# Über den Begriff Masse.

Von Professor **Gustav Schmidt**.

Überblicken wir die bekanntesten Definitionen des Begriffs Masse, so finden wir denselben in folgender Weise gegeben:

Professor Dr. Mach sagt in seinem Compendium der Physik S. 26: Nennen wir die Zahl der Theilchen einstweilen „Masse" etc. u. S. 27: „Gleiche Massen sind also jene, welche unter dem Einflusse einer und derselben Kraft gleiche Bewegungen annehmen." Dies ist unter allen Definitionen noch die beste; ist aber eigentlich eher eine Umgehung einer Definition als eine solche selbst.

Auch Pater Secchi drückt sich in diesem Sinne aus, indem er nach der Übersetzung von Schulze sagt:

„Gewöhnlich sagt man, dass man unter der Masse die Menge der Materie versteht, welche ein Körper enthält; aber wie soll man diese Menge bestimmen? Kann man vielleicht die Molecüle zählen? Daher haben wir kein anderes Mittel, um die Masse eines Körpers zu messen, als dass wir sie aus seiner Trägheit ableiten. Wenn wir sehen, dass verschiedene Massen gleiche Geschwindigkeiten annehmen, wenn sie Kräften von bekannter Grösse unterworfen sind, so können wir die Verhältnisse dieser Kräfte zugleich als Maasse für die Verhältnisse der Massen ansehen."

In gleicher Weise wird die Definition umgangen in dem Lehrbuch der Physik von Dr. H. Losberg, worin es heisst:

„Das Verhältniss der Kräfte, welche zwei Körpern dieselbe Bewegung ertheilen, nennt man das Verhältniss der Massen der Körper. Da alle Körper im luftleeren Raume gleich schnell fallen, so ist das Verhältniss der Massen zweier Körper gleich dem Verhältniss der beim Fall auf sie wirkenden Kräfte, d. h. ihrer Gewichte; durch Wägen kann man also die Massen messen.“

Die Lehrbücher der mathematischen Physik, wie z. B. jene von Dr. Kirchhoff und Dr. von Waltenhofen pflegen eine Definition der Masse gar nicht zu enthalten.

Redtenbacher sagt in seinen „Prinzipien der Mechanik“: Die Masse eines Körpers ist die Menge des Trägen eines Körpers, d. h. die Menge dessen, was sich selbst nicht bewegen, sich selbst nicht treiben kann, was also bewegt oder getrieben werden muss, wenn ein Körper aus dem Zustande der Ruhe in jenen der Bewegung oder aus einem gewissen Bewegungszustand in einen anderen übergehen soll; sie ist die unvergänglich unvernichtbare Menge des Trägen.

Dr. Joh. Müller sagt: Die Masse eines Körpers ist die Quantität der Materie, aus welcher er zusammengesetzt ist.

Dr. Paul Reis sagt: Unter der Masse eines Körpers verstehen wir die Menge des Stoffes in dem Körper.

In Eisenlohr's Lehrbuch der Physik heisst es: „Wenn zwei Körper gleich schwer sind oder gleiche Gewichte haben, so enthalten sie auch eine gleiche Menge körperlicher Theile oder gleiche Massen.

In anderen Büchern findet man gar die Masse als Summe der Materie oder als Anzahl der Atome definirt.

Alle diese Definitionen scheinen mir nicht ehrlich zu sein. Der Ausdruck Quantität oder Menge der Materie sagt gar nichts, denn man versteht z. B. unter Wassermenge ein Volumen oder ein Gewicht, unter Volksmenge eine Anzahl, daher kann das Wort Menge unmöglich zum Zwecke einer Definition dienen. Summe der Materie heisst gar nichts, weil man nur von Zahlen eine Summe bilden kann, und Anzahl der Atome ist positiv falsch, wenn man nicht dem Wort „Atom“ eine andere als die in der Chemie übliche Bedeutung beilegen will, wozu man nicht berechtigt ist.

Klar ist der Begriff „Masse“ einzig und allein, wenn man sagt: „Die letzten Theilchen irgend eines Körpers sind vollkomen identisch und die Masse desselben ist der Anzahl der enthaltenen letzten Theilchen proportional. Ein chemisches Atom ist eine bestimmte, durch chemische oder physikalische Mittel nicht trennbare Gruppe solcher gleichartiger letzter Theile, deren Anzahl proportional dem Atomgewichte ist. Die chemischen Eigenschaften des Atoms sind durch die Zahl und durch die Gruppirungsweise der letzten Theilchen im Atom bestimmt.“

Ist dies so, dann ist selbstverständlich, dass alle Körper im leeren Raume gleich schnell fallen, wie eine Truppe gleichartiger Soldaten gleichen Schritt hält und deren Geschwindigkeit von ihrer Anzahl unabhängig ist. Es ist dann auch ebenso selbstverständlich, dass jedes einzelne letzte Theilchen zu seiner bestimmten Beschleunigung eine bestimmte Kraft erfordert, daher die beschleunigende Kraft der Anzahl der zu beschleunigenden Theilchen also der Masse proportional sein muss.

Die Chemie kann gegen diese gegenwärtig immer mehr Platz greifende Annahme der Einheit des Stoffes nichts einwenden, denn gerade die Chemie lehrt uns, dass bloss durch die verschiedene Anzahl und Gruppirungsweise ganz gleichartiger Atome sehr verschiedene Moleküle entstehen, wie z. B. die Moleküle Graphit, Diamant, Kohle oder die Moleküle Ozon und Sauerstoff. Ähnlich erscheinen auch Phosphor und Schwefel in mehreren Modificationen. Die Zusammensetzung der Atome aus gleichartigen letzten Theilchen zu einer untrennbaren Gruppe ist also nur eine Analogie.

Dass die chemischen Eigenschaften durch die Anzahl und Gruppirungsweise der letzten gleichartigen Theilchen, die man Monaden heissen könnte, bestimmt sind, steht sehr gut in Einklang mit der Erfahrung, dass viele ähnliche Atome auch genau oder annähernd gleiches Atomgewicht haben, z. B.

$Co = Ni = 58{\cdot}7$; $\quad Mo = Ce = 92$;
$Rh = Ru = 104$; $\quad Ca = 40,\ K = 39$;
$Fe = 56,\ Mn = 55$; $\quad Zn = 65,\ Yt = 64{\cdot}3$;
$Sr = 87{\cdot}5,\ Zr = 89{\cdot}6$; $\quad La = 92{\cdot}8,\ Nb = 94,\ Di = 96$;
$Ag = 108,\ Pd = 106{\cdot}5$; $\quad Ib = 122,\ Te = 129$;
$An = 196{\cdot}7,\ Pt = 197{\cdot}1$; $\quad Ir = 198,\ Os = 199$.
$Ta = 230{\cdot}5,\ Th = 231{\cdot}5$;

Wenn die letzten Theilchen vollkommen gleichartig sind, so ist auch begreiflich, dass in grösserer Distanz, wo die Aetherhüllen der als Krystalle zu denkenden Körperatome und die zufällige Stellung der Axe dieses Krystalls nicht mehr von Einfluss ist, einzig und allein die Anzahl der letzten Theilchen oder die Masse von Einfluss auf die Kraftäusserung ist, und dass sich dann 2 Massen $m$ $m'$ so verhalten werden, als ob ihre Massenmittelpunkte sich nach dem Newton'schen Gesetze $C\frac{m\,m'}{r^2}$ anziehen würden.

Ob die Massen wirklich fernwirkend sind, oder ob die scheinbare Fernwirkung durch das Zwischenmittel, den Weltäther, vermittelt wird, und das Newton'sche Gesetz bloss als eine Folgerung eines anderen Grundgesetzes nachgewiesen werden wird, wie dies schon, aber noch nicht glücklich, versucht wurde, ist für diese Frage gleichgiltig.

Nach unserer Anschauung ist unter dem Massenmittelpunkte einer Masse oder eines Massensystems derjenige geometrische Ort zu verstehen, dessen Coordinaten die arithmetischen Mittel der betreffenden Coordinaten aller vorhandenen letzten Theilchen sind. Der Massenmittelpunkt ist demnach ein rein geometrischer Begriff, während der mit ihm identische Schwerpunkt als Angriffspunkt der Resultante paralleler, den Massen proportionaler Kräfte ein mechanischer Begriff ist.

Bei einem Massensystem, bestehend aus den Massen $m_1$ $m_2$ $m_3$ repräsentirt $m_1$ die Anzahl von gleichen letzten Theilchen mit gleicher Abscisse $x_1$ etc. und $m_1 + m_2 + \ldots$ die Anzahl aller letzten Theilchen, daher folgt die Abscisse des Massenmittelpunktes $\xi = \frac{\Sigma\,(mx)}{\Sigma\,(m)}$.

Da man die Anzahl der letzten Theilchen nicht kennt, so kann irgend eine beliebige Masse, welche eine bestimmte Anzahl letzter Theilchen enthalten wird, als Einheit der Massen angenommen werden, und da allgemein eine beschleunigende Kraft $K$ proportional der Masse $M$ und der Beschleunigung ist, welche man im Allgemeinen zum Unterschied von der Beschleunigung der Schwere $= g$ mit $g'$ bezeichnen kann, also $K = \alpha M g'$ gesetzt werden muss, so kann man $\alpha = 1$ wählen, somit $K = Mg'$ also für den freien Fall, wo $K$ gleich dem Gewichte $G$ und $g' = g$ ist: $G = Mg$ somit die Masse $M = \frac{G}{g}$.

Der Coefficient $C$ in der Gleichung $K = C\;\frac{mm'}{r^2}$ kann nun auf zweierlei Art bestimmt werden.

Erstens indem man $m$ als Masse der Erde annimmt, $r$ als deren Radius und $m'$ als eine Masse vom Gewichte $G = m'g$, woraus folgt $m'g = C\frac{mm'}{r^2}$, somit $C = \frac{gr^2}{m}$.

Dies wäre jedoch nur richtig, wenn die Erde eine homogene Kugel wäre, und wenn dieselbe nicht rotiren würde. Der Umstand, dass dieselbe ein Rotationsellipsoid ist, und wirklich um die kleine Axe rotirt, veranlasst, dass $g$ nicht constant ist, sondern bei der geographischen Breite $\varphi$ den Werth $g = 9{\cdot}780 + 0{\cdot}0508\ sin^2\varphi$ besitzt, daher am Aequator $g_0 = 9{\cdot}78$ und am Pol $g_1 = 9{\cdot}8308$.

Ist $a$ die grosse, $b$ die kleine Halbaxe der Erde und $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit derselben, so ist $a\omega^2$ die von der Rotation herrührende Verminderung der Beschleunigung am Aequator, daher wäre bei stillstehender Erde $g_0 = 9{\cdot}78 + a\omega^2$.

Die Erde vollendet eine Umdrehung in einem Sterntag oder in $t = 86163{\cdot}5$ Sekunden; die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{t}$ beträgt daher $0{\cdot}0000729216$ und da nach Bessel $a = 6{,}377.397^m$, $b = 6{,}356.079^m$ beträgt, so ist $a\omega^2 = 0{\cdot}0339122$. Wir können also die Beschleunigung der Schwere am Aequator bei ruhig stehender Erde $g_0 = 9{\cdot}8139$ setzen, und wenn das Ellipsoid homogen mit Masse erfüllt wäre, so würde die Anziehung der Erde auf einen Punkt von der Masse $m'$ am Pol nicht $G_1 = m'g_1 = \frac{Cmm'}{b^2}$ sondern vielmehr

$$= \frac{Cmm'}{b^2}\left[1 - 3\lambda\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\lambda + \frac{1}{9}\lambda^2 - \frac{1}{11}\lambda^3 + ..\right)\right] = \frac{Cmm'}{b^2} f_1$$

betragen, wobei $\lambda = \frac{a^2}{b^2} - 1$ ist; und die Anziehung der Erde auf einen Punkt von der Masse $m'$ am Aequator bei nicht rotirender Erde würde nicht $G_0 = m'g_0 = \frac{Cmm'}{a^2}$, sondern vielmehr

$$= \frac{Cmm'\,.\,a}{b^3}\left[1 - \frac{3}{2}\lambda\left(\frac{4}{5} - \frac{6}{7}\lambda + \frac{8}{9}\lambda^2 - \frac{10}{11}\lambda^3 + \ldots\right)\right] = \frac{Cmm'a\ f_0}{b^3}$$

betragen, somit ist richtiger

$$Cmf_1 = b^2 g_1 \quad \text{und} \quad Cmf_0 = \frac{b^3}{a} g_0.$$

Mit obigen Werthen von $a$, $b$, $g_1 = 9{\cdot}8308$, $g_0 = 9{\cdot}8139$ folgt $\lambda = 0{\cdot}006718$, $\lambda^2 = 0{\cdot}000045$, $\lambda^3 = 0{\cdot}0^63$, $f_1 = 0{\cdot}995988$, $f_0 = 0{\cdot}991997$,

somit aus $g_1$ berechnet $Cm = 398{\cdot}76$ Billionen
und aus $g_0$ berechnet $Cm = 398{\cdot}34$ Billionen
im Mittel $Cm = 398{\cdot}55$ Billionen.

Die Masse der Erde $= m$ ist gleich ihrem Gewichte $Q$ loco Paris, getheilt durch die Beschleunigung der Schwere in Paris $= 9{\cdot}808$, und das Gewicht $Q$ ist gleich dem Volumen $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ multiplicirt mit dem Gewichte von 1 kub. met. Wasser $= 1000^k$ und multiplicirt mit der Dichte der Erde $= \delta$, welche nach gleichwerthigen Beobachtungen zwischen 5·5 und 6·5 liegend gefunden wurde, also mit $\delta = 6$ angenommen werden kann. Hiernach ist

$$Q = 6000 \quad \frac{4}{3}\pi a^2 b = 6497045 \quad 10^{18} \text{ kil.}$$

oder rund $6\frac{1}{2}$ Quatrillionen Kilogramm und die Masse $m = \frac{Q}{9{\cdot}808}$ $= 662423 \quad 10^{18}$, folglich ist $C = \frac{39855 \quad 10^{10}}{662423 \quad 10^{18}} = \frac{6{\cdot}0168}{10^{10}}$ oder sehr nahe $C = \frac{6}{10^{10}}$.

Die zweite Methode $C$ zu bestimmen, bietet jene Gleichung, welche sich aus der Theorie der planetarischen Bewegung ergiebt und das dritte Kepler'sche Gesetz enthält, nach welchem sich die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten verhalten wie die Würfel der grossen Axen. Ist nämlich $M$ die Masse der Sonne, $m$ die Masse eines Planeten, $A$ die grosse Halbaxe der Bahn, $T$ die halbe Umlaufszeit, so ist nach der Theorie der planetarischen Bewegung:

$$\frac{A^3}{T^2} = \frac{C(M+m)}{\pi^2}, \text{ woraus}$$

$$CM = k^2 = \pi^2 \left(\frac{A^3}{T^2}\right) \left(\frac{M}{M+m}\right)$$

oder wenn $u = 2T$ die ganze Umlaufszeit ist:

$$k^2 = \frac{4\pi^2 A^3}{u^2} \left(\frac{1}{1+\frac{m}{M}}\right) \text{ somit}$$

$$k = \frac{2\pi A^{\frac{3}{2}}}{u\sqrt{1+\frac{m}{M}}}$$ und es ist für die Erde $u = 365{\cdot}2563835$ Tage

$$\text{und } M = 322800\, m, \text{ also } \frac{1}{\sqrt{1+\frac{m}{M}}} = 0{\cdot}9999985,$$

somit $$k = 0{\cdot}01720209895\, A^{\frac{3}{2}},$$
wenn $u$ in Tagen gemessen wird. Unsere Zeiteinheit bei Berechnung von $C$ ist aber die Sekunde, weil wir die Beschleunigung $g$ auf die Sekunde bezogen haben, also muss auch $u$ in Sekunden gemessen, folglich obiger Werth noch mit $24 \times 60 \times 60 = 86400$ dividirt werden, daher $$k = 0{\cdot}0000001990984\, A^{\frac{3}{2}} \text{ und}$$
$$CM = k^2 = \frac{3{\cdot}964016}{10^{14}} A^3.$$

Hierin bedeutet $A$ die grosse Halbaxe der Erdbahn in Metern. Diese ist gleich dem Aequatorial-Halbmesser der Erde getheilt durch den *sinus* der Sonnenparallaxe.

Die Parallaxe, nämlich der Winkel, unter welchem der Erdhalbmesser vom Sonnenmittelpunkt gesehen erscheinen würde, wurde von Encke mit 8·57 Sekunden berechnet.

Der Venusdurchgang von 1874 ergab, dass die Parallaxe unzweifelhaft grösser ist, und es wird dieselbe vorläufig auf Grund der bis jetzt beendeten Berechnungen des Venus Durchganges mit 8·85 Sekunden angenommen. Hiemit folgt $A = 148.639$ Millionen Meter oder nahezu 20 Millionen Meilen statt der früheren Berechnung auf 20,667.000 geographische Meilen.

Hiemit folgt nun $CM = 130{\cdot}1762$ Trillionen, somit $Cm = 403{\cdot}272$ Billionen, und durch Division mit der früher berechneten Erdmasse $m = 662423$ Trillionen: $C = \frac{6{\cdot}08784}{10^{10}}$ etwas grösser als früher, und die Übereinstimmung wäre eine vollständige, wenn sich die Sonnenparallaxe mit 8·88475 statt 8·85 Sekunden ergeben würde.

Ein Fehler in der Dichte $\delta$ der Erde beeinflusst beide Berechnungen in gleicher Weise. Ist $\delta$ grösser als 6, so ist $C$ in gleichem Verhältniss kleiner.

Wir nehmen daher rund $C = 6 \quad 10 \quad ^{10}$ an und finden die Anziehung einer Masse $\mu$ von 1$^{\text{kil.}}$ Gewicht auf die gleiche Masse von 1$^{\text{kil.}}$ in der Entfernung von 1$^{\text{m}}$ wegen $\mu = \frac{G}{g} = \frac{1}{g}$ mit $K = \frac{C}{g^2}$

somit bei uns, wo $g = 9{\cdot}81$ ist, $K = \frac{6{\cdot}2346}{10^{12}}$ kilogr., und die Anziehung von einer Tonne = $1000^k$ auf eine Tonne in der Entfernung von einem Meter beträgt $K = C \,.\, \frac{1000^2}{g^2} = \frac{6{\cdot}2346^{\text{kil.}}}{10^6} = \frac{6{\cdot}2346}{10^3}$ Gramm $= 6\,{}^1\!/_4$ Milligramm.

Dagegen die Anziehung der Sonne auf die Erde

$$= \frac{C\,(M + m)\,m}{A^2} = \frac{Cm^2}{A^2}\quad 322801 = 3847 \text{ Trillionen Kilogramm.}$$

Das Gewicht der Sonne beträgt 2 Quintillionen, 97246 Quatrillionen Kilogramm, wenn die Dichte der Erde 6mal grösser ist, als jene des Wassers.