Ueber Wurfcurvenreihen.

Von

Dr. CARL HABART,
Professor an der k. k. Staatsrealschule in Elbogen.

Wird ein der Wirkung der Schwerkraft unterworfener, materieller Punkt in einer gegen die Horizontale geneigten Richtung ergriffen von einer momentanen Kraft, so beschreibt derselbe eine Bahn, die, falls der Einfluss der Widerstände nicht in Rechnung gezogen wird, die Gestalt einer Parabel besitzt. Denkt man sich nun bei gleichbleibender Anfangsgeschwindigkeit (c) die Richtung der Wurfkraft, also den Elevationswinkel (α) allmählich verändert, so wird auch die Bahnlinie einen Formwechsel erfahren und die Gesammtheit der den verschiedenen Winkeln zugehörigen Wurflinien möge das System der Wurfcurven genannt werden. Analytisch erscheint dieses Curvensystem bestimmt durch eine Gleichung, die man mittelst der Integrale der zwei Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = -g,$$

durch Elimination der Grösse t in der Form erhält:

$$y = x \,.\, \text{tang}\, \alpha - \frac{g}{2\, c^2 \,.\, \cos^2 \alpha} \,.\, x^2$$

Diese Gleichung stellt dar ein System von Parabeln, deren Achsen sämmtlich einander parallel sind; somit eine Reihe ähnlicher und ähnlich gelegener Curven, deren Elemente durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems hindurchgehen, einander in ihrem unendlich entfernten Punkte berühren und eine gemeinschaftliche Directrix besitzen, welche im Abstande $\frac{c^2}{2g}$ parallel zur Abscissenachse verläuft. Die Enveloppe der Wurflinien ist eine Parabel, deren Achse mit der Ordinatenachse, deren Brennpunkt mit dem Ursprunge zusammenfällt; der Scheitel dieser Einhüllenden ist zugleich der höchste Punkt der Wurfcurvenereihe; er möge Gipfel der Reihe, die ihm zugehörige Ordinate Höhe genannt werden. Führt man in der Curvengleichung statt der Constanten (c) die Höhe (h) ein und an Stelle des veränderlichen Winkels (α) die trigonometrische Tangente desselben (λ), so vereinfacht sich die das System der Wurfcurven repräsentirende Gleichung und erhält, in homogenen Hesseschen Coordinaten ausgedrückt, die Form:

$$(1 + \lambda^2)\, x_1^2 - 4 h \lambda x_1 x_3 + 4 h x_2 x_3 = 0.$$

Der Verfasser stellt sich nun in der folgenden Untersuchung die Aufgabe, den geometrischen Ort der einer festen Geraden der Ebene zugehörigen Pole des Curvensystems zu finden, ferner die Enveloppe der einem festen Punkte der Ebene zugeordneten Polaren der Wurfcurven zu bestimmen und endlich auszumitteln den Charakter jener Curve, in welcher die Berührungspunkte der Geraden eines Tangentenbüschels mit den Elementen der Reihe gelegen sind.

Die mittelst des analytischen Calculs gewonnenen Resultate scheinen um so mehr geeignet zu sein, das Interesse zu wecken, als mittelst derselben Eigenschaften eines Liniensystems erschlossen werden, das auch in der Ballistik eine wichtige Rolle spielt.

Die Gleichung: $u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 = 0$,

in welcher z_i ($i = 1, 2, 3$) die trimetrischen Coordinaten eines Punktes und u_i ($i = 1, 2, 3$) die homogenen Coordinaten einer Geraden bezeichnen mögen, ist einer zweifachen geometrischen Interpretation fähig; wenn nämlich z_i fix, u_i veränderlich sind, so stellt die Gleichung ein Strahlbüschel dar, dessen Scheitel der Punkt (z_i) ist; wenn hingegen u_i constant, z_i variabel sind, so repräsentirt dieselbe Gleichung eine Punktreihe, deren Träger die Gerade (u_i) ist. Obige Gleichung ist somit der analytische Ausdruck dafür, dass der Punkt (x_i) und die Gerade (u_i) in vereinigter Lage sich befinden.

Es möge nun zunächst in der folgenden Gedankenentwicklung

$$u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 = 0$$

gelten als Gleichung einer Punktreihe; in Bezug auf letztere wird jedem Elemente der Curvenreihe ein Punkt als Pol zugeordnet erscheinen; bezeichnet man mit y_i die homogenen Punktcoordinaten des Poles und mit a_{hi} (h, $i = 1, 2, 3$) die Coefficienten der in Hesseschen Coordinaten ausgedrückten Gleichung des Curvensystems, so ist die Existenz der polaren Beziehung zwischen den zwei Gebilden geknüpft an die Gleichungen:

$$\varkappa \,.\, u_1 = \Sigma\, a_{1i}\, y_i,$$
$$\varkappa \,.\, u_2 = \Sigma\, a_{2i}\, y_i,$$
$$\varkappa \,.\, u_3 = \Sigma\, a_{3i}\, y_i.$$

Nun ist in unserem Falle:

$$\Sigma\, \Sigma\, a_{hi}\, x_h\, x_i = (1 + \lambda^2)\, x_1^2 - 4\, h\, \lambda\, x_1\, x_3 + 4\, h\, x_2\, x_3 = 0.$$

Die Coefficienten der Glieder dieser Gleichung sind der Reihe nach:

$$a_{11} = 1 + \lambda^2; \quad a_{22} = 0;$$
$$a_{12} = 0; \quad a_{23} = 2\,h;$$
$$a_{13} = -\, 2\,h\lambda; \quad a_{33} = 0.$$

Die drei Bedingungsgleichungen lauten somit:

$$\varkappa \,.\, u_1 = (1 + \lambda^2)\, y_1 - 2\,h\lambda y^3,$$
$$\varkappa \,.\, u_2 = 2\,h\, y_3,$$
$$\varkappa \,.\, u_3 = 2\,h\lambda y_1 + 2\,h y_2.$$

Bezeichnet man die Discriminante der Curvengleichung mit Δ, so ist:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + \lambda^2 & 0 & -\,2\,h\lambda \\ 0 & 0 & 2\,h \\ -\,2\,h\lambda & 2\,h & 0 \end{vmatrix} = -\,4\,h^2\,(1 + \lambda^2).$$

Führt man die den Elementen a_{hi} dieser Discriminante zugehörigen Unterdeterminanten unter der kurzen Bezeichnung A_{hi} ein, so ist der Reihe nach:

$$A_{11} = -\,4\,h^2; \quad A_{22} = -\,4\,h^2\lambda;$$
$$A_{12} = -\,4\,h^2\lambda; \quad A_{23} = -\,2\,h\,(1 + \lambda^2);$$
$$A_{13} = 0; \quad A_{33} = 0;$$

und die trimetrischen Coordinaten des der Geraden:

$$u_1\, z_1 + u_2\, z_2 + u_3\, z_3 = 0$$

zugehörigen Poles sind:

$$y_1 = \tau \,.\, \frac{\Sigma\, A_{1i}\, u_i}{\Delta} = \tau \,.\, \frac{u_1 + \lambda u_2}{1 + \lambda^2}.$$

$$y_2 = \tau \, . \frac{\Sigma\, A_{2i}\, u_i}{\varDelta} = \tau \, . \frac{2\,(u_1 + \lambda u_2)\, h\lambda + (1+\lambda^2)\, u_3}{2\,h\,(1+\lambda^2)},$$

$$y_3 = \tau \, . \frac{\Sigma\, A_{3i}\, u_i}{\varDelta} = \tau \, . \frac{u_2}{2\,h}.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen den willkürlichen Proportionalitätsfactor τ und den veränderlichen Parameter λ, so erhält man die Gleichung in der Form:

$$u_2^2 y_1^2 + u_2^2 y_2^2 + u_3\,(2\,h\,u_2 + u_3)\, y_3^2 - 2\,h\,u_1 u_2 y_1 y_3 \\ - 2\,u_2\,(h\,u_2 + u_3)\, y_2 y_3 = 0.$$

Dem in der analytischen Geometrie herrschenden Principe der Dualität gemäss gestattet diese Gleichung eine zweifache Auslegung; dieselbe stellt für variable y_i dar eine Curve zweiter Ordnung, für variable u_i eine Curve zweiter Classe; erstere ist der geometrische Ort der der Geraden

$$u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 = 0$$

zugehörigen Pole des Curvensystems, letztere die Einhüllende der dem Punkte

$$u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 = 0$$

zugeordneten Polaren der Wurfcurven.

Die Enveloppe der Polaren erscheint somit analytisch fixirt durch die Gleichung:

$$(y_1^2 + y_2^2 - 2\,hy_2y_3)\, u_2^2 + y_3^2 u_3^2 - 2\,hy_1y_3u_1u_2 + 2\,y_3\,(hy_3 - y_2)\, u_2u_3 = 0.$$

Setzt man:

$$y_1 = \varepsilon \, . \, \varrho$$

$$y_2 = \varepsilon \, . \, \sigma$$

$$y_3 = \varepsilon,$$

denkt somit an einen Punkt, dessen Cartesische Coordinaten (ϱ, σ) sind, so sind die Coefficienten b_{hi} der Gleichung der Reihe nach:

$$\begin{array}{ll} b_{11} = 0; & b_{22} = \varrho^2 - 2\,h\,\sigma + \sigma^2; \\ b_{12} = -\,h\,\varrho; & b_{23} = h - \sigma; \\ b_{13} = 0; & b_{33} = 1. \end{array}$$

Die Discriminante der Gleichung der Curve ist: $\varDelta'$

$$\varDelta' = \begin{vmatrix} 0 & -\,h\,\varrho & 0 \\ -\,h\,\varrho & \varrho^2 - 2\,h\,\sigma + \sigma^2 & h - \sigma \\ 0 & h - \sigma & 1 \end{vmatrix}$$

und das der Discriminante adjungirte System ist:

$$
\begin{array}{ll}
B_{11} = \varrho^2 - h^2; & B_{22} = 0; \\
B_{12} = h\varrho; & B_{23} = 0; \\
B_{13} = -h\varrho\,(h - \sigma) & B_{33} = -h\varrho^2.
\end{array}
$$

Daher wird die Enveloppe der Polaren im Systeme der Punktcoordinaten dargestellt durch die Gleichung:

$$(\varrho^2 - h^2)\,x^2 + 2h\varrho xy - 2h\varrho\,(h - \sigma)\,x - h^2\varrho^2 = 0.$$

Diese Gleichung repräsentirt eine Hyperbel, deren Mittelpunkt die Coordinaten: $\xi' = 0$, $\eta' = h - \sigma$ besitzt; die Achsen der Hyperbel sind ihrer Richtung nach bestimmt durch:

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{h}{\varrho}; \quad \operatorname{tang}\varphi_2 = -\frac{\varrho}{h}.$$

Nimmt man eine Coordinatentransformation vor, so dass der Mittelpunkt der Hyperbel zum Ursprunge und die Achsen zu Coordinatenachsen werden, so lautet die Gleichung:

$$\varrho^2 \,.\, x^2 - h^2 y^2 = h^2 \,.\, \varrho^2.$$

Die Enveloppe der Polaren der Wurfcurvenreihe in Bezug auf irgend einen Punkt der Ebene ist eine Hyperbel, deren eine Asymptote mit der Ordinatenachse coincidirt; die Halbachsen derselben sind ihrer Länge nach bestimmt durch die Höhe der Reihe bezw. die Abscisse des Punktes.

Aus der Gleichung geht hervor, dass die Ordinate des Punktes (ϱ, σ) lediglich die Lage des Hyperbelmittelpunktes bestimmt; die Gestalt der Hyperbel und die Richtungen der Achsen hängen nur ab von der Abscisse des Punktes (ϱ, σ). Wenn somit der Punkt eine Gerade durchläuft, die parallel der Abscissenachse ist, so bilden die Enveloppen der Polaren ein System concentrischer Hyperbeln; in dem speciellen Falle, dass diese Gerade durch den Gipfel des Curvensystems hindurchgeht, ist das den Einhüllenden gemeinsame Centrum der Ursprung des Coordinatensystems und fällt die Gerade zusammen mit der Abscissenachse, so ist der Gipfel der den Hyperbeln gemeinschaftliche Mittelpunkt. Wenn andererseits der Punkt (ϱ, σ) eine der Ordinatenachse parallele Gerade durchsetzt, so constituiren die Einhüllenden der Polaren ein System congruenter Hyperbeln, deren Achsen und Asymptoten einander parallel verlaufen; in dem speciellen Falle, dass diese Gerade in einem Abstande gleich der Höhe der Reihe der Ordinatenachse parallel ist, sind sämmtliche Hyperbeln gleichseitig und ist endlich die Gerade identisch mit der Ordinatenachse, so degeneriren die Hyperbeln in Geradenpaare, die insgesammt mit dieser Coordinatenachse coincidiren.

Dieser letzterwähnte Fall ist von besonderem Interesse; näheren Aufschluss über die Lagenbeziehung der Polaren gibt die Gleichung der Polaren; letztere lautet der früheren Entwickelung gemäss:

$$[(1+\lambda^2)\,\varrho - 2h\lambda]\,x + 2hy + 2h\,(\sigma - \lambda\varrho) = 0.$$

Aus derselben ersieht man unmittelbar, dass falls der Punkt (ϱ, σ) in die Ordinatenachse fällt, die Gleichung die Form annimmt:

$$y = \lambda x - \sigma.$$

Die Polaren der Wurfcurvenreihe bezüglich eines Punktes der Ordinatenachse bilden ein Büschel von Strahlen, dessen Scheitel zum Punkte (ϱ, σ) *in Bezug auf die Abscissenachse symmetrisch liegt.*

Lässt man den Punkt (ϱ, σ) rücken in den Ursprung, dann constituiren die Polaren ein Strahlbüschel, dessen Scheitel der Ursprung ist, eine Wahrheit, die schon aus der Thatsache sich ergibt, dass eben der Ursprung ein sämmtlichen Curven der Reihe gemeinschaftlicher Punkt ist.

Wenn der Punkt (ϱ, σ) irgend eine in der Ebene gelegene Gerade, die analytisch durch die Gleichung:

$$y = \mu x + \nu$$

gegeben erscheint, durchläuft, dann bilden die Enveloppen der Polaren ein Hyperbelsystem ganz eigener Art; da nämlich die Achsen der Hyperbeln durch die Gleichungen:

$$y = \frac{h}{\varrho}\,x + h - \sigma$$

$$y = -\frac{\varrho}{h}\,x + h - \sigma$$

und die Asymptoten derselben durch die Gleichungen:

$$x = 0$$
$$y = \frac{h^2 - \varrho^2}{2h\varrho}\,x + h - \sigma$$

dargestellt werden, und die Brennpunkte die Coordinaten:

$$x_1 = \pm \varrho$$
$$y_1 = (h - \sigma) \pm h$$

besitzen, so lehrt eine einfache Entwickelung, dass in diesem Falle die transversalen Hyperbelachsen die Curve:

$$(y - h + \nu)^2 + 4 h \mu x = 0$$

die Asymptoten der Hyperbeln die Curve:

$$(y - h + \nu)^2 + (x + h \mu)^2 = h^2 \mu^2$$

einhüllen, dass ferner die conjugirten Hyperbelachsen das Strahlbüschel:

$$y - h + \nu = - \varrho \left(\frac{x}{h} + \mu\right)$$

bilden und endlich die Brennpunkte in dem Geradenpaar:

$$(y - \mu x + \nu)(y + \mu x - 2h + \nu) = 0$$

gelegen sind. —

Die Polaren der Wurfcurvenreihe in Bezug auf Punkte einer beliebigen in der Ebene gelegenen Geraden bilden ein System von Hyperbeln, deren conjugirte Achsen ein Strahlbüschel constituiren; die transversalen Achsen hüllen eine Parabel, die Asymptoten einen Kreis ein und die Brennpunkte sind Punkte eines Geradenpaars.

Die durch die letzt angesetzten Gleichungen dargestellten Gebilde treten in eine innige Lagenbeziehung zu einander. Die Parabelachse ist der Abscissenachse parallel; die Ordinatenachse berührt die Parabel im Scheitel; in eben demselben Punkte tangirt auch der Kreis die Parabel; der Kreismittelpunkt fällt zusammen mit dem Brennpunkte der Parabel; in den letzteren fällt auch der Scheitel des Büschels der conjugirten Hyperbelachsen; die Geraden des degenerirten Kegelschnitts verlaufen symmetrisch zur Parabelachse, schneiden die Ordinatenachse in Punkten, deren Distanz stets gleich ist der doppelten Höhe der Reihe; die Abscisse des Schnittpunktes der Geraden ist ihrem absoluten Werthe nach die dritte stetige Proportionale zwischen der Abscisse des Brennpunktes der Parabel und der Höhe der Wurfcurvenreihe.

Aus der Entwickelung ergeben sich noch folgende Consequenzen: Wenn der Punkt (ϱ, σ) der Reihe nach die Geraden eines Büschels durchsetzt, dessen Scheitel in der Ordinatenachse liegt, so bilden die Enveloppen der Polaren unendlich viele Systeme von Hyperbeln, deren Centra sämmtlich Punkte der Ordinatenachse sind; die conjugirten Achsen sind Elemente unendlich vieler Strahlbüschel, deren Scheitel in einer zur Abscissenachse parallelen Geraden liegen; die Enveloppen der transversalen Achsen liefern ein Büschel von Parabeln, deren gemeinschaftliche Scheiteltangente die Ordinatenachse ist. Die Asymptoten hüllen Kreise eines Büschels ein, dessen Elemente einander in der Ordinatenachse berühren; die Geraden des zerfallenen Kegelschnittes, der der geometrische Ort der Brennpunkte ist, erzeugen zwei in perspectivischer Lage befindliche Strahlbüschel, deren Scheitel Punkte der Ordinatenachse sind.

In dem besonderen Falle, dass der Punkt (ϱ, σ) die Geraden eines Büschels durchläuft, dessen Scheitel der Ursprung bezw. der Gipfel ist, ist die Leitlinie der Wurfcurven bezw. die Abscissenachse Achse der Parabeln und gleichzeitig Centrallinie der Kreise.

Die früher erhaltene Gleichung des geometrischen Ortes der Pole der Wurfcurvenreihe in Bezug auf die Gerade:

$$u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 = 0$$

ausgedrückt in Cartesischen Coordinaten lautet:

$$\left(x - h \cdot \frac{u_1}{u_2}\right)^2 + \left(y - h - \frac{u_3}{u_2}\right)^2 = h^2 \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_2^2}.$$

Setzt man in dieser Gleichung die homogenen Coordinaten der Geraden:

$$\begin{aligned} u_1 &= - \varphi \cdot \mu \\ u_2 &= \quad \varphi \\ u_3 &= - \varphi \cdot \nu, \end{aligned}$$

denkt also an eine Gerade, deren Gleichung im rechtwinkeligen Coordinatensysteme die Form hat: $y = \mu x + \nu$, so ist der fragliche geometrische Ort der Pole der Wurfcurvenreihe bestimmt durch:

$$(x + h\mu)^2 + (y - h + \nu)^2 = h^2 (1 + \mu^2).$$

Die Pole der Wurfcurvenreihe in Bezug auf irgend eine in der Ebene gelegene Gerade sind Punkte eines Kreises.

Legt man daher in den Schnittpunkten einer Geraden mit den Curven der Reihe Tangenten an die Parabeln, so begegnen einander die Elemente der Tangentenpaare in Punkten eines Kreises. Um zu einer gegebenen Geraden den polar zugeordneten Kreis constructiv zu bestimmen, beachte man Folgendes: die Abscisse des Kreismittelpunktes ist gleich der Abscisse des Schnittpunktes zweier leicht zu zeichnender Geraden und zwar der durch den Ursprung zu der gegebenen Geraden möglichen Normalen und der Leitlinie der Wurfcurven. Die Entfernung dieses Schnittpunktes vom Ursprunge bestimmt den Radius des Kreises. Die Ordinate des Mittelpunktes ist gleich der Differenz der Höhe der Curvenreihe und dem Parameter (ν) der gegebenen Geraden. Da nun der Halbmesser des Kreises und die Abscisse des Centrums lediglich Functionen der Richtungsconstanten der Geraden sind, so ergibt sich folgender Satz:

Die Pole der Wurfcurvenreihe in Bezug auf ein System paralleler Geraden liegen in einem Systeme congruenter Kreise, deren gemeinschaftliche Centrallinie parallel der Ordinatenachse verläuft.

Die dem Kreissystem gemeinsame Centrallinie geht durch den Schnittpunkt der Leitlinie der Wurfcurven mit der durch den Ursprung gehenden zum Parallelstrahlbüschel normal verlaufenden Geraden.

In dem speciellen Falle, dass die Geraden des Büschels parallel zur Abscissenachse sind, ist das Kreissystem dargestellt durch die Gleichung:

$$x^2 + (y - h + \nu)^2 = h^2.$$

Die Pole der Wurfcurvenreihe in Bezug auf ein Büschel von Geraden, die parallel der Abscissenachse verlaufen, liegen in einem Systeme congruenter Kreise, deren Radius gleich kommt der Höhe der Reihe und deren Centrallinie mit der Ordinatenachse coincidirt.

Unter diesen Kreisen sind zwei von besonderem Interesse. Der eine hievon ist der geometrische Ort der der Abscissenachse als Polaren zugeordneten Pole; die Gleichung desselben lautet:

$$x^2 + (y - h)^2 = h^2.$$

Die Pole der Wurfcurvenreihe in Bezug auf die Abscissenachse sind Punkte eines Kreises, dessen Centrum der Gipfel und dessen Halbmesser die Höhe der Reihe ist.

Es liegen somit die Scheitel jener Dreiecke, die zur Basis die jeweilige Wurfweite und zu Schenkeln die an die Wurfcurven in den Schnittpunkten mit der Abscissenachse gehenden Tangenten besitzen, in einem durch den Ursprung gehenden Kreise, dessen Centrum mit dem Gipfel zusammenfällt.

Den zweiten Kreis bilden die Pole der Wurfcurvenreihe zugehörig der allen Curven gemeinschaftlichen Leitlinie; die Gleichung dieses Kreises lautet: $x^2 + y^2 = h^2$.

Die Brennpunkte der Wurfcurven sind Punkte eines Kreises, dessen Centrum mit dem Ursprunge zusammenfällt und dessen Radius gleich kommt der Höhe der Curvenreihe.

Das Paar congruenter Kreise, dessen Beziehung zu den Elementen der Wurfcurvenreihe in den letzten zwei Sätzen zum Ausdrucke gekommen, kann zur Lösung einfacher Constructionsaufgaben benutzt werden. Denkt man sich die zwei Kreise gezeichnet und legt durch den Ursprung irgend einen Strahl, dessen Richtung die Richtung der Momentankraft und dessen Winkel mit der Abscissenachse den Elevationswinkel angibt, so ist die durch den Schnittpunkt dieses Strahles mit dem ersten Kreise zur Ordinatenachse gezogene Parallele die Achse der dem Elevationswinkel zugehörigen Wurfcurve; der Schnittpunkt dieser Achse mit dem zweiten Kreise ist der Brennpunkt der Curve; der Halbirungspunkt jener Strecke, die begrenzt erscheint durch die Leitlinie der Curven und den Schnittpunkt der Achse mit dem zweiten Kreise, ist der Curvenscheitel. Dadurch ist auch schon der Parameter der Wurfcurve, ferner die Wurfweite und Wurfhöhe mitbestimmt.

Bilden die Geraden, deren Pole in Bezug auf die Elemente der Wurfcurvenreihe zu bestimmen sind, das Büschel, dessen Scheitel ein im Endlichen gelegener Punkt (ϱ, σ) ist:

$$y - \mu (x - \varrho) - \sigma = 0,$$

so besitzen die Mittelpunkte der Kreise die Coordinaten:

$$p = -h\mu, \quad q = h + \mu\varrho - \sigma,$$

woraus durch Elimination des veränderlichen Parameters (μ) die Gleichung der Centrallinie der Kreise sich in der Form ergibt:

$$y + \frac{\varrho}{h} x \qquad h + \sigma = 0.$$

Die Pole der Wurfcurvenreihe in Bezug auf die Geraden eines Büschels liegen in einem Systeme von Kreisen gemeinschaftlicher Centrallinie.

Die Centrallinie geht durch jenen Punkt der Ordinatenachse, dessen Abstand vom Ursprunge gegeben ist durch die Differenz der Höhe der Reihe und der Ordinate des Strahlenpunktes; dieselbe verläuft ferner normal zu jener durch den Ursprung gehenden Geraden, welche die Leitlinie in einem Punkte trifft, dessen Abscisse gleich ist der Abscisse des Strahlenpunktes.

In dem speciellen Falle, dass der Scheitel des Büschels in der Ordinatenachse gelegen ist, lautet die Gleichung des Kreissystems:

$$(x + h\mu)^2 + (y - h + \sigma)^2 = h^2\,(1 + \mu^2).$$

Die Pole der Wurfcurvenreihe in Bezug auf die Geraden jener Büschel, deren Scheitel Punkte der Ordinatenachse sind, liegen in Chordalsystemen von Kreisen, deren Centrallinien parallel zur Abscissenachse verlaufen und deren Chordalen mit der Ordinatenachse zusammenfallen.

Wählt man als Scheitel des Strahlbüschels den Ursprung, so lautet die Gleichung des Kreisbüschels:

$$(x + h\mu)^2 + (y - h)^2 = h^2\,(1 + \mu^2).$$

Die Pole der Wurfcurvenreihe in Bezug auf die Geraden eines Büschels, dessen Scheitel der Ursprung ist, liegen in einem Chordalsysteme von Kreisen, die sämmtlich durch den Ursprung hindurchgehen und deren Centrallinie die Leitlinie der Wurfcurven ist.

Fällt der Scheitel des Strahlbüschels zusammen mit dem Gipfel der Reihe, so ist das Kreisbüschel dargestellt durch:

$$(x + h\mu)^2 + y^2 = h^2\,(1 + \mu^2).$$

Die Pole der Wurfcurvenreihe in Bezug auf die Geraden eines Büschels, dessen Scheitel der Gipfel ist, liegen in einem Chordalsysteme von Kreisen, die sämmtlich durch den Gipfel hindurchgehen und deren Centrallinie mit der Abscissenachse zusammenfällt.

Wenn der Punkt (ϱ, σ) ein Punkt der Leitlinie der Wurfcurven ist, so ist das System der Kreise gegeben durch:

$$(x + h\mu)^2 + (y - \varrho\mu)^2 = h^2\,(1 + \mu^2).$$

Die Pole der Wurfcurvenreihe in Bezug auf die Geraden jener Büschel, deren Scheitel Punkte der Leitlinie sind, liegen in Kreissystemen, deren Centrallinien durch den Ursprung hindurchgehen.

Rückt der Scheitel des Strahlbüschels in die Abscissenachse, so ist das System der Kreise bestimmt durch die Gleichung:

$$(x + h\mu)^2 + (y - \varrho\mu - h)^2 = h^2(1 + \mu^2).$$

Die Pole der Wurfcurvenreihe in Bezug auf die Geraden jener Büschel, deren Scheitel Punkte der Abscissenachse sind, liegen in Kreissystemen, deren Centrallinien durch den Gipfel hindurchgehen.

Wenn der Scheitel des Strahlbüschels irgend eine in der Ebene gelegene Gerade, deren Gleichung: $y = \mu x + \nu$ sein möge, durchläuft, so sind die Centrallinien der Kreissysteme dargestellt durch:

$$y + \varrho\left(\frac{x}{h} + \mu\right) - h + \nu = 0,$$

bilden somit ein Strahlbüschel, dessen Scheitel die Coordinaten hat:

$$p = -h\mu, \qquad q = h - \nu.$$

Die Pole der Wurfcurvenreihe in Bezug auf die Geraden von Büscheln, deren Scheitel Punkte irgend einer Geraden sind, liegen in Systemen von Kreisen, deren Centrallinien ein Büschel constituiren; der Scheitel dieses Büschels fällt zusammen mit dem Centrum jenes Kreises, der die Pole der Wurfcurven in Bezug auf die feste Gerade enthält.

Für specielle Lagen der festen Geraden, wird auch die Lage des Punktes, der allen Centrallinien gemeinschaftlich ist, eine bestimmte; eine einfache Ueberlegung führt zu folgenden Sätzen:

Die Pole der Wurfcurvenreihe in Bezug auf die Geraden von Büscheln, deren Scheitel Punkte irgend einer durch den Ursprung gehenden Geraden sind, liegen in Systemen von Kreisen, deren Centrallinien einander in der Leitlinie der Wurfcurven begegnen.

Die Pole der Wurfcurvenreihe in Bezug auf die Geraden von Büscheln, deren Scheitel Punkte irgend einer durch den Gipfel gehenden Geraden sind, liegen in Systemen von Kreisen, deren Centrallinien einander in der Abscissenachse begegnen.

Die Pole der Wurfcurvenreihe in Bezug auf die Geraden von Büscheln, deren Scheitel Punkte der Geraden irgend eines Parallelbüschels sind, liegen in Systemen von Kreisen, deren Centrallinien einander in einer zur Ordinatenachse Parallelen begegnen.

Die Pole der Wurfcurvenreihe in Bezug auf die Geraden von Büscheln, deren Scheitel Punkte irgend einer zur Abscissenachse

Parallelen sind, liegen in Systemen von Kreisen, deren Centrallinien einander in der Ordinatenachse begegnen.

Die Pole der Wurfcurvenreihe in Bezug auf die Geraden von Büscheln, deren Scheitel Punkte irgend einer zur Ordinatenachse Parallelen sind, liegen in Systemen von Kreisen, deren Centrallinien einander in der unendlich fernen Geraden begegnen.

Mag man den Scheitel des Strahlbüschels in der Ebene beliebig wählen, immer wird den Geraden des Büschels ein bestimmtes System von Kreisen zugeordnet erscheinen; jedes dieser Kreissysteme wird von einer Curve eingehüllt, deren Charakter analytisch durch Differentiation der Gleichung:

$$(x + h\mu)^2 + (y - h - \varrho\mu + \sigma)^2 = h^2 (1 + \mu^2)$$

nach dem veränderlichen Parameter (μ) sich ermitteln lässt; man erhält:

$$\mu = \frac{\varrho (y + \sigma) - h (x + \varrho)}{\varrho^2}$$

und durch Substitution dieses Werthes in die Gleichung des Kreissystems ergibt sich nach erfolgter Reduction als Gleichung der Enveloppe:

$$(\varrho^2 - h^2) x^2 + 2 h \varrho x y - 2 h \varrho (h - \sigma) x - h^2 \varrho^2 = 0.$$

Diese Gleichung stimmt aber vollkommen überein mit der Gleichung jener Curve, die von den Polaren der Wurfcurvenreihe in Bezug auf den Punkt (ϱ, σ) eingehüllt wird. Wählt man daher in der Ebene des Curvensystems einen Punkt (ϱ, σ) und bestimmt die Polaren der Wurfcurven bezüglich dieses Punktes, sucht ferner die Einhüllende dieser Polaren, so ist letztere identisch mit der Enveloppe jenes Systems von Kreisen, dessen Elemente der Reihe nach die Pole der Geraden jenes Büschels enthalten, das zum Scheitel den Punkt (ϱ, σ) besitzt.

Die Enveloppe des einem Strahlbüschel polar zugeordneten Kreissystems ist eine Hyperbel identisch gleich jener, die von den Polaren der Wurfcurvenreihe bezüglich des Strahlenpunktes eingehüllt wird.

Wenn man die früher schon entwickelten Eigenschaften dieser Hyperbel berücksichtigt und weiters bedenkt, dass die conjugirten Hyperbelachsen mit den Centrallinien der Kreissysteme zusammenfallen, so kann man hieraus eine Reihe interessanter Beziehungen folgern, deren einige hier angeführt werden mögen.

Die Enveloppen der den Strahlbüscheln, deren Scheitel Punkte einer festen Geraden sind, polar zugeordneten Kreissysteme, bilden ein System von Hyperbeln, deren conjugirte Achsen einander in dem Centrum jenes Kreises begegnen, der die Pole der Wurfcurven in Bezug auf die feste Gerade als Polare enthält.

Die Enveloppen der den Strahlbüscheln, deren Scheitel Punkte der durch den Ursprung bezw. Gipfel gehenden Geraden sind, polar zugeordneten Kreissysteme, bilden Systeme von Hyperbeln, deren conjugirte Achsen einander in der Leitlinie der Wurfcurven bezw. in der Abscissenachse begegnen.

Die Enveloppen der den Strahlbüscheln, deren Scheitel Punkte der zur Abscissenachse parallelen Geraden sind, polar zugeordneten Kreissysteme, bilden Systeme concentrischer Hyperbeln, deren Scheitel Punkte jener Kreise sind, die die Pole der Wurfcurven in Bezug auf die zur Abscissenachse Parallelen enthalten.

Die Enveloppen der den Strahlbüscheln, deren Scheitel Punkte der Abscissenachse bezw. Leitlinie sind, polar zugeordneten Kreissysteme bilden ein System von Hyperbeln, deren gemeinsames Centrum mit dem Gipfel bezw. Ursprunge zusammenfällt.

Die Enveloppen der den Strahlbüscheln, deren Scheitel Punkte der zur Ordinatenachse parallelen Geraden sind, polar zugeordneten Kreissysteme bilden Systeme congruenter Hyperbeln, deren conjugirte Achsen einander in der unendlich fernen Geraden begegnen.

Die Enveloppen der den Strahlbüscheln, deren Scheitel Punkte der zur Ordinatenachse im Abstande gleich der Höhe der Reihe gelegten Parallelen sind, polar zugeordneten Kreissysteme, bilden ein System congruenter gleichseitiger Hyperbeln, deren Achsen parallel den Winkelhalbirenden verlaufen.

Die Enveloppen der den Strahlbüscheln, deren Scheitel Punkte der unendlich fernen Geraden sind, zugeordneten Kreissysteme, bilden ein System degenerirter Curven, ein System von Geradenpaaren, dessen Elemente parallel zur Ordinatenachse verlaufen.

Die zwischen der Geraden: $y = \mu x + \nu$ und dem Kreise:

$$(x + h\mu)^2 + (y - h + \nu)^2 = h^2 (1 + \mu^2),$$

ferner die zwischen dem Punkte (ϱ, σ) und der Hyperbel:

$$(\varrho^2 - h^2)\, x^2 + 2 h \varrho\, x y - 2 h \varrho\, (h - \sigma)\, x - h^2 \varrho^2 = 0$$

entwickelten Beziehungen können auch zur Ermittelung der Charakteristiken der Wurfcurvenreihe benutzt werden, also zur Bestimmung der Zahl der Curven der Reihe, die durch einen festen Punkt hindurchgehen und der Zahl jener, die von einer festen Geraden berührt werden. Die Ordnungszahl der Kreislinie liefert die eine, die Classenzahl der Hyperbel bestimmt die andere Charakteristik.

Jede Gerade / *Jeder Punkt* *ist im Allgemeinen* *Tangente* / *Schnittpunkt* *zweier Curven der Reihe.*

Da nun einerseits eine Gerade den ihr polar zugeordneten Kreis in zwei reellen, in zwei zusammenfallenden oder in zwei imaginären Punkten schneidet, andererseits von einem Punkte aus an die ihm polar zugeordnete Hyperbel zwei reelle, zwei zusammenfallende oder zwei imaginäre Tangenten gehen, so wird demgemäss eine Gerade zwei Curven der Reihe, eine einzige Curve oder gar keine berühren und durch einen Punkt werden zwei Curven, eine einzige Curve oder gar keine hindurchgehen. Eine einfache Rechnung lehrt, dass die vorerwähnten Bedingungen dann erfüllt sind, wenn einerseits die Gerade die Enveloppe der Wurfcurven in zwei reellen, zwei zusammenfallenden oder zwei imaginären Punkten schneidet und wenn andererseits von dem Punkte aus an diese Enveloppe zwei imaginäre, zwei zusammenfallende oder zwei reelle Tangenten gehen.

Die Enveloppe der Wurfcurvenreihe theilt somit die Ebene in zwei Theile und auf Grund des Entwickelten lassen sich folgende einander dualistisch gegenüberstehende Sätze aussprechen:

Jeder innerhalb der Enveloppe der Wurfcurvenreihe gelegene Punkt ist der Schnittpunkt zweier Curven.	*Jede die Enveloppe in reellen Punkten schneidende Gerade ist die Tangente zweier Curven.*
Durch jeden Punkt der Enveloppe geht nur eine Curve der Reihe.	*Jede Tangente der Enveloppe berührt nur eine Curve der Reihe.*
Durch jeden ausserhalb der Enveloppe gelegenen Punkt geht keine Curve der Reihe.	*Eine ganz ausserhalb der Enveloppe verlaufende Gerade berührt keine Curve der Reihe.*

Wählt man in der Ebene der Wurfcurvenreihe einen Punkt und bestimmt in Bezug auf diesen die Polaren der Curven, so wird jede dieser Geraden die ihr zugehörige Curve der Reihe schneiden; um nun den geometrischen Ort dieser Schnittpunkte analytisch zu finden, muss man aus der Gleichung der Polaren und der Gleichung der Reihe den veränderlichen Parameter (λ) eliminiren. Führt man diese Operation aus, so ist die resultirende Gleichung:

$$x^4 + x^2y^2 - 2\varrho x^3 - 2\sigma x^2 y - 4\varrho x y^2 + (\varrho^2 - 4h\sigma + \sigma^2)\, x^2 + \\ + 4\varrho\,(h - \sigma)\, xy + 4\varrho^2 y^2 + 4h\varrho\sigma x - 4h\varrho^2 y = 0.$$

Der geometrische Ort der Berührungspunkte sämmtlicher von einem Punkte der Ebene gegen die Curven der Reihe gehenden Tangenten ist eine Curve vierten Grades.

Dieselbe geht durch den Scheitel des Tangentenbüschels, ferner durch den Ursprung und den Gipfel und auch durch das Paar der unendlich fernen imaginären Kreispunkte.

Für specielle Lagen des Strahlenpunktes wird auch die Gestalt dieser Curve eine einfachere; fällt der Punkt in die Ordinatenachse, so lautet die Gleichung:

$$x^2\,[x^2 + (y + \sigma)^2 - 4h\sigma] = 0.$$

Der geometrische Ort der Berührungspunkte sämmtlicher von einem Punkte der Ordinatenachse an die Curven der Reihe gehenden Tangenten ist ein Kreis, dessen Centrum mit dem Scheitel jenes Strahlbüschels zusammenfällt, dessen Elemente die Polaren der Curvenreihe in Bezug auf den Scheitel des Tangentenbüschels sind.

Der Radius dieses Kreises ist doppelt so gross als die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Höhe der Reihe und der Ordinate des Strahlenpunktes; wenn der Scheitel des Tangentenbüschels der Gipfel der Reihe ist, so ist der geometrische Ort der Berührungspunkte der dem Scheitel der Enveloppe der Reihe zugehörige Krümmungskreis und fällt der Scheitel des Büschels zusammen mit dem Ursprunge, so ist der geometrische Ort identisch mit dem absoluten Kegelschnitte. Die Enveloppe sämmtlicher Kreise, die den Punkten der Ordinatenachse zugeordnet erscheinen, ist gleichzeitig die Enveloppe der Wurfcurvenreihe.

Lässt man den Scheitel des Strahlbüschels fallen in einen Punkt der unendlich fernen Geraden, so lautet die Gleichung des geometrischen Ortes der Berührungspunkte:

$$(\varrho^2 + \sigma^2)\, x^2 + 4\varrho^2 y^2 - 4\varrho\sigma xy + 4h\varrho\sigma x - 4h\varrho^2 y = 0.$$

Der geometrische Ort der Berührungspunkte eines Parallelstrahlbüschels mit den Curven der Reihe ist eine Ellipse.

Aus den Coordinaten des Mittelpunktes der Ellipse:

$$x' = -h \cdot \frac{\sigma}{\varrho}, \qquad y' = \frac{h}{2} \cdot \frac{\varrho^2 - \sigma^2}{\varrho^2}$$

ersieht man, dass der Ort der Mittelpunkte des Systems der Ellipsen, welche den Punkten der unendlich fernen Geraden in der angegeben Weise zugeordnet sind, durch die Gleichung:

$$x^2 + 2hy - h^2 = 0$$

dargestellt wird.

Die Centra der sämmtlichen Parallelstrahlbüscheln zugeordneten Ellipsen sind Punkte einer in Bezug auf die Enveloppe der Reihe ähnlichen und ähnlich gelegenen Parabel, deren Directrix mit der Leitlinie der Wurfcurven und deren Brennpunkt mit dem Ursprunge zusammenfällt.

Die Einhüllende dieses Systems der Ellipsen ist identisch mit der Enveloppe der Curvenreihe.

In dem speciellen Falle, dass der Scheitel des Tangentenbüschels in den unendlich fernen Punkt der Abscissenachse fällt, lautet die Gleichung der Ellipse:

$$x^2 + 4y^2 - 4hy = 0.$$

Der geometrische Ort der Scheitel der Curven der Reihe ist eine Ellipse, deren Mittelpunkt in der Ordinatenachse gelegen ist und deren Achsen parallel den Coordinatenachsen verlaufend ihrer Länge nach bestimmt sind durch die doppelte bezw. einfache Höhe der Curvenreihe.

Zeitschrift/Journal: Lotos - Zeitschrift fuer Naturwissenschaften

Jahr/Year: 1890

Band/Volume: 38

Autor(en)/Author(s): Habart Carl

Artikel/Article: Ueber Wurfcurvenreihen . 52-68