download www.biologiezentrum.at

Bemerkungen zur Ermittlung der algebraisch lösbaren Gleichungen fünften Grades.

Von

OTTO BIERMANN.

Ist eine algebraische Gleichung mit irgend bestimmten Coefficienten vorgelegt und fragt man, wann die Gleichung nach Adjunction gehöriger Irrationalen algebraisch lösbar ist, so kann man zur Beantwortung an das Ergebniss der Untersuchungen des Herrn Kronecker über die Ermittlung der allgemeinsten algebraischen Function bekannter Grössen, welche einer Gleichung von gegebenem Grade genügt, deren Coefficienten rationale Functionen jener Grössen sind, anknüpfen.

Wenn nämlich Hr. Kronecker in seiner Mittheilung vom 20. Juni 1853 an die Berliner Akademie sagt, dass jede auflösbare Gleichung von einem Primzahlgrade m nach Adjunction einer Grösse y, welche Wurzel einer Abel'schen Gleichung $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades ist, selbst eine Abel'sche Gleichung wird, oder dass die m Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_m$ einer auflösbaren Gleichung stets derart untereinander verbunden sind, dass

$$x_2 = f(x_1, y_1),\; x_3 = f(x_2, y_1), \qquad x_1 = f(x_n, y_1)$$

wird, wo $f(x, y_1)$ eine rationale Function von x und y_1 und den bekannten Grössen bedeutet, und y_1 die Wurzel einer Abel'schen Gleichung $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades ist, deren Coefficienten rationale Functionen derselben Grössen sind, so können wir den ursprünglichen Rationalitätsbereich aus den Coefficienten der vorgelegten Gleichung und deren rationalen Functionen zusammensetzen und darauf fragen, welchen Charakter die Grundelemente dieses Bereiches haben müssen,

download ... zentrum.at

damit die Grössen x_μ bei besagter Form in die Gleichung eingesetzt, dieselbe identisch erfüllen.

Wir stellen uns im Besonderen die Aufgabe, den Charakter des Parameters in der Gleichung fünften Grades

$$x^5 - x - p = 0$$

festzustellen, damit diese Gleichung unter Adjunction einer Wurzel einer Abel'schen Gleichung vierten Grades, deren Coefficienten rationale Functionen des Parameters sind, algebraisch lösbar werde.

Wenn sich ergeben wird, dass p eine algebraische Zahl sein muss, dass es demnach keine transcendenten Zahlen p gibt, aus denen algebraische Functionen sowie die Wurzeln der lösbaren Gleichung fünften Grades gebildet werden können, die mit der Zahl p in derjenigen algebraischen Verbindung stehen, welche eben die Gleichung vorschreibt, so ist dieses Resultat gewissermassen selbstverständlich. In der That sieht man, dass die Resultate der Theorie der algebraischen Functionen irgend eines Bereiches von Grössen $(A, B, C \ldots)$ nur durch Verwendung solcher Grössen $(A', B', C' \ldots)$ beeinflusst werden können, zwischen welchen algebraische Beziehungen bestehen, und das heisst — hier angewandt — das algebraische Resultat: „Die allgemeine Gleichung fünften Grades ist nicht algebraisch lösbar" kann nur geändert werden, wenn algebraische Beziehungen für den Parameter p bestehen.

Es handelt sich nun darum, die Aufgaben aufzuweisen, auf welche die nähere Charakterisirung derjenigen algebraischen Zahlen führt, bei welchen eine algebraische Lösbarkeit eintritt. Das soll übrigens auch geschehen, wenn man die Galois'sche Bedingung zu Hilfe nimmt, unter welcher eine Gleichung vom Primzahlgrade anflösbar ist, für die — wie Kronecker sagt — sein Satz die wahre Quelle ist. Die wirkliche Angabe der verlangten algebraischen Zahlen oder auch nur die Angabe der sie definirenden Gleichungen wird im ersten Falle der Behandlung wegen der Weitläufigkeit der sich als nothwendig einstellenden Rechnungen nicht möglich sein; im zweiten Fall darum nicht, weil man nicht allgemein angeben kann, wann eine Gleichung sechsten Grades eine rationale Function ihrer Coefficienten zu einer Wurzel hat.

Nehmen wir an, dass die Gleichung

$$x^5 - x - p = 0$$

algebraisch lösbar sei, so kann man die Function $f(x, y)$ auf die Form bringen:

$$f(x, y) = \frac{1}{c}(A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0),$$

wo $$A_i = a_{i3}\, y^3 + a_{i2}\, y^2 + a_{i1}\, y + a_{io} \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4)$$

ist und nun $a_{\lambda\mu}$ und c ganze rationale Functionen bedeuten, indess y die Wurzel einer Gleichung vierten Grades ist

$$G(y) = y^4 + Py^3 + Qy^2 + Ry + S = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von p sind, und deren Wurzeln durch folgende Beziehungen verknüpft sind

$$y_2 = \vartheta(y_1),\ y_3 = \vartheta(y_2),\ y_4 = \vartheta(y_1),\ y_1 = \vartheta(y_4),$$

wo $\vartheta(y)$ eine ganze rationale Function von y bezeichnet, deren Coefficienten wieder rationale Functionen von p sind.

Suchen wir zunächst, unter welchen Bedingungen eine Gleichung vierten Grades $G(y) = 0$ mit Coefficienten, die rationale Functionen irgend gegebener Grössen $(A, B, C \quad .)$ sind, in dem genannten Sinne eine Abel'sche wird, wo jetzt die Coefficienten von $\vartheta(y)$ rationale Functionen der Grössen $(A, B, C\ldots)$ sind.

Bilden wir die Resolvente mit den Wurzeln

$$y_2 y_3 + y_1 y_4 = z_1,\ y_1 y_3 + y_2 y_4 = z_2,\ y_1 y_2 + y_3 y_4 = z_3,$$

$$H(z) = z^3 - Qz^2 + (PR - 4S)z - S(P^2 - 4Q) - R^2 = 0$$

und hierauf die ganzen symmetrischen Functionen der Wurzeln der Gleichung $\dfrac{G(y)}{y - y_4} = 0$,

$$y_1 + y_2 + y_3,$$

$$y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 = \varphi$$

$$y_1 z_2 z_3 + y_2 z_1 z_3 + y_3 z_1 z_2 = \psi$$

als ganze rationale Functionen von P, Q, R, S und y_4, so kann man y_1, y_2, y_3 als ganze rationale Function von y_4 darstellen. Es ist:

$$y_1 + y_2 + y_3 = -P - y_4,$$

$$\varphi(y) = -[4y_4^3 + 3Py_4^2 + y_4(5Q - P^2) + 3R]$$

$$\psi(y_4) = y_4^3(-P_2 + 4Q) + y_4^2(-P^3 + 4PQ - 2R) +$$
$$+ y_4(-P^2Q - 2PR + 4Q^2 + 4S) + (-P^2R + 2QR + 2PS)$$

download… entrum.at

und andererseits:

$$y_\nu = \frac{-(P+y_4)(z_\nu^2 - Qz_\nu) + \varphi(y_4)\,z_\nu + \psi(y_\nu)}{3z_\nu^2 - 2Qz_\nu + PR - 4S} \quad (\nu = 1, 2, 3).$$

Bezeichnet man den rechtsstehenden Ausdruck mit $g(y_4, z_\nu)$, so ist also:

$$y_1 = g(y_4, z),\quad y_2 = g(y_4, z_2),\quad y_3 = g(y_4, z_3).$$

Behandelt man die drei nachstehenden Gleichungssysteme

$$y_2 + y_3 + y_4 = -P - y_1,\quad y_2z_3 + y_3z_2 + y_4z_1 = \varphi(y_1),$$
$$y_2z_1z_2 + y_3z_1z_3 + y_4z_2z_3 = \psi(y_1),$$
$$y_3 + y_4 + y_1 = -P - y_2,\quad y_3z_1 + y_4z_2 + y_1z_3 = \varphi(y_2),$$
$$y_3z_2z_3 + y_4z_3z_1 + y_1z_1z_2 = \psi(y_2),$$
$$y_4 + y_1 + y_2 = -P - y_3,\quad y_4z_3 + y_1z_2 + y_2z_1 = \varphi(y_3),$$
$$y_4z_1z_2 + y_1z_3z_1 + y_2z_1z_2 = \psi(y_3),$$

ebenso, so ist des Weiteren

$$y_4 = g(y_3, z_3),\quad y_1 = g(y_3, z_2),\quad y_2 = g(y_3, z_1),$$
$$y_3 = g(y_2, z_1),\quad y_4 = g(y_2, z_2),\quad y_1 = g(y_2, z_3),$$
$$y_2 = g(y_1, z_3),\quad y_3 = g(y_1, z_2),\quad y_4 = g(y_1, z_1).$$

Wenn demnach im Allgemeinen

$$y_1 = g(y_4, z_1),\quad y_2 = g(y_1, z_3),\quad y_3 = g(y_2, z_1),\quad y_4 = g(y_1, z_3)$$

ist, folgert man zunächst, dass die Gleichung $H(z) = 0$ zwei gleiche Wurzeln z_1 und z_3 haben muss, damit $G(y) = 0$ eine Abel'sche Gleichung werden kann.

Es sei nunmehr $z_1 = z_3$, dann ist die Determinante jedes unserer Gleichungssysteme Null, daher muss in $g(y_4, z_1)$, wo der Nenner offenbar die erste jetzt verschwindende Ableitung von $H(z)$ für $z = z_1$ ist, auch der Zähler Null sein, wie sich bei Addition der jetzt bestehenden Gleichungen:

$$y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_1 = \varphi(y_4)$$

$$y_1z_2 + y_2z_1 + y_3z_2 = \frac{1}{z_1}\,\psi(y_4)$$

zeigt.

Subtrahirt man aber diese Gleichungen, so findet man mit Rücksicht auf die eben genannte Beziehung die Gleichung

$$(y_1 + y_3)(z_1 - z_2) - y_2(z_1 - z_2) = 2\varphi(y_4) + (P + y_4)(Q - z_1),$$

die in Verbindung mit

$$(y_1 + y_3) + y_2 = -P - y_4$$

auf die Formel führt:

$$y_1 + y_3 = \frac{(Q - 2z_1)(P + y_4) + \varphi(y_4)}{3z_1 - Q}.$$

Nun muss aber zu Folge der Definition von z_1 und z_3 mit $z_1 = z_3$, $y_1 = y_3$ oder $y_2 = y_4$ sein, oder $y_1 = y_3$ und $y_2 = y_4$. Setzen wir $y_1 = y_3$, so folgt

$$y_1 = y_3 = \frac{(Q - 2z_1)(P + y_4) + \varphi(y_4)}{6z_1 - 2Q} = \Theta(y_4, z_1),$$

eine Formel, die aus dem Ausdruck für $g(y_4, z_1)$ hervorgehen muss, wenn man Zähler und Nenner nach z_1 differentirt.

Entnimmt man dem zweiten Gleichungssystem, wo auch $z_1 = z_3$ zu setzen ist,

$$y_2 + y_4 = \frac{(Q - 2z_1)(P + y_4) + \varphi(y_4)}{3z_1 - Q},$$

so sieht man, dass man auch $y_2 = y_4$ setzen muss, damit die jetzt giltige Gleichung $y_1 = \Theta(y_4, z_1)$ in die folgenden übergehe:

$$y_2 = \Theta(y_1, z_1), \quad y_3 = \Theta(y_2, z_1), \quad y_4 = \Theta(y_1, z_1).$$

Hierin ist z_1 schon eine rationale Wurzel und deshalb $\Theta(y_1, z_1)$ eine Function der verlangten Art, denn stellen wir die gefundenen Bedingungen durch Gleichungen in den Coefficienten von $G(y)$ dar, geben also an, wann die Gleichung $H(z) = 0$ Wurzeln der Form hat:

$$z_1 = z_3 = \frac{Q - U}{3}, \quad z_2 = \frac{Q + 2U}{3},$$

wo U eine rationale Function von P, Q, R, S ist, und unter welcher Bedingung für U nebstdem $y_2 = y_4$ ist, so sind diese Bedingungen erfüllt, falls $G(y)$ das Quadrat einer ganzen Function zweiten Grades ist:

$$y^2 + P'y + Q'.$$

download unter www.biologiezentrum.at

Die Resolvente der Gleichung $H(z) = 0$, d. i.

$$t^2 - [2Q^3 + gQ(4S - PR) + 27(P^2S - 4QS + R^2)]\,t + \\ + (Q^2 - 3PR + 12S)^3 = 0$$

muss die zweifache Wurzel U^3 haben. U selbst ist dann gleich

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{2Q^3 + 9Q(4S - PR) + 27(P^2S - 4QS + R^2)}{Q^2 - 3PR + 12S}.$$

Damit $y_2 = y_4$ werde, muss $y_1y_2 - y_3y_4$ verschwinden, doch da

$$y_1y_2 \cdot y_3y_4 = S, \quad y_1y_2 + y_3y_4 = z_3 = \frac{Q - U}{3}$$

ist, lautet die hiezu nothwendige und hinreichende Bedingung:

$$(Q - U)^2 - 36S = 0 \quad \text{oder}$$

$$P^2(R^2 - 3QS) + 4PRS + 8Q^2S - 3R^2Q - 32S^2 = 0.$$

Falls $\qquad G(y) = (y^2 + P'y + Q')^2$ ist,

hat man $\qquad U = P'^2 - 4Q', \quad z_1 = z_3 = 2Q',$

$$\vartheta(y) = \frac{(P'^2 - 2Q')(2P' + y) - (4y^3 + 6P'y^2 + (P'^2 + 10Q')y + 6P'Q'}{8Q' - 2P'^2}$$

oder

$$\vartheta(y) = \frac{4y^3 + 3P'y^2 + 6Q'y + 5P'Q' - P'^3}{P'^2 - 4Q'} = -P' - y,$$

indem die früheren Grössen P, Q, R, S jetzt der Reihe nach gleich sind

$$2P', \quad P'^2 + 2Q', \quad 2P'Q', \quad Q'^2.$$

Wir können nun sagen, die Gleichung vierten Grades $G(y) = 0$ ist nur dann eine Abel'sche, wenn $G(y)$ das Quadrat einer ganzen Function ist, deren Coefficienten rationale Functionen der bekannten Grössen sind.

Nach diesem Ergebniss können wir in unserer früheren Function $f(x, y)$ den Grössen A_i die Form geben

$$A_i = a_{i1}y + a_{io},$$

wo y Wurzel einer Gleichung zweiten Grades ist:

$$Ry^2 = Py + Q$$

mit Coefficienten, die ganze rationale Functionen von p sind.

Jetzt drücken wir die elementarsymmetrischen Functionen der Gleichung fünften Grades aus, indem wir $x_\mu = f(x_{\mu-1}, y)$ setzen. Bezeichnen wir die Producte

$$A_\alpha \Sigma x_1^\alpha, \quad A_\alpha A_\beta \Sigma x_1^\alpha x_2^\beta,$$

der Reihe nach mit $\quad S_\alpha, \quad S_{\alpha,\beta}, .$

so entstehen die Gleichungen:

$$c\sum_{\mu=1}^{5} f(x_\mu, y) = \Sigma\, S_\alpha + 5\, A_0 = 0,$$

$$c^2\, \Sigma f(x_1, y) f(x_2, y) = \Sigma\, S_{\alpha,\beta} + 4\, A_0\, \Sigma\, S_\alpha + 10\, A_0^2 = o,$$

$$c^3\, \Sigma f(x_1, y) f(x_2, y) f(x_3, y) = \Sigma\, S_{\alpha\beta\gamma} + 3\, A_0\, \Sigma\, S_{\alpha\beta} + \\ + 6\, A_0^2\, \Sigma\, S_\alpha + 10 A_0^3 = o,$$

$$c^4\, \Sigma f(x_1, y) f(x_2, y) f(x_3, y) f(x_4, y) = \Sigma\, S_{\alpha\beta\gamma\delta} + 2\, A_0\, \Sigma\, S_{\alpha\beta\gamma} + \\ + 3\, A_0^2\, \Sigma\, S_{\alpha\beta} + 4\, A_0^3\, \Sigma\, S_\alpha + 5\, A_0^4 = -\, c^4,$$

$$c^5 \prod_{\mu=1}^{5} f(x_\mu, y) = \Sigma\, S_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} + A_0\, \Sigma\, S_{\alpha\beta\gamma\delta} + A_0^2\, \Sigma\, S_{\alpha\beta\gamma} + \\ + A_0^3\, \Sigma\, S_{\alpha\beta} + A_0^4\, \Sigma\, S_\alpha + A_0^5 = p \,.\, c^5,$$

wo die Summezeichen rechts stets eine Vereinigung von Gliedern anzeigen, in welchen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ die ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4 bedeuten und

$$\alpha \geqq \beta \geqq \gamma \geqq \delta \geqq \varepsilon$$

ist. Diese Gleichungen zerfallen in je zwei, indem die Coefficienten von y^0 und y^1 einzeln verschwinden müssen. Man erhält dennoch 10 Gleichungen mit 14 Grössen, die als ganze rationale Functionen von p zu bestimmen sind.

Ich habe diese Gleichungen wirklich abgeleitet und wenn auch wegen der einfachen Werthe der Potenzsummen

$$S_\alpha = \sum_{\mu=1}^{5} x_\mu^\alpha,$$

von denen S_1, S_2, S_3, S_6, S_7 verschwinden, in den obigen Gleichungen viele Glieder ausfallen, so sind die genannten 10 Gleichungen doch

download unter www.biologiezentrum.at

viel zu verwickelt gebildet, als dass man die gleichzeitige Elimination von neun Grössen ohne die weitläufigsten Rechnungen ausführen könnte.

Ist aber eine solche Elimination vollzogen und etwa eine Gleichung

$$F(p;\ P, Q, R, c, a_{41}) = 0$$

abgeleitet, wo die Coefficienten ganze ganzzahlige rationale Functionen von p sind, so kann man hierin vier der eintretenden Grössen beliebig wählen und die letzte etwa a_{41} als ganze ganzzahlige rationale Function so aus der Gleichung der Form $\psi(p;\ a_{41}) = 0$ zu bestimmen suchen, dass so viele Glieder als möglich ausfallen. Damit die Relation eine identische werde, muss p selbst einer Gleichung mit ganzen Zahlen genügen, also algebraische Zahl sein.

Wir können also höchstens sagen, wenn man die Gleichung für y beliebig wählt und ebenso c, so gibt es nur eine endliche Anzahl algebraisch lösbarer Gleichungen fünften Grades. Doch lässt sich nicht behaupten, dass der Satz in dieser Ausdehnung richtig ist, da wir nicht wissen können, ob die obige Eliminationsgleichung bei unseren speciellen zehn Gleichungen wirklich fünf der zu bestimmenden Grössen enthalten wird.

Ich führe hier nur noch an, dass im Falle $p = 0$

$$f(x, y) = \frac{5x^4 + yx^3 + (1 + 2y)x^2 + (y - 2)x - 4}{4}$$

wird, und die Gleichung in y lautet:

$$G(y) = (y^2 + 1)^2 = 0,$$

für die

$$\vartheta(y) = -\tfrac{1}{2}(y^3 + 3y) = -y \quad \text{gilt.}$$

Nach dem Vorhergehenden bietet schon in dem einfachsten Falle der im Allgemeinen nicht algebraisch lösbaren Gleichungen die Kennzeichnung der algebraischen Zahlen für die Coefficienten, bei denen die Gleichung lösbar ist, auf dem hier eingeschlagenen Wege Rechnungsschwierigkeiten dar, die uns veranlassen, jene andere Form der Bedingungen der algebraisch lösbaren Gleichungen zu Hilfe zu nehmen, die sich auf die Gruppentheorie stützt; erscheint ja doch die Frage in unserem Falle umso beachtenswerther, als man die Gleichungen fünften Grades mit Hilfe transcendenter Functionen lösen kann, für die man nach Beantwortung unserer Frage wichtige Aufschlüsse erhalten könnte.

Jetzt lautet die Aufgabe: Unter welchen Bedingungen für p hat die gegebene Gleichung eine metacyclische Substitutionsgruppe, d. h. eine aus den 20 Substitutionen

$$S = | \, z, az + b \, | \; [a = 1, 2, 3, 4; \quad b = 0, 1, 2, 3, 4 \pmod 5]$$

bestehende Gruppe?

Diese Frage kommt wieder mit der folgenden überein: Wann wird eine metacyclische Function der Wurzeln der gegebenen Gleichung eine rationale Function der bekannten Grössen, d. i. der Coefficienten der Gleichung?

Eine metacyclische Function ist dadurch definirt, dass sie bei den genannten Substitutionen ungeändert bleibt, dagegen bei den übrigen Substitutionen einen anderen Werth annimmt.

Stellt man demnach eine solche Function auf und bildet die Gleichung sechsten Grades, welcher sie genügt, so hat man zu beurtheilen, wann diese Gleichung, deren Coefficienten rationale Functionen von p sind, eine rationale Wurzel besitzt.

Eine solche Function ist das Quadrat von

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1 -$$

$$- x_1x_3 - x_3x_5 - x_5x_2 - x_2x_4 - x_4x_1; \quad \text{sie heisse } z.$$

Die Gleichung, der sie genügt, lautet

$$(z + 4)^4 (z^2 + 24z + 400) = 4^5 . 5^5 p^4 . z.$$

Versteht man daher unter p' und q' zwei Grössen eines Rationalitätsbereiches, so ist

$$x^5 - x - p'^5 \frac{4^5 . 5^5 q'}{(q' + 4)^4 (q'^2 + 24q' + 400)} = 0$$

eine für diesen Bereich lösbare Gleichung. Umgekehrt ist jede lösbare Gleichung $x^5 - x - p = 0$, sofern sie irreductibel ist, unter diese Form zu bringen, wenn man für p' und q' p und das nach obiger Gleichung zugehörige rationale z nimmt.

So spricht sich Herr Runge in seiner Arbeit*) aus, die mir erst bekannt wurde, nachdem ich meine Betrachtungen ausgeführt hatte.

Diese Form gewährt keinen grossen Vortheil, weil man nicht allgemein angeben kann, unter welcher Bedingung die Gleichung sechsten Grades in z eine rationale Wurzel hat. Anders wäre das, im Falle das oben genannte Eliminationsproblem durchführbar wäre, denn man hätte dort eine Gleichung für p — mit Parametern, die ganze ganzzahlige rationale Functionen von p sind, und diese Gleichung würde die Werthe von p als algebraische Zahlen definiren, für welche die Gleichung fünften Grades lösbar ist und unsere Gleichung in z eine Wurzel hat, die eine rationale Function von p ist.

Die Lösung der gestellten Aufgabe kann nur dann als befriedigend betrachtet werden.

PRAG, den 24. November 1887.

*) Acta mathematica Bd. 7.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Lotos - Zeitschrift fuer Naturwissenschaften

Jahr/Year: 1889

Band/Volume: 37

Autor(en)/Author(s): Biermann Otto

Artikel/Article: Bemerkungen zur Ermittlung der algebraisch lösbaren Gleichungen fünften Grades. 25-34