter Zuhilfenahme der Guldinschen Regel analytisch leicht bestätigen. Sei in der Figur 7 r der Halbmesser, $F = r^2\pi$ die Fläche des Kreises, $p < r$ die Höhe, s die halbe Sehne des wegfallenden Segmentes, f seine Fläche und η der um $2(r - p)$ vergrößerte Abstand seines Schwerpunktes von der Rotationsachse AB, dann wird das Volumen V_A des Apfels $V_A = 2(r - p)\pi \cdot (F - 2f) + 2\eta\pi \cdot f$. Da aber (nach Anm. 62.11) $\eta = (r - p) + \frac{2}{3}\frac{s^3}{f}$, so kommt

$$V_A = 2(r - p)\pi(F - 2f) + \frac{4}{3}s^3\pi + 2(r - p)\pi \cdot f.$$

Das ist aber genau die Zerlegung des Hufs in die drei Keplerschen Bestandteile, denn $\frac{4}{3}s^3\pi = 2[\eta - (r - p)]\pi \cdot f$ ist der Inhalt der Kugelzone, die bei Umdrehung des Segmentes f um den zur Sehne s parallelen Durchmesser entsteht. Jeder der drei Teile ist elementar berechenbar.

Den Umweg über den Zylinderhuf wählt Kepler nur deshalb, weil ihm die analytischen Hilfsmittel fehlen, um sein Schalenmodell (vgl. S. 444) direkt

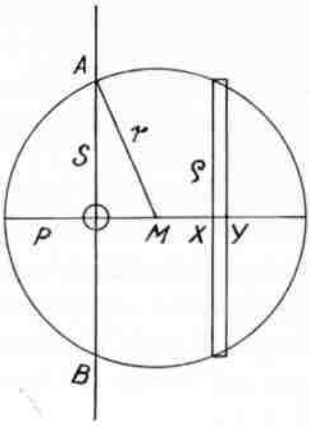


Fig. 7

auszuwerten. In Wirklichkeit schwebt ihm aber ein echter Integrationsprozeß vor, der für uns leicht vollziehbar ist.

AB und der dazu senkrechte Durchmesser OM sollen nun als Koordinatenachsen dienen. Grundsätzlich wird jetzt das rechts von AB liegende Kreissegment als rotierend gedacht; es ist also $p = 0$ der geschlossene Kreisring, $0 < p < r$ ein Apfel, $p = r$ die Kugel, $r < p < 2r$ eine Zitrone. Die im Meridianschnitt durch den Streifen XY senkrecht zu OM angedeutete Zylinderschale, deren Wände die Halbmesser $OX = x$, $OY = x + dx$ haben sollen, während ihre Höhe 2ρ ist, $\rho^2 = (p + x)(2r - p - x)$, hat das Volumen $[(x + dx)^2 - x^2] \cdot 2\rho\pi = 4\rho x\pi \cdot dx$. Das Volumen des Umdrehungskörpers wird daher

$$V = 4\pi \cdot \int_0^{2r-p} \rho x \, dx.$$

Nach geeigneten Umformungen wird daraus

$$V = \frac{2\pi}{3}\left[p(r + p)\, s + 3r(r - p)\left(s + 2r \operatorname{arctg} \frac{s}{p}\right)\right],$$

oder, wenn p und s durch r ausgedrückt werden, in der Form $p = mr$, $s = nr$,

$$V = \frac{2r^3\pi}{3}\left[m(1 + m) \cdot n + 3(1 - m)\left(n + 2 \operatorname{arctg} \frac{n}{m}\right)\right].$$

Diese Formeln gelten für Apfel und Zitrone mit Einschluß des geschlossenen Ringes, nichts scheint jedoch darin auf die Zerlegungsgleichheit mit einem Zylinderhuf, der die rotierende Figur zur Grundfläche, den größten Kreis des Rotationskörpers zur Höhe hat, hinzudeuten. Da indes diese Gleichheit aus Theor. XX hervorgeht, so sind die beiden Formeln zugleich Ausdruck für den Inhalt des besagten Zylinderhufs von der Höhe $h = 2(2r - p)\pi = \frac{2s}{p}\pi$. Das Volumen V' des Hufs von der Höhe h' über derselben Grundfläche wird dann nach Theor. XVII

$$V' = \frac{h'}{h} \cdot V = \frac{h'p}{2s\pi} \cdot V.$$

Nehmen wir als Zahlenbeispiel mit Kepler (S. 57 ff.) $s = 13{,}5$, $p = 121{,}5$, woraus $r = 61{,}5$, so ergibt sich als Inhalt der Zitrone $V = \frac{2r^3\pi}{3} \cdot 0{,}000242$, also mit $r = 61{,}5$ $V = 118$.

Mit seiner Integration durch Transformation fand Kepler keinen Anklang bei seinen Zeitgenossen. Jedenfalls erheben sich Stimmen dagegen, keine dafür. Der Wortführer der Opposition ist *Alexander Anderson*, der bedeutende Schüler von François Viète und Herausgeber von dessen Werken. In der kleinen Schrift „Vindiciae Archimedis" (vgl. Anm. 15.13) wendet er sich wie folgt an Kepler: „Es steht Dir nicht zu, Kepler, die erhabenen Manen des verehrungswürdigen Alten zu beleidigen, und unter Berufung auf Namen und Autorität des Archimedes im 20. Theorem Deines Supplements zur Archimedischen Stereometrie etwas, was noch gar nicht bewiesen ist, zum Beweis heranzuziehen. Als ob Archimedes jemals verlangt hätte, daß ein Kreis in ein Dreieck ausgewickelt werde, wozu Du Dich für berechtigt hältst, wenn Du Deine Äpfel in Zylindersegmente auswickelst. Welcher Verstand könnte derartige Metamorphosen fassen? Wohl hat Archimedes eine gerade Linie postuliert, die dem Umfang des Kreises gleich sein sollte (Eutokius sagt [„In dimensionem circuli", ed. Heiberg III, 230/31], niemand sei es zweifelhaft, daß es diese wirklich gebe), um schließlich zu beweisen, daß das aus dieser Strecke und dem Halbmesser als Katheten gebildete rechtwinklige Dreieck dem Kreis gleich sei. Mit demselben Recht soll Dir daher gestattet sein zu verlangen: Gegeben sei ein Zylindersegment, dessen Grundfläche gleich dem Kreisabschnitt ist, der durch seine Rotation den Apfel erzeugte und dessen größte Höhe der Umfang des größten Kreises auf der Oberfläche des Apfels ist, um endlich das Segment auf Grund des zugestandenen Postulates nach Archimedischer Methode als inhaltsgleich mit Deinem Apfel zu erweisen. Daß aber Archimedes nie etwas Ähnliches [wie Du] gedacht hat, das beweist das mühsame Ein- und Umbeschreiben von Polygonen dem Kreis, von Polyedern der Kugel. ... Wenn (nach Deiner Vorstellung) die Kugel in ein Zylindersegment ausgebreitet wird, dessen Basis gleich ist dem Halbkreis, aus dem die Kugel durch Rotation entsteht, die Höhe aber an der höchsten Stelle gleich dem Umfang des größten Kugelkreises, dann wird in ähnlicher Weise auch die Kugeloberfläche auf die Zylinderfläche ausgebreitet, von der [Archimedes] vorher gezeigt hatte, daß sie das Vierfache des größten Kugelkreises sei. Wenn dann ein derartiges Zylindersegment in Pyramiden aufgelöst wird, deren gemeinsame Spitze der Mittelpunkt des besagten Halbkreises sein soll, die Höhe sein Halbmesser, die Grundfläche aber die zylindrische Oberfläche des Segmentes selbst, dann wird folgen, daß dieses gleich wird dem Kegel, dessen Basis gleich ist der zylindrischen Oberfläche, d. h. dem Vierfachen des größten Kugelkreises, die Höhe aber gleich dem Halbmesser ebendesselben größten Kreises. Aber dasselbe hat Archimedes auf weit mühevollerem Weg und mit wissenschaftlicheren Prinzipien verfolgt, als Deine Verwandlung von Figuren ineinander eines ist. Deshalb ist die von Dir verwendete Transformation Archimedischem Geist fremd."

Diese scharfe Kritik Andersons, die sich gegen die Theoreme II, XI und XX wendet, als ob Kepler dem der Kreisfläche gleichen rechtwinkligen Dreieck wirkliche und nicht nur gedankliche Existenz zubilligen würde, die auch von einer irrigen Vorstellung über die Oberfläche des Zylinderhufs ausgeht, wiederholt *Guldin* (lib. IV, pag. 330/31) im vollen Wortlaut, jedoch mit dem Vorbehalt: „Wenn auch Kepler von Anderson mit Recht getadelt wird im Sinn von Archimedes, der seine Beweise keineswegs auf solche Art und mit solchen Mitteln angestellt hat, sondern nach unverfälschten geometrischen Gesetzen vorging, direkt oder indirekt, um auch Kepler etwas zuzugestehen, so ist diese neue Erfindung Keplers deshalb doch nicht ganz zu verachten oder seine Umwandlung der Körper gering zu schätzen. Denn, um bei diesem Theorem und seinem Beweis zu bleiben: man darf Kepler seinen Ruhm nicht nehmen; durch diese seine Metamorphose bestätigt er nicht nur, daß ein bestimmter Zylinderhuf dem Apfel bzw. einem apfelähnlichen Körper gleich sein könne, sondern macht auch nähere Angaben, wie dieser Huf beschaffen sei. Freilich führt er den Beweis nicht so, daß er sofort von allen angenommen werden könnte. Es tauchen da nämlich mehrere Schwierigkeiten auf, die ich hier nicht erörtern will. Er ermittelt jedoch für den Apfel ein praktisches Verfahren der Berechnung, das der Wahrheit nicht im geringsten abträglich zu sein, den richtigen Zahlen vielmehr so gut als möglich zu entsprechen scheint." Etwas später fügt er hinzu: „Wieviele werden es wohl sein, die, völlig an die üblichen Archimedischen und Euklidischen Beweise gewöhnt, beim Lesen des 20. Theorems von Kepler die Methode dieser Transformation begreifen, besonders, da der Gegenstand zu dunkel vorgetragen wird? Ich jedenfalls wollte mir nicht, wie man zu sagen pflegt, Kopf oder Hirn zerbrechen, um tiefer darin einzudringen." Guldin billigt nämlich Keplers Methode, genau so wie dem Cavalierischen Prinzip, nur heuristischen Wert, aber keine Beweiskraft zu.

Hier ist schließlich zu bemerken, daß die Erklärung *Wieleitners* zu Theor. XX (Kepler-Festschrift S. 290–292) zu Mißverständnissen Anlaß geben könnte. Zunächst ist von der Vorstellung der Verzerrung der Apfelsektoren in die Hufform bei Kepler nicht die Rede; der Aufbau des Hufs geschieht vielmehr aus dem Schalenmodell heraus. Sodann muß Wieleitners „wörtliche" Übersetzung des Textes des Theorems korrigiert werden. „Zona mali" und „Zona globi", „Apfelgürtel" und „Kugelgürtel" sind in Keplers Figur XIV (S. 50) die Bestandteile von Apfel und Kugel, die von dem Segment IKD herrühren, im ersten Fall durch Rotation um MN, im zweiten Fall um den dazu parallelen Kreisdurchmesser. Im Zylinderhuf erscheint der Apfelgürtel als der rechts von der Ebene IKL gelegene Huf IKDSL, der Kugelgürtel als Huf VTSL. Der transformierte Apfelgürtel setzt sich also zusammen aus dem reinen Zylinder IKDTV und dem Huf VTSL, welch letzterer mit dem Kugelgürtel inhaltsgleich ist; die Höhe $OV = FG$ des Zylinders ist $2\pi \cdot (AF)$, der Rotationsweg des Mittelpunktes F. Das Theorem lautet nun wörtlich und richtig so: „Der Apfelgürtel setzt sich zusammen aus dem Kugelgürtel und dem geraden Segment des Zylinders, dessen Grundfläche das [Kreis]segment ist, das an der den Apfel erzeugenden Figur fehlt, während seine Höhe gleich ist dem Kreis, den der Mittelpunkt des größeren [Kreis]segmentes beschreibt." Wieleitner dagegen übersetzt: „Die Zone des Apfelwulstes setzt sich zusammen aus einer Zona globi und dem Segment eines geraden Zylinders, dessen Basis das Segment ist, welches in der Figur, die den Apfelwulst erzeugt, fehlt, dessen Höhe gleich ist dem Kreis, den das Zentrum des größeren Segmentes beschreibt."

51.21. Für die Inhalte von Quitte (cotoneum) und Kürbis (cucurbita) gibt *Pfleiderer* l. c. pag. 16 die Formeln:

$$\text{Quitte} = 2(b-h)\pi\cdot(E-S)+\frac{4}{3}\frac{b^2}{a^2}\rho^3\pi,$$

$$\text{Kürbis} = 2\rho\pi(E-S')+\frac{4}{3}\frac{a^2(b-h)^3}{b^2}\pi.$$

Darin bedeuten a und b die halben Achsen der Ellipse, E deren Fläche, ρ die halbe Sehne, h die Höhe des Ellipsensegmentes von der Fläche S; $(b-h)$ die halbe Sehne und $(a-\rho)$ die Höhe des anderen Segmentes vom Flächeninhalt S'.

51.29. Das Theorem liest man unmittelbar an Fig. XIV ab. Analytisch wird (in Übereinstimmung mit Pfleiderer l. c. pag. 18)

$$V_e = \frac{4}{3}s^3\pi - 2(r-p)\pi\cdot f,$$

wobei die Buchstaben dieselbe Bedeutung haben wie in Anm. 49.15. Verwendet man die daselbst durch Integration gewonnene Inhaltsformel, dann ist zu beachten, daß wegen $p > r$ das zweite Glied in der eckigen Klammer negatives Vorzeichen erhält.

52.18. Die Berechnung dieser beiden Körper hat *Pfleiderer* l. c. pag. 18/19.

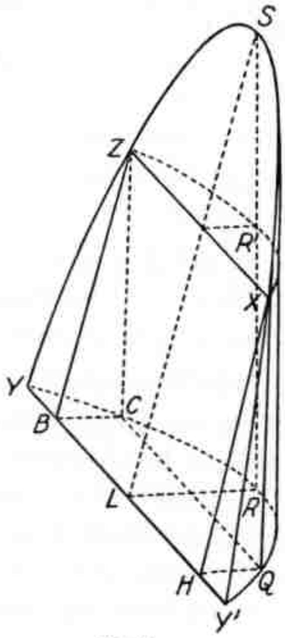


Fig. 8

52.22. Inhalt und Beweis dieses Theorems werden deutlicher, wenn die Nebenfigur Keplers zu Fig. XIV räumlich herausgezeichnet wird. An dem der Zitrone inhaltsgleichen Zylinderhuf SYY'R entsprechen ZYBC und XHY'Q den abgeschnittenen Spitzen; BCZXHQ dem Zylinder in der Zitrone, der die Schnittflächen der Spitzen zu Grundflächen hat; SRCQXZ der Zone (Gürtel) der Zitrone, die durch Rotation von CQR um BH erzeugt wird; SZXR' schließlich der „kleinen Zitrone". Den geometrischen Beweis von Theorem XXII liest man nun unmittelbar von der Figur ab.

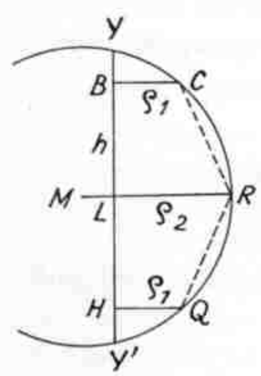


Fig. 9

54.32. In der nebenstehenden Figur sei der Halbmesser des Kreises r, $BC = HQ = \rho_1$, $LR = \rho_2$, $BL = h$. Das gekappte Citrium entsteht durch Rotation von BCRQHL um die Gerade YY'. Es ist nun $(CR)^2 = 2r(\rho_2-\rho_1) = h^2+(\rho_2-\rho_1)^2$, also

$$2r = \frac{h^2}{\rho_2-\rho_1}+(\rho_2-\rho_1)$$

und

$$\frac{2r}{\rho_2-\rho_1} = \frac{h^2+(\rho_2-\rho_1)^2}{(\rho_2-\rho_1)^2}.$$

Bezeichnet man den Winkel CMR mit α, so wird

$$\cos\alpha = \frac{r-(\rho_2-\rho_1)}{r} \qquad 1-\cos\alpha = \frac{\rho_2-\rho_1}{r} = \frac{2(\rho_2-\rho_1)^2}{h^2+(\rho_2-\rho_1)^2},$$

daher

$$\frac{2r}{\rho_2-\rho_1} = \frac{2r}{r(1-\cos\alpha)} = \frac{2r}{r-\sqrt{r^2-h^2}}.$$

Die letzte Beziehung kann es nur sein, die Kepler mit dem Ausdruck „numerus 200000 ad diametros intervallumque Truncantium" meint, wenn darin auch ρ_1 fehlt.

Die nachfolgende Angabe über den Gang der Rechnung ist klar, nur bedarf die Bemerkung, daß die „kleine Zitrone" mit Hilfe von Kugelzone und Apfelzone gefunden werde, der Korrektur dahin, daß

„kleine Zitrone" = Zone der „großen Zitrone" — gerades Zylindersegment

wird, wobei letzteres freilich die Differenz von Apfelzone und Kugelzone ist.

Für die drei beiderseits gekappten Körper Zitrone, Olive und „Prunum crassum" gibt *Pfleiderer* die Volumenberechnung S. 21/22. Bei der Zitrone ist sein Ergebnis $V = 2\rho_1^2 h\pi + \frac{4}{3}h^3\pi - 2(r-\rho_2)\pi\cdot\sigma$, wobei σ die Fläche des Kreissegmentes bedeutet, über dem die „kleine Zitrone" steht. Darin ist der erste Term der Zylinder, der durch Umdrehung von BCQH um BH entsteht. Der zweite ist nach Anm. 49.15 das Volumen der Kugelzone, entstanden durch Rotation von σ um den zur Sehne parallelen Kreisdurchmesser. Diese Zone ist um das Zylindersegment von der Höhe $2(r-\rho_2)\pi$ zu groß; dieses wird deshalb durch den dritten Term wieder abgezogen. Diese Zerlegung des Zylinderhufs stimmt mit der Keplerschen nicht überein.

56.21. Setzt man links in die 3 Produkte

$$V_1 = (\mathrm{KPO})\cdot\left(\frac{\mathrm{PA}}{3}+\frac{2}{3}\mathrm{CO}\right) \qquad V_1' = \frac{\mathrm{PO}}{2}\left(\frac{\mathrm{PM}}{3}+\frac{2}{3}\mathrm{ON}\right)$$
$$V_1'' = \mathrm{PO}\cdot(\mathrm{PM}+2\,\mathrm{ON})$$

und ebenso rechts in

$$V_2 = (\mathrm{KOXV})\cdot\frac{\mathrm{OC}}{2} \qquad V_2' = \mathrm{OX}\cdot\frac{\mathrm{ON}}{2} \qquad V_2'' = \mathrm{ON}\cdot(\mathrm{ON}+\mathrm{NX})$$

ihre Werte ein, so ergibt sich

$$V_1:V_1':V_1'' = V_2:V_2':V_2'' = \pi h:1:6.$$

Das Verhältnis von Tunica zu Zylinder ist also

$$V_T:V_Z = V_1'':V_2'' = (D-d)\cdot(D+2d):3d^2 = (D^2+Dd-2d^2):3d^2,$$

also das von Kegelstumpf zu Zylinder

$$(V_T+V_Z):V_Z = (D^2+D\,d+d^2):3d^2.$$

57.2. Als Beispiel rechnet Kepler den Inhalt eines Fasses, dessen Durchmesser am Boden 19, am Bauch 22 mißt und das die Länge 27 hat, und zwar zunächst als Zitronenstumpf nach Theor. XXII, sodann zum Vergleich als doppelten Kegelstumpf. Zur Vermeidung von Dezimalbrüchen verdoppelt er von Anfang an die Abmessungen des Fasses und geht in der Folge sofort, mit Rücksicht auf die ihm zur Verfügung stehenden Tafeln, zum Halbmesser $r = 10^5$ über, indem er das gegebene Faß im Verhältnis $r':r = 10^5:61{,}5$ bzw. $10^5:123$ vergrößert. Die großen Zahlen, die dieser Übergang zur Folge hat, sind indes eine Quelle von Rechenfehlern, die sich zu einem wesentlich falschen Resultat summieren. Für die „kleine Zitrone" errechnet Kepler (S. 58, Z. 39) die Zahl 36 49277 54945, während die Inhaltsformel von Anm. 49.15 mit $r = 10^5$ $V = \frac{2\pi}{3} \cdot 10^{15} \cdot 0{,}000242 = 506844000000$ ergibt.

Bemerkenswert ist in der Schreibung der großen Zahlen die Bildung von Gruppen zu je 5 Ziffern. Das ganze Rechenexempel zeigt eindringlich die Schwierigkeiten, mit denen Kepler zu ringen hat, da ihm weder die Zeichensprache der Algebra noch das Hilfsmittel der Logarithmen zur Verfügung steht.

61.31. An diesem Theorem bemängelt *Guldin* (lib. IV, pag. 333) Keplers Terminologie. Nach seiner Meinung müßten an Stelle des Ausdrucks „Sphaeroides longum inscriptum lato" die Begriffe „Figura contenta" und „Figura continens" verwendet werden. Er gibt auch den Beweis des Theorems nach seiner eigenen Theorie. Ist S_b der Inhalt des durch Rotation um die kurze Achse der Ellipse entstehenden breiten Sphäroids, S_a der des langen, so wird $S_b : S_a = \frac{4}{3} a^2 b\pi : \frac{4}{3} a\, b^2\pi = a:b$. Keplers Beweis benützt die einbeschriebenen Kegel.

62.6. *Archimedes*, De Conoid. et Sphaeroid. Prop. 27.28 (Heiberg I, 392–409).

62.11. Wäre dieses Theorem richtig, dann müßte es auf alle Fälle lauten: „Segmentum globi ad dimidium Citrium", wie es S. 63 bei dem Beispiel auch heißt. Aber auch so stimmt Keplers Vermutung – als das stellt er den Satz hin – nicht, daß sich das bei Rotation eines Kreissegmentes um seine Höhe h entstehende Kugelsegment S zu der durch Umdrehung um die Sehne von der Länge 2ρ entstehenden halben Zitrone $\frac{1}{2}C$ verhalte wie $\rho : h$. Beide Fehler bemerkt Guldin, dem die Richtigstellung geradezu ein Vergnügen bereitet, da der Satz für seine Schwerpunktsmethode wie geschaffen erscheint. Als letztes seiner Argumente hatte Kepler „die Rechnung und das Zeugnis der Zahlen" angeführt. An dieser Stelle hakt *Guldin* ein (lib. IV, pag. 333–336): „Kepler sagt, ‚den schulgerechten Beweis sollen andere suchen'. Aber wer wird suchen, was man nicht finden kann? Da also Kepler an die Zahlen appelliert, so darf auch ich sie zu Hilfe rufen." Das Beispiel, das er nun im einzelnen mit $r = 10^7$ durchrechnet, ist nicht das Keplersche, hat vielmehr Zahlen, die für die Schwerpunktsberechnung bequemer sind, er schließt seine Rechnung aber mit den Worten: „... Keplers Entdeckung fällt also mitsamt seinen 4 Argumenten in sich zusammen. Das bedaure ich, denn auch mir hätte dieser Keplersche Satz viel zu meinem Ziel geholfen, wenn er richtig gewesen wäre; denn mit seiner Hilfe hätte ich die Rotationsradien [Abstände der Schwerpunkte von der Rotationsachse], die, wie wir gesehen haben, mühsam in Zahlen zu ermitteln sind, sehr leicht angeben können." In einem eigenen Scholion nimmt Guldin die 4 Argumente Keplers nochmals vor, um sie einzeln zu entkräften, und schließt (pag. 338): „Ich komme also zu dem Schluß, daß dieses Theorem Keplers keinen Bestand hat, daß also sein ‚Supplement zur Stereometrie des Archimedes' nicht alle Lücken füllt und daß seiner Transformation der Körper, die bislang noch recht wenige verstehen, mein Verfahren der Schwerpunktsrotation, das mit einer reineren Geometrie nicht in Konflikt gerät, vorzuziehen sei."

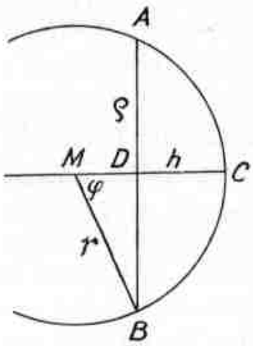


Fig. 10

Zum analytischen Nachweis der Ungültigkeit des Theor. XXV sei in der Figur ABC das Kreissegment, seine Fläche $\sigma = r^2\varphi - \rho\,(r - h)$, dann ist der Abstand η seines Schwerpunktes von D

$$\eta = \frac{2}{3}\,\frac{\rho^3}{r^2\varphi - \rho\,(r-h)} - (r-h) = \frac{2}{3}\,\frac{\rho^3}{\sigma} - (r-h)\,,$$

der Abstand ξ des Schwerpunktes des halben Segmentes DCB von DC

$$\xi = \frac{1}{3}\cdot\frac{h^2\,(3\,r - h)}{r^2\,\varphi - \rho\,(r-h)} = \frac{1}{3}\,\frac{h^2\,(3\,r-h)}{\sigma}\,.$$

Da nun der Inhalt des Kugelsegmentes S

$$S = 2\pi\,\xi\cdot\frac{\sigma}{2} = \pi\,\xi\,\sigma = \frac{\pi\,h^2}{3}\,(3r - h)\,,$$

der der Zitrone C

$$C = 2\pi\,\eta\cdot\sigma = \frac{4\,\rho^3\,\pi}{3} - 2\,(r-h)\,\pi\,\sigma$$

wird, so ist

$$S : \frac{1}{2}\,C = \xi : \eta = \frac{h^2\,(3\,r-h)}{2\,\rho^3 - 3\,(r-h)\,\sigma}\,.$$

Nach Keplers Vermutung wäre $S : \frac{1}{2}C = \rho : h$, also $\xi : \eta = \rho : h$, was ganz offenkundig unrichtig ist, wenn nicht $h = \rho = r$.

63.12. In dem Zahlenbeispiel $h = 3$, $\rho = 27$, $r = 123$, $\varphi = 0{,}2213056$ wird

$$\xi : \eta = 203 : 27,\ \rho : h = 9 : 1,\ \text{also}\ \frac{\rho}{h} - \frac{\xi}{\eta} = \frac{40}{27},$$

$$\text{d. h.}\ \ S : \frac{1}{2}\,C = \xi : \eta < \rho : h.$$

Auf Grund der S. 57–59 durchgeführten Rechnung findet Kepler $S : \frac{1}{2} C \approx 185 : 18$ und glaubt, was völlig unmöglich ist, die Abweichung von dem Verhältnis $\rho : h = 9 : 1$ darin suchen zu sollen, daß er $\sin \varphi$ um weniger als eine Einheit der letzten Stelle zu klein angenommen habe. In Wirklichkeit spielen hier die wesentlich falschen Zahlen aus dem „Exemplum" eine verhängnisvolle Rolle. Mit den richtigen Zahlen hätte er die Unhaltbarkeit seiner These erkennen müssen. (Durch direkte Berechnung erhält man $S = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) = \frac{r^3 \pi}{3} \cdot 0{,}00177$, $C = \frac{2 r^3 \pi}{3} \cdot 0{,}000242$, also $S : \frac{1}{2} C = 1770 : 242 = 7{,}3$.)

64.3. Läßt man die Figur, in der FCG ein Ellipsen-, Parabel- oder Hyperbelbogen mit dem Scheitel C sein kann, einmal um $FG = 2a$, sodann um $OY = b$ rotieren, so müßte nach dem Wortlaut des Theorems, da das Verhältnis der entstehenden Kegel nach Satz XXIII gleich $b : a$ ist,

halbe Pflaume (Olive): Sphäroidsegment $\approx b : a$, und
halbe Spindel: Konoidsegment $\approx b : a$ sein.

Für Ellipse, Parabel und Hyperbel wird also eine ähnliche Behauptung aufgestellt wie in Theor. XXV für den Kreis, nur daß jetzt plötzlich die Höhe des Segmentes durch die Subtangente OY ersetzt wird. Das überrascht bei Kepler um so mehr, als gerade er die kontinuierlichen Zusammenhänge zwischen den Kegelschnittarten in den Vordergrund stellt. Der Satz ist tatsächlich unrichtig, wie sich am Beispiel der parabolischen Spindel am einfachsten zeigen läßt.

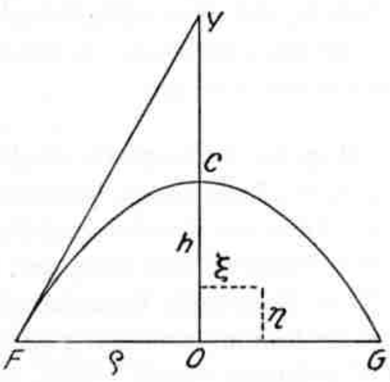


Fig. 11

In der Figur sollen $a = \rho$, h, ξ, η die Bedeutung von Anm. 62.11 behalten. Die Gleichung der Parabel, bezogen auf das von Sehne und Höhe gebildete Achsenkreuz, lautet

$$x^2 = \frac{\rho^2}{h}(h - y).$$

Für die Achsenabstände (ξ, η) der Schwerpunkte des ganzen und des halben Segments erhält man dann

$$\xi = \int_0^\rho xy\,dx : \int_0^\rho y\,dx = \frac{3}{8}\rho,$$

$$\eta = \int_0^h xy\,dy : \int_0^\rho y\,dx = \frac{2}{5}h,$$

$$f = \int_0^\rho y\,dx = \frac{2}{3}\rho h.$$

Es wird also

$$\text{halbe Spindel: Konoidsegment} = \pi\eta \cdot f : 2\pi\xi \cdot \frac{f}{2} = \eta : \xi = 16h : 15\rho.$$

Das wäre nahezu $h : \rho$, wie im vorausgehenden Theorem für die Zitrone angegeben wird, während jetzt durch den Übergang zur Tangente das ganz falsche Ergebnis

$$\text{halbe Spindel: Konoidsegment} \approx b : a = 2h : \rho = 16h : 8\rho$$

herauskommt, da ja bei der Parabel OC = CY ist.

Der zunächst unbegreifliche Übergang von der Sehne zur Tangente wird in etwa verständlich, wenn man das Ziel beachtet, auf das Kepler zusteuert. Er will nämlich Fässer verschiedener Krümmung miteinander vergleichen, wie die Fig. XVIII, S. 73 zeigt. Hält man dort die Punkte F, C, G fest, legt durch sie aber der Reihe nach den Kreis, Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln, dann würde, wenn nach Theor. XXV das Verhältnis von Höhe zu halber Sehne des Segmentes FCGO in jedem Fall Gültigkeit hätte, unabhängig von der Krümmung des Bogens FCG ein konstantes Verhältnis von Segment zu Zitrone bzw. Spindel resultieren. Um also das veränderliche Element hereinzubekommen, greift Kepler zur Subtangente OY als Ausweg.

Die Argumentation, die wieder nicht den Beweis ersetzen soll, krankt vor allem daran, daß Kepler statt mit präzisen Verhältniszahlen nur mit gleichsinnigen Änderungen von Verhältnissen operiert. Da schon die Voraussetzung falsch ist, daß diese anfänglich gleich waren (Theor. XXV), so trifft erst recht der Schluß nicht zu, daß sie infolge gleichsinniger Veränderung auch am Ende wieder gleich seien.

66.19. Im Widerspruch mit den Theoremen XXV und XXVI gibt Kepler in dieser „Analogie" zu bedenken, ob beim Kreissegment, d. h. den durch die zwei Arten von Rotation entstehenden Körpern, immer das Verhältnis der einbeschriebenen Kegel gelte, und ob bei allen anderen Körpern die Tangente FY das Maß für die Volumenverhältnisse gebe, oder ob aus Analogiegründen bei der Ellipse eine Größe zwischen OC und OY, bei der Hyperbel größer als OY gefunden werden müßte. Seine eigene Unsicherheit bezüglich der zwei Theoreme kommt darin deutlich zum Ausdruck.

67.21. Der Satz I, 37 in den „Conica" des *Apollonius* besagt folgendes: wird an eine Ellipse oder Hyperbel in einem Punkt B die Tangente gelegt, welche die Hauptachse FA in C schneidet, ist ferner CA die Subtangente, F der Mittelpunkt und S der Scheitel des Kegelschnitts, dann ist

1. $AF \times CF = (SF)^2$, was gleichbedeutend ist mit

FS : AS = FC : SC bei der Hyperbel,

FS : CS = FA : SA bei der Ellipse.

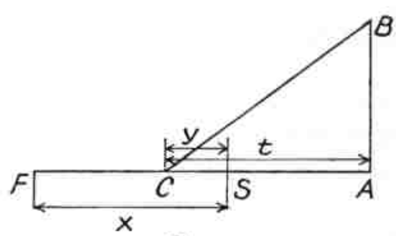


Fig. 12

2. (FA × CA) : $(AB)^2$ = latus transversum : latus rectum, in heutiger Bezeichnung (FA × CA) : $(AB)^2$ = a : p = $a^2 : b^2$, wobei p den Parameter, a und b die halben Achsen bedeuten.

Bezeichnet man FS = x, CS = y, CA = t, wobei $0 \leqq y \leqq t$, so findet die erste Aussage des Satzes ihren analytischen Ausdruck in der Gleichung

$$x = \frac{y \cdot (t-y)}{2y-t}.$$

Darin gehören die negativen Werte von x für $y < \frac{t}{2}$ den Hyperbeln, die positiven für $y > \frac{t}{2}$ den Ellipsen zu, während $y = \frac{t}{2}$, $x = \infty$ die Parabel anzeigt.

Den Apollonischen Satz kehrt Kepler um, indem er aus dem Bestehen der Proportionen unter 1. schließt, daß der Kegelschnitt eine Hyperbel oder Ellipse sei. Dabei fügt er zwischen Hyperbeln und Ellipsen die Parabel und zwischen die Ellipsen den Kreis ein, der CA in dem Punkt S schneidet und für den die Beziehung

CS : AS = BC : BA = m : n gilt, woraus

$$y = \frac{m}{m+n}\,t \qquad x = \frac{m \cdot n}{m^2 - n^2}\,t.$$

In der Figur XVII (S. 67) sind die Mittelpunkte der Hyperbel mit F, die der Ellipse mit D bezeichnet; speziell ist in der Figur D als Mittelpunkt des Kreises eingezeichnet.

68.13. Die vollständige Diskussion der bei festem Dreieck ABC mit BC als Tangente, B als Berührungspunkt und CA als Hauptachse, aber variablem y und x auftretenden Kegelschnitte würde beide Teile des Satzes I, 37 von *Apollonius* erfordern. Kepler begnügt sich indes mit dem ersten Teil, der zu einer qualitativen Beschreibung ausreicht. Er erhält in Übereinstimmung mit der Gleichung $x = \frac{y(t-y)}{2y-t}$

für $y = 0$	$x = 0$	das Geradenpaar durch S = F
$0 < y < \frac{t}{2}$	$x < 0$	Hyperbeln
$y = \frac{t}{2}$	$x = \infty$	Parabel
$\frac{t}{2} < y < \frac{m}{m+n}\,t$	$x > \frac{m \cdot n}{m^2-n^2}\,t$	Steilellipsen
$y = \frac{m}{m+n}\,t$	$x = \frac{m \cdot n}{m^2-n^2}\,t$	Kreis
$\frac{m}{m+n}\,t < y < t$	$x < \frac{m \cdot n}{m^2-n^2}\,t$	Flachellipsen
$y = t$	$x = 0$	die Doppelgerade AB.

Hervorgehoben sind in der Diskussion außerdem die Wertepaare $y = \frac{t}{3}$, $x = -\frac{2t}{3}$ und $y = \frac{2t}{3}$, $x = \frac{2t}{3}$, die CS = CF bzw. SA = AF bedeuten.

Die Gleichung des Systems der Kegelschnitte, die CA zur Symmetrieachse haben und BC in B berühren, stellt *Wieleitner* (Kepler-Festschrift S. 295f.) auf.

69.10. Die hier gestellte Aufgabe, das Kegelschnittbüschel zu charakterisieren, das eine gegebene Gerade im Punkt V berührt und außerdem durch zwei bezüglich der Senkrechten in V symmetrisch gelegene Punkte S_1 und S_2 geht, zielt direkt auf die Faßformen ab, wobei der Bogen S_1VS_2 Länge und Krümmung der Dauben wiedergibt. Es stehen deshalb nur solche Kegelschnitte zur Diskussion, bei denen die Berührung in V auf der Seite von S_1 und S_2 geschieht; die Hyperbeln, welche die Gerade in V auf der anderen Seite berühren, während der zweite Ast durch S_1 und S_2 geht, entfallen daher von vornherein, ebenso die Steilellipsen, die zwischen S_1 und V wie auch zwischen S_2 und V je noch einen Scheitel aufweisen. Beide Arten enthält aber die analytisch-geometrische Lösung, die diese Einschränkungen nicht berücksichtigt. Es ist deshalb nicht verwunderlich, wenn *Wieleitner* (Festschrift S. 296f.) auch auf solche Lösungen aufmerksam macht, ungerecht aber das Urteil, daß Kepler diese Dinge nicht gesehen habe. In Nr. 66 der „Messekunst", wo dasselbe Thema behandelt wird, werden die Steilellipsen ausdrücklich erwähnt. Unverständlich ist auch die Bemerkung über das Geradenpaar VS_1, VS_2, von dem Wieleitner wörtlich meint: „Er [Kepler] hat nicht bemerkt, daß die Grenze seiner Hyperbeln hier das Geradenpaar VS_1, VS_2 ist. Gesehen hat er das aber doch, da er es in der nächsten Nummer erwähnt."

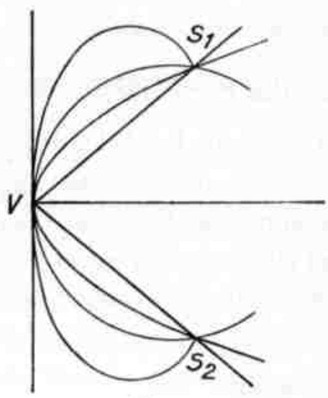


Fig. 13

69.15. *Apollonius* IV, 24 spricht aus, daß zwei Kegelschnitte identisch sein müssen, wenn sie ein endliches Bogenstück gemeinsam haben. IV, 26 besagt, daß zwei Kegelschnitte, die sich berühren, außerdem höchstens zwei Schnittpunkte haben können. IV, 27 schließlich, daß die Existenz zweier verschiedener Berührungspunkte die eines weiteren Schnittpunktes ausschließt.

70.20. In der nebenstehenden Figur, in der nur der Kreisbogen S_1VS_2 und das Geradenpaar VS_1, VS_2 eingetragen sind, ist die Figur $R_1S_1VS_2R_2$ um R_1R_2 rotiert zu denken. Wird zwischen Kreis und Geradenpaar nach Theor. XXVIII die Folge der Ellipsen, Parabel, Hyperbeln gelegt, die sich in V berühren, in S_1 und S_2 schneiden, zwischen V und S_1 bzw. S_2 aber keinen Punkt gemeinsam haben, so liegen die bei der Rotation entstehenden Körper schalenförmig ineinan-

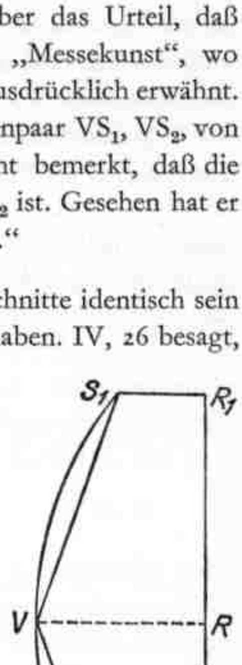


Fig. 14

der, und der umfassende Körper ist inhaltlich größer als der umfaßte. So gibt die Kegelschnittfolge zugleich die Größenfolge der Körper; der größte ist der Zitronenstumpf, der kleinste der doppelte Kegelstumpf. Es wird hier deutlich, daß der Kreis von Kepler mit Rücksicht auf das Faß als Grenze gewählt ist.

71.2. Die exakt-geometrische Lösung der Aufgabe, den Inhalt des durch eine Ebene parallel der Achse abgeschnittenen Segmentes einer beiderseits gekappten Zitrone usw., doliometrisch ausgedrückt: eines Fasses mit kreisförmiger, elliptischer, parabolischer oder hyperbolischer Wölbung der Dauben zu berechnen, kann weder Kepler noch dem dazu herausgeforderten Snellius gelingen. Eine praktisch ausreichende Näherungslösung aus dem Zitronenstumpf findet Kepler jedoch in Nr. 88 der „Messekunst", nachdem er im dritten Teil der „Stereometria" an einem doppelten Kegelstumpf das Ziel verfehlt hatte.

Mit diesem Theorem, dem Abschluß des 1. Teiles, schließt auch der kritische Kommentar *Guldins* zur „Stereometria" im 4. Buch von „De Centro Gravitatis". Nochmals versichert er die Sachlichkeit seiner Kritik: „In den weiteren Teilen, die auf das Supplement zur Stereometrie folgen, hat Kepler noch ausgezeichnete Partien, die ich hier nicht berührt habe, die aber der geometrischen Wissenschaft zu Ansehen verhelfen können. Sie möchte ich durch meine Äußerungen in keiner Weise herabgesetzt haben, und sie werden auch zu ihrer Zeit die Anerkennung finden. Das, was ich angeführt habe, da es direkt oder indirekt gegen meine Prinzipien verstößt, habe ich mit dem Recht gerügt oder gelobt, von dem andere gegen mich Gebrauch machen können."

73.22. In der „Geometria practica", lib. V, cap. 10 (Opera II, 1611, pag. 145) zieht *Clavius* zwei Arten von Fässern in Betracht: 1. Die Dauben in der Mitte kreisförmig gekrümmt, gegen die Enden aber gestreckt, so daß das halbe Faß als Kegelstumpf (conus decurtatus) verstanden werden kann. 2. Die Dauben „einigermaßen (‚aliquo modo') kreisförmig", sodaß das Faß „tanquam frustum quoddam Sphaeroidis" zu betrachten sei. Denn die Krümmung der Dauben werde nicht merklich von der eines Sphäroids abweichen. Danach behandelt er das Faß als beiderseits abgeschnittenes Sphäroid. Beide Berechnungsarten würden der Wahrheit nahekommen, meint er zum Schluß, fügt aber vorsichtig an: „Paratus tamen interim sum, si quis accuratiorem invenerit, eam libenti animo et grato acceptare." Kepler vertritt dagegen die Meinung, „daß nie ein Faß aus dem Bauch eines Archimedischen Sphäroids gebildet worden sei", und schlägt deshalb den langen Umweg ein, den *Henry Briggs* in seinem einzigen Brief an Kepler vom 20. Febr. 1625 (Bd. XVIII, S. 221) unverständlich findet: „Unter anderem habe ich im 26. Kap. [der „Arithmetica logarithmica", London 1624] eine neue Methode der Ausmessung unseres Fasses vorgetragen, die ich ohne Scheu der Archimedischen vorziehe, nicht weil ich sie für richtiger hielte, sondern weil ich dadurch mit weniger Umstand dasselbe genaue Ergebnis erzielen kann. Sieh, bitte, wenn Dir neben Deinen anderen größeren Arbeiten die Muße dazu bleibt, den Schluß von S. 74 bis zum Schluß des Kapitels an. Als ich mit der Veröffentlichung dieser Sache umging, nahm ich begierig Einblick in Dein Buch über das österreichische Faß und hatte so recht den Wunsch, Deine Art der Faßrechnung kennen zu lernen und mit meiner zu vergleichen. Was aber andere Bücher, die ich sehen konnte, beinahe in einem einzigen Kapitel abgemacht haben, das hast Du so breit ausgeführt und mit soviel neuen Wörtern und Definitionen belastet dargestellt, daß ich genötigt war, in der Eile nur einige andere Namen zu erwähnen, Deinen dagegen ganz zu unterdrücken. Das sage ich nicht, um zu tadeln, daß Du in dieser Sache so wortreich bist; alles ist nämlich meiner Meinung nach gut zu wissen und wohl wert, von den Geometern sorgfältiger studiert zu werden, sondern um mich bei Dir zu entschuldigen, daß ich Deines sorgfältig und genau geschriebenen Buches über denselben Gegenstand nicht böswillig, sondern aus Not keine Erwähnung getan habe."

Die Leistung, auf die Briggs stolz ist, ist die logarithmische Berechnung des Sphäroidstumpfes, den er unter ausdrücklicher Berufung auf Clavius als Faßmodell annimmt. Es darf hier wohl bemerkt werden, daß dieses Modell durch Kepler erledigt war; in der späteren Literatur spielt es keine Rolle mehr.

76.31. Es ist nicht ganz klar, was die Wendung: „Bei Kegelstümpfen bleibt alles übrige, nur daß ..." eigentlich meinen soll. Wenn damit gesagt sein soll,

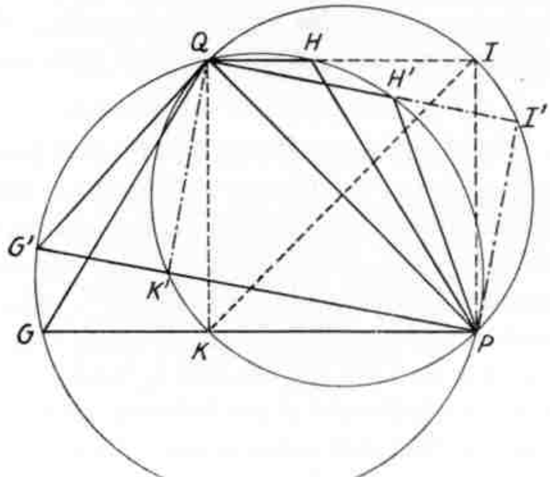


Fig. 15

daß in der Fig. XIX das Dreieck QIP unter allen Dreiecken mit der Basis QP und der Spitze auf dem Kreisbogen QIP den größten Inhalt habe, dann ist das richtig. Sollte aber stillschweigend mitbehauptet werden, daß auch das zugehörige gleichschenklige Trapez maximalen Inhalt habe, dann wäre die Aussage, wie Wieleitner richtig bemerkt, falsch. Geometrisch ergibt sich das sehr leicht mit Hilfe eines von Herrn *Jos. E. Hofmann* stammenden Beweises

(Kepler-Festschrift S. 300). In der Figur ist Trapez QG'PH' = Rechteck QK'PI'. Den größten Inhalt hat also das Trapez, das mit dem größten Rechteck gleichen Inhalt hat, d. h. das Trapez QGPH, dessen verlängerte Grundlinie QH durch I geht (Winkel HQP = 45°).

Unmittelbar behauptet Theor. II, daß der Inhalt von Dreieck IQP gegen die benachbarten Dreiecke auf derselben Basis QP stärker abfalle als der von Dreieck ICA gegen seine Nachbarschaft. Allgemeiner gesprochen würde das heißen, daß das Maximum zur Basis QP stärker ausgeprägt sei als das zur Basis CA. Analytisch sieht die Sache so aus:

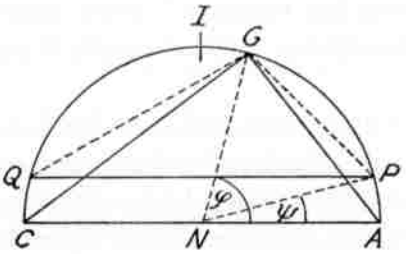


Fig. 16

Die Spitzen zweier benachbarter Dreiecke sollen in der Bezeichnung der Figur den Winkeln φ_1 und φ_2 zugehören, $\varphi_1 > \varphi_2$, und der Winkel PNA sei ψ, dann haben die Dreiecke über der Basis CA das Verhältnis $\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}$, die über der Basis QP aber $\frac{\sin\varphi_1 - \sin\psi}{\sin\varphi_2 - \sin\psi}$. Die Differenz

$$\triangle = \frac{\sin\varphi_1 - \sin\psi}{\sin\varphi_2 - \sin\psi} - \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \frac{(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)\sin\psi}{\sin\varphi_2(\sin\varphi_2 - \sin\psi)} \text{ ist } > 0$$

und hat ihren kleinsten Wert bei $\varphi_1 = 90$. Hält man $\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2$ konstant, so wächst $\triangle = \frac{k}{\sin\varphi_2(\sin\varphi_2 - \sin\psi)}$ mit gegen ψ abnehmendem φ_2. Keplers Angabe wäre in diesem Sinn zu korrigieren.

Wegen des zweiten Irrtums Keplers vgl. S. 86.

78.8. Für das Verhältnis der Inhalte der Quader AHC und ABC gilt

$$(\mathrm{HM} \times \mathrm{HC}) : (\mathrm{BK} \times \mathrm{BC}) = \frac{\sin\varphi_1 \cos\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\varphi_2 \cos\frac{\varphi_2}{2}},$$

wenn $\varphi_1 = \sphericalangle$ HNA, $\varphi_2 = \sphericalangle$ BNA in Figur XIX. Gleichzeitig ist aber das Verhältnis derselben Quader oder Zylinder

$$(\mathrm{HC}^2 \times \mathrm{HA}) : (\mathrm{BC}^2 \times \mathrm{BA}) = [(\mathrm{AC}^2 - \mathrm{AH}^2) \times \mathrm{HA}] : [(\mathrm{AC}^2 - \mathrm{BA}^2) \times \mathrm{BA}].$$

78.14. Ist der Durchmesser der Kugel $2r$, die Höhe des einbeschriebenen Quaders x und setzt man $y = (2r + x)(2r - x)$, dann wird die Diagonale der Grundfläche (Basis diametri) $\sqrt{y}$, die Seite der Grundfläche $\sqrt{\frac{y}{2}}$, das Volumen des Quaders $\frac{xy}{2}$.

Das Maximum des Volumens erhält man daher mit $x = \frac{2r}{3}\sqrt{3}$. Höhe und Diagonale werden einander gleich bei $x = r\sqrt{2}$. Da erst zwei Zylinder zusammen ein Faß von der Visierlänge $2r$ ergeben, so gibt Kepler in der Spalte „Corpus Columnae" als Inhalt die Zahl xy statt $\frac{xy}{2}$.

79.7. Die von Kepler angezogenen Stellen sind: *Pappus*: Collectiones, lib. V, prop. 2 und 17 (ed. Hultsch I, 310ff. und 348ff.). *Archimedes*: De Sphaera et Cyl. II, 9 (ed. Heiberg I, 222ff.). Daß der Satz über das Verhältnis von Dodekaeder und Ikosaeder von Apollonius stamme, sagt *Hypsikles* in der von ihm verfaßten Vorrede zum 14. Buch Euklids (vgl. *Becker* und *Hofmann*: Geschichte der Mathematik, S. 77).

80.27. Zum Beweis der Vermutung, daß unter allen einer Kugel einbeschriebenen Quadern der Würfel den größten Inhalt habe, steht Kepler nur der Weg des direkten Vergleichs offen. Er vergleicht also den Würfel mit zwei benachbarten, derselben Kugel einbeschriebenen Quadern, die zum Würfel parallel liegen, von denen einer höher, einer niederer ist als der Würfel. Zu seinem Beweis bemerkt Kepler (S. 79, Z. 37), daß er deshalb nicht geringe Schwierigkeiten biete, weil in einer ebenen Figur kleine Teile einer räumlichen Figur zu erfassen seien; ein Eingeständnis, daß er die zeichnerischen Schwierigkeiten nicht zu meistern wußte. Anhand der zwei räumlichen Figuren, in welche die Bezeichnungen der Fig. XX (S. 80) übernommen sind, gestaltet sich Keplers Beweis wie folgt: BGA ist in beiden Figuren der Würfel (in der ersten Figur fehlt der Buchstabe A an der rechten unteren Ecke unter G versehentlich), EDF der Quader mit der größeren, MLN der mit der kleineren Höhe. EDF entsteht aus BGA durch Wegnahme des Mantels von der Dicke KX und Aufsetzen zweier Platten bei E und F. Den wegfallenden Mantel zerlegt Kepler in 4 quadratische Ecksäulen (e) von der Grundfläche KXG und der Höhe GA; 8 ebenfalls quadratische Säulen (s) von derselben Grundfläche und der Länge GA — 2 KX; 4 quadratische Platten (p) von der Seite GA — 2 KX und der Dicke KX. Dafür werden dem Restkörper auf die beiden Grundflächen, die ebenfalls Quadrate mit der Seite GA — 2 KX sind, 2 Deckplatten (d) aufgesetzt von solcher Höhe, daß der neue Quader der Kugel einbeschrieben ist. Sein Inhalt wird daher

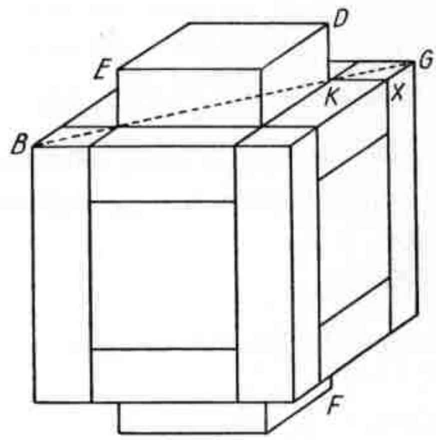


Fig. 17

$$Q_1 = W - 4e - 8s - 4p + 2d\,.$$

Da die Platten p und d gleiche Grundfläche haben, verhalten sich ihre Inhalte wie ihre Dicke, d. h. wie KX zu KD. Wegen KX : KG = AG : GB erhält man

$$\frac{KX}{KG}\cdot\frac{KG}{KD} = \frac{KX}{KD} = \frac{AG}{GB}\cdot\frac{KG}{KD}\,.$$

Nun ist aber $AG : GB = 1 : \sqrt{2}$ und $KG : KD > AG : GB$, da $DK \cdot KF = GK \cdot KB$ und $AG < KF$, $GB > BK$, also $DK \cdot AG < GK \cdot GB$. So wird $p : d = KX : KD > 1 : 2$ oder $2p > d$, $4p > 2d$. Es ist also

$$Q_1 = W - 4e - 8s - (4p - 2d) < W.$$

In Keplers Beweis steckt ein Fehler, indem er (Z. 24) $AG : GB > GK : KD$ und entsprechend $GK : KD < 1 : \sqrt{2}$, $p : d < 1 : 2$ behauptet. Da er jedoch mit $d < 2p$ weiteroperiert, wird der Fehler wieder aufgehoben.

81.22. Im zweiten Fall entsteht der Quader MLN aus dem Würfel BGA, indem zuerst den 4 Seitenflächen quadratische Platten (p) von der Dicke OX aufgesetzt werden, wobei $OX : OL = AG : GB = 1 : \sqrt{2}$. Von dem so entstande-

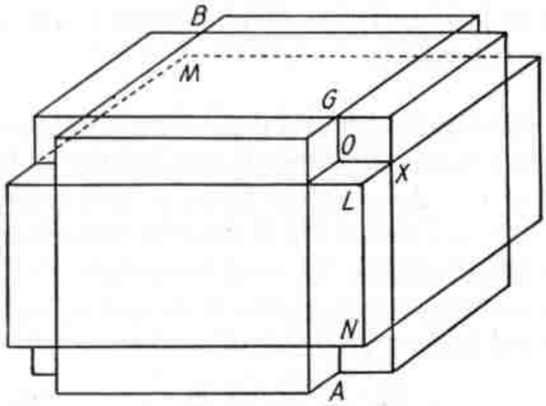


Fig. 18

nen Körper werden weggenommrn: 8 waagrecht liegende Säulen (s) von der Länge GA und der Grundfläche GOX, ferner die nun vom Würfel BGA herausragenden 2 Deckplatten (d) von der Dicke OG. Schließlich werden die einspringenden Ecken durch die 4 Ecksäulen (e) von der Höhe LN und dem Querschnitt OLX ausgefüllt. Auf diese Weise wird

$$Q_2 = W + 4p - 8s - 2d + 4e = W - (8s - 4e) - (2d - 4p).$$

Kepler zeigt nun, daß sowohl $8s > 4e$ als auch $2d > 4p$ ist. Infolgedessen wird auch $Q_2 < W$, wie zu beweisen war.

In seinem Brief an Kepler (vgl. Anm. 73.22) kommt Briggs auch auf den Beweis der Maximaleigenschaft des Würfels zu sprechen. In einfacherer Weise als Kepler verifiziert er zunächst mit Hilfe seiner Logarithmen, daß die dem Würfel benachbarten, der Kugel einbeschriebenen Quader kleineren Inhalt haben. Dabei geht er von der Inhaltsformel

$$J = 4r^3 \sin\frac{\alpha}{2} \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

aus, wenn α der Winkel ist, zu dem die Höhe des Quaders als Sehne gehört, beim Würfel $\alpha = 70^\circ\,31'40''$. Der direkte Beweis, daß der Würfel maximalen Inhalt hat, wird bei Briggs nicht einfacher als bei Kepler.

84.13. Entscheidend ist in diesem zweiten Beweis die Ungleichung CL : CM $> \sqrt{AM : AL}$. Man erhält sie so (vgl. Fig. XIX): wegen CL = 2 · LA kommt

$$\frac{AM}{AL} = \frac{\frac{1}{2}CL + ML}{\frac{1}{2}CL} = \frac{CL + 2ML}{CL} = \frac{CL + 2ML}{CL + ML} \cdot \frac{CL + ML}{CL}.$$

Da CL + 2 ML > CL + ML, so ist in bekannter Weise

$$\frac{CL + 2ML}{CL + ML} < \frac{CL + ML}{CL} < \frac{CL}{CM}, \text{ d. h. } \frac{AM}{AL} < \left(\frac{CL}{CM}\right)^2 \text{ oder } \frac{CL}{CM} > \sqrt{\frac{AM}{AL}}.$$

85.34. Kepler ist tatsächlich der erste, der die Meßrute mathematisch untersucht, ihren Gebrauch begründet und zugleich kritisch sondert. Seine Verwunderung über das Instrument beweist, daß er, jedenfalls mit Bewußtsein, keinen der zahlreichen Traktate (vgl. Fußnote S. 432) über Visierkunst zu Gesicht bekommen hatte.

86.26. Im Meridianschnitt, mit dem in der Folge fortgesetzt operiert wird, erscheinen die konjugierten Kegelstümpfe und Zylinder als Dreiecke über der gemeinsamen Basis CA, deren andere Seiten in dem konstanten Verhältnis CT : TA = CG : GA = $\varkappa$ stehen. CT ist dabei der Durchmesser der kleineren Grundfläche des Kegelstumpfes, TA seine Mantellinie. Es ist auffallend, daß Kepler nirgends von dem Apollonischen Kreis spricht, welcher den geometrischen Ort für den Punkt T bildet.

88.8. Zum leichteren Verständnis soll das Theorem anhand der nebenstehenden Figur in moderne Ausdrucksweise übertragen werden. Es sei CGAX der Zylinder, CTAV der ihm konjugierte Kegelstumpf, AB = AV — CT die Differenz der Grundkreisdurchmesser. Wird dann D auf AB so gewählt, daß BD : AD = $CG^2 : AG^2$, dann ist CG^2 = BV · DV = CT (CT + BD).

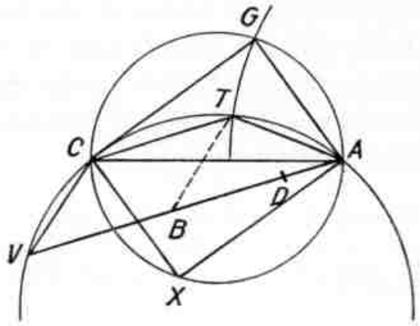


Fig. 19

Im Beweis verfährt Kepler umgekehrt, indem er zunächst zeigt, daß $CT^2 = BV^2 < CG^2 < BV \cdot AV = AC^2 - AT^2$. Man kann daher D auf AB so wählen, daß $CG^2 = BV \cdot DV$ wird. Sodann ist zu zeigen, daß mit dem so gewählten D, BD : AD = $CG^2 : AG^2$ sein muß. Es bedarf dazu des Nachweises, daß $BV \cdot AD = AG^2 - AT^2$ und $BV \cdot BD = CG^2 - CT^2$ ist. Daraus folgt nämlich

$$\frac{CG^2 - CT^2}{AG^2 - AT^2} = \frac{CG^2}{AG^2} = \frac{BD}{AD}.$$

Die Bemerkung *Wieleitners* zu diesem Theorem (Kepler-Festschrift S. 303): „Diese Rechnungen sind bei Kepler schrecklich" deutet umgekehrt auch auf die Schwierigkeiten hin, die Kepler zu überwinden hat.

89.5. Die Aufgabe, den großen Grundkreisdurchmesser AV des Kegelstumpfes zu berechnen, wenn der kleinere CT gegeben ist und dazu Höhe AG und Durchmesser CG des Zylinders, führt auf die Rechnung

$$AV = CT + AB \qquad AB = AD + BD$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AG^2}{CG^2} \qquad \frac{AB}{BD} = \frac{AG^2 + CG^2}{CG^2}$$

$$BD = \frac{CG^2 - CT^2}{CT} = \frac{CG^2}{CT} - CT,$$

also

$$AB = \left(\frac{CG^2}{CT} - CT\right) \cdot \frac{AG^2 + CG^2}{CG^2},$$

während Kepler

$$AB = \left(\frac{CG^2}{CT} - CT\right) \cdot \frac{AG^2 + CG^2}{AG^2}$$

angibt.
Der Fehler wirkt sich in dem Beispiel nur deshalb nicht aus, weil $AG^2 = CG^2$ angenommen ist.

89.19. Gegeben sind hier $CG^2 : AG^2$, CT und AV, gesucht wird CG. Daß Keplers Rechenvorschrift nicht stimmen kann, zeigt sein Ergebnis in Zahlen, da er $CG^2 = 2340$ errechnet, während $CT = 130$ angenommen wurde und $CT < CG$ sein sollte. Tatsächlich wird $DB : AB = CG^2 : (AG^2 + CG^2)$,

$$\text{also } DB \cdot CT = CG^2 - CT^2 = \frac{AB \cdot CG^2}{AG^2 + CG^2} \cdot CT,$$

während Kepler dieses Produkt $= CG^2$ setzt. Richtig wäre also $CG^2 - CT^2 = 2340$, $CG^2 = 2340 + 16900 = 19240$, $CG = 138{,}7$.

90.2. Mit $AG^2 : CG^2 = AD : BD = 1 : 2$ wird

$$BD = 2 \cdot AD \qquad DV = \frac{BV + 2\,AV}{3} = \frac{CT + 2\,AV}{3}$$

$$CG^2 = BV \cdot DV = CT \cdot \frac{CT + 2\,AV}{3}.$$

Mit $CT = 19$, $AV = 22$ kommt also $CG^2 = 399$. Der Zweifel *Wieleitners* an den zwei „medietates arithmeticae" (a.a.O. S. 303, Anm. 42) ist daher unbegründet; er rührt daher, daß Wieleitner den Fehler AC statt GC, der auch bei Frisch stehengeblieben ist, nicht bemerkt hat.

92.6. In beiden Tabellen ist das Verhältnis $GA^2 : TR^2$ umzukehren. In der „conjugatio aequalitatis" mit $AG : CG = AT : CT = 1 : 1$ ist in Fig. XXI (S. 87) D die Mitte von AB und zugleich der Fußpunkt R des Lotes von T auf AV. Wird nun $TC : AV = a : b$, $TC : AB = a : (b - a)$ gesetzt, so wird $\frac{AG^2}{TR^2} = \frac{AG^2}{TD^2} = \frac{2a(a+b)}{(a+b)(3a-b)} = \frac{2a}{3a-b}$, wobei wegen $b > a$, $2a > 3a - b$ wird. Setzt man für $a : b$ der Reihe nach die Werte $1 : 2$, $2 : 3$, $3 : 4$ usw. ein, so ergibt sich für $AG^2 : TD^2$ sukzessive $2 : 1$, $4 : 3$, $6 : 5$ usw.

Durch entsprechende Rechnung für die „conjugatio dupla“, die dem Verhältnis $AG^2 : CG^2 = AT^2 : CT^2 = 1 : 2$ entspricht, erhält man, wenn wieder $CT : AV = a : b$ gesetzt wird,

$$\frac{AG^2}{TR^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a(a+2b)}{a(a+2b) - b^2},$$

was für $AG^2 : TR^2$ die sukzessiven Werte $10 : 3$, $32 : 21$, $66 : 51$ usw. ergibt, wenn $a : b$ dieselbe Wertereihe wie oben durchläuft. Wachsen die Zahlen a und b je um eine Einheit, so bilden sowohl die Verhältniszahlen für AG^2 und TR^2 wie auch deren Differenzen arithmetische Reihen 2. Ordnung.

92.30. In Keplers konsequent eingehaltener Bezeichnung der Hauptpunkte der Figur lautet das Theorem, wenn die Volumina von Kegelstumpf und Zylinder mit V_{st} bzw. V_z bezeichnet werden:

$$\frac{V_{st}}{V_z} = \frac{CT \cdot AV + \frac{1}{3}(AB)^2}{CT \cdot DV} \cdot \frac{AG}{TR};$$

wie in den vorausgehenden Tabellen ist jedoch das Verhältnis $AG : TR$ umzukehren. Das kann man kurz so zeigen:

Sei $CT = a$, $AV = b$, $CG = d$, $AG = h$, $TR = h'$, dann ist

$$CT \cdot AV + \frac{1}{3} AB^2 = ab + \frac{1}{3}(b-a)^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

$$CT \cdot DV = CG^2 = d^2, \text{ also } \frac{CT \cdot AV + \frac{1}{3}(AB)^2}{CT \cdot DV} = \frac{1}{3} \frac{a^2 + ab + b^2}{d^2} = \frac{V_{st}}{V_{z'}},$$

wenn mit Z' der Zylinder vom Durchmesser d und der Höhe h' gemeint ist. Nun ist aber $V_z : V_{z'} = h : h'$, also

$$\frac{V_{st}}{V_z} = \frac{V_{st}}{V_{z'}} \cdot \frac{h'}{h} = \frac{CT \cdot AV + \frac{1}{3}(AB)^2}{CT \cdot DV} \cdot \frac{TR}{AG}.$$

94.8. In Keplers Beispiel für die Konjugation $AT^2 : CT^2 = 1 : 2$ steckt ein kleiner Fehler. Setzt man nämlich wieder $CT = a$, $AV = b$, so rechnet er

$$\frac{V_{st}^2}{V_z^2} = \left(\frac{a^2 + (b-a)\frac{2a+b}{3}}{a\frac{a+2b}{3}} \right)^2 \cdot \frac{4a^2 - (b-a)^2}{4a\frac{a+2b}{3}} = \left(\frac{ab + \frac{1}{3}(b-a)^2}{a\frac{a+2b}{3}} \right)^2 \cdot \frac{a^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{a\frac{a+2b}{3}},$$

während nach Theor. IX kommen müßte

$$\left(\frac{V_{st}}{V_z}\right)^2 = \left(\frac{ab + \frac{1}{3}(b-a)^2}{a \cdot \frac{a+2b}{3}} \right)^2 \cdot \frac{a^2 - \frac{(b-a)^2}{2}}{a \cdot \frac{a+2b}{3}}.$$

In der Tabelle macht sich dieser Fehler nur bei den kleinsten Werten von a und b bemerkbar; mit wachsendem a und b, während $b - a = 1$ bleibt, nähert sich das Verhältnis $V_z : V_{st}$ nach beiden Formeln rasch dem Wert $1 : 1$.

Die Berechnung des folgenden Beispiels in Coroll. III hat Kepler zwar richtig in der Form

$$\frac{V_{st}^2}{V_z^2} = \left(\frac{ab + \frac{1}{3}(b-a)^2}{a\frac{a+b}{2}}\right)^2 \cdot \frac{a^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{a\frac{a+b}{2}},$$

mit $a = 1$, $b = 2$ erhält er jedoch $V_z : V_{st} = 10 : 9$ statt $11 : 10$.

95.9. Die Bemerkung in Coroll. II, daß die Stumpfinhalte bei konstantem Zylinder abnehmen, in Coroll. III dagegen, daß sie unter gleicher Bedingung wachsen, ist zu vertauschen. Tatsächlich nimmt das Verhältnis Zylinder zu Stumpf im ersten Fall von 15 : 11 bis 3363 : 3362 ab, was bedeutet, daß der Stumpf bei konstantem Zylinder zunimmt; im zweiten Fall tritt das Umgekehrte ein, da das Verhältnis von 54 : 60 bis 13328 : 13468 wächst.

97.21. Bei der Bedeutung des Theorems für die folgenden Entwicklungen soll es kurz bewiesen werden. a, b seien die Grundkreisdurchmesser des Kegelstumpfs, $b - a = AB$. Der Durchmesser CE (Fig. XXI) des mit dem Stumpf gleich hohen Zylinders ist dann $CE = \frac{a+b}{2}$ (Theor. XII), sein Inhalt

$$V_z = \left(\frac{CE}{2}\right)^2 \pi h = \left(\frac{a+b}{4}\right)^2 \pi h.$$

Mit

$$V_{st} = \frac{\pi h}{12}(a^2 + ab + b^2) = \frac{\pi h}{12}[(a+b)^2 - ab]$$

wird also

$$V_{st} - V_z = \frac{\pi h}{48}[4(a+b)^2 - 4ab - 3(a+b)^2] = \frac{\pi h}{48}(b-a)^2$$

$$\frac{V_{st} - V_z}{V_z} = \frac{\frac{1}{12}(b-a)^2}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{12}(AB)^2}{(CE)^2}.$$

In der letzten Form spricht Kepler den Satz aus; die Form der Differenz $V_{st} - V_z$ ist jedoch oft von Nutzen.

98.17. Wird $CE = \frac{a+b}{2} = e$ gesetzt, dann ist $a + b = 2e$, $b = 2e - a$, $AB = b - a = 2(e - a)$. Das Maximum für AB bei konstantem e ist also $AB = 2e$. Keplers Aussage, die Differenz AB könne bis zum arithmetischen Mittel von a und b vergrößert werden, bedarf danach der Korrektur.

99.23. Im Gegensatz zu der Meinung *Wieleitners* (a.a.O. S. 304) über das Theor. XV, daß es für uns ohne Bedeutung sei, muß festgestellt werden, daß es für die folgenden Entwicklungen grundlegend ist. In deutscher Übersetzung lautet der Satz: „Alle Verhältnisse der Durchmesser am Stumpf, welche bei einer bestimmten Konjugation statthaben, treten auch bei einer Konjugation größeren Verhältnisses auf.“ In dem Theorem tritt also neben dem bereits eingeführten Konjugationsverhältnis $\varkappa = CT : AT$ auch das Verhältnis $\lambda = CT : AV = a : b$ der Grundkreisdurchmesser auf, das von Kepler keinen eigenen Namen erhält und deshalb als Assoziationsverhältnis bezeichnet werden soll.

Wie die Linien $\varkappa = \text{const.}$, sind auch die $\lambda = \text{const.}$ Kreise. Seien nämlich in der Figur CTAV und CT′AV′, beides gleichschenklige Trapeze mit $CT : AV = CT' : AV' = \lambda < 1$, die Meridianschnitte zweier Kegelstümpfe, dann

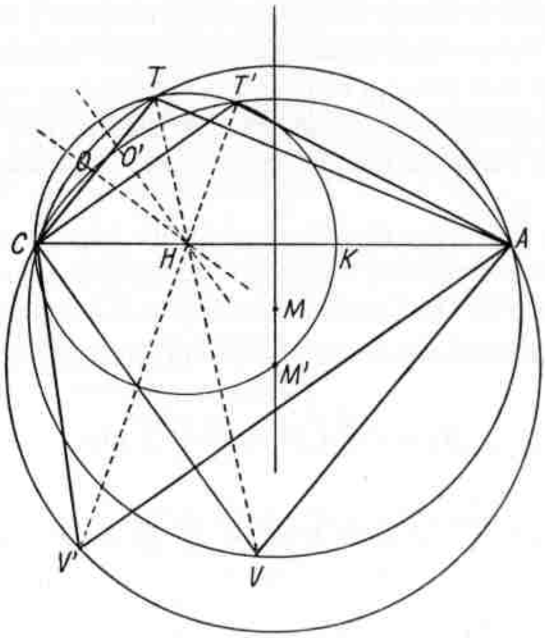


Fig. 20

schneiden sich CA, TV, T′V′ sowie die Mittelsenkrechten von CT und CT′ alle in dem einen Punkt H auf CA, sodaß $CH : AH = a : b = \lambda$ wird. Die Mittelpunkte O von CT und O′ von CT′ liegen daher auf dem Halbkreis über CH, die Punkte T, T′ auf dem Halbkreis über $CK = 2\,CH$.

In dem Halbkreis über CA haben wir daher jetzt zwei Systeme von Kreisen, die $\varkappa$-Kreise, $0 < \varkappa < \infty$, zu denen die Mittelsenkrechte auf CA als $\varkappa = 1$ gehört, und die λ-Kreise, $0 \leqq \lambda \leqq 1$, deren äußerster $\lambda = 1$ der Halbkreis über CA ist, während $\lambda = 0$ sich auf den Punkt C zusammenzieht. $\lambda = 1$ bedeutet daher bei beliebigem $\varkappa$ einen Zylinder, $\lambda = 0$ einen Kegel.

Die Voraussetzung des Theorems, daß in einer gegebenen Konjugation ein bestimmtes Verhältnis λ statthat, ist also gleichbedeutend damit, daß der $\varkappa$-Kreis den λ-Kreis schneidet. Dann ist aber sofort klar, daß der λ-Kreis auch von jedem Kreis $\varkappa' < \varkappa$ getroffen wird (kleiner ist das Verhältnis deshalb, weil $\varkappa = CT : AT$ definiert ist, während Kepler hier offenkundig mit dem Verhältnis $AT : CT = 1 : \varkappa$ operiert). Mit wachsendem $\varkappa$ wird der Wert $\varkappa_0$ erreicht, bei dem sich die beiden Kreise auf CA berühren, um sich bei noch größerem $\varkappa$ nicht mehr zu treffen. Ist der Berührungspunkt K, so ist $\varkappa_0 = \frac{CK}{AK} = \frac{2\lambda}{1-\lambda}$. Die Bedingung für das Schneiden der beiden Kreise lautet also

$$\varkappa < \frac{2\lambda}{1-\lambda} \qquad \lambda > \frac{\varkappa}{\varkappa+2}.$$

Beim rheinischen Faß mit $\varkappa = 1$ sind also nur Durchmesserverhältnisse $\lambda = a:b > 1:3$ möglich, beim österreichischen Faß mit $\varkappa = \sqrt{2}$ muß $\lambda > \sqrt{2} - 1$ sein. Keplers Erklärung zu dem Theorem ist sehr allgemein gehalten und daher schwer verständlich. Sie beginnt mit der keinesfalls richtigen Aussage, daß CT und TA in jeder Konjugation von der Gleichheit an soweit verkleinert werden können, bis ihre Summe gleich CA werde. Als die obere Grenze, von der ab CT und CA verkleinert werden, schwebt ihm ohne Zweifel der Fall CT senkrecht zu TA, der Zylinder vor, bei dem Gleichheit der Grundkreisdurchmesser eintritt. Es liegt also wohl eine Verwechslung vor. Die Erklärung von *Klug* (Ostwalds Klassiker 165, S. 124) zu dem Theorem ist ganz irreführend.

100.23. Keplers Gedankengang ist völlig einwandfrei. Der Punkt Z sei auf dem Halbkreis beweglich, CZ = y, AZ = x, G die Ecke des Zylinders maximalen Inhaltes, $CG : AG = \sqrt{2}$, H ein weiterer fester Punkt des Halbkreises zwischen C und G, also $(CH)^2 \cdot \pi \cdot AH < (CG)^2 \cdot \pi \cdot AG$. Kepler betrachtet nun die Verhältnisse $V_1 = \frac{AH}{x}$, $V_2 = \frac{y^2}{CH^2}$. Läßt man Z auf dem Kreis von C nach A wandern, so wächst sowohl V_1 wie V_2 kontinuierlich. Ihre Werte sind

$$\begin{array}{lll}
\text{in C:} & V_1 = \frac{AH}{CA} < 1 & V_2 = 0 \\
\text{in H:} & V_1 = 1 & V_2 = 1 \\
\text{in G:} & V_1 = \frac{AH}{AG} > 1 & V_2 = \frac{CG^2}{CH^2} > 1 \\
\text{in A:} & V_1 = \infty & V_2 = \frac{CA^2}{CH^2}
\end{array}$$

Wegen $CG^2 \cdot AG > CH^2 \cdot AH$ wird in G $\frac{AH}{AG} < \frac{CG^2}{CH^2}$, $V_1 < V_2$, in A dagegen ist $V_1 > V_2$. Zwischen G und A liegt also ein Punkt B, in dem $V_1 = V_2$ oder $\frac{AH}{AB} = \frac{CB^2}{CH^2}$, also $(CH)^2 \pi \cdot AH = (CB)^2 \pi \cdot AB$ wird.

Was an diesem Beweis so „sehr altmodisch" sein soll, wie *Wieleitner* (S. 305) meint, ist nicht einzusehen. Er selbst stellt das Zylindervolumen $V_z = \frac{1}{4} x y^2 \pi = \frac{1}{4} x (d^2 - x^2) \pi$ als Kurve 3. Ordnung dar und beweist die Existenz zweier positiver Lösungen x_1, x_2, wenn $0 < V_z < \frac{1}{4} CG^2 \cdot AG \cdot \pi$.

101.14. In Fig. 21 sei HS der Konjugationskreis $\varkappa < \sqrt{2}$, $CG : AG = \sqrt{2}$, der Zylinder CEA der „subcontrarius" zu CHA. B sei ein Punkt zwischen G und H; für die Zylinder gilt dann $V_z(H) < V_z(B) < V_z(G)$ in leicht verständlicher Symbolik. Es seien nun T', T'', T''' der Reihe nach die Schnittpunkte des Kreises HS mit CB, CG, CE, d. h. der Zylinder CBA habe gleiche Höhe mit dem Kegelstumpf CT'A u. s. f. Da nun nach Theor. XIII $V_{St}(T') - V_z(B) = \frac{\pi h}{48}(b-a)^2$, so ist $0 < V_{St}(T') - V_z(B) < V_{St}(T'') - V_z(G)$, also wegen $V_z(G) > V_z(B)$ $V_{St}(T'') > V_{St}(T') > V_z(B) > V_z(H)$.

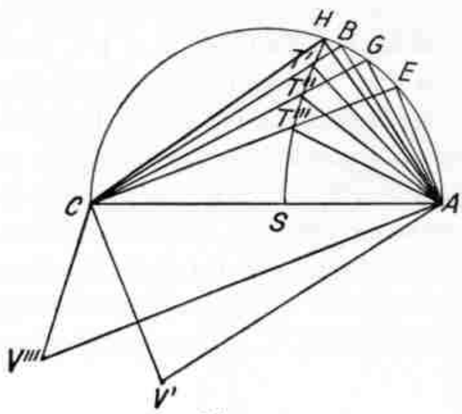


Fig. 21

Dies ist der erste Teil des Theorems. Der zweite Teil ergibt sich aus

$$V_{St}(T''') > V_z(E) = V_z(H).$$

102.3. Der Satz wird an Figur 21 der vorhergehenden Anmerkung wieder leicht verständlich. Es sei $\varkappa = CH : AH < CG : AG = \sqrt{2}$. Der Konjugationskreis $\varkappa$ schneidet CG in T''. Es ist also $V_{St}(T'') > V_z(G)$. Da andererseits $V_z(H) < V_z(G)$ und $V_{St}(S) = 0$, so gibt es sowohl zwischen T'' und H wie zwischen T'' und S je einen Punkt, in dem der Stumpf gleiches Volumen annimmt wie der Zylinder CGA.

Die algebraische Behandlung des Satzes gibt *Wieleitner* S. 307/08.

103.5. Keplers Beweis ist kurz folgender: Da Stümpfe miteinander verglichen werden, für die $\lambda = a : b$ konstant ist, so ist auch $\frac{b-a}{\left(\frac{a+b}{2}\right)}$ und das Verhältnis $\frac{V_{St} - V_z}{V_z} = \frac{1}{12}\,\frac{(b-a)^2}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$ konstant. Die Differenz $V_{St} - V_z = m \cdot V_z$ erreicht also mit V_z ihr Maximum. Schneidet der λ-Kreis CG in R, so hat der Stumpf CRA die Höhe GA und V_{St} (R) ist das Maximum auf dem Kreis.

Die analytische Behandlung des Satzes geht am besten von der Figur Anm. 99.23 aus. Setzt man dort $CT = a = b \cdot \lambda$, $AV = b = \frac{2c}{1+\lambda}\cos\alpha$, $CA = c$, $\sphericalangle\, TCA = \alpha$, also die Höhe des Stumpfes $h = c \sin\alpha$, dann erhält man V_{St} in der Form $V_{St} = B \cdot \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha$, wobei $B = \frac{c^3\pi}{3}\,\frac{1+\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} = \text{const.}$ Der Maximalwert von V_{St} ergibt sich daraus für $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{AG}{CG}$.

104.29. Der Satz XXI, der das Ergebnis von XX auf konjugierte Stümpfe übertragen möchte, ist wieder nur eine Vermutung Keplers, deren Beweis er den „belgischen Apollonii" Snell und Adriaen van Roomen als Aufgabe stellt. Snell (1581–1626) war zu dieser Zeit, da Kepler ihn bereits als „Zierde der Geometer unseres Jahrhunderts" bezeichnet (S. 71), literarisch noch kaum hervorgetreten. Die große Achtung vor ihm kann deshalb nur aus der persönlichen Bekanntschaft mit ihm stammen. Snell war nämlich (Cantor II², 654) auf seinen ausgedehnten Reisen (ca. 1600–1613) auch nach Prag gekommen und hatte Kepler dort kennengelernt. Auch mit van Roomen (1561–1615) verbindet Kepler persönliche Bekanntschaft. Sie waren sich in Prag und Frankfurt begegnet, woran Roomen in einem Brief an Kepler (Bd. XVI, S. 244) erinnert, und umgekehrt hatte dieser Roomen um die algebraische Auflösung des 7-, 9-, 11- und 13-Ecks angegangen, wie aus dem unveröffentlichten Antwortbrief (Mss. Pulk. V, 60) hervorgeht. Der Ausdruck „belgischer Apollonius“ stammt aus dem bekannten Wettstreit Roomens mit Viète; wenn nämlich kein solcher sich zeige, spottet Viète, dann werde ein gallischer auf den Plan treten. Der „Apollonius Gallus“ kam tatsächlich 1600.

Von Keplers Argumenten für seine Vermutung ist die Rechnung das stärkste. Am Beispiel der Konjugation $\varkappa = 1$ zeigt er, daß der Stumpf CFA

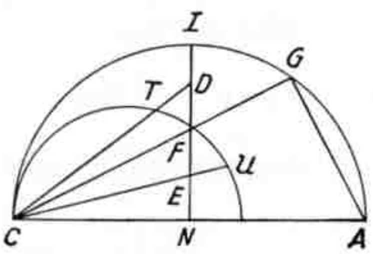


Fig. 22

(in Fig. XXI, S. 103) mit der Höhe AG größeren Inhalt hat als jeder andere zwischen F und I. Er schließt daraus, daß CFA in dieser Konjugation überhaupt den maximalen Stumpf darstelle, und weiter: „Was in einer Konjugation gilt, ... gilt selbstverständlich in allen.“

Der Satz ist aber falsch. Bezeichnet man das Volumen des eindeutig zu irgendeinem Punkt P im Innern des Halbkreises über CA gehörigen Kegelstumpfs mit V(P), ist ferner IN die Mittelsenkrechte auf CA ($\varkappa = 1$), F ihr Schnitt mit CG, D und E je ein Punkt auf ihr zwischen I und F bzw. zwischen F und N, sind schließlich T und U die Schnittpunkte des λ-Kreises durch F mit CD und CE, dann haben wir:

$V(T) < V(F)$ nach Theor. XX,
$V(D) < V(T)$ nach Theor. XIII, also
$V(D) < V(F)$. Dagegen ist
$V(E) > V(U)$ nach XIII,
$V(U) < V(F)$ nach XX.

Man kann also nicht mehr schließen $V(E) < V(F)$. Die Entscheidung kann nur die explizite Rechnung bringen.

Es sei also P ein Punkt im Innern des Halbkreises über CA, $CP = a$, $AQ = b$, $\sphericalangle PCA = \varphi$, $CA = c$, die Höhe des Stumpfes $BA = s \cdot c$ $(0 < s < 1)$. Dann wird $\sin \varphi = s$, $\cos \varphi = \sqrt{1 - s^2}$, $b = 2c \cdot \cos \varphi - a$, $b - a = 2(c \cdot \cos \varphi - a) = 2(c\sqrt{1 - s^2} - a)$.

Für das Zylindervolumen $V_Z(B)$ und $V(P)$ erhält man daher

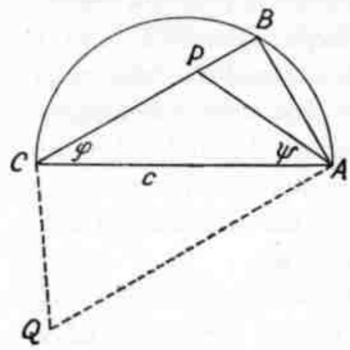


Fig. 23

$$V_Z(B) = \frac{c^3 s \pi}{4}(1 - s^2)$$

$$V(P) = V_Z(B) + \frac{c s \pi}{48}(b - a)^2$$

$$= \frac{c s \pi}{12}[4c^2(1 - s^2) + a(a - 2c\sqrt{1 - s^2})]$$

$$= \frac{DA \cdot \pi}{12}[(2 \cdot CB)^2 + CP(CP - 2 \cdot CB)]$$

in Keplerscher Ausdrucksweise.

Es handelt sich nun darum, a als Funktion von s so einzurichten, daß der Punkt P einen Kreis $\varkappa = \text{const}$ beschreibt. Bezeichnet man $\sphericalangle PAC = \psi$, so wird

$$\frac{CP}{AP} = \varkappa = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi} \quad \text{und} \quad CP \cdot \cos\varphi + AP \cdot \cos\psi = a\cos\varphi + \frac{a}{\varkappa}\cos\psi = c.$$

Da ferner $\cos\varphi = \sqrt{1 - s^2}$, $\cos\psi = \sqrt{1 - \varkappa^2 s^2}$, also

$$a = \frac{c}{\sqrt{1 - s^2} + \frac{1}{\varkappa}\sqrt{1 - \varkappa^2 s^2}},$$

so erhält man schließlich die gesuchte Inhaltsfunktion durch Einsetzen von a in V(P). Hier interessiert lediglich der Fall $\varkappa = 1$ mit $s < \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Es wird also

$$a = \frac{c}{2\sqrt{1 - s^2}} = \frac{c}{2w}, \; w^2 = 1 - s^2$$

$$V(s) = \frac{c^3 \pi}{12} \cdot s\left(4w^2 + \frac{1 - 4w^2}{4w^2}\right).$$

Setzt man darin $s_m = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $w^2 = \frac{2}{3}$, so erhält man $V(s_m) = \frac{c^3\pi}{12} \cdot 1{,}1788$. Nimmt man dagegen $s' = 0{,}55$ etwas kleiner, den zugehörigen Punkt P′ also näher bei CA, so ergibt die Rechnung $V(s') = \frac{c^3\pi}{12} \cdot 1{,}18167$. Es ist daher $V(s') > V(s_m)$, $V(s_m)$ also kein Maximum, wie Kepler in Theor. XXI vermutet.

105.18. Diese Stelle ist so zu verstehen:

Da $CL : CG = CN : CF$ und $CL^2 = \frac{4}{9}CA^2$, $CN^2 = \frac{1}{4}CA^2$, $CG^2 = \frac{3}{2}CA^2$, so wird

$$CF^2 = \frac{CN^2 \cdot CG^2}{CL^2} = \frac{3}{8}CA^2.$$

106.20. Da das Theorem sowohl von Klug wie von Wieleitner falsch verstanden wurde, ist es notwendig, seinen Wortlaut in Übersetzung und etwas verdeutlichend wiederzugeben: „In jeder Konjugation, in der das Quadrat des Zylinderdurchmessers das Doppelte des Quadrats der Höhe oder mehr ist, sind alle Stümpfe kleiner als der zur Konjugation gehörige Zylinder, der das größte Volumen hat: und das umso mehr, je weiter wir uns vom Verhältnis 2 : 1 entfernen." Mit besonderer Betonung sagt Kepler: „cylindro maximo, conjugato scilicet suo", und im Text werden die Zylinder „conjugationum capita" genannt. Da Wieleitner das übersieht, vergleicht er alles mit dem größten der Zylinder CGA und hat deshalb kein Verständnis für Keplers Sorgfalt im Beweis.

E und D seien zwei Punkte des Halbkreises über CA, $CE^2 > 2 \cdot AE^2$ und $AD < AE$. CD soll den Konjugationskreis durch E, der CA in P trifft, in dem

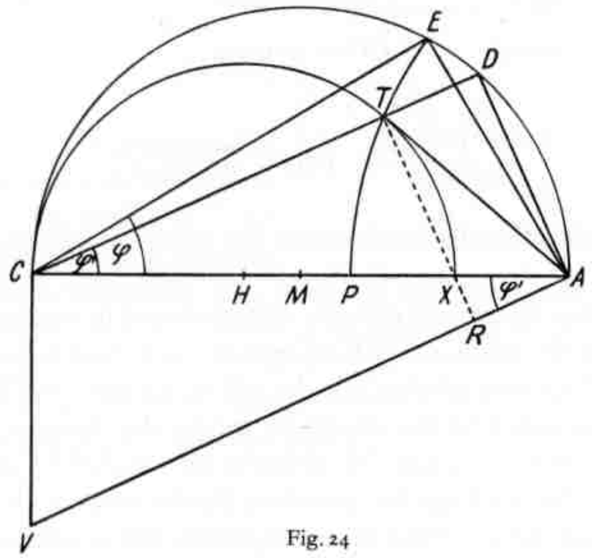


Fig. 24

Punkt T schneiden, schließlich soll auch noch der λ-Kreis durch T eingezeichnet werden als Halbkreis über CX. Der Zylinder CEA ist nun konjugiert mit dem Stumpf CTAV, während der Zylinder CDA gleiche Höhe DA mit ihm hat. Das Lot TR von T auf AV geht durch X und ist parallel zu DA.

Kepler vergleicht in seinem Beweis die Zylindervolumina $V_Z(E)$ und $V_Z(D)$ mit dem Stumpfvolumen $V_{St}(T)$. Setzt man $CA = c$, $AX = x$, $\sphericalangle ECA = \varphi$, $DCA = \varphi'$, so wird

$$V_Z(E) - V_Z(D) = \frac{c^3\pi}{4}(\cos^2\varphi\sin\varphi - \cos^2\varphi'\sin\varphi')$$

$$V_{St}(T) - V_Z(D) = \frac{c\pi\sin\varphi'}{48}\cdot(2\cdot TD)^2 = \frac{c\pi\sin\varphi'}{12}\cdot x^2\cos^2\varphi',$$

also

$$V_Z(E) - V_{St}(T) = \frac{c\pi}{4}\left[c^2\cos^2\varphi\sin\varphi - \left(c^2 + \frac{x^2}{3}\right)\cos^2\varphi'\sin\varphi'\right].$$

Damit diese Differenz > 0 werde, wie der Satz es verlangt, muß also

$$c^2\cos^2\varphi\sin\varphi > \left(c^2 + \frac{x^2}{3}\right)\cos^2\varphi'\sin\varphi'$$

sein, oder

$$\frac{\cos^2\varphi\sin\varphi}{\cos^2\varphi'\sin\varphi'} > 1 + \frac{x^2}{3c^2}.$$

Das Bestehen dieser Ungleichung, wenn $CE^2 > 2 \cdot AE^2$, ist aber der genaue Sinn des von *Wieleitner* (S. 168–170) zu Unrecht als „sehr undurchsichtig" getadelten Beweises. Kepler zeigt nämlich, daß

$$\frac{AE}{AD} > \frac{CD^2 + \frac{1}{3} AR^2}{CE^2}.$$

Mit den von uns eingeführten Bezeichnungen ist aber

$$AD = c \cdot \sin\varphi' \qquad AE = c \cdot \sin\varphi \qquad AR = x \cdot \cos\varphi'$$

$$CD = c \cdot \cos\varphi' \qquad CE = c \cdot \cos\varphi$$

also

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} > \frac{\cos^2\varphi' \cdot \left(c^2 + \frac{x^2}{3}\right)}{\cos^2\varphi \cdot c^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin\varphi \cdot \cos^2\varphi}{\sin\varphi' \cdot \cos^2\varphi'} > 1 + \frac{x^2}{3c^2}.$$

In jeder Konjugation der bezeichneten Art ist also $V_Z(E) > V_{St}(T)$.

111.22. Die den Geometern gestellte Aufgabe lautet in unserer Sprache: Zu einer gegebenen Assoziation λ die Konjugation $\varkappa$ so zu finden, daß die Stümpfe $(\lambda, \varkappa)$ gleiches Volumen erhalten wie der größte Zylinder CGA.

Über eine geometrische Konstruktion, welche die Aufgabe lösen würde, verfügt Kepler nicht, er erklärt sie vielmehr für unmöglich; nur allgemeine Überlegungen über die Lage der gesuchten Punkte stellt er an. Zu der rechnerischen Lösung, die als letzter Weg übrigbleibt, ruft er wieder die Cossisten auf, vorab Adriaen van Roomen. Dieser ist aber bereits tot. An seiner Stelle antwortet Alexander Anderson, dessen Lösung Kepler jedoch offenbar nie zu Gesicht bekam.

Die algebraische Lösung ist leicht zu skizzieren. T sei einer der gesuchten Punkte, in denen $V_{St}(T) = V_Z(G)$ wird, CDA der mit dem Stumpf CTA gleich hohe Zylinder, $\measuredangle DCA = \varphi$. Dann ist (vgl. Anm. 103.5) in den Variabeln λ und φ

$$V_{St}(T) = \frac{c^3\pi}{3} \frac{1 + \lambda + \lambda^2}{(1+\lambda)^2} \sin\varphi \cos^2\varphi$$

$$V_Z(G) = \frac{c^3\pi}{18} \sqrt{3},$$

also $\frac{1+\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} \sin\varphi \cos^2\varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$ oder, wenn $\sin\varphi = x$, $\cos^2\varphi = 1 - x^2$ gesetzt wird, $x(1 - x^2) = x(1 - x)(1 + x) = \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{(1+\lambda)^2}{1+\lambda+\lambda^2} = t(\lambda)$.

Wegen $0 \leqq \lambda \leqq 1$ ist $\frac{\sqrt{3}}{6} \leqq t(\lambda) \leqq \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Die Funktion $y = x(1 - x)(1 + x)$, deren Verlauf Figur 25 schematisch zeigt, hat die Nullstellen $-1, 0, +1$. Da in dem Halbkreis über CA für φ nur Werte zwischen 0° und 90° in Betracht kommen, x also auf den

Bereich $0 \leqq x \leqq 1$ beschränkt ist und $y = t(\lambda)$ ebenfalls nur positive Werte annimmt, so ist lediglich das Kurvenstück $0 \leqq x \leqq 1$ zu betrachten, das bei $x_m = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $y_m = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ sein Maximum erreicht. $y = t(\lambda)$ schneidet daher die Kurve in zwei Punkten x_1, x_2, wenn $\lambda < 1$, $y = t(1)$ berührt dagegen in dem Scheitelpunkt.

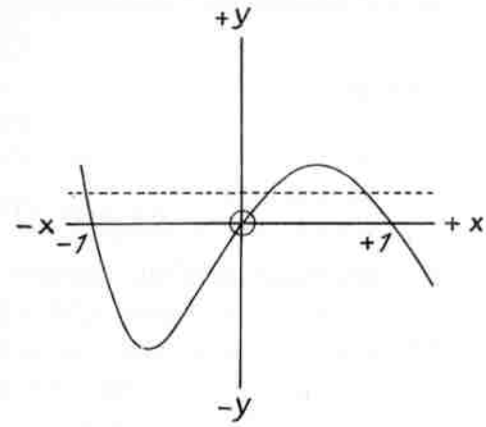


Fig. 25

Die im Halbkreis über CA definierte Kurve

$$f(\varphi, \lambda) =$$

$$= \frac{1+\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} \sin \cos^2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{6} = 0,$$

die mit $c = 10$ cm dargestellt ist, hat nach dem Vorausgehenden zwei Äste, die sich in C und G treffen, in G mit gemeinsamer Tangente, in C dagegen mit verschiedenen Tangenten. Das Aussehen der Kurve, deren nähere Diskussion hier unterbleiben muß, ist das eines Blattes. Im Innern des Blattes ist $V_{St}(T) > V_Z(G)$, außerhalb $V_{St}(T) < V_Z(G)$.

Der Aufruf an die Cossisten hindert Kepler indes nicht, wenigstens die Gleichung aufzustellen, auf deren Auflösung das gestellte Problem hinausläuft.

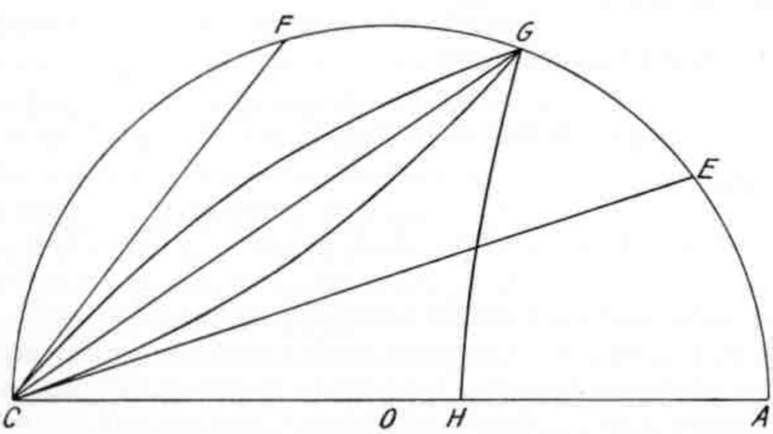


Fig. 26

Das Volumen des mit dem Stumpf CTA gleichhohen Zylinders CDA werde mit $V_Z(D)$, die Durchmesser des Stumpfs mit a und b, $b > a$, bezeichnet. Dann wird

$$V_{St}(T) = V_Z(G), \quad V_Z(G) > V_Z(D), \quad \text{also} \quad V_Z(G) = V_Z(D) + g,$$

ferner

$$\frac{V_{St}(T) - V_Z(D)}{V_Z(D)} = \frac{\frac{1}{12}(b-a)^2}{\left(\frac{(a+b)}{2}\right)^2} = q,$$

infolgedessen

$$\frac{V_Z(G) - V_Z(D)}{V_Z(D)} = \frac{g}{V_Z(D)} = q$$

$$\frac{V_Z(G)}{V_Z(D)} = 1 + q.$$

Daher wird

$$\frac{V_Z(G)}{V_Z(D)} = \frac{CG^2 \cdot GA}{CD^2 \cdot DA} = 1 + q$$

$$[(1 + q) \cdot CD^2] \cdot DA = CG^2 \cdot GA.$$

Diese Gleichung ist es, die Kepler S. 112, Z. 11 ff. beschreibt: Das Quadrat CA^2 soll so in eine Summe $CD^2 + DA^2$ zerlegt werden, daß der eine Teil CD^2, vergrößert um $q \cdot CD^2$, und multipliziert in die erste Potenz des anderen Teiles DA, dem Produkt von CG^2 in GA gleich werde. Im Sinne der Coss setzt nun Kepler $x = \frac{DA}{CA}$, $DA = cx$, $CD^2 = c^2(1 - x^2)$, also

$$(1 + q) \cdot c^3 \cdot x(1 - x^2) = CG^2 \cdot GA \text{ oder}$$

$$(1 + q) \cdot c^3 \cdot x = CG^2 \cdot GA + (1 + q) \cdot c^3 \cdot x^3.$$

Diese Gleichung wird Z. 14 ff. beschrieben; die „aliqua certa multitudo" meint dabei den Faktor $(1 + q)\, c^3$, während der „datus numerus absolutus" die Zahl $CG^2 \cdot GA = \frac{2c^3\sqrt{3}}{9}$ ist.

Rechnet man weiter, so erhält man

$$x - x^3 = x(1 - x)(1 + x) = \frac{1}{1+q}\,\frac{CG^2 \cdot GA}{c^3} = \frac{1}{1+q} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Nun ist aber

$$1 \leqq 1 + q \leqq \tfrac{4}{3}, \quad \text{also} \quad \frac{\sqrt{3}}{6} \leqq \frac{1}{1+q} \cdot \frac{CG^2 \cdot GA}{c^3} \leqq \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

in voller Übereinstimmung mit der vorher aufgestellten Gleichung.

Es ist wohl richtig, daß es uns kaum möglich wäre, die Beschreibung Keplers ohne weiteres in die heutige Symbolik zu übertragen, daß sie aber „nur dunkle Angaben über die Natur der Gleichung" enthalten soll, wie *Wieleitner* S. 312 behauptet, ist nicht richtig. Wären sie den Lesern von damals unverständlich gewesen, dann hätte *Alexander Anderson*, der sich zu diesem Theorem äußert, sicher das bemängelt. Tatsächlich aber stößt er sich nur an der Äußerung am Schluß: „Derartige Gleichungen suchen die Cossisten immer noch in der Geometrie, werden sie aber nach meinem Urteil nie finden."

Schon in den „Vindiciae Archimedis", Paris 1616, kommt er, obwohl das Schriftchen nach dem Titel gegen Lansberghe und nicht gegen Kepler gerichtet ist, auf dessen Urteil über die Gleichungen 3. und höheren Grades und „die armen Cossisten" zu sprechen. Er erinnert ihn daran, daß schon *Archimedes* in der 1. Prop. des 2. Buches von „De Sphaera et Cylindro" bei der Aufgabe, eine Kugel einem gegebenen Zylinder gleich zu machen, das Problem zweier mittlerer Proportionalen zwischen zwei gegebenen Strecken gelöst habe. Vor allem aber macht er ihn auf die von ihm 1615 herausgegebene Schrift von Vieta „De recognitione et emendatione Aequationum" aufmerksam, von der noch „sehr viele Exemplare" bei ihm liegen.

Erst in der 1619 in Paris erschienenen Schrift „Exercitationum mathematicarum decas prima, continens quaestionum aliquot, quae nobilissimorum tum hujus tum veteris aevi Mathematicorum ingenia exercuere, enodationem" gibt er als Exercitatio 6 und 7 unter der Überschrift „Ad Problema Kepleri in sua Stereometria Doliari Mathematicis hujus aevi propositum" die ihm vorschwebende geometrische Lösung. Die alten Geometer, meint er, hätten eine geometrische Interpretation der von Kepler aufgestellten Gleichung und den Versuch, mit einer geometrischen Konstruktion zum Ziel zu kommen, nie von vornherein für unmöglich erklärt, sondern auf irgendeine Weise, über Kegelschnitte oder andere, gemischte Linien, einen Lösungsweg gesucht. Interessant ist sodann die Bemerkung, seine mathematischen Ausführungen seien seinem eigenen Traktat über die Stereometrie entnommen, der fix und fertig vorliege und von Parallelepipeden, Zylindern, Kegelstümpfen, regulären Körpern, einer neuen Stereometrie der sphärischen Dreiecke, im Anhang auch von einer verbesserten Form der Prosthaphärese handle. Danach muß sich dieser leider verschollene Traktat ziemlich eng an Keplers „Stereometria" angelehnt haben.

In Exercitatio 7 zeigt Anderson, daß die Aufgabe: „Gegeben sei das Verhältnis der parallelen Durchmesser in den Grundflächen eines Kegelstumpfs und ein Körper kleiner als der größte Stumpf in der gegebenen Konjugation [nach unserer Terminologie: Assoziation]; die paarweisen (alternos) Stümpfe zu finden, die dem gegebenen Körper gleich sind und deren Grundkreisdurchmesser das gegebene Verhältnis zueinander haben", daß also diese Aufgabe, die dem Theor. XXIII von Kepler entspricht, wenn der gegebene Körper der größte Zylinder ist, sich zurückführen läßt auf die andere: „Gegeben sei ein Körper, der nicht größer ist als der einer gegebenen Kugel einbeschriebene Würfel; ein ihm gleiches räumliches Parallelepiped zu finden, das der gegebenen Kugel einbeschrieben werden kann." Die Lösung dieser Aufgabe wird aber in Exercitatio 6 vorweggenommen: a sei der Durchmesser der Kugel, der einbeschriebene Würfel hat dann den Inhalt $W = \frac{a^3}{3\sqrt{3}}$. Ist daher $V = a^2 \cdot e$ der Inhalt des gegebenen Körpers, $V < W$, so muß $e < \frac{a}{3\sqrt{3}}$ sein, und wenn $e = \frac{b-d}{2}$ gesetzt wird, $\frac{b-d}{2} < \frac{a}{3\sqrt{3}}$. Bildet man nun die Reihe a, b, c, d so, daß $a : b = b : c = c : d$, und wird $f^2 = a^2 - b^2$ gesetzt, so ist $a^2 e = \frac{f^2}{2} b$. Denn wenn $b = s \cdot a$, $c = s \cdot b = s^2 \cdot a$, $d = s^3 \cdot a$ ist, dann wird $a^2 e = a^3 \cdot \frac{s(1-s^2)}{2} = \frac{f^2 b}{2}$.

In dem Quader mit den Kanten x, x, b, der nach Voraussetzung den Inhalt $x^2 b = a^2 e = \frac{f^2 b}{2}$ hat, wird demnach die Diagonale der Grundfläche $2x^2 = f^2$, und die Körperdiagonale $d^2 = f^2 + b^2 = a^2$. Der Quader ist also der Kugel einbeschrieben. Führt man $s = \frac{b}{a}$ als Unbekannte ein, so kommt man direkt auf die Gleichung Keplers $s(1 - s^2) = \frac{2V}{a^3}$, $\frac{2V}{a^3} < \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

113.12. Die Aufgabe, die in Theor. XXIV gestellt wird, ist in gewissem Sinn die Umkehrung der vorhergehenden. Bei fest gegebenem λ sollten dort die Werte von $\varkappa$ gefunden werden, die $V_{St}(\varkappa, \lambda) = V_Z(G)$ machen. Jetzt sind bei gegebenem $\varkappa$ die Werte von λ gesucht, welche dieselbe Gleichung erfüllen. Daß diese Aufgabe nur sinnvoll ist, wenn $\varkappa^2 < 2 : 1$ ist, zeigt ein Blick auf die Figur des „Keplerschen Blattes" (Fig. 26).

An der Konjugation $\varkappa = 1$ führt Kepler den Beweis, daß die mit den beiden gesuchten Stümpfen gleichhohen Zylinder nicht „subcontrarii" sein können. Fast ärgerlich über die Schwierigkeit des Problems heißt es dann: „Soweit mein Beweis; mit dem Rest mögen die Cossisten fertig werden." Das heißt indes nur: mit der Auflösung der Gleichung, denn diese selbst stellt er wieder auf seine beschreibende Art auf, indem er das Verhältnis $V_{St}(T) : V_Z(G)$, das $= 1 : 1$ werden muß, berechnet. Hat der Stumpf CTA die Durchmesser a, b und die Höhe h = DA, ist also der Zylinder CDA gleichhoch mit dem Stumpf CTA, dann gelten die Gleichungen

$$\frac{V_{St}(T)}{V_Z(D)} = \frac{\frac{1}{12}(b-a)^2 + \frac{1}{4}(a+b)^2}{\frac{(a+b)^2}{4}},$$

also

$$\frac{V_{St}(T)}{V_Z(G)} = \frac{\frac{1}{12}(b-a)^2 + \frac{1}{4}(a+b)^2}{\frac{(a+b)^2}{4}} \cdot \frac{V_Z(D)}{V_Z(G)} = \frac{\frac{1}{12}(b-a)^2 + \frac{1}{4}(a+b)^2}{\frac{(a+b)^2}{4}} \cdot \frac{CD^2 \cdot AD}{CG^2 \cdot AG}.$$

Wegen $CD^2 = \frac{(a+b)^2}{4}$, wird daraus

$$\frac{V_{St}(T)}{V_Z(G)} = \frac{\frac{1}{12}(b-a)^2 + \frac{1}{4}(a+b)^2}{CG^2} \cdot \frac{AD}{AG} = 1.$$

Das ist die Gleichung, die Kepler beschreibt, mit dem Fehler allerdings, daß er statt des Verhältnisses (AD) : (AG) dessen Quadrat als den einen Teil des Verhältnisses der Körper $V_{St}(T)$ und $V_Z(G)$ angibt, während der andere mit dem obigen übereinstimmt. Daran mag es liegen, daß er im letzten Abschnitt von einer Gleichung 5. Grades spricht, während sie in Wirklichkeit vom 6. Grad ist. Setzt man nämlich

$$\frac{1}{12}(b-a)^2 + \frac{1}{4}(a+b)^2 = \frac{(a+b)^2 - ab}{3}, \quad CG^2 = \frac{2c^2}{3}, \quad AG = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

in die Gleichung ein, so kommt

$$\frac{(a+b)^2 - ab}{2c^2} = \frac{c\sqrt{3}}{3 \cdot AD}.$$

Setzt man ferner mit Kepler $a = x = CT$, $\frac{CT}{AT} = \varkappa$, also $AT = \frac{x}{\varkappa}$, so wird wegen

$$bx + \frac{x^2}{\varkappa^2} = c^2 \qquad b = \frac{c^2}{x} - \frac{x}{\varkappa^2} = \frac{\varkappa^2 c^2 - x^2}{x \cdot \varkappa^2}$$

$$a + b = \frac{\varkappa^2 c^2 - x^2(1 - \varkappa^2)}{x \cdot \varkappa^2}$$

$$a \cdot b = \frac{\varkappa^2 c^2 - x^2}{\varkappa^2}$$

$$(AD)^2 = \frac{x^2}{\varkappa^2} - \frac{(b-a)^2}{4} = \frac{x^2}{\varkappa^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\varkappa^2 c^2 - x^2(1+\varkappa^2)}{x\varkappa^2}\right)^2$$

$$= \frac{[4\varkappa^2 - (1+\varkappa^2)^2]\,x^4 + 2\varkappa^2 c^2 (1+\varkappa^2)\,x^2 - \varkappa^4 c^4}{4\,x^2 \varkappa^4}.$$

Werden diese Werte in die obige Gleichung eingesetzt und beide Seiten quadriert, so treten darin nur gerade Potenzen von x bis zur 12. auf. Setzt man also $y = x^2$, so ergibt sich eine Gleichung 6. Grades in y.

Auf eine Gleichung 6. Grades kommt man auch, wenn die Bedingung

$$V_{St}(T) = V_Z(G) = \frac{\sqrt{3}}{18}\, c^3 \pi$$

in der Form

$$V_{St}(\varkappa, \lambda) = \frac{c^3 \pi}{3} \cdot \frac{\varkappa^2}{\lambda + \varkappa^2} \cdot \frac{1 + \lambda + \lambda^2}{4\lambda} \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{\lambda + \varkappa^2} \cdot \frac{(1+\lambda)^2}{4\lambda}} = \frac{\sqrt{3}}{18}\, c^3 \pi$$

angesetzt wird.

Von seiner Gleichung 5. Grades – „nisi me aversa respexit Minerva" – sagt Kepler, daß sie geometrisch sei, vielmehr stochastisch im Sinne von Raimar Ursus oder mechanisch nach Jost Bürgi. Ursus († 1600) hatte eine von Junge eingeführte Methode des Probierens (στοχάζομαι = probieren, erraten) ein wenig verbessert (vgl. Cantor II², 648; Tropfke III², 81), während Jost Bürgi eine wirkliche Näherungsmethode gefunden hatte (Cantor II², 645 ff.; Tropfke III, 81 f.).

114.21. Die der Tabelle zugrunde liegende Formel lautet, wenn die zu $\varkappa = 1$, $\varkappa' = \sqrt{2}$ bei gleichem λ gehörigen Stumpfvolumina kurz durch V_{St} und V'_{St} bezeichnet werden,

$$\frac{V_{St}}{V'_{St}} = \frac{\sin\varphi \cos^2\varphi}{\sin\varphi' \cos^2\varphi'} = \frac{\lambda + 2}{2(\lambda + 1)} \cdot \sqrt{\frac{(3\lambda - 1)(\lambda + 2)}{2(\lambda^2 + 2\lambda - 1)}}$$

oder, wenn $\lambda = \frac{n}{n+1}$ gesetzt wird,

$$\frac{V_{St}}{V'_{St}} = \frac{3n + 2}{2(2n+1)} \cdot \sqrt{\frac{(2n-1)(3n+2)}{2(2n^2 - 1)}},$$

wobei φ, φ' wie bisher die Winkel TCA bzw. T'CA bedeuten. Die wirklichen Werte sind deshalb

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
λ	1:2	2:3	3:4	4:5	5:6	6:7	7:8	8:9	9:10
$V_{St} : V'_{St}$	1,32	1,05	0,9993	0,978	0,968	0,959	0,952	0,948	0,944

$$\lim_{n\to\infty} V_{St} : V'_{St} = \frac{3}{8}\sqrt{6} = 0{,}918$$

in Übereinstimmung mit dem Wert für $\lambda = 1$.

117.26. Kepler unterscheidet deutlich zwischen Länge l der Meßrute und Maßzahl m, wobei $m = l^3 : e^3$, oder, wenn $e = 1$ gesetzt wird, $m = l^3$. Wurde nun $l_1 \neq l_2$ gefunden, dann wird $m_1 = l_1^3$ das doppelte Volumen $2\,V_1$ der einen Faßhälfte, entsprechend $m_2 = l_2^3$ das doppelte der anderen Hälfte $2\,V_2$, das Volumen des ganzen Fasses

$$V = V_1 + V_2 = \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{l_1^3 + l_2^3}{2}.$$

Legt man also die Maßzahlen zugrunde, so kommt man auf das arithmetische Mittel, geht man dagegen von den gemessenen Längen aus, dann darf nicht das arithmetische Mittel angewandt werden, denn $l_a = \frac{l_1 + l_2}{2}$ würde $l_a^3 = \frac{1}{8}(l_1^3 + 3\,l_1^2 l_2 + 3\,l_1 l_2^2 + l_2^3)$ ergeben. Aber auch das geometrische Mittel, das Kepler vorschlägt, geht nicht an, da $l_g^3 = \sqrt{l_1 l_2}^{\,3} \neq \frac{l_1^3 + l_2^3}{2}$ wegen

$$\frac{l_1^3 + l_2^3}{2} - l_g^3 = \frac{1}{2}(l_2^{3/2} - l_1^{3/2})^2.$$

Bildet man die Differenzen

$$\triangle_1 = \frac{l_1^3 + l_2^3}{2} - l_a^3 = \frac{3}{4}\,\frac{l_1 + l_2}{2}\,(l_1 - l_2)^2$$

und

$$\triangle_2 = \frac{l_1^3 + l_2^3}{2} - l_g^3 = \frac{1}{2}(l_1\sqrt{l_1} - l_2\sqrt{l_2})^2$$

und wird $l_1 > l_2$, also $l_1 = l_2 + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ angenommen, dann wird

$$\triangle_1 = \frac{3}{4}\,l_2\varepsilon^2 + \frac{3}{8}\,\varepsilon^3$$

$$\triangle_2 = \frac{9}{8}\,l_2\varepsilon^2 + \frac{9}{16}\,\varepsilon^3.$$

Wenn die Glieder mit ε^3 vernachlässigt werden dürfen, dann wird also $\triangle_1 = \frac{2}{3}\triangle_2$, was bedeutet, daß das arithmetische Mittel $l_a = \frac{l_1 + l_2}{2}$ eine bessere Annäherung ergibt als das geometrische $l_g = \sqrt{l_1 l_2}$.

120.8. Der Frankfurter Arzt *Johann Hartmann Beyer* war neben seinem Beruf lebhaft an Mathematik interessiert. Das von Kepler zitierte Werk ist: „Stereometriae Inanium nova et facilis ratio", Frankfurt 1603. Im selben Jahr erschien von ihm ebenda „Ein newe schöne Art der vollkommenen Visierkunst". Beide Schriften gehören zur älteren Gattung stereometrischer und doliometrischer Traktate, die lediglich Rechenvorschriften geben. Das Faß betrachtet Beyer grundsätzlich als doppelten Kegelstumpf, dessen Berechnung durch Ausgleich der Grundkreise mit Hilfe des „Medium Conicum" auf den Zylinder zurückgeführt wird.

120.23. Siehe Anm. 73.22.

123.9. Wird dem Kreis ein reguläres n-Eck umbeschrieben, dann ist dessen Umfang $U = 2nr \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}$, seine Fläche $F = nr^2 \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}$. Mit $r = 1$ wird also $U = 2F$. Diese Beziehung gilt auch für den Kreis vom Halbmesser 1.

127.21. Die Quadratur der Hyperbel, zu deren Lösung die „Apollonii" aufgerufen werden, gelingt erst in der 2. Hälfte des 17. Jahrhunderts. Sie ist vor allem an die Namen Wallis und Huygens geknüpft.

127.26. Vgl. Anm. 17.13. Die Ergänzung dazu im 47. Kapitel der „Astronomia Nova" (Bd. III, S. 297 ff.).

128.8. Über die Berechnungsmethode des *Michel Coignet* (1549–1623), eines belgischen Jesuiten in Antwerpen, wird in der „Messekunst" S. 237 (Erster Weg) Näheres gesagt. Die „Biographie Nationale de la Belgique" weist keine gedruckte mathematische Schrift von ihm nach. Dagegen findet sich in Mss. Pulk. V, 143v ein Auszug Keplers „Ex Michaelis Coigneti opusculo Gallico".

129.28. Für den zweiteiligen Körper, der übrigbleibt, wenn von dem durch einen Achsenschnitt halbierten Zylinder ein halber Kegel mit derselben Achse, Grundfläche und Höhe, und ein Zylinderhuf gleicher Grundfläche und Höhe weggenommen wird, rechnet Kepler als Volumen $33 - (11 + 14) = 8$. Diese Rechnung stimmt deshalb nicht, weil sich halber Kegel und Zylinderhuf überschneiden; der ihnen gemeinsame Teil dürfte nur einfach abgezogen werden.

131.22. Über die Berechnung dieser Tabelle werden in Nr. 17 der „Messekunst" nähere Angaben gemacht; dort (Anm. 158.23) wird deshalb auch die nötige Erklärung gegeben. Zur Tabelle selbst sei nur bemerkt, daß die Pfeilhöhen als Dezimalbrüche mit einer Dezimalen ausgedrückt sind, wovon die Ganzen horizontal, die Zehntel vertikal abzulesen sind.

Wegen des Verses, mit dem Kepler schließt, vgl. S. 457.

143.19. In der um 1600 auflebenden Diskussion über die Reform des völlig unübersichtlich gewordenen Maß- und Münzwesens steht die Vereinheitlichung der Maße an erster Stelle; Kepler dagegen gibt ihrer Sicherung gegen willkürliche Veränderungen durch geometrische Verknüpfung in einem Modellgefäß nach Art des römischen Quadrantal den zeitlichen Vorrang vor der Vereinheitlichung. Vgl. hierüber die Ausführungen S. 458.

144.5. „Lägeln" ist vom lateinischen Wort lagena, lagella herzuleiten, das ein bauchiges Weingefäß mit engem Hals bezeichnet.

146.10. Der Satz ist unrichtig. Vgl. dazu Anm. 15.9.

147.19. *Adrianus Romanus*: Canon triangulorum, Mainz 1609. *Bartholomaeus Pitiscus*: Trigonometria, Frankfurt 1612. Zur Geschichte der trigonometrischen Tafeln von Regiomontan bis zum „Thesaurus mathematicus" von Pitiscus vgl. Tropfke, Gesch. d. Elem.-Math., 2. Aufl., Bd. V, S. 178 bis 183. Die dort (S. 182) vertretene Meinung, Jost Bürgi sei wohl durch das Erscheinen von Othos „Opus Palatinum" im Jahre 1596 veranlaßt worden, von der Veröffentlichung seiner eigenen Sinustafeln abzusehen, ist mit Keplers Bemerkung Z. 25/26 kaum vereinbar, wenn man bedenkt, daß dieser erst nach 1600 mit Bürgi persönlich in Beziehung kommt. Solange Bürgi in Prag war (bis etwa 1611), hat er offenbar an die Veröffentlichung seines „Canon Sinuum" gedacht; Kepler hat ihm sogar eine Einführung dazu geschrieben (Pulk. Mss. Bd. V, S. 93–138). – Philipp van Lansberghe: Triangulorum Geometria, Leyden 1591.

148.15. Richtiger wäre $\sqrt{5376} = 73\frac{1}{3}$, DB $= 146\frac{2}{3}$.

153.6. Feuchten = fichten, Flötz = Boden, Botung = Bottich.

155.42. Eine Ergänzung zu dieser Nummer in Nr. 89, S. 241.

158.14. Das Handexemplar Keplers der „Messekunst", das in der Bibliothek des Deutschen Museums in München erhalten ist, enthält an dieser Stelle eine Randbemerkung, die überschrieben ist: „Ein andere Rechnung". Da jedoch die ganze Randbemerkung nachträglich wieder durchgestrichen ist, kann auf ihre Wiedergabe verzichtet werden.

Die Zahl 21416 82393 ist fehlerhaft; richtig wäre 21415 61511.

158.23. Dieselbe Tabelle, jedoch mit halben Tafelwerten und daher für halbe Kreissegmente geltend, befindet sich beim letzten Kapitel der „Stereometria" S. 131.

Die Andeutung, die Kepler (Z. 35 ff.) über die Entstehung der Tabelle macht, schließt eine direkte Berechnung der Segmente als Differenz von Kreissektor und Dreieck, wie *Frisch* (V, 614) annimmt, aus. Es handelt sich vielmehr um ein Summationsverfahren, das so zu denken ist: Im Halbkreis

ABC mit Mittelpunkt M wird der Halbmesser BM = 100 in hundert gleiche Teile und die Fläche durch Parallelen zu AC durch die Teilpunkte in hundert gleichbreite Streifen geteilt. P_i, P_{i+1} seien benachbarte Teilpunkte, $P_i Q_i Q_{i+1} P_{i+1}$ der zugehörige halbe Streifen, $P_i Q_i = y_i$, $P_{i+1} Q_{i+1} = y_{i+1}$. Wird der Inhalt des ganzen Streifens von der Breite 1 als arithmetisches Mittel der Rechtecke $2y_i$ und $2y_{i+1}$ genommen und ist S_i die Summe der ersten i-Streifen, dann wird $S_{i+1} = S_i + (y_i + y_{i+1})$.

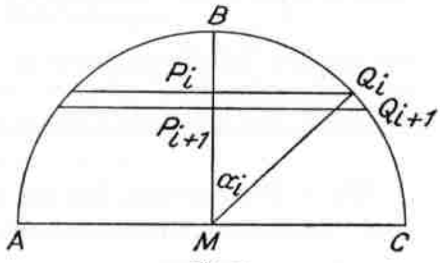


Fig. 27

Für den Streifen S_1, der vom Kreis und der Sehne $2y_1$ begrenzt ist, wird der Kreis durch die Parabel ersetzt und dementsprechend $S_1 = \frac{4}{3} y_1$ gesetzt. Damit ist die Tabelle zu berechnen. Praktisch geht das so vor sich: Wird der Winkel $P_i M Q_i$ mit α_i bezeichnet, so hat man

$$\cos\alpha_i = \frac{100 - i}{100} = 1 - \frac{i}{100}, \quad y_i = 100 \cdot \sin\alpha_i,$$

wobei

$$\sin\alpha_i = \frac{i}{100}\sqrt{\frac{200}{i} - 1} = \frac{1}{100}\sqrt{200i - i^2},$$

also

$$y_i = \sqrt{200i - i^2}$$

$\cos\alpha_i$	y_i	$y_i + y_{i+1}$	S_i
0,99	14,1	34,0	19
0,98	19,9	44,2	53,0
0,97	24,3	52,3	97,2
0,96	28,0	59,2	149,5
0,95	31,2	65,3	208,7
0,94	34,1	70,9	274,0
0,93	36,8	76,0	344,9
0,92	39,2	80,7	420,9
0,91	41,5	85,1	501,6
0,90	43,6	89,2	586,7
0,89	45,6		675,9
usw.			

in vollständiger Übereinstimmung mit den Tabellenwerten Keplers.

Daß die Anleitung Keplers zur Berechnung der halben Segmente dasselbe meint, ist danach nicht zu bezweifeln, seine Beschreibung ist jedoch nicht korrekt, insofern nach ihr alle Zahlen $\frac{S_i}{2}$ $(i > 1)$ um $\frac{y_i - y_1}{2}$ zu klein wären.

Der Vollständigkeit halber sei vermerkt, daß die Integralformel für das Segment von der Höhe x

$$S(x) = 2\int\limits_0^x \sqrt{x(2r-x)}\,dx = \frac{r^2\pi}{2} - (r-x)\sqrt{x(2r-x)} - r^2\cdot\arcsin\frac{r-x}{r}$$

mit Keplers Tabelle vollkommen übereinstimmende Werte ergibt.

160.20. Ein hier einzuschiebender Zusatz in Nr. 89, S. 241.

160.31. Die Aussage, daß das halbe Hyperbelsegment VAB größer sei als drei Viertel eines ihm einbeschriebenen Dreiecks, wäre trivial. In Wirklichkeit soll bewiesen werden

$$\frac{2}{3}\triangle\,\mathrm{CAB} < \text{halbes Hyperbelsegment VAB} < \frac{4}{3}\triangle\,\mathrm{VAB}.$$

Die linke Seite der Ungleichung ergibt sich leicht. Es ist nämlich

$$\triangle\,\mathrm{CAB} = 2\cdot\triangle\,\mathrm{OAB},$$

halbes Parabelsegment OAB $= \frac{4}{3}\triangle\,\mathrm{OAB} = \frac{2}{3}\triangle\,\mathrm{CAB}$, also, da das Hyperbelsegment das Parabelsegment umgreift,

$$\text{halbes Hyperbelsegment VAB} > \frac{2}{3}\triangle\,\mathrm{CAB}.$$

Die rechte Seite wird von Kepler durch eine unpräzise Überlegung bewiesen. Er argumentiert nämlich: Der Hyperbelbogen VB schmiegt sich enger an die Sehne VB an als der Parabelbogen OB an die Sehne OB. Da aber für die Parabel die bereits erwähnte Gleichung gilt

$$\text{halbes Parabelsegment OAB} = \frac{4}{3}\triangle\,\mathrm{OAB}, \text{ so muß}$$

$$\text{halbes Hyperbelsegment VAB} < \frac{4}{3}\triangle\,\mathrm{VAB} \text{ sein.}$$

161.5. Die Korrektur ist nach dem Münchener Handexemplar gemacht. Zu dem Exempel Z. 8ff. befindet sich ebenda folgende handschriftliche Korrektur: „Weil dan die Lähn hat 10 schuch, des bodens halber Diameter 3 s. [3 semis = $3^1/_2$] so multiplicirs in einander, khompt 35, das multiplicir in 3.14159,

so khompt	94.248	Kürtzer. Multiplicir die Lähn mit des bodens
	15.708	halbem Diameter, was kompt multiplicir ferners
	109.956	in das Circkelfeld fol. 10, für nur eine Ziffer
das ist	110.	verstanden, so hastu etc."

[Darunter nachträglich:] „Dise correctur ist vnnötig, thails falsch."

Diese Korrektur hat Kepler auch dem Frankfurter Arzt J. H. Beyer mitgeteilt in einem verlorenen Brief vom 5./15. Jan. 1617. Dieser hatte ihn bereits am 19./29. Sept. 1616 (Bd. XVII, S. 186) auf die Fehlerhaftigkeit des letzten Absatzes von Nr. 19 aufmerksam gemacht. Tatsächlich ist ja, wenn r den

Radius der Kugel, s die Mantellinie des einbeschriebenen rechtwinkligen Kegels bedeuten, $s = r\sqrt{2}$ und $r\pi s = \sqrt{2} \cdot r^2\pi$, nicht $\sqrt{2 r^2 \pi}$, wie Kepler angibt.

162.3. Korrektur nach dem Münchener Handexemplar.

162.30. Das Handexemplar hat an dieser Stelle die Randnotiz: „An einer Kugel zaiget der boltz die proportion des felds am Hüetlin, an einer Parabola zeigt er Diametrum des felds am grund des Hüetlins."

166.35. *Villalpandus, Joh. Bapt.*: Commentarius in Ezechielem III, 295. Rom 1598.

167.8. Ein Zusatz zu dieser Stelle am Ende von Nr. 89, S. 242.

167.16. Archimedes hatte nur Schnitte eines geraden Kegels senkrecht zur Achse oder zu einer Mantellinie zugelassen und dementsprechend Ellipse, Parabel, Hyperbel als resp. Schnitte eines spitzwinkligen, rechtwinkligen, stumpfwinkligen Kegels erklären müssen. Im Gegensatz dazu läßt Apollonius sowohl gerade als schiefe Kegel und Schnittebenen beliebiger Lage zur Achse zu, so daß alle Arten von Kegelschnitten an einem einzigen Kegel entstehen können. Vgl. Cantor I³, 334f.

Kampffrad (Z. 18) = Kammrad, Gewirtzscarnitzel (Z. 19) = Gewürztüte.

168.4. *Serenus von Antinoeia* (4. Jh. n. Chr.) ist Verfasser einer Schrift „Über den Zylinderschnitt". Lat. Ausgabe von Commandino 1566. (Tropfke VI², 139).

schlims (Z. 5) ist Adverb von schlimm = schief, schräg.

169.18. Die Fadenkonstruktionen von Ellipse, Hyperbel, Parabel gibt Kepler erstmals im 4. Kap. der „Astronomiae Pars Optica" (Bd. II, S. 92 f.). Die Ellipsenkonstruktion ist altbekannt; das bedeutet auch die köstliche Bemerkung über die Cavallieri. Die von Hyperbel und Parabel hat Kepler auf alle Fälle selbständig gefunden.

173.4. Hiezu ein Zusatz in Nr. 89, S. 241.

174.18. Die Zahl 78 53982 ist falsch, es müßte vielmehr $7\,85398 = 500^2 \cdot \pi$ heißen. Der Fehler zieht sich durch die ganze Rechnung hin. Das Endergebnis müßte statt „zehenmal hundert tausend Mann" „hundert tausend Mann" lauten.

177.17. Die zwei zusammen zu setzenden Höhen sind IO = 142 049 und IP = 278 201. Daher wird OP = 420 250, nicht 356 250.

177.35. Die Berechnung der Tabelle der Kugelsegmente geschieht in gleicher Weise wie die der Kreissegmente (Anm. 158.23) durch ein Summationsverfahren. Die Halbkugel vom Radius $r = 100$ wird durch Ebenen parallel zu dem sie begrenzenden Großkreis in 100 gleichhohe Kugelzonen zerlegt. Gibt man dem Großkreis die Nummer 100, so ist die i-te Schnittfläche ein Kreis vom Radius $\rho_i = \sqrt{i(2r-i)}$.

Für die Summation wird nun der 1. Abschnitt, eine Kalotte von der Höhe 1, durch ein Paraboloidsegment vom Inhalt $S_1 = \frac{\rho_1^2 \pi}{2}$, die zwischen der i-ten und (i + l) ten Schnittebene enthaltene Kugelzone durch den Zylinder $\frac{\rho_i^2 + \rho_{i+1}^2}{2}\pi$ ersetzt. Dementsprechend wird die Summe der n ersten Abschnitte $S_n = \pi\left(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \ldots + \rho_{n-1}^2 + \frac{\rho_n^2}{2}\right)$, und die Differenz

$$S_{n+1} - S_n = \frac{\rho_n^2 + \rho_{n+1}^2}{2}\pi = \pi\left[n(2r-n) + (r-n) - \frac{1}{2}\right]$$
$$= \pi\left[r \cdot n + (n+1)(r-n) - \frac{1}{2}\right].$$

„Deß Formats wegen“ nimmt Kepler als Tabellenwert nicht S_n, sondern $\frac{S_n}{10} = S_n'$. Es ist also $S_{n+1}' - S_n' = \frac{\pi}{10}[r \cdot n + (n+l)(r-n)] - \frac{\pi}{20}$. Da die Tabelle nur ganze Zahlen hat, läßt sich das kleine Korrekturglied $\frac{\pi}{20}$ nicht an der einzelnen Zahl berücksichtigen, sondern nur von Zeit zu Zeit, nach je 6 bis 7 Schritten, als zu substrahierende Einheit.

Als Beispiel seien die Tabellenwerte für $n = 21$ bis 26 gerechnet, wenn von dem Keplerschen Wert $S_{20}' = 11728$ ausgegangen wird. Es ergibt sich

n	S_n	$S_{n+1} - S_n$	2. Differenz $2[r-(n+1)]\frac{\pi}{10}$	3. Diff.
20	11728			
	1156	$(2000 + 21 \cdot 80)\frac{\pi}{10} = 368\,\pi$		
21	12884		$15{,}8\,\pi$	
	1205^7	$(2100 + 22 \cdot 79)\frac{\pi}{10} = 383{,}8\,\pi$		$0{,}2\,\pi$
22	14089		$15{,}6\,\pi$	
	1254^8	$(2200 + 23 \cdot 78)\frac{\pi}{10} = 399{,}4\,\pi$		$0{,}2\,\pi$
23	15343		$15{,}4\,\pi$	
	1303	$(2300 + 24 \cdot 77)\frac{\pi}{10} = 414{,}8\,\pi$		$0{,}2\,\pi$
24	16646		$15{,}2\,\pi$	
	1351^9	$(2400 + 25 \cdot 76)\frac{\pi}{10} = 430\,\pi$		$0{,}2\,\pi$
25	17998		$15{,}0\,\pi$	
	1398	$(2500 + 26 \cdot 75)\frac{\pi}{10} = 445\,\pi$		
26	19396			

(Bei $n = 23$ ist die Korrektur um eine Einheit nach unten vorgenommen)

Die Probe zeigt, daß in der Tabelle Keplers Ungleichheiten vorhanden sind. Es kommt eine andere Beobachtung hinzu: Rechnet man das Segment S_n nach der bekannten Formel $S_n^* = \frac{\pi n^2}{3}(3r-n)$, und

$$S_n = \sum_1^{n-1} \rho_i^2 + \frac{\rho_n^2}{2} = \pi\left[n(n-1)r - \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6} + \frac{n(2r-n)}{2}\right]$$

$$= \pi\left(rn^2 - \frac{n^3}{3} - \frac{n}{6}\right),$$

dann wird $S_n^* - S_n = \frac{\pi n}{6}$. Bei $n = 100$ wird diese Differenz in der Tabelle $\frac{5\pi}{3}$. Da Kepler an dieser Stelle aber den genauen Wert von $\frac{2r^3\pi}{3}$ hat, so muß seine Tabelle auch auf dieses Ziel hin ausgeglichen worden sein.

179. 17. Ein großer Zusatz zu Nr. 40 bei Nr. 89, S. 241 f.

183. 20. „Pianta" ist in der Festungsbaukunst term. techn. für Grundriß. (Vgl. etwa *Cabrera*: La nuova architettura militare. Bologna 1683).

184. 6. Der Buchstabe Y, der wie in der Fig. XIV, S. 50 links oben am Zylinder stehen müßte, fehlt in der Fig. S. 183 versehentlich.

188. 33. Die launige Bemerkung „das lehret Archimedes usw." besagt natürlich nur, daß die Berechnung des Hyperbelsegments ein vorerst noch ungelöstes Problem sei, wie in der angezogenen Nr. 18 (S. 160) auch wirklich gesagt wird.

194. 16. Daß die vereinzelt schon S. 178, konsequent aber von hier ab verwendete Dezimalbruchsymbolik, die sich von unserer lediglich durch die Klammer anstelle des Kommas unterscheidet, von Jost Bürgi stammt, erfährt man nur aus dieser Bemerkung Keplers, der damit wieder einmal beweist, wie gewissenhaft er geistiges Eigentum anderer achtet. Er selbst benützt 10 Jahre früher in der Parallaxentafel der „Optik" (Bd. II, nach S. 240) die Schreibweise $572^{\underline{96}}$ für 572,96.

196. 17. *Clavius*: Opera, Mainz 1610 ff., tom. II, pag. 145.

„Dreyling" wird bei der „Erklärung der gebrauchten geometrischen Wörter" S. 270 kurz gleich „Dolium magnum" gesetzt. Die Angaben über die zahlenmäßige Größe des Dreilings als Weinmaß schwanken; Kepler legt hier für den doppelten österreichischen Dreiling rund 40 Eimer zugrunde.

196. 34. Der Satz ist das Theor. XXIII, S. 61, das in deutscher Übersetzung lautet: „Zwei Kegel, die durch Rotation eines rechtwinkligen Dreiecks mit ungleichen Katheten um eben diese Katheten entstehen, verhalten sich zueinander wie die jeweils rotierende Kathete." Sind nämlich b und c die Katheten, $b > c$, dann verhalten sich tatsächlich die Kegel $\frac{c^2 b\pi}{3} : \frac{b^2 c\pi}{3} = c : b$.

197. 12. Dieser Satz entspricht dem Theor. XXIV, S. 61 (vgl. Anm. 61.31). Ist b der Halbmesser der großen Kugel, c der der kleinen, so verhalten sich die 4 Körper K_1 = große Kugel, S_b = Linse („gedruckte Kugel"), S_c = Ei („ablenge Kugel"), K_2 = kleine Kugel

$$K_1 : S_b : S_c : K_2 = \frac{4\,b^3\pi}{3} : \frac{4\,b^2c\pi}{3} : \frac{4\,b\,c^2\pi}{3} : \frac{4\,c^3\pi}{3},$$

also

$$K_1 : S_b = S_b : S_c = S_c : K_2 = b : c.$$

197. 17. Vgl. dazu Theor. XXV, S. 62 und Anm. 62.11. Abgesehen davon, daß auch hier zu sagen ist, daß der Satz Falsches vermutet, ist hier wenigstens der Fehler im Wortlaut des lateinischen Theorems korrigiert, indem statt des Verhältnisses Haube : Zitrone das richtige

Haube : halbe Zitrone $= \rho : h$ gesetzt wird.

199. 24. Hier ist wieder übersehen, daß nach Theor. XXVI, S. 63f. das Verhältnis halbe Olive : Sphäroidsegment $\approx h : \rho$, also die halbe Olive $\approx$ Sphäroidsegment $\cdot \frac{h}{\rho}$ sein soll. Vgl. im übrigen Anm. 64.3.

201. 27. Der Sinn dieser Überlegungen ist die Vorbereitung der Aufgabe (Nr. 88), den Inhalt eines nur teilweise gefüllten Fasses zu berechnen. Näherhin wird hier das Problem gestellt, von einem durch Rotation eines Kegelschnittsegments um eine zur Sehne parallele Achse entstehenden Rotationskörper ein durch eine Ebene parallel zur Rotationsachse abgeschnittenes Körpersegment zu berechnen. Auf die Faßrechnung übertragen soll das heißen, daß der Abstand der schneidenden Ebene von der Achse der Halbmesser des Faßbodens sei.

In der Figur sei ABCD das rotierende Kegelschnittsegment, AC die Spur der schneidenden Ebene. Das Segment F_S liegt nun offenkundig zwischen den beiden „Gesellen", nämlich den durch Rotation von ABCD um BD einerseits, um AC andererseits entstehenden Rotationskörpern R_1 und R_2. Zur Berechnung von F_S macht Kepler ferner Gebrauch von den Schnitten der Mittelebene zwischen den Faßböden mit F_S und R_2, S bzw. S_2. Da F_S und R_2 gleiche Länge AC haben, so setzt Kepler ihre Inhalte proportional zu S und S_2, also

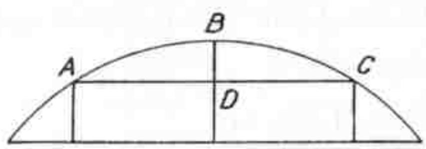


Fig. 28

$$F_S : R_2 = S : S_2 \quad \text{oder} \quad F_S = \frac{R_2 \cdot S}{S_2}.$$

Nach der zusätzlichen Bemerkung in Nr. 89, S. 241 würde diese Beziehung genau gelten, wenn der Bogen ABC parabolisch oder elliptisch wäre, in dem wichtigsten Fall des Kreisbogens stimmt sie jedoch nur angenähert.

202. 24. Das Resultat Keplers für das Segment des Kegelstumpfs ist ganz unmöglich. Tatsächlich enthält seine Rechnung mehrere Fehler. Die Fläche des Halbkreises vom Radius 3 ist nicht 9,425, sondern 14,136, der halbe Kegel entsprechend 127,224. Aber auch die oben entwickelte Rechenregel ist nicht richtig angewandt; es müßte $F_S \approx \frac{45 \cdot 127}{14} \approx 410$ statt 17,76 herauskommen.

Die im folgenden Abschnitt vorgetragene „Special-Lehre", nach der im Fall kreisförmig gebogener Faßdauben der halbe Zitronenkörper und sein Mittelschnitt durch das Kugelsegment und sein ebenes Kreissegment ersetzt werden, würde in der Bezeichnung von Anm. 201.27

$$R_1 : S_1 = R_2 : S_2 \text{ oder } R_1 : R_2 = S_1 : S_2$$

lauten, während nach Theor. XXV, S. 62 $R_1 : R_2 = AD : BD$ sein soll. Eine weitergehende Erklärung gibt die Nr. 89, S. 242.

205. 38. Schaub = Stroh, Widen = Weiden zu Stroh- oder Weidenbändern.

206. 11. Delrio = *Martinus Antonius del Rio*: Disquisitionum magicarum libri VI, Löwen 1599, Mainz 1603 und spätere Ausgaben.

207. 17. Siehe dazu die Anm. 78.14.

210. 38. Wegen $AC^2 = AT^2 + CT \cdot AV$ und $AT^2 = \frac{1}{2} CT^2$.

213. 2. Genau $\sqrt{200} = 14{,}14$. Z. 3/4 ist die Angabe „nit gar 12" zu korrigieren, da $3080 : 252 = 12 \frac{2}{9}$.

217. 34. Diese Tabelle ist lediglich eine Zusammenfassung der drei Tabellen von S. 94 und S. 114. Vgl. daher die Anm. 94.8 und 114.21, sowie 221.5.

218. 16. „Weitlinge" sind Milchschüsseln (vgl. S. 216, Z. 6/7), die vielerorts die Form von Kegelstümpfen haben mit offenem größerem Grundkreis, wovon der Name herkommt.

221. 5. Über die Art, wie die Tabelle gerechnet wurde, macht Kepler keine Andeutung; auch im handschriftlichen Nachlaß ist nichts darüber zu finden. Auf alle Fälle muß das Volumen eines Fasses mit kreisförmig gebogenen Dauben und dem Verhältnis $a : b = n : (n + 1)$, rheinischer oder österreichischer Bauart, bekannt sein.

Sei also a der Halbmesser der Böden, b der des Bauches, der Abstand der Böden 2 l, r der Krümmungshalbmesser der Dauben, also $r = \frac{2a^2}{(b-a)\varkappa^2}$, wobei $\varkappa$ wie früher das Konjugationsverhältnis bedeutet, $\varkappa^2 = 2$ beim österreichischen, $\varkappa^2 = 1$ beim rheinischen Faß, und $l^2 = 2r(b-a) - (b-a)^2$, d. h. beim österreichischen Faß $l^2 = a^2 + b(2a-b)$, beim rheinischen $l^2 = 3a^2 + b(2a-b)$.

Das Volumen des Fasses V_F setzt sich zusammen aus dem Zylinder zwischen den Böden und dem unter den gekrümmten Dauben liegenden Teil. Denkt

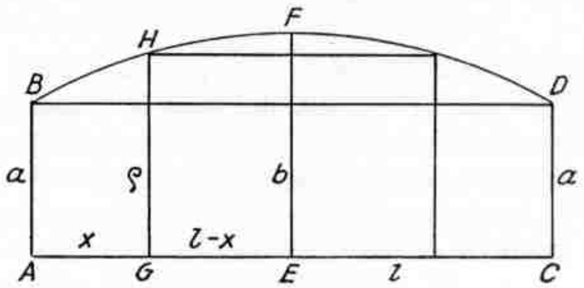


Fig. 29

man sich diesen letzteren nach dem von Kepler benützten Schalenmodell (Anm. 49.15) in eine Folge von Zylinderschalen zerlegt, so erhält man mit $AG = x$, $GE = l-x$, $GH = \rho$ und dem Schalendurchmesser $d\rho$

$$V_F = 2a^2 l \pi + 4\pi \int_0^l (l - x)\, \rho\, d\rho$$

mit

$$\rho\, d\rho = \left[(l - x) + (r - b)\frac{l - x}{\sqrt{r^2 - (l - x)^2}}\right] dx.$$

Es wird daher

$$V_F = 2\pi \left[l \left(a^2 + \frac{2l^2}{3} + (r - b)\sqrt{r^2 - l^2} - r^2 (r - b) \operatorname{arc\,tg} \frac{l}{r}\right]$$

oder näherungsweise, wenn $\operatorname{arc\,tg} \frac{l}{r} = \frac{l}{r} + \frac{1}{6}\frac{l^3}{r^3}$ gesetzt wird,

$$V_F \approx 2\pi l \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{l^2 b}{6r}\right).$$

Für die Differenz $\triangle$ zwischen Faß und doppeltem Kegelstumpf ergibt sich daher

$$V_F - V_{St} = \triangle = \frac{2\pi l}{3}\left[\frac{(b - a)^2}{2} + \frac{l^2 b}{2r}\right].$$

Für die Tabellenwerte $V_F : \triangle$ erhält man also

$$\frac{V_F}{\triangle} = \frac{3a^2 + 3b^2 + \frac{l^2 b}{r}}{(b - a)^2 + \frac{l^2 b}{r}}.$$

Setzt man schließlich $a = n$, $b = n + 1$, $l^2 = 2n^2 - 1$, $r = n^2$ beim österreichischen, $l^2 = 4n^2 - l$, $r = 2n^2$ beim rheinischen Faß in die letzte Formel ein, so kommt

$$\frac{V_F}{\triangle} = \frac{3n^2[n^2 + (n + 1)^2] + (2n^2 - 1)(n + 1)}{n^2 + (2n^2 - 1)(n + 1)} \text{ für das österreichische,}$$

$$\frac{V_F}{\triangle} = \frac{6n^2[n^2 + (n + 1)^2] + (4n^2 - 1)(n + 1)}{2n^2 + (4n^2 - 1)(n + 1)} \text{ für das rheinische Faß.}$$

Das ergibt beispielsweise für $n = 3$, d. h. $a : b = 3 : 4$, die Werte 9,65 bzw. 9,43, abweichend von Kepler, der die runden Zahlen 11 bzw. 9 angibt.

Eine einfachere, entsprechend auch ungenauere Formel für V_F erhält man, wenn man beachtet, daß $\frac{4a}{\varkappa^2} < \frac{l^2 b}{a^2} < \frac{4b}{\varkappa^2}$ ist, daß also angenähert $\frac{l^2 b}{a^2} \approx \frac{2(a+b)}{\varkappa^2}$ gesetzt werden kann. Man erhält auf diese Weise

$$\frac{l^2 b}{6r} = \frac{l^2 b}{6a^2} \cdot \frac{a^2}{r} \approx \frac{a+b}{3\varkappa^2} \cdot \frac{(b-a)\varkappa^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{6}$$

und

$$V_F \approx 2\pi l \left(\frac{a^2}{3} + \frac{2b^2}{3}\right) = \frac{Z_1 + 2Z_2}{3},$$

wobei Z_1 und Z_2 die Zylinder von der Höhe $2l$ über den Böden bzw. dem Bauch des Fasses bedeuten.

Zu dieser Näherungsformel kommt *J. H. Lambert* in der Abhandlung „Die Visierkunst", abgedruckt in: Beyträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung, Bd. 1, Berlin 1765, S. 329. Nach der Bemerkung Keplers S. 221/22 wurde im Rheinland mit dem schlechteren Näherungswert $\frac{Z_1 + Z_2}{2}$ gearbeitet.

Als Differenz $\triangle$ erhält man nun

$$\triangle = \frac{2\pi l}{3} b(b-a) \quad \text{und entsprechend} \quad \frac{V_F}{\triangle} = \frac{a^2 + 2b^2}{b(b-a)} = \frac{3n^2 + 4n + 2}{n+1}$$

für beide Arten von Fässern, da l weggefallen ist. Im Beispiel $n = 3$ ergibt sich so $V_F : \triangle = 11\frac{1}{4}$.

Die Differenz sukzessiver Tafelwerte zu $a : b = n : (n + 1)$ und $a : b = (n + 1) : (n + 2)$ wird danach

$$\frac{3(n+1)^2 + 4(n+1) + 2}{n+2} - \frac{3n^2 + 4n + 2}{n+1} = \frac{3n^2 + 9n + 5}{(n+1)(n+2)}.$$

Der Wert dieses Bruches ist $\frac{59}{20}$ für $n = 3$, $\frac{89}{30}$ für $n = 4$ und nähert sich mit wachsendem n immer mehr dem Wert 3, während Keplers Tabelle gerade bei größeren n die Tendenz zur Differenz 4 zeigt.

Es ist zu beachten, daß das österreichische und das rheinische Faß von gleichem Verhältnis $a : b$ nicht gleiche Länge und deshalb auch nicht gleiches Visier haben. Dieses ist nämlich $v = \sqrt{l^2 + (a+b)^2}$, beim österreichischen Faß also $v_1 = \sqrt{2a(a+2b)}$, beim rheinischen $v_2 = \sqrt{4a(a+b)}$. Soll das rheinische Faß auf gleiches Visier mit dem österreichischen gebracht werden, wie in der Tabelle S. 217/18 vorausgesetzt ist, so muß es verkürzt und ähnlich verkleinert werden. Dabei wird sein Volumen V_{Rh} im Verhältnis $v_1^3 : v_2^3$ kleiner, also $V'_{Rh} = \frac{v_1^3}{v_2^3} \cdot V_{Rh}$.

Mit $a = 3$, $b = 4$ wird $v_1 = \sqrt{66}$, $v_2 = \sqrt{84}$, $V_{Rh} = 161{,}7\,\pi$, also $V'_{Rh} = \frac{\sqrt{66}^3}{\sqrt{84}^3} \cdot 161{,}7\,\pi = 112{,}6\,\pi$, während das österreichische Faß mit $a = 3$, $b = 4$ das Volumen $112\,\pi$ hat. Es bestätigt sich daher Keplers Befund S. 217, daß bei diesem Verhältnis „Das Reinfaß gegen dem Oesterreichischen" „nichts mehr, nichts weniger" habe.

Die Grenzbedingung, bei der die Zitronenrundung über die Kugel in die Apfelrundung übergeht (S. 221 oben), lautet einfach $r = b$, beim rheinischen Faß also $b = \frac{2a^2}{b-a}$ oder $\frac{b^2}{a^2} - \frac{b}{a} - 2 = 0$, $\frac{b}{a} = 2$, beim österreichischen $b = \frac{a^2}{b-a}$, $\frac{b^2}{a^2} - \frac{b}{a} - 1 = 0$, $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Die zwei ersten Näherungswerte des Kettenbruchs $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sind $\frac{3}{2}$ und $\frac{5}{3}$, wenn $1 + \sqrt{5} = 3{,}2360$ gerechnet wird. Den Wert $\frac{5}{3}$ gibt Kepler an. Der Wert $\frac{200000}{123607}$ ist mit Regel de tri berechnet. Das rheinische Faß mit $b = r = 2a$, $l = a\sqrt{3}$ hat, nach der Integralformel gerechnet, $V_F = 6\pi a^3 \sqrt{3}$, $\triangle = \frac{4\sqrt{3}}{3} a^3 \pi$, daher $\frac{V_F}{\triangle} = 4{,}5$; Kepler gibt dafür die Zahl 4 an.

222. 9. Vgl. Anm. 120.8. Da Beyer das Faß als doppelten Kegelstumpf behandelt, ist die vorangehende Tabelle – ihre Richtigkeit vorausgesetzt – ein Maß für die von ihm erreichte Genauigkeit.

223. 8. Der Maßstab sollte genau einen halben Linzer Schuh lang sein. Wie indes Kepler nachträglich feststellte, hatte sich das Papier, das für den Druck genetzt wurde, etwas verzogen und zeigte den halben Linzer Schuh um 2 Punkte zu kurz. Er ließ deshalb den Maßstab neu drucken und auf besonderem Blatt jedem Exemplar beifügen (S. 255, Z. 11 ff.). Diese lose Beilage ist nur noch vereinzelt erhalten, z. B. im Exemplar des Stiftes St. Paul in Kärnten. Natürlich kann auch dieser korrigierte Maßstab nicht als Grundlage für eine Umrechnung in heutiges Maß genommen werden.

237. 11. Siehe Anm. 264.42.

237. 39. Die Berechnung geschieht nach der „Special-Lehre" für die Zitronenrundung von S. 202. Bedient man sich der Keplerschen Bezeichnung und setzt: „Großer Zirkelschnitz" $= \zeta$, „Kugelschnitz" $= \varkappa$, „Bauchzirkelschnitz" $= \beta$, dann wird das gesuchte Segment x der Zitronenrundung $x = \frac{\varkappa \cdot \beta}{\zeta}$. Bezeichnet man wie bisher die Halbmesser von Boden und Bauch mit a und b, mit l seine halbe Länge, mit r den Krümmungsradius der Dauben, mit $h = b - a$ die gemeinsame Höhe aller 4 Segmente, dann lautet die Formel für x explizit

$$x = \frac{\pi h^2}{3} \cdot \frac{(3r-h)\left[b^2\beta - a\sqrt{(b+a)\cdot h}\right]}{r^2\alpha - l(r-h)}, \quad \alpha = \arcsin\frac{l}{r}, \quad \beta = \arccos\frac{a}{b}.$$

Kepler führt seine Rechnung nicht an dem vorgegebenen Faß mit $r = 61{,}5$ durch, sondern an einem im Verhältnis $r : R = 61{,}5 : 10^5$ vergrößerten Modell. In diesem haben ζ' und $\varkappa'$ den Radius $R = 10^5$, die Segmente sind also der Tabelle S. 158 zu entnehmen. Zur Berechnung von β' vergrößert er zunächst $b' = \frac{R}{r} b$ auf $b'' = 10^5 = \frac{r}{b} b'$, entnimmt β'' der Tabelle und verkleinert b'' wieder im Verhältnis $\frac{b}{r}$, d. h. $\beta' = \frac{b^2}{r^2} \beta''$. Der endgültige Wert x wird schließlich $x = x' \cdot \frac{r^3}{R^3}$.

In Keplerschen Zahlen sieht das so aus: $a = 9{,}5$, $b = 11$, $r = 61{,}5$, $h = 1{,}5$, $R = 10^5$, $h' = 2439$. Damit wird
$\zeta' = 7162 \cdot 10^4$ (bei Kepler irrtümlich 10^5), $\varkappa' = 185 \cdot 10^{10}$, $\beta'' = 930 \cdot 10^6$, $\beta' = 2975 \cdot 10^4$, $x' = 76{,}8 \cdot 10^{10} \approx 77 \cdot 10^{10}$, $x = x' \cdot 232\,608 \cdot 10^{-15} \approx 180$. Bei direkter Berechnung nach der expliziten Formel, wobei $l = 13{,}5$, $\alpha = 0{,}221$, $\beta = 0{,}528$ zu setzen ist, ergibt sich $x = 187$ in befriedigender Übereinstimmung mit Kepler.

Die analytische Behandlung der Aufgabe führt, je nachdem man sich Keplers Schalenmodell oder das Schichtmodell zu eigen macht, auf das Integral

$$4 \int_0^l x \cdot \arccos \frac{a}{\rho} \cdot \rho\rho' dx \quad \text{oder} \quad 2 \int_0^l \rho^2 \cdot \arccos \frac{a}{\rho} dx.$$

Keines von beiden ist in geschlossener Form integrierbar. Eine leidliche Annäherung liefert nach dem Urteil des Auges der Halbzylinder von der Länge $2l$ und dem Grundkreishalbmesser $(b - a)$. In dem Beispiel $a = 9{,}5$, $b = 11$, $l = 27$ hat er den Inhalt $V = 60{,}75\,\pi = 190{,}8$, während Keplers Rechenregel $V = 187$ ergab.

238. 26. Zur Erläuterung der zwei Vorschriften für die Berechnung des „anderen Falles“, d. h. des Faßsegmentes von der Höhe $h > b - a$, sei folgendes bemerkt:

Die Figur ist als senkrechte Projektion eines Fasses auf eine zu den Böden parallele Ebene aufzufassen. Es ist darin ALBH ein Faßboden, DNFK der „Bauchzirkel“, $MA = a$, $MC = b$, $AC = b - a$. Die Dreieckchen ACD und BEF der Figur sind in Wirklichkeit keilförmige, beiderseits an den Böden zugespitzte Zwickel von der Länge des Fasses, von Kepler (Z. 22) als „zwey kleine zugespitzte stücklin“ bezeichnet. Läßt man diese ihrer Kleinheit wegen fürs erste außer Betracht, so ergibt sich das Volumen des leeren Segmentes als die Differenz des Sektors vom Öffnungswinkel $\alpha = AMB$ des ganzen Fasses und des Prismas über dem Dreieck MAB von der Höhe 2 l. Das ist der „erste Teil“.

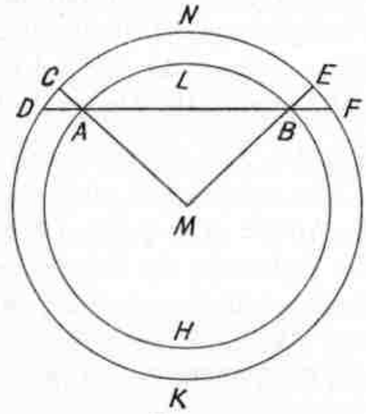


Fig. 30

„Umb der Künstler willen“ werden im zweiten Teil auch die „zwey kleinen spitzfeldlein“ (Z. 30) in die Rechnung einbezogen. Da ihre Gestalt auf eine Verwandtschaft mit dem Faßsegment der Höhe (b — a) hinzudeuten scheint, so wird ihr Inhalt nach der Regel de tri aus diesem Segment in folgender Weise berechnet: Ist nach Anm. 237.39 $x = \frac{\varkappa \cdot \beta}{\zeta}$ der Inhalt des Faßsegmentes, wobei β der „Bauchzirkelschnitz", ferner σ die Summe der Dreieckchen ACD und BEF, Z die Summe der beiden Zwickel, so wird $Z : x = \sigma : \beta$ gesetzt, also $Z = \frac{\sigma \cdot x}{\beta} = \frac{\sigma \cdot \varkappa}{\mathfrak{r}}$. Dabei ergibt sich die Summe σ in der Form: Kreissegment DNF + Dreieck MAB — Kreissektor CME.

Es mag hier interessieren, daß *Lambert* in der bereits erwähnten Abhandlung von 1765 (Anm. 221.5) mit dem ganzen Titel „Die Visierkunst sowohl ganz als nicht ganz gefüllter liegender Fässer" genau denselben Weg der Berechnung eines Faßsegmentes einschlägt wie Kepler, mit dem Unterschied nur, daß dieser den geleerten Teil, Lambert dagegen den noch vollen Teil im Auge hat. Im Vorbericht sagt er dazu (S. 314): „Für liegende Fässer, die nicht ganz voll sind, hat man noch gar keine genaue Methode sie zu visieren finden können. Ich habe daher einen Versuch angestellt, sie zu zergliedern, welcher glücklicher ausgefallen, als es anfangs zu vermuthen war. Es ließe sich nämlich der Raum, der in solchen Fässern ausgefüllt ist, der Achse nach in 4 Ausschnitte zerteilen, welche theils prismatisch, theils pyramidal, theils auch considal sind, und wovon nicht nur jedes besonders gemessen und mit dem Inhalte des Fasses verglichen werden konnte, sondern die sich in eine Summe zusammenziehen ließe." Als Rechenregel stellt er in § 36 auf: „Setzet, das Faß habe in der Mitte bei dem Spundloch noch einen Boden, der mit den beyden andern parallel sey. Messet den Raum aus, den der Wein auf diesen dreyen Böden benetzet oder bedeckt. Den Raum des mittleren Bodens nehmet vierfach, und addirt dazu den Raum der äußeren Böden. Die Summe wird durch 6 getheilt, und was herauskömmt, mit der Länge des Fasses multipliziert, so wird das Product der Inhalt des Fasses seyn, soweit es angefüllt ist."

An die Stelle der durch die Dreieckchen CDA und EBF angedeuteten Zwickel treten bei Lambert die Ausschnitte aus dem Faßwulst, die durch den Flüssigkeitsspiegel DF und die Meridianebenen MD bzw. MF gebildet werden. Diese ergänzen die Zwickel zu Sektoren des Wulstes vom Öffnungswinkel CMD bzw. EMF. Als Inhalt des ganzen Wulstes ergibt sich aus Anm. 221.5 (S. 535) $J = \frac{Z_1 + 2\,Z_2}{3} - Z_1 = \frac{2}{3}(Z_2 - Z_1)$.

Nur auf den Fall parabolischer Krümmung der Faßdauben abgestellt ist die Arbeit: „Des Jesuiten P. Pezenas Auflösung der Keplerischen Aufgabe, das Verhältniss der Faßschnitte betreffend, wenn selbige mit der Achse des Fasses parallel geschehen", in: Auserlesene Abhandlungen, welche an die Kgl. Akademie der Wiss. zu Paris eingesendet worden. 2. Teil. Übersetzt von Ferd. Wilh. Beer. Leipzig 1754, S. 80–105.

240. 7. Die Tabelle sei nur „beyläuffig proportionirt", bemerkt Kepler und will damit sagen, daß die Werte für das Segment über den Faßböden nur angenähert gelten. Tatsächlich entsteht die Tabelle aus vier durchgerechneten Fällen durch Interpolation und Extrapolation.

243. 43. Dazu Randnote in Keplers Handexemplar:

1.	2.	3.
Gantze v̈berhöhung	Eich des bauchschnitzes	Höch des lähren Theils

244. 1. Der Inhalt eines Fasses setzt sich zusammen aus dem Walger (dem Zylinder zwischen den Böden) und dem durch die Wölbung der Dauben gebildeten Wulst, bei Kepler „die Gürtel" genannt. Schneidet die Oberfläche der Flüssigkeit von jedem Boden ein Segment der Höhe $h < a$ ab, dann ist das Verhältnis von Walgersegment zu Walger

$$Z_1' = \frac{a^2\alpha - (a-h)\sqrt{h(2a-h)}}{a^2\pi}, \quad a = \text{arc cos}\,\frac{a-h}{a}.$$

Hält der Walger genau einen Eimer, dann gibt Z_1' den Bruchteil eines Eimers, der im Walgersegment enthalten ist, $Z_1 = 41 \cdot Z_1'$ also die Zahl der Achteringe im Segment, da der Eimer zu 41 Achteringen genommen wird. Wird schließlich $a = 100$ gesetzt, so sind die Zahlen der ersten Reihe die Werte von

$$Z_1 = \frac{41}{\pi}\left[\alpha - \frac{100-h}{100}\sqrt{2\,\frac{h}{100} - \left(\frac{h}{100}\right)^2}\right].$$

Ist Z_2 die entsprechende Verhältniszahl für den Wulst, so ergibt sich unter Vernachlässigung der beiden Zwickel (vgl. Anm. 238.26)

$$Z_2 = \frac{(V_F - V_W)\cdot\frac{\alpha}{\pi}}{(V_F - V_W)}\cdot 41 = \alpha\cdot\frac{41}{\pi}, \quad \alpha = \text{arc cos}\,\frac{a-h}{a}.$$

Beispiel: Mit $h = 75$, $\alpha = 1{,}31776$ wird $Z_1 = 14{,}04$, $Z_2 = 17{,}2$. In der Tabelle findet man übereinstimmend damit das Paar $h = 75$, $Z_1 = 14$ und, mit Interpolation, $h = 75$, $Z_2 = 17{,}2$. Setzt man umgekehrt $Z_2 = 17$, woraus $\alpha = 1{,}30\,263$, $\alpha^\circ = 74^\circ 38' 10''$, so wird $\cos\alpha = 0{,}26\,495$, $h = 100\,(1 - \cos\alpha) = 73{,}5$. In Keplers Tabelle findet man den Wert $h = 73{,}4$.

Bei kleinen Werten von h müßte Z_2 nach dem genaueren Verfahren von Nr. 88 (S. 238) gerechnet werden. Kepler rechnet jedoch unverändert weiter, z. B. $Z_2 = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{41} = 0{,}07\,662$, $\alpha^\circ = 4^\circ 23' 25''$, $\cos\alpha = 0{,}99\,707$, $h = 0{,}293$, Tabellenwert $h = 0{,}3$.

245. 12. Randnote im Handexemplar:

„Nota. Weil fol. 91 der Obere bauchschnitz in wind geschlagen würt, wan es schon alberait an die böden gehet: damit doch auch diß orts etlicher maßen bekant werde, wie vil vom Obern bauchschnitz in einer jeden weins Höch biß an das centrum des bodens hinzue zurechnen, oder vnderm Centro davon zuziehen: so thue also. Visier die halbe boden Höch, mit anschlagung des visierstabs: visier auch die weins Höch yber das centrum des bodens, oder sein ernidrigung under das centrum. Setz baide eichen in die regel zur link vnd rechten; setz die aich des bauchschnitzes in die mit, so kompt im facit die gesuchte correction. Diß ist ein proceß mit demjenigen, da man des bauchschnitzes Thail suchet, hatt auch einerlay grund ex cubo."

246. 33. „röricht" bezeichnet die Eigenschaft, durch die Ritzen eines Siebes zu fallen.

Zum System der römischen Gewichtsmaße vgl. Tropfke I², 123 f.

Die Randnote zu dieser Stelle im Handexemplar ist nicht von Keplers Hand.

248. 24. *Heurnius, Joannes*: Praxis Medicinae nova ratio. Leiden 1590.

249. 37. *Agustín, Antonio* (Erzbischof von Tarragona): Antiquitatum Romanarum Hispanarumque in nummis Veterum dialogi XI. Antwerpen 1617. Frühere Ausgaben in italienischer Sprache Rom 1592 und später.

250. 38. Der Kölner Erzbischof Ernst von Wittelsbach († 1612) trug sich um 1600 mit einem umfassenden Plan der Reform des deutschen Maß- und Gewichtswesens. Als er Ende Mai 1605 nach Prag kam und dort durch Vermittlung Herwarts von Hohenburg Kepler kennenlernte, legte er diesem sein Manuskript vor, zu dem er bereits Gutachten von Simon Stevin, Lazarus Schoner und Adrianus Zelstius vorliegen hatte, und forderte auch ihn zu einer Stellungnahme auf. Keplers eigenhändiges Gutachten ist im Entwurf in Mss. Pulk. V, 187ff. erhalten.

251. 11. Die in der Folge erscheinende Zahl von 307 055 Kubikeinheiten der Visierrute für eine Halbkandel = ein halber Achtering, wird in Nr. 81 (S. 226) begründet.

251. 38. Das als Mesolabus oder Mesolabium bekannte Instrumentchen, das zur graphischen Lösung der Würfelverdoppelung erfunden wurde, beschreibt Cantor I², 330f.

254. 10. *Speckle, Daniel*: Architectura von Vestungen. Strassburg 1599 u. später.

254. 13. *Brechtel, Franz Joachim*: Büchsenmeisterey, d. i. kurtze, doch eigentliche erklerung deren ding u. s. w. Nürnberg 1591 und 1613.

254. 31. *Myritius, Joannes*: Opusculum geographicum rarum ... Ingolstadt 1590.

255. 13. Die Stellenangabe ist zu korrigieren in fol. 498b. B. C. *Villalpando* diskutiert dort den „pes Colotianus" unter Hinweis auf Agricola, Paetus, Philander und Grsepsius (Grzebski).

255. 36. *Freher, Marquard*: Statura Caroli Magni. Φιλοπόνημα. O. O. u. J. (ca. 1600).

258. 13. Bei den hier und S. 263, Z. 32 angezogenen Titeln handelt es sich um ein und dasselbe Werk von *Lazarus Ercker*: Beschreibung aller fürnemster Mineralischen Ertzt und Berckwercksarten, Prag 1574 und zahlreiche spätere Ausgaben. Erst von 1674 ab mit dem Titel: Aula subterranea alias Probierbuch.

259. 8. Zu der Angabe über das Prager Pfund notiert Kepler in dem Münchener Handexemplar: „falsch". Die von Bodin übernommenen Zahlen, sämtlich auf das Pariser Pfund bezogen, hat Kepler in Mss. Pulk. V, 206 zusammengestellt; nicht alle davon sind in der vorliegenden Tabelle als solche gekennzeichnet. Der Umrechnungsfaktor von Pariser auf Linzer Gewicht ist 1,11, z. B. Toulouse/Montpellier/Avignon 121 ergibt, auf Linz bezogen, $1{,}11 \cdot 121 = 134$. Die Bedeutung von f. in der Tabelle ist unklar.

260. 15. Randnote im Handexemplar: „Diser Tafel bedürffen wir nit, auch nit der buchstaben, die Ziffer seind genugsam. Erstlich hatt man dise Zahlen durch einen stain 1.3.9.27.81. ferners hatt man dise per additionem zwaier stain durch

1	. . . .	4. 10. 28. 82.
3	. . . .	12. 30. 84.
9	. . . .	36. 90.
27	. . . .	108.

durch drey zusammengelegte stain dise 13. 31. 85. 37. 91. 109.
vnd dise 39. 93. 111. 117.
durch vier dise 40. 94. 112. 118. 120.
durch alle 5 disen 121.

Summa 31 bishero 1. 3. 4. 9. 10. 12. 13. 27. 28. 30. 31. 36. 37. 39. 40. 81. 82. 84. 85. 90. 91. 93. 94. 108. 109. 111. 112. 117. 118. 120. 121. Die ybrige 90 hatt man durch subtraction oder gegen gewicht zwaier auß jetzgesetzten."

Die Mnemotechnik war in den mittelalterlichen Schulen als didaktisches Hilfsmittel beliebt und verbreitet. Ein bekanntes Beispiel, das sich in etwa mit dem hier vorliegenden vergleichen läßt, ist der Cisiojanus für den Kalender.

261. 23. Randnote im Handexemplar: „Et quia VII Modij Romanj aequant Medimnum, ut testatur Cornelius Nepos in vita Attici, quare Medimnus Atticus paulo quid minus est dan ein Öst: Metzen."

„Ruth II vers. 17. Ephi tres Modios est latinae versionis interpretamentum."

261. 33. Randnote: „Also soll das Täfele verstanden werden. 30 Ob der Enser Metzen seind $54\frac{3}{4}$ Wiener vnd $37\frac{1}{2}$ Vnter Enser etc. vnd $22\frac{1}{2}$ Prager

Strich. Item 31 Wiener seind $21\frac{3}{8}$ Vnter Enser, vnd etc. $17\frac{1}{8}$ Ob der Enser etc. vnd $12\frac{7}{8}$ Prager Strich. Item 30 Metzen Vnter Enser seind $43\frac{1}{2}$ Wiener vnd 24 Ob der Enser vnd $18\frac{1}{16}$ Prager Strich etc."

Zu der auf der folgenden Seite vorkommenden Schiffsbezeichnung „Hohe Naue" vgl. den Brief Keplers an Remus vom 31. Aug. 1619 (Bd. XVII, S. 375): „. . . praemisi tres paginas in classe funaria (tu mihi dicito aliud vocabulum quo exprimam Ein hohe naue)."

264. 1. *Bodin, Jean*: Universae naturae Theatrum. Lyon 1596 und später.

264. 25. Wegen des Briefwechsels zwischen Kepler und Thomas Harriot, der sich an das Erscheinen der „Astronomiae Pars Optica" anschloß, vgl. Bd. II, S. 425. Die Briefe selbst sind in Bd. XV und XVI zu finden.

264. 42. Michel Coignet (vgl. auch Anm. 128.8) gilt als Erfinder des Proportionalzirkels. Vgl. Cantor II, 687.

Die 265.2 erwähnte Tafel der Kubikzahlen von *Clavius* bildet einen Anhang zu dessen Geometria practica, lib. VIII. Opera Omnia II, 221–226.

268. 25. In der Rechnung stecken zwei Fehler: Der Feingoldgehalt ist ungenau zu $1151\frac{1}{2}$ statt 1146,4 berechnet. Sodann ist der Kupfergehalt irrtümlich von der Zahl 1875 statt von 1500 gerechnet. Anstelle der Zahl $723\frac{1}{2}$ müßte 353,6 herauskommen, wie man leicht nachrechnet. Dabei ist das Verhältnis der spezifischen Gewichte von Gold und Kupfer mit Kepler als 1875 : 910 = 2,06 statt richtiger 2,15 angenommen.

272. 25. Die drei Nummern 26.27.28. sind im Register versehentlich ausgelassen.

279. 10. Der Angeredete ist Landgraf Philipp (III.) von Hessen (1581–1643), dritter Sohn des Landgrafen Georg I. von Hessen-Darmstadt, der seit 1609 in dem wiederhergestellten Schloß Butzbach residierte. Seine Biographie in ADB XXVI, 2f. Die Widmung des Werkes an Philipp überrascht insofern, als von einem Briefwechsel mit Kepler vor Juli 1623 nichts bekannt ist, während das Manuskript der „Chilias" mitsamt der Widmung schon 1622 nach Tübingen geschickt wird. Wir wissen jedoch, daß Kepler 1621 von Württemberg aus einen Besuch in Butzbach machte; in einem Schreiben an Landgraf Georg II. von Hessen-Darmstadt vom November 1627 (Bd. XVIII, S. 323) bemerkt er außerdem, daß er „von 6 Jahren hero von deroselben [d. i. Landgraf Philipp] vnderschidliche Fürstliche gut thaten empfangen" habe. Zu diesen „Guttaten" gehören ohne Zweifel die 30 Silbermünzen (Reichstaler), von denen in dem Gedicht die Rede ist und die Kepler mit seinen 30 Propositionen erwidern will. „Φίλα πολλά" ist die Übersetzung von „Philipps = Villiebs".

286. 35. Der Begriff „aussprechbar" (ῥητός) ist bei Kepler weiter als bei Euklid. Während dort eine Strecke a aussprechbar heißt, wenn sie mit der Einheitsstrecke e quadratisch kommensurabel ist, d. h. wenn $a^2 = \alpha \cdot e^2$ ist, definiert Kepler in der „Harmonice Mundi" (lib. I, Def. 13.14; Bd. VI, S. 23) indem er den Kreisdurchmesser d als Einheit wählt, dem Sinn nach so: eine Strecke s heißt aussprechbar in Länge, wenn $s = \frac{\lambda}{\mu} \cdot d$, die Fläche f aussprechbar, wenn $f = \frac{\lambda}{\eta} \cdot d^2$ ist. Dazu kommt noch der Begriff der Aussprechbarkeit in Potenz, wenn s in Länge nicht aussprechbar, dagegen $s^2 = \varkappa \cdot d^2$ ist. Aussprechbare Strecken schlechthin sind als in Länge aussprechbar zu verstehen. Wird $d = 1$ gesetzt, so sind die Größen aussprechbarer Strecken Rationalzahlen, in Übereinstimmung mit der „Notitia communis" zu Prop. XXIV (S. 303): „Jede Zahl drückt eine aussprechbare Größe aus."

Prop. IX ist nun so zu verstehen, daß von zwei Rationalzahlen a und b, deren Verhältnis nicht die Potenz einer Rationalzahl ist, die mittlere Proportionale keine Rationalzahl sein kann. Wäre nämlich $x = \sqrt{a \cdot b}$ rational, dann wäre auch $\frac{x}{b} = \lambda$ rational und wegen $a = \lambda^2 b$ das Verhältnis $a : b = \lambda^2$ das Quadrat einer Rationalzahl gegen die Voraussetzung. Allgemeiner würde aus der Existenz einer Reihe von i rationalen mittleren Proportionalen zwischen a und b folgen, daß $a : b = \lambda^{i+1}$, also die $(i + 1)$te Potenz einer Rationalzahl sein müsse.

Prop. XI besagt: In der arithmetischen Reihe $a, x_1, x_2 \ldots x_n, b$ deren Glieder aussprechbar sind, sind die Verhältnisse zwischen jeweils benachbarten Gliedern inkommensurabel zueinander. Der Satz ist eo ipso richtig, wenn das Verhältnis der Endtermini a und b nicht die Potenz einer Rationalzahl ist, weil dann keine aussprechbare mittlere Proportionale existiert. Im allgemeineren Fall, wo das Verhältnis a zu b die $(i + 1)$te Potenz einer Rationalzahl ist, und daher i aussprechbare mittlere Proportionalen existieren, gibt Kepler lediglich das Zahlenbeispiel $a = 8$, $b = 18$ mit der mittleren Proportionale 12 und dem arithmetischen Mittel 13. Sein Beweis, daß die Verhältnisse 13 : 8 und 18 : 13 sowohl unter sich als mit dem ganzen Verhältnis 18 : 8 inkommensurabel seien, kann jedoch als Modell für den allgemeinen Beweis dienen.

289. 11. Sind $a < b < c$ die drei Größen, dann behauptet Kepler

$$1.\ \frac{c}{a} : \frac{b}{a} < \frac{c-a}{b-a} \qquad 2.\ \frac{c}{a} : \frac{c}{b} > \frac{c-a}{c-b}.$$

Daß der Satz nicht in dieser Allgemeinheit gilt, beweist man ohne Zuhilfenahme des Maßbegriffs etwa so: es werde zunächst vorausgesetzt, daß a, b, c Glieder einer geometrischen Reihe mit dem Anfangslied a seien, $b = a \cdot q^m$, $c = a \cdot q^n$ $(q > 1)$. Dann wird

$$\frac{c}{a} : \frac{b}{a} = q^n : q^m \qquad \frac{c-a}{b-a} = \frac{q^n - 1}{q^m - 1}$$

und offenbar

$$\frac{q^n}{q^m} < \frac{q^n - 1}{q^m - 1}.$$

Im zweiten Fall wird

$$\frac{c}{b} : \frac{c}{a} = \frac{1}{q^m} \text{ und } \frac{c-a}{c-b} = \frac{q^n - 1}{q^n - q^m},$$

also wegen

$$\frac{1}{q^m} < \frac{q^n - 1}{q^n - q^m} \qquad \frac{c}{b} : \frac{c}{a} < \frac{c-a}{c-b}.$$

Aber die Umkehrung $\frac{c}{a} : \frac{c}{b} > \frac{c-a}{c-b}$ ist nur dann richtig, wenn auch $\frac{c}{b} : \frac{c}{a} < \frac{c-b}{c-a}$ ist.

Trifft die Voraussetzung, daß a, b, c Glieder einer geometrischen Reihe seien, nicht zu, dann läßt sich durch fortgesetzte Unterteilung des Verhältnisses c : a nach dem Verfahren von Postulat 2 eine geometrische Reihe mit dem Anfangsglied a und dem Endglied c bilden, von der ein Zwischenglied $a \cdot q^m$ um weniger als eine vorgegebene Größe ε von b differiert. Der Satz gilt daher mit derselben Einschränkung für drei beliebige Größen $a < b < c$.

289. 30. Die (unvollständige) Prop. XIV ist eine Verschärfung des Corollars zu Prop. XIII. Der Satz besagt, daß unter derselben Voraussetzung $b - a = c - b = \triangle$

$$\frac{c}{a} < \left(\frac{b}{a}\right)^2 \text{ sei.}$$

Zum Beweis bilde man $\frac{c}{b} = \frac{b + \triangle}{a + \triangle} < \frac{b}{a}$. Wegen $\frac{c}{a} = \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a}$ ist also $\frac{c}{a} < \left(\frac{b}{a}\right)^2$, aus demselben Grund ist aber auch $\frac{c}{a} > \left(\frac{c}{b}\right)^2$, also schließlich $\left(\frac{c}{b}\right)^2 < \frac{c}{a} < \left(\frac{b}{a}\right)^2$ oder auch umgekehrt $\left(\frac{a}{b}\right)^2 < \frac{a}{c} < \left(\frac{b}{c}\right)^2$. Bei Frisch (VII, 312) ist der Satz falsch verstanden, nämlich $\frac{a}{c} > 2\left(\frac{a}{b}\right)$.

290. 17. Der Satz ist eine Folge des vorhergehenden. Setzt man $a > b$ und $2b > a$ voraus, so gilt für die drei Größen a, b, $(2b - a)$ die Gleichung $a - b = b - (2b - a)$, also ist nach Satz XIV $\frac{a}{2b - a} = \frac{\frac{a}{2}}{b - \frac{a}{2}} > \left(\frac{a}{b}\right)^2$. Kepler gibt auffallenderweise ein Zahlenbeispiel als Beweis. Auch diese Beziehung wird von Frisch falsch interpretiert als $\frac{a}{2} : \left(b - \frac{a}{2}\right) > 2\left(\frac{b}{a}\right)$.

291. 29. „Excessus" bedeutet (wie schon früher) den Überschuß $\alpha = v_1 : v_2$ des größeren Verhältnisses v_1 über das kleinere v_2. Dementsprechend wird der Überschuß α_1 von $\frac{999}{998}$ über $\frac{1000}{999}$ $\alpha_1 = 998\,001 : 998\,000$ (Kepler rechnet ein wenig anders, indem er $\frac{1000}{999} = \frac{999}{998\frac{1}{1000}}$ setzt). Ebenso wird nachher der Überschuß α_2 von $\frac{998}{997}$ über $\frac{1000}{999}$ gleich $\frac{997\,002}{997\,000}$. Es ist also

$$\alpha_1 = 1 + \frac{1}{998\,000}, \qquad \alpha_2 = 1 + \frac{2}{997\,000}$$

$$= 1 + \beta_1 \qquad\qquad = 1 + \beta_2, \text{ wobei } \beta_2 > 2\,\beta_1,$$

allgemein $\alpha_n = \frac{1000 - n}{999 - n} : \frac{1000}{999} = \left(1 - \frac{n}{1000}\right) : \left(1 - \frac{n}{999}\right)$

$$= 1 + \frac{n}{1000\,(999 - n)} = 1 + \beta_n, \text{ also } \beta_n = \frac{n}{1000\,(999 - n)} > n\,\beta_1.$$

292. 29. Die Zahl 999 001 002 004 etc. ist nicht ganz richtig. Wird nämlich das Verhältnis $v_1 = \frac{1000}{999}$ in n gleiche Teilverhältnisse aufgeteilt:
$v_1 = \frac{1000}{x_1} \cdot \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \ldots \frac{x_n}{999}$, so daß $\frac{x_i}{x_{i+1}} \leqq \frac{998\,001}{998\,000}$, so gilt das insbesondere für $\frac{x_n}{999}$, es wird also $x_n \leqq 999{,}001\,001\,002\,004$ etc. Da die Differenz der Glieder $x_n - 999 \leqq 0{,}001\,001$ etc. und diese Zahl $> \frac{1}{1000}$ ist, da ferner $x_n - 999$ das Maß des Verhältnisses $\frac{x_n}{999}$ sein soll, so läßt sich das Verhältnis $v_1 = \frac{1000}{999}$ mit dem Überschuß α_1 nur in weniger als 1000 gleiche Teilverhältnisse teilen.

293. 22. Zu der Berechnung des Elementes von 1000 : 998 aus dem von 1000 : 999 und insbesondere zu der Fehlerschätzung ist zu bemerken: Kepler geht aus von der Ungleichung $\frac{1000}{998} > \left(\frac{1000}{999}\right)^2$, aus der eine entsprechende Ungleichung für die beiden Elemente folgt. Zur Beurteilung seines Ergebnisses bilden wir die Reihe der mittleren Proportionalen

$$x_1 = \sqrt{999 \cdot 1000}, \quad x_2 = \sqrt{x_1 \cdot 1000} \ldots x_{10} = \sqrt{x_9 \cdot 1000}$$

$$y_1 = \sqrt{998 \cdot 1000}, \quad y_2 = \sqrt{y_1 \cdot 1000} \ldots y_{10} = \sqrt{y_9 \cdot 1000}.$$

Es ist dann $$\frac{x_{10}}{1000} = x'_{10} = (0{,}999)^{\frac{1}{1024}}$$

$$\frac{y_{10}}{1000} = y'_{10} = (0{,}998)^{\frac{1}{1024}} \quad \text{oder}$$

$$x'_{10} = (1 - 0{,}001)^{\frac{1}{1024}} = 1 - \frac{0{,}001}{1024} - \frac{1023}{2\,(1024)^2} \cdot 0{,}001^2 \ldots$$

$$1 - x'_{10} = \frac{0{,}001}{1024} + \frac{0{,}001^2}{2 \cdot 1024}.$$

Entsprechend wird

$$1 - y'_{10} = \frac{0{,}002}{1024} + \frac{0{,}002^2}{2 \cdot 1024}.$$

In erster Näherung erhält man daher

$$1000 - x_{10} = \frac{1}{1024} \qquad 1000 - y_{10} = \frac{2}{1024} = 2\,(1000 - x_{10}).$$

Genauer wird

$$1000 - y_{10} - 2\,(1000 - x_{10}) = 1000\left[\frac{1}{2}\,\frac{0{,}002^2}{1024} - \frac{0{,}001^2}{1024}\right] = \frac{1}{1000 \cdot 1024} \approx \frac{1}{10^6}$$

in Übereinstimmung mit der Angabe Keplers. – Das Wort „nequaquam" (S. 294, Z. 4/5) wäre demnach entweder zu streichen oder durch „certe" zu ersetzen.

295. 11. In Prop. XVIII ist zwar nur die Rede von Proportionen, für die der Satz unmittelbar klar ist, der eigentliche Sinn ist jedoch die Anwendung auf die Maßzahlen, mit denen im Beweis tatsächlich operiert wird. Aus $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \ldots$ folgt $\left\{\frac{a}{b}\right\} = \left\{\frac{b}{c}\right\} = \left\{\frac{c}{d}\right\} \ldots$ und $\left\{\frac{a}{c}\right\} = \left\{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}\right\} = 2\left\{\frac{a}{b}\right\}$, $\left\{\frac{a}{d}\right\} = \left\{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d}\right\} = 3\left\{\frac{a}{b}\right\}$ u. s. w.
Der Satz läuft auf die seit Archimedes bekannte Zuordnung einer geometrischen Reihe zu einer arithmetischen hinaus.

296. 12. Ist $\frac{1000}{b} = \frac{c}{d}$ und kennt man die Maßzahlen $\left\{\frac{1000}{c}\right\}$ und $\left\{\frac{1000}{b}\right\} = \left\{\frac{c}{d}\right\}$, so ist auch $\left\{\frac{1000}{d}\right\}$ bekannt wegen $\left\{\frac{1000}{d}\right\} = \left\{\frac{1000}{c}\right\} + \left\{\frac{c}{d}\right\} = \left\{\frac{1000}{b}\right\} + \left\{\frac{1000}{c}\right\}$. Zu je zwei Maßzahlen $\left\{\frac{1000}{b}\right\}$ und $\left\{\frac{1000}{c}\right\}$ findet man also durch Addition eine dritte $\left\{\frac{1000}{x}\right\}$, und es ist $\frac{1000}{b} = \frac{c}{x}$. Das ist der Inhalt von Prop. XIX, die zwar wieder nur von den Verhältnissen redet, während in Wirklichkeit die „mensurae" gemeint sind. Aus den 15 Proportionen S. 295, Z. 22–27 gewinnt man daher durch Addition von je zweien $\binom{15}{2} = 105$ neue, hat dann also insgesamt 120, nicht 120 neue, wie Kepler sagt. Dabei fallen sogar noch 5 von den 105 weg, weil sich in jeder Zeile durch Addition der ersten beiden Maßzahlen die schon bekannte dritte ergibt.

300. 10. Die beiden Praecepta dienen der angenäherten Berechnung von Logarithmen großer Zahlen nahe an 100 000.00. Während die erste Vorschrift, die in moderner Formelsprache

$$1 - \sin\alpha < \mathrm{Log}\,\sin\alpha < \frac{\mathrm{cosec}\,\alpha - \sin\alpha}{2}$$

lauten würde, aus der vorausgehenden Proposition folgt, wird die zweite, welche aus einem gegebenen Logarithmus den der nächst kleineren runden Zahl zu finden lehrt, ohne Beweis so gegeben:

Bekannt ist Log 99970,149, gesucht wird Log 99 970; als Lösung wird angegeben:

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}\ 99\,970.000 - \mathrm{Log}\ 99\,970.149 &= 99\,970.149 - 99\,970.000 \\ &= 0.149, \text{ also} \end{aligned}$$

$$\mathrm{Log}\ 99\,970.00 \approx 29.854 + 0.149 = 30.003.$$

Die Begründung kann kurz so gegeben werden:
Sind a und Log a gegeben, Log (a — $\triangle$ a) gesucht, $\triangle$ a klein gegenüber a, so wird $\frac{1000}{a-\triangle a} = \frac{1000}{a} \cdot \frac{1}{1-\frac{\triangle a}{a}} \approx \frac{1000}{a}\left(1 + \frac{\triangle a}{a}\right)$, daher $\left\{\frac{1000}{a-\triangle a}\right\} = \left\{\frac{1000}{a}\right\} + \left\{\frac{a+\triangle a}{a}\right\}$, oder, da $\left\{\frac{a+\triangle a}{a}\right\} = a + \triangle a - a = \triangle a$ gesetzt werden kann, Log (a — $\triangle$ a) — Log a = $\triangle$ a.

301. 37. Werden $\gamma\eta = \left\{\frac{AC}{AH}\right\}$, $\delta\gamma = \left\{\frac{AD}{AC}\right\}$ gesetzt, dann besagt Prop. XXIV:

$$\frac{\gamma\eta}{\delta\gamma} < \sqrt{\frac{AD}{AH}}.$$

Zu Keplers Beweis ist zu bemerken: Aus $\frac{a}{b} \lesseqgtr \frac{c}{d}$ folgt allgemein

$$ad + cd \lesseqgtr bc + cd \quad \text{oder} \quad \frac{a+c}{b+d} \lesseqgtr \frac{c}{d}, \quad \text{aus} \quad \frac{\upsilon\eta}{VH} > \frac{\gamma\upsilon}{CV} > \frac{\delta\gamma}{DC} \quad \text{also}$$

$$\frac{\upsilon\eta + \upsilon\gamma}{VH + VC} = \frac{\eta\gamma}{HC} > \frac{\gamma\upsilon}{CV} > \frac{\delta\gamma}{DC} \quad \text{und} \quad \frac{\eta\gamma + \gamma\delta}{HC + CD} = \frac{\eta\delta}{HD} > \frac{\delta\gamma}{DC},$$

während Kepler $\frac{\eta\delta}{HD} > \frac{\upsilon\gamma}{VC}$ behauptet, was nicht in allen Fällen zutrifft. (Aus $\frac{9}{8} > \frac{10}{9} > \frac{11}{10}$ folgt beispielsweise $\frac{19}{17} > \frac{10}{9}$ und $\frac{30}{27} > \frac{11}{10}$, aber nicht $\frac{30}{27} > \frac{10}{9}$.)

Falsch ist auch die Aussage $\eta\gamma - \gamma\delta = \gamma\upsilon$. Es ist vielmehr

$$\eta\gamma = \left\{\frac{AC}{AH}\right\}, \quad \gamma\delta = \left\{\frac{AD}{AC}\right\},$$

also

$$\eta\gamma - \gamma\delta = \left\{\frac{AC}{AH} : \frac{AD}{AC}\right\} = \left\{\frac{(AC)^2}{AH \cdot AD}\right\} = \left\{\left(\frac{AC}{AV}\right)^2\right\} = 2 \cdot \gamma\upsilon.$$

302. 25. Das Zahlenbeispiel soll $\frac{\gamma\eta}{\delta\gamma} < \sqrt{\frac{AD}{AH}}$ als richtig erweisen. Wegen $\frac{DA}{AV} = \frac{AV}{AH}$ wird $\frac{DA}{AH} = \left(\frac{AV}{AH}\right)^2$, also $\frac{\gamma\eta}{\delta\gamma} < \frac{DA}{AV}$.

Nun ist $\delta =$ 0.00

$\gamma = 28\,768.21 \quad \delta\gamma = 28\,768.21 \quad DA = 1000$

$\eta = 69\,314.72 \quad \eta\gamma = 40\,546.51 \quad VA = 707{,}1068$

Aus der Proportion $\frac{1000}{707{,}1068} = \frac{x}{\delta\gamma}$ ergibt sich x = 40 684.39. Da also $\frac{x}{\delta\gamma} = \frac{AD}{AV} = \sqrt{\frac{AD}{AH}}$ ist und $x > \eta\gamma$, so wird tatsächlich $\frac{\eta\gamma}{\delta\gamma} < \sqrt{\frac{AD}{AH}}$. Das zweite Beispiel geht ähnlich, nur wird mit der Gleichung $\frac{AD}{AV} = \frac{\eta\gamma}{x}$ gearbeitet.

304. 4. Kepler beweist die Prop. XXV für den Einzelfall a + 1 = 501, a = 500, d. h. für die Ungleichungen $\frac{1000}{501} < \left\{\frac{501}{500}\right\} : \left\{\frac{1000}{999}\right\} < \frac{1000}{500}$ und $\left\{\frac{501}{500}\right\} : \left\{\frac{1000}{999}\right\} < \frac{1000}{\sqrt{500 \cdot 501}}$.

Man erhält jedoch den Satz in der allgemeinen Form leicht, indem man in die Ungleichung $\frac{a+1}{a} < \left\{\frac{a}{a-1}\right\} : \left\{\frac{a+1}{a}\right\} < \frac{a}{a-1}$ von Prop. XXIII der Reihe nach die Werte a = 999, 998 u. s. w. bis a — 1 = S einsetzt und die Zeilen gliedweise miteinander multipliziert. So wird

$$\frac{1000}{999}\cdot\frac{999}{998}\cdots\frac{S+2}{S+1} < \frac{\left\{\frac{999}{998}\right\}}{\left\{\frac{1000}{999}\right\}}\cdot\frac{\left\{\frac{998}{997}\right\}}{\left\{\frac{999}{998}\right\}}\cdots\frac{\left\{\frac{S+1}{S}\right\}}{\left\{\frac{S+2}{S+1}\right\}} < \frac{999}{998}\cdot\frac{998}{997}\cdots\frac{S+1}{S}$$

oder

$$\frac{1000}{S+1} < \left\{\frac{S+1}{S}\right\} : \left\{\frac{1000}{999}\right\} < \frac{999}{S} < \frac{1000}{S}.$$

In gleicher Weise führt die Ungleichung

$$\left\{\frac{a}{a-1}\right\} : \left\{\frac{a+1}{a}\right\} < \frac{a+1}{\sqrt{(a+1)(a-1)}} = \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}$$

auf die Beziehung

$$\left\{\frac{S+1}{S}\right\} : \left\{\frac{1000}{999}\right\} < \sqrt{\frac{1000 \cdot 999}{(S+1)\,S}} < \frac{1000}{\sqrt{(S+1)\,S}}.$$

Wegen $\sqrt{\frac{1000 \cdot 999}{S\,(S+1)}} < \frac{999}{S} < \frac{1000}{\sqrt{S\,(S+1)}}$ liefert der Wurzelausdruck die beste obere Grenze, für die praktische Rechnung ist jedoch die Größe $\frac{999}{S}$ vorzuziehen.

304. 24. In einem Verzeichnis der Corrigenda zu Beginn des „Supplementums" notiert Kepler, daß die letzte Zahl 999 der Zeile in 501 zu ändern sei. Aus sachlichen Gründen muß jedoch 999 stehen bleiben.

306. 2. In unserer Formelsprache lautet der Satz XXVI: Sind a und b sukzessive Tafelargumente, dann ist

$$\frac{1000}{b} < \frac{\mathrm{Log}\,a - \mathrm{Log}\,b}{b-a} < \frac{1000}{a}.$$

Der allgemeine Beweis, den Kepler wieder durch das Zahlenbeispiel Log 500 — Log 501 ersetzt, kann so geführt werden: Definitionsgemäß ist $\left.\frac{b}{a}\right\} = \mathrm{Log}\,a - \mathrm{Log}\,b$, und der Keplerschen Tafel entnimmt man $b - a = 100 < \mathrm{Log}\,99\,900 = 100.05$. Da nach Satz XXV

$$\frac{\mathrm{Log}\,a - \mathrm{Log}\,b}{\mathrm{Log}\,999} > \frac{1000}{b}, \text{ so wird also } \frac{\mathrm{Log}\,a - \mathrm{Log}\,b}{b-a} > \frac{\mathrm{Log}\,a - \mathrm{Log}\,b}{\mathrm{Log}\,999} > \frac{1000}{b}.$$

Auf der andern Seite ist nach Satz XXV

$$\frac{\mathrm{Log}\,a - \mathrm{Log}\,b}{\mathrm{Log}\,999} < \frac{999}{a} \text{ und } \frac{100.05}{100} < \frac{1000}{999},$$

also

$$\frac{\mathrm{Log}\,a - \mathrm{Log}\,b}{b-a} = \frac{\mathrm{Log}\,a - \mathrm{Log}\,b}{\mathrm{Log}\,999}\cdot\frac{\mathrm{Log}\,999}{b-a} < \frac{999}{a}\cdot\frac{1000}{999} = \frac{1000}{a}.$$

307. 25. Der nicht ganz glücklich formulierte und deshalb schwer verständliche Satz XXVII ist einfach die Übersetzung von Satz XXV in trigonometrische Form. Setzt man in der Fig. (S. 307) den Halbmesser des Kreises AD = 1000, dann wird bei beliebigem b = AB, c = AC, also auch, wenn b und c sukzessive Tabellenargumente sind (b < c),

$$AB : AD = AD : AF \text{ und } AC : AD = AD : AG.$$

Die Ungleichung von Satz XXV läßt sich daher so schreiben:

$$\frac{1000}{c} = \frac{AD}{AC} = \frac{AG}{AD} < \frac{\text{Log } b - \text{Log } c}{\text{Log } 999} < \frac{AF}{AD} = \frac{AD}{AB} = \frac{1000}{b}.$$

Mit $b = \sin(90^\circ - \beta)$, $c = \sin(90^\circ - \gamma)$ wird daher $AF = \sec\beta$, $AG = \sec\gamma$ und

$$\frac{\sec\gamma}{AD} < \frac{\text{Log } b - \text{Log } c}{\text{Log } 999} < \frac{\sec\beta}{AD}, \quad \frac{\text{Log } b - \text{Log } c}{\text{Log } 999} < \frac{\sqrt{\sec\beta \cdot \sec\gamma}}{AD}.$$

Diese beiden Ungleichungen sind die Aussage von Satz XXVII. Der Beweis begründet zugleich die Korrekturen.

308. 14. Die Rechenregel ergibt sich unmittelbar aus der Proposition; es wird nämlich $\text{Log } b - \text{Log } c \approx 100.05 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{AD}{AB} + \frac{AD}{AC}\right) = 100.05 \cdot \frac{\frac{1000}{b} + \frac{1000}{c}}{2}$ (während Kepler nicht ganz korrekt sagt, daß das arithmetische Mittel bereits die Differenz der Logarithmen ergebe) oder („si placet labor")

$$\text{Log } b - \text{Log } c \approx 100.05 \frac{1000}{\sqrt{b \cdot c}}.$$

308. 24. Der Wortlaut von Coroll. IV ist zu korrigieren. Es ist nämlich $\text{Log} \sin\beta - \text{Log} \sin\varphi < (\sin\varphi - \sin\beta)\sqrt{\sec(90^\circ - \beta) \cdot \sec(90^\circ - \varphi)}$. In Keplers Beispiel $\varphi = 0^\circ 2'$, $\beta = 0^\circ 1'$ steckt ein Rechenfehler. Mit sin tot = 100000 wird nämlich $\sin\gamma = 58{,}18$, $\sin\beta = 29{,}09$, $\sec(90^\circ - \varphi) = 1718.873$, $\sec(90^\circ - \beta) = 3437.746$, $\text{Log} \sin\beta - \text{Log} \sin\gamma < 2430.87 \cdot 29.09 \approx 70\,714$, während er 80000 errechnet. Tatsächlich ist nach der Tabelle

$$\text{Log } 29{,}09 - \text{Log } 58{,}18 \approx 69000 < 70\,714.$$

309. 13. Der Appendix zeigt, daß Kepler sein Augenmerk auch auf die Differenzenreihen der Chilias gerichtet hat. Experimentell stellt er fest, daß bei wachsendem Numerus die Reihe der ersten Differenzen linear, die der zweiten quadratisch, die der dritten biquadratisch abnimmt. Den Beweis dafür versucht er nicht, „um nicht allzu dunkle Dinge vorzusetzen, da in einer so ungewöhnlichen Sache das Fehlen der Vokabeln zu schaffen macht." Mit Hilfe der Beziehung $\text{Log } x = z \cdot \ln \frac{z}{x}$ läßt sich Keplers Beobachtung verifizieren bzw. korrigieren. x, x_1, x_2, x_3 seien sukzessive Numeri. Das Bild der Tabelle mit den Differenzen sieht dann so aus:

Num.	Log.	Erste Diff.	Zweite Diff.	Dritte Diff.
x	$z \cdot \ln \frac{z}{x}$			
		$z \cdot \ln \frac{x_1}{x}$		
x_1	$z \cdot \ln \frac{z}{x_1}$		$z \cdot \ln \frac{x_1^2}{x x_2}$	
		$z \cdot \ln \frac{x_2}{x_1}$		$z \cdot \ln \frac{x_1^3 x_3}{x_1 x_2^3}$
x_2	$z \cdot \ln \frac{z}{x_2}$		$z \cdot \ln \frac{x_2^2}{x_1 x_3}$	
		$z \cdot \ln \frac{x_3}{x_2}$		
x_3	$z \cdot \ln \frac{z}{x_2}$			

Setzt man nun

$$y = \frac{x_1 - x}{x_1 + x}, \quad u = \frac{x_1^2 - x x_2}{x_2^2 + x x_2}, \quad v = \frac{x_1^3 x_3 - x x_2^3}{x_1^3 x_3 + x x_2^3},$$

so wird

$$\begin{aligned} d' &= z \cdot \ln \frac{x_1}{x} = z \cdot \ln \frac{1 + y}{1 - y} = 2z \cdot \left(y + \frac{y^3}{3} + \cdots\right) \\ d'' &= z \cdot \ln \frac{x_1^2}{x x_2} = z \cdot \ln \frac{1 + u}{1 - u} = 2z \cdot \left(u + \frac{u^3}{3} + \cdots\right) \\ d''' &= z \cdot \ln \frac{x_1^3 x_3}{x x_2^3} = z \cdot \ln \frac{1 + v}{1 - v} = 2z \cdot \left(v + \frac{v^3}{3} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Wegen der konstanten Tabellendifferenz $x_1 - x = x_2 - x_1 = \ldots 100$ wird $y < \frac{100}{2x}$, $u < \frac{100^2}{2x^2}$, $v < \frac{100^3}{x^3}\left(1 + \frac{150}{x}\right)$. Je größer x, desto genauer gelten daher die Beziehungen

$$\begin{aligned} d' &\approx 2zy \approx \frac{100 \cdot z}{x} = \frac{10^7}{x} \\ d'' &\approx 2zu \approx \frac{100^2 \cdot z}{x^2} = \frac{10^9}{x^2} \\ d''' &\approx 2zv \approx \frac{2 \cdot 100^3 \cdot z}{x^3} = \frac{2 \cdot 10^{11}}{x^3}. \end{aligned}$$

Das ergibt für $x = 50000$ beispielsweise $d' = 200$ (199.80), $d'' = 0.4$(0.409), $d''' = 0.0016$(0.0017). In Klammern sind die genauen Werte beigefügt.

Es bestätigt sich also, daß die ersten und zweiten Differenzen mit der 1. und 2. Potenz des Numerus abnehmen, bei der 3. Differenzenreihe ist dagegen an die Stelle des Biquadrats die 3. Potenz zu setzen. Nimmt man die Differenzen als Maßstab, so muß man Keplers Chilias geradezu als ein Muster für Genauigkeit erklären.

311. 21. In der Zahl Log 100 = 690 775.5422 sind die drei letzten Dezimalen fehlerhaft. Die richtige Zahl wäre Log 100 = 690 775.5279, oder, auf zwei Dezimalen gekürzt wie in der Chilias, Log 100 = 690 775.53. Der Fehler rührt von der Ungenauigkeit des Verdopplungslogarithmus her, der statt 69 314.7198 lauten müßte 69 314.7179. Für die Tafel ist er bedeutungslos, dagegen führt die aus Log 100 abgeleitete und deshalb ebenfalls fehlerhafte Zahl Log 10000 = 230 258.5141 statt 230 258.5093 Kepler auf den Verdacht, daß in der Logarithmentafel von Briggs etwas nicht in Ordnung sei. Vgl. dazu den Brief an E. Gunter vom 4. Dez. 1623 (Bd. XVIII, S. 144).

312. 21. Wird $a = \sin(90^\circ - \alpha)$, $(a + 1) = \sin(90^\circ - \beta)$ gesetzt und daher, mit sin tot = 1000, $\frac{1000}{a} = \sec\alpha$, $\frac{1000}{a+1} = \sec\beta$, dann gilt nach Satz XXVII

$$\mathrm{Log}\, a - \mathrm{Log}\,(a+1) \approx 100 \cdot \sqrt{\sec\alpha \cdot \sec\beta}$$

und

$$\mathrm{Log}\, a - \mathrm{Log}\,(a+1) \approx \frac{\sec\alpha + \sec\beta}{2}$$

oder

$$2\,\mathrm{Log}\, a \approx 2\,\mathrm{Log}\,(a+1) + \sec\alpha + \sec\beta\,.$$

Im Text müßte es Z. 19/20 statt „mediarum porportionalium" wohl heißen „mediorum arithmeticorum".

314. 7. Der Rechenfehler läßt sich nicht korrigieren, da er sich in der weiteren Rechnung fortsetzt.

361. 13. Zwischen „Praefatio" und „Primum Caput" ist im Original ein Blatt „Corrigenda" eingefügt, das in dieser Ausgabe wegfällt, da die Korrekturen alle im Text berücksichtigt sind.

361. 37. Die Logarithmentafel der Rudolphinischen Tafeln ist als „Heptacosias" mit 720 Zeilen angelegt. Es fehlt in ihr die Spalte der Sinus bzw. Absolutzahlen; an ihre Stelle treten die Partes vicesimae quartae und die Partes sexagenariae mit dem sin tot 24.0 bzw. 60.0 und der konstanten Argumentdifferenz 0.5 bzw. 0.2. Über die Konstruktion der „Heptacosias" vgl. S. 400 f. (Praec. V).

363. 18. „Numeri figurati seu logistici" nennt Kepler benannte Zahlen. Arithmetica logistica ist also das Rechnen mit benannten Zahlen. Viète nennt dieses Rechnen Logistica speciosa (im Gegensatz zu Logistica numerosa). Vgl. dazu Tropfke II², 48 und IV², 32. Der immer wieder begegnende Ausdruck „apices" und „numeri apicati" bedeutet die Winkelzeichen bzw. die Winkelzahlen.

365. 36. Werden die Zahlen der zweiten Spalte mit a_n bezeichnet, so sind die der dritten Spalte $a_n' = \frac{a_n}{z} \cdot 24.0$, die der fünften Spalte $a_n'' = \frac{a_n}{z} \cdot 60.0$. Da also in allen 3 Spalten Verhältnisgleichheit herrscht, so ist

$$\mathrm{Log}\, a_n = \mathrm{Log}\, a_n' = \mathrm{Log}\, a_n'',$$

also auch, wenn

$$x = \frac{a_1 a_2}{10^5}, \quad x' = \frac{a_1' a_2'}{24.0}, \quad x'' = \frac{a_1'' a_2''}{60.0}$$

gesetzt wird, wegen Log 10^5 = Log 24 .0 = Log 60.0 = 0

$$\operatorname{Log} x = \operatorname{Log} a_1 + \operatorname{Log} a_2 = \operatorname{Log} a_1' + \operatorname{Log} a_2' = \operatorname{Log} a_1'' + \operatorname{Log} a_2''.$$

Ist also d die tägliche Bewegung eines Gestirns, dann berechnet sich der Bogen b, den es in h Stunden zurücklegt, als $b = \frac{d \cdot h}{24.0}$ und

$$\operatorname{Log} b = \operatorname{Log} d + \operatorname{Log} h.$$

Die Einfachheit dieser und entsprechender Rechnungen mit den Zahlen der Spalte 5 ist es, die Kepler letzten Endes dazu bewegt, von den Briggs'schen Logarithmen Abstand zu nehmen und seine eigenen bzw. die Neperschen beizubehalten.

366.18. Ist die „separatio diurna“ (tägliche Annäherung bzw. Entfernung) s, die Distanz d, die Zeit x (in Stunden), dann wird $d = \frac{s \cdot x}{24}$, also

$$\operatorname{Log} x = \operatorname{Log} d - \operatorname{Log} s.$$

376.15. Ist c die Hypotenuse des rechtwinklig sphärischen Dreiecks mit den Katheten a und b, so ordnen sich die 16 Aufgaben Keplers nach dem folgenden Schema zu den bekannten 6 Grundaufgaben zusammen:

Nr. der Aufgabe bei Kepler	Gegeben	Gesucht
4	c, a	α
13		β
7		b
2	a, b	c
9		α/β
1	c, α	a
12		b
10		β
3	b, α	β
15		c
11		a
14	a, α	b
5		c
6		β
8	α, β	a
16		c

Wie schon früher (S. 473) erwähnt wurde, muß Kepler auf die Funktion tg verzichten, weil der Mesologarithmus in seiner Chilias keinen Platz hat. In der Randnote sagte er ausdrücklich, daß Nepers Canon geeigneter wäre für die Lösung seiner Aufgaben 9–16, die bei ihm zwei Gänge erfordert, während sich die Fälle 1–8 in einem einzigen erledigen lassen. So braucht er für die Auflösung der Aufgabe 9 die zwei Gleichungen $\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$, $\cos c = \cos a \cdot \cos b$, während Neper direkt $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{tg}\, a}{\sin b}$ berechnen kann. Zu einem solchen Opfer muß sich Kepler also entschließen, weil er seine Chilias den Bedürfnissen des numerischen Rechnens anpassen will.

378. 25. Die Unstimmigkeiten in dem Beispiel gehen auf die ungenaue Zahl a zurück, die 5020 statt 5030 lauten müßte.

381. 5. Keplers 12 Fälle lassen sich wieder zu 6 Grundaufgaben zusammenordnen.

1.–3.	Gegeben a, b, α	Gesucht β, c, γ
4. 5.	Gegeben b, c, α	Gesucht a, β (bzw. γ)
6.	Gegeben a, b, c	Gesucht α, bzw. β, bzw. γ

Die dazu polaren Aufgaben

7.–9.	Gegeben α, β, a	Gesucht b, γ, c
10. 11.	Gegeben β, γ, a	Gesucht α, b (bzw. c)
12.	Gegeben α, β, γ	Gesucht a, bzw. b, bzw. c.

383. 14. Die Lösung der Aufgabe, bei gegebenen a, b, c den Winkel α zu finden durch

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s_b \cdot \sin s_c}{\sin b \cdot \sin c}},$$

gibt *Neper* in der „Descriptio" lib. II, cap. VI (vgl. Tropfke V², 152). Es muß auffallen, daß Kepler, der gewissenhaft die Autoren nennt, wenn er sie kennt, und Neper zumal rühmt, wo er kann, hier keinerlei Andeutung über seine Quelle macht. Man müßte daraus schließen, daß er die Lösung nicht von Neper hat.

389. 14. Nach Prop. XXVII, Coroll. III ist, wenn a die gegebene Zahl, c die nächst niedere runde Zahl bedeutet,

$$\mathrm{Log}\, c - \mathrm{Log}\, a = (a - c) \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{z}{c} + \frac{z}{a}\right) = \frac{(a-c)\cdot z}{c+\varepsilon}, \quad \text{wobei} \quad \varepsilon \approx \frac{a-c}{2}.$$

Setzt man nämlich

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{2c}\left(1+\frac{c}{a}\right)=\frac{1}{c+\varepsilon},$$

dann ist

$$2c=c\left(1+\frac{c}{a}\right)+\varepsilon\left(1+\frac{c}{a}\right),\quad \varepsilon=c\,\frac{a-c}{a+c}\approx\frac{a-c}{2}.$$

392. 27. Nach Satz XXII ist $\mathrm{Log}\,c = \mathrm{Log}\cos\alpha < \frac{1}{2}$ (Sagitta + Secans).

394. 8. Die Division ist fehlerhaft. Der Quotient ist nicht 28.82, sondern 28.91.

397. 29. $a > z$ sei die Zahl, zu der der Logarithmus gesucht wird. Bestimmt man c so, daß $c:z = z:a$, so wird $\mathrm{Log}\,a = -\mathrm{Log}\,c$. Mit $z = 10^5$ wird $\frac{a}{10^3} = 100\cdot\frac{z}{c}$. Sind nun $c_1 < c < c_2$ die zu c benachbarten Tafelargumente, also $c_2 - c_1 = 100$, so ist nach Prop. XXVII

$$\mathrm{Log}\,c_1 - \mathrm{Log}\,c_2 \approx 100\sqrt{\frac{z}{c_1}\cdot\frac{z}{c_2}} \approx \frac{100\cdot z}{c} = \frac{a}{10^3}.$$

Zu genauer Rechnung ist diese Regel natürlich nicht geeignet; in dem Beispiel wäre denn auch richtiger Log 152 500 = — 42 199.44. Viel bessere Resultate liefert die in der „Admonitio alia" gegebene Vorschrift zur Benützung der Neperschen Spalte der „Differentiae". Man findet so etwa zu tg 60° = 173 205 direkt den Log. 173 205 = — 54 930.59 (durch wirkliche Ausrechnung — 54 930.57).

398. 10. Vgl. die vorhergehende Anmerkung. Neper selbst hat diese Anwendung seiner Tafel nicht.

398. 18. Es sei gegeben Log c, gesucht c. Nach Satz XXVII ist

$$\frac{z}{c} < \frac{\mathrm{Log}\,c_1 - \mathrm{Log}\,c}{c - c_1} < \frac{z}{c_1},$$

wenn $\mathrm{Log}\,c_1$ den nächst größeren Tabellenlogarithmus und c_1 die zugehörige Winkelzahl bedeutet. Es ist also

$$(\mathrm{Log}\,c_1 - \mathrm{Log}\,c)\cdot\frac{c_1}{z} < (c - c_1).$$

Wird $z = 10^7$ angenommen, dann ist $c - c_1$ die Zahl, die entsteht, wenn die vier Nullen der runden Zahl c_1 durch die entsprechenden zählenden Ziffern von c ersetzt werden. So ergibt sich also die erste Näherung. Die zweite Stufe der Annäherung erreicht man, wenn aus der Ungleichung

$$(\mathrm{Log}\,c_1 - \mathrm{Log}\,c)\cdot\frac{c_1}{z} < c - c_1 < (\mathrm{Log}\,c_1 - \mathrm{Log}\,c)\cdot\frac{c}{z}$$

als Folge

$$\frac{\mathrm{Log}\, c_1 - \mathrm{Log}\, c}{z} \cdot \frac{c_1 + c}{2} \approx c - c_1$$

hergeleitet und auf der linken Seite der vorläufige Wert c eingesetzt wird.

Es sei beispielsweise gegeben Log c = 48357.02. Es wird dann Log c_1 = 48450.83, c_1 = 61600, Log c_1 — Log c = 93.81, daher (Log c_1 — Log c) $\cdot \frac{c_1}{z}$ = 57.787, also c ≈ 61657.787. Mit diesem Wert c_1 erhält man sodann

$$\frac{\mathrm{Log}\, c_1 - \mathrm{Log}\, c}{z} \cdot \frac{c + c_1}{2} = 57.81,$$

also genauer c = 61657.81.

In dem Beispiel Keplers ist gegeben Log c = 145001.10. Es wird dann Log c_1 = 145243.42, c_1 = 23400.00, Log c_1 — Log c = 242.32, daher (Log c_1 — Log c) $\cdot \frac{c_1}{z}$ = 56.70, also c ≈ 23456.70. Mit diesem Wert c_1 erhält man sodann $\frac{c + c_1}{2}$ = 23428.35, schließlich c = 23456.77.

400. 17. Vgl. hierzu die Anm. 397.29.

404. 11. Das Ergebnis 0.31 ist offenkundig unrichtig. Der Fehler liegt daran, daß Kepler Log 0,01 statt Log 1 nimmt. Es muß also heißen

Log x = Log 1 — Log 3200 + Log 99200 = 1151292.57 — 344201.94 + 803.22 = 807893.85, also x = 31.

405. 28. Die zwei Formen des logarithmischen Radizierens kommen so zustande:

1. $\frac{a}{x} = \frac{x}{1}$, $\quad \mathrm{Log}\, x = \frac{1}{2}(\mathrm{Log}\, a + \mathrm{Log}\, 1)$.

2. $\frac{a}{x} = \frac{x}{z}$, $\quad \mathrm{Log}\, x = \frac{1}{2}\mathrm{Log}\,(a \cdot z)$.

Wird $z = 10^7$ genommen, so ist also im zweiten Fall a durch Wegnahme einer ungeraden Zahl k von Stellen kleiner als z zu machen. Das Ergebnis ist sodann nochmals um (7 — k) : 2 Stellen zu kürzen.

408. 6. Die Bemerkung, daß dem Ergebnis zwei Stellen hinzuzufügen, zwei wegzunehmen seien, ist zu korrgieren: Es ist nur je eine Stelle wegzunehmen und zuzugeben. Im Endeffekt ändert sich dadurch nichts.

411. 34. Das „Exemplum nobile", die Zerlegung eines gegebenen Verhältnisses in das Produkt zweier Teilverhältnisse, die selbst wieder in einem vorgegebenen Verhältnis zueinander stehen, läuft auf das 3. Keplersche Gesetz am Beispiel von Mars hinaus.

Ist nämlich u_1 = 687 die Umlaufszeit des Mars in Tagen, u_2 = 365,25 die der Erde, dann verlangt Kepler, $\frac{u_1}{u_2}$ so als Produkt der Teilverhältnisse $\frac{u_1}{u}$ und

$\frac{u}{u_2}$ darzustellen, daß $\frac{u}{u_2} > \frac{u_1}{u}$ und $\frac{u_1}{u} : \frac{u}{u_2} = \lambda : \lambda^2$ sei. Wird also $\frac{u_1}{u} = v$ gesetzt, so wird $\frac{u}{u_2} = v^2$ und $\frac{u_1}{u_2} = v^3$. Nun ist

$$\text{Log}\, u_1 = 37542, \quad \text{Log}\, u_2 = 100740$$

$$\text{Log}\, v = \frac{1}{3}(\text{Log}\, u_2 - \text{Log}\, u_1) = 21066$$

$$\text{Log}\, \frac{u}{u_2} = 2 \cdot \text{Log}\, v = 42132$$

$$\text{Log}\, u = \text{Log}\, u_2 - 2 \cdot \text{Log}\, v = 58608$$

$$u = 556{,}50.$$

Bestimmt man jetzt die Zahl a so, daß $\frac{u}{u_2} = \frac{a}{10^5}$, so ergibt sich a = 152400. Das ist die mittlere Entfernung des Mars von der Sonne, bezogen auf den Erdbahnhalbmesser $e = 10^5$. Da nun aber $\frac{a}{e} = v^2$, so hat man $\frac{u_1}{u_2} = v^3 = \left(\frac{a}{e}\right)^{3/2}$ oder $\left(\frac{u_1}{u_2}\right)^2 = \left(\frac{a}{e}\right)^3$, das dritte Gesetz der Planetenbewegung, das Kepler am 15. Mai 1618 gefunden und erstmals im 3. Kap. des 5. Buches der „Weltharmonik“ ausgesprochen hat.

413. 30. Vgl. Anm. 365.36. Die Bemerkung, daß Dividend und Quotient auch aus der Spalte der „Partes vicesimae quartae“ entnommen werden können, ist richtig. Ist a der Dividend, b der Divisor, c der Quotient, dann folgt aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{60}$ oder $\frac{c}{a} = \frac{60}{b}$, daß Log a — Log c = Log b. Dabei kann a in der einen oder andern Spalte der Partes abgelesen werden, entscheidend ist nur, daß c derselben Spalte wie a entnommen wird. Umgekehrt kann man (Praec. III) die Aufgabe $x = \frac{d \cdot h}{24}$ lösen, indem man d und x in der Spalte der „Sexagenariae“ aufsucht.

416. 32. Sind α_1 und α_2 die zu dem gegebenen α benachbarten Arcusargumente, so ist anzusetzen

$$\frac{\sin\alpha - \sin\alpha_1}{\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1} = \frac{\sin\alpha - \sin\alpha_1}{100.00} = \frac{k}{z},$$

oder $k = 1000 \cdot (\sin\alpha - \sin\alpha_1)$. Nun ist aber $\text{Log}\, k = \frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$, also $\text{Log}\,(\alpha - \alpha_1) = \text{Log}\, k + \text{Log}\,(\alpha_2 - \alpha_1)$.

420. 7. In der Rechnung sind die Winkel 60° und 70° verwechselt. Das richtige Ergebnis wäre 528 statt 622.

425. 26. Die Rechnung wird durch die nebenstehende Figur erläutert. Es sei a > b > c gewählt, CD = b — c, CF = b + c, EC = x, dann wird

$$(b-c)\,(b+c) = a \cdot x$$

$$x = \frac{(b-c)\,(b+c)}{a}$$

$$a - x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a}$$

$$a + x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a}$$

$$\cos\beta = \sin\alpha_1 = \frac{a-x}{2c}$$

$$\cos\gamma = \sin\alpha_2 = \frac{a+x}{2b}.$$

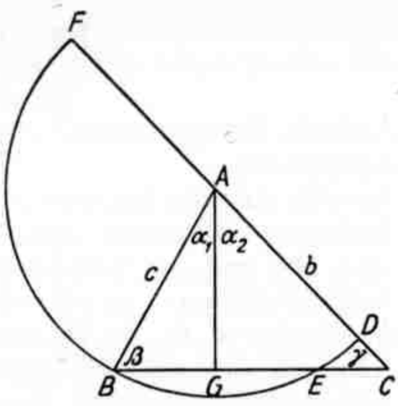


Fig. 31

Die Lösung in dieser Form wird wieder notwendig wegen des fehlenden Mesologarithmus.

PERSONENREGISTER

INHALTSVERZEICHNIS