

# Eine räumliche Darstellung der Tonreihe

und die Ausnützung derselben in einem Apparate als Lehrmittel im  
Musikunterricht.

Von

Anton Michalitschke,

Assistent an der k. k. deutschen techn. Hochschule in Prag.

Geht man von der Annahme aus, dass die Verschiedenheit der Töne in Bezug auf ihre Höhe physikalisch begründet ist in der Verschiedenheit der Anzahl der Schwingungen des Tonerregers (in derselben Zeit), so folgt zunächst, dass es unendlich viele verschieden hohe Töne gibt, die eine *continuirliche* Reihe bilden, wie die entsprechenden Schwingungszahlen.

Die Zahlen werden graphisch durch Strecken dargestellt. Haben dieselben einen gemeinsamen Anfangspunkt  $O$ , so geben die zweiten Endpunkte der einzelnen Strecken eine Punktreihe, die mit Bezug auf jenen gemeinsamen Punkt, den Nullpunkt, den geometrischen Ort der Zahlen bildet. Diese Punktreihe ist eine gerade Linie, wenn alle Strecken dieselbe Richtung haben; sie ist eine krumme Linie, wenn sich die Richtung stetig ändert, die Strecken also strahlenförmig vom Anfangspunkte  $O$  ausgehen. Die Curve geht dann in immer weiteren Windungen um  $O$  herum.

So wie nun die eine oder die andere dieser Linien durch die räumlichen Beziehungen ihrer Punkte untereinander — immer mit Bezug auf jenen Punkt  $O$  — die Zahlenreihe in allen ihren Verhältnissen darstellt, so kann sie uns die Tonreihe versinnbilden, indem sie durch dieselben Beziehungen die Verhältnisse zwischen den einzelnen Tönen der Reihe ausdrückt, und durch die wachsende Entfernung ihrer Punkte von  $O$  das Ansteigen der Tonhöhe zeigt.

Es ist Thatsache, dass von all' den verschiedenen Tönen, objectiv und subjectiv, solche Töne gewisse gemeinsame Merkmale aufweisen, deren Schwingungszahlen in demselben Verhältnisse stehen, dass es also nur auf dieses, nicht auf die Differenz der betreffenden Zahlen, also nicht auf deren absolute Grösse, oder die absolute Tonhöhe ankommt. Man bestimmt daher ganz allgemein den Unterschied der Höhe irgend zweier Töne durch das

Verhältnis der Schwingungszahlen und nennt dieses in der Physik wie in der Musik das Intervalle der beiden Töne. Es werden mithin immer viele Tonpaare, welche Höhe die einzelnen Töne auch haben mögen, dasselbe Intervalle aufweisen.

Das Intervalle ergibt sich also zunächst als Zahlenverhältnis, in unserer Darstellung als Längenverhältnis. Diese Längenverhältnisse sind nun aber der Auffassung schwer zugänglich und noch schwerer, wenn es sich um die Vergleichung der Intervalle unter einander handelt. Es würden sich auch die gleichen Intervalle nicht als solche ohne weiteres zeigen. Dies einer neben vielen anderen wichtigen Gründen, warum wir von der ersten Darstellung, der durch die gerade Linie, absehen.

Bei der zweiten Darstellung tritt zu dem Längenverhältnisse noch der Richtungsunterschied der Strahlen. Die Richtung derselben wird bestimmt durch die Winkel, welche die Strahlen mit einer durch  $O$  gehenden festen Achse  $Ox$  einschliessen. Der Richtungsunterschied zweier Strahlen ist dann die Differenz der entsprechenden Winkel, oder der Winkel zwischen den Strahlen selbst.

Wird nun in allen Fällen das Streckenverhältnis durch den Richtungsunterschied charakterisirt, mit anderen Worten, bilden alle Strahlenpaare, deren Längenverhältnis dasselbe ist, denselben Winkel, so entspricht allen gleichen Intervallen ein einziges charakteristisches Bild, eben dieser Winkel, der ungleich sinnfälliger die Intervalle darstellt und sie einfacher vergleichen lässt, als die Streckenverhältnisse.

Wir haben also zur Darstellung der Tonreihe eine Punktreihe oder eine Curve zu wählen, deren Punkte gegen einen Punkt  $O$  so liegen, dass immer je zwei Strahlen, die im selben Längenverhältnisse stehen, denselben Winkel mit einander einschliessen.

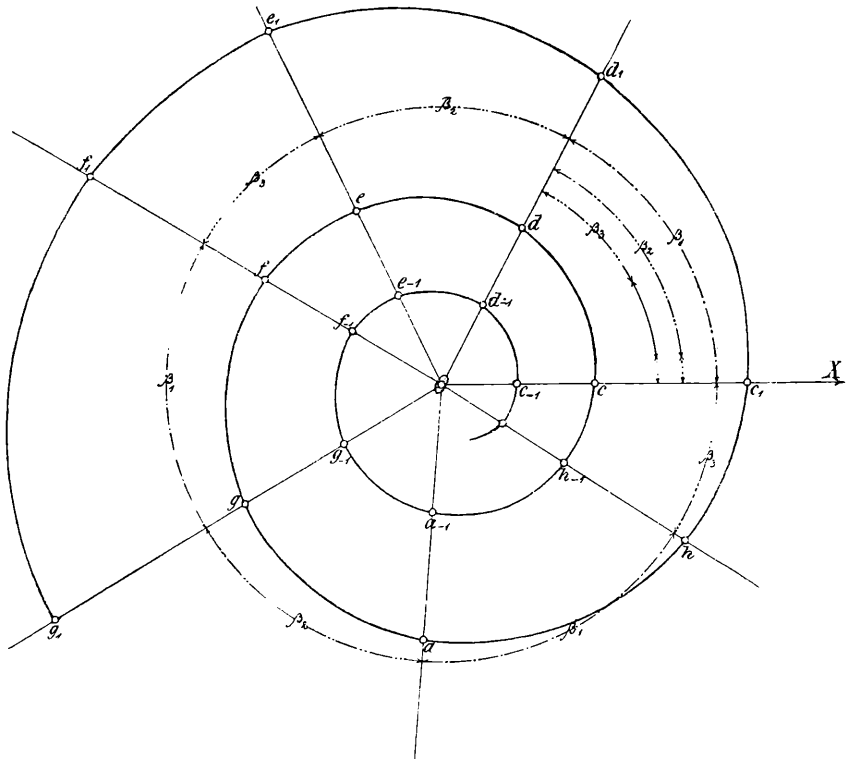
Dieser Bedingung nun entspricht die logarithmische Spirale. Die Beziehung, in der ihre Punkte zu dem Ursprunge  $O$  und einer festen Achse  $Ox$  stehen, drückt die Gleichung

$$r = ep\varphi$$

aus, in der  $r$  die Entfernung des Curvenpunktes von  $O$ ,  $\varphi$  den Winkel bedeutet, den der Leitstrahl  $r$  dieses Punktes mit der Achse  $Ox$  bildet;  $e$  ist die Basis des natürlichen Logarithmensystems,  $m$  eine beliebige constante Zahl, u. zw. setzen wir fest, dass es eine positive Zahl sei. Aus der Gleichung geht hervor, dass die Ent-

fernung  $r$  des die Curve beschreibenden Punktes von  $r = 1$  bis  $r = \infty$  wächst, wenn der Winkel  $\varphi$  von  $O$  bis  $\infty$  zunimmt. Die Richtung, in der  $\varphi$  wächst, also der Drehungssinn des wachsenden Leitstrahls  $r$  sei derjenige, der dem des Uhrzeigers entgegengesetzt ist.

Die Drehung kann aber von  $\varphi = 0$ , also von  $Ox$  aus, auch in entgegengesetzter Richtung erfolgen, und hiefür ist die Drehungs-



grösse  $\varphi$  negativ einzuführen. Es wird dann für diese Werte von  $\varphi$ , die wir mit  $-\varphi'$  bezeichnen wollen,

$$r = e^{-m\varphi'} = \frac{1}{e^{m\varphi'}}$$

d. h. es nimmt mit wachsender Drehung die Länge des Leitstrahles ab; sie wird Null, wenn  $\varphi' = \infty$  geworden.

Die Spirale beginnt demnach in unendlicher Nähe des Punktes  $O$ , der für sie ein asymptotischer Punkt ist, und geht um diesen in unendlich vielen, immer weiter werdenden Windungen herum.

Die Constante  $m$  im Exponenten ist für jede einzelne Spirale eine bestimmte Grösse; sie bewirkt je nach ihrem grösseren oder kleineren Werte ein rascheres oder langsames Wachsen des Radius bei derselben Grösse der Drehung, d. h. sie bestimmt die besondere Gestalt der einzelnen logarithmischen Spiralen.

Sind  $r_1$  und  $r_2$  irgend zwei Radien der Curve,  $\varphi_1$  und  $\varphi_2 = \varphi_1 + \alpha$  die entsprechenden Winkel, so ist das Verhältniss der beiden Radien

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{em(\varphi_1 + \alpha)}{em\varphi_1} = e^{m\alpha}$$

also ein constantes, das nur vom Winkel abhängt, den sie mit einander bilden; es entspricht die Winkelgrösse  $\alpha$  einem gewissen Radienverhältnisse, das von der Länge der Radien selbst gar nicht beeinflusst wird. \*)

Somit würden nun die Punkte der logarithmischen Spirale alle möglichen Töne darstellen. Derjenige von zwei Punkten der Curve, der in der Windung nach aussen hin (also nach links) liegt, entspricht dem höheren Tone. Der Winkel zwischen den Radien der beiden Punkte stellt das Intervalle der beiden Töne dar. Eine Grenze setzt die Curve weder nach oben noch nach unten hin fest, wie es eben der Tonreihe entspricht, in der man die beiden Grenzpunkte in Bezug auf die Wahrnehmung nicht genau festsetzen kann, während sie physikalisch beliebig weit hinausgeschoben werden können.

Die Darstellung muss nun aber noch weiteren Forderungen genügen. Wie jede zur Verfügung stehende Reihe ist auch die Tonreihe für den Gebrauch und die Untersuchungen in Systeme gebracht worden, d. h. es werden nach gewissen Systemen gewisse Glieder aus der gegebenen Reihe herausgehoben.

Dem modernen Tonsystem liegt nun dasjenige Intervalle zu Grunde, das in Bezug auf die die Tonhöhe bedingenden Umstände das einfachste ist, das Intervalle zweier Töne, deren Schwingungszahlen sich wie 1 : 2 verhalten, oder für welche die entsprechenden Saitenlängen (bei der gleichen Saite und der gleichen Spannung) das Verhältniss 2 : 1 aufweisen. In Hinsicht auf die Wahrnehmung ist dies zugleich das Intervalle der vollkommensten Consonanz. Es heisst *Octave*. Die Benennung der Töne ist nun so durchgeführt, dass alle Töne, die um dieses Intervalle auseinanderliegen, mit demselben Namen bezeichnet werden. Es tritt nur die Angabe hinzu,

\*) Ueber die ausführliche Darlegung der Eigenschaften der logarithmischen Spirale vgl. man meine Monographie „Die archimedische, die hyperbolische und die logarithmische Spirale“. 2. Auflage. Prag 1891.

ob der eine von mehreren solchen Tönen höher oder tiefer ist, als ein anderer, und wie viel Octaven der Unterschied in der Höhe beträgt.

Nachdem nun so beliebig gewählte Töne in Classen gebracht sind, innerhalb deren sich alle Verhältnisse, alle Benennungen in derselben Weise wiederholen, und überdies das Streckenverhältnis 1 2 als Bild des Intervalles leicht erfasst wird, so wählen wir für die Darstellung eine solche logarithmische Spirale, bei der jeder Radius nach einer ganzen Umdrehung verdoppelt erscheint. Durch diese Bedingung ist die Curve, welche die Tonreihe darstellen soll, vollkommen bestimmt und kann construirt werden.

Wir haben so in der bestimmten Spirale ein in Ansehung der gestellten Forderungen zutreffendes räumliches Bild für die Tonreihe gefunden, in das noch entsprechende Züge einzuzeichnen sind und aus welchem sie herausgelesen werden können, so dass eine klare Auffassung der in derselben herrschenden Verhältnisse und Gesetze vermittelt werde.

Zunächst wissen wir, dass jeder Punkt der Curve einen Ton darstellt, insoferne als er eine Zahl darstellt, und jede Zahl als Schwingungszahl auftreten kann, jeder Schwingungszahl aber ein Ton entspricht. Die immer weiter werdenden Windungen zeigen das Ansteigen der Tonhöhe, die Grenzen sind durch die Curve nach aussen und innen offen gelassen, sowie in der Tonreihe weder in der Höhe noch in der Tiefe welche festgesetzt sind, da sie verschiedene Umstände verschieden bestimmen. Der Winkel, den irgend zwei Radien mit einander einschliessen, gezählt in der Richtung der wachsenden Winkel, bestimmt unzweideutig deren Längenverhältnis, ist also der Ausdruck für das Intervalle der beiden durch die entsprechenden Curvenpunkte dargestellten Töne. Die Lage der Punkte gegeneinander zeigt die gegenseitige Lage der Töne. Alle in irgend einer von  $O$  ausgehenden Geraden liegenden Punkte entsprechen Tönen, die successive um eine Octave auseinanderliegen und denselben Namen führen. Dem Intervalle der Octave entspricht als Drehungsgrösse ein ganzer Kreisumfang.

Es ist nun klar, dass in dieser Darstellung jedes Ton-system, dessen Gesetze uns bekannt sind, zur Anschauung gebracht werden kann. Das System setzt die Intervalle und die Intervallenfolge in irgend einer auszuwählenden Reihe fest; über die absolute Höhe der einzelnen Glieder sagt es nichts, so dass unendlich viel verschiedene Reihen von Tönen demselben System ent-

sprechen können. Dies kommt auch in der Darstellung zum Ausdruck. Der Intervallenfolge entspricht eine Aufeinanderfolge von Winkelgrößen, die um den festen Punkt  $O$  herumliegen, und durch die unter den Curvenpunkten jene fixirt werden, deren räumliche Beziehungen den Gesetzen des Systems entsprechen. In der Spirale weisen aber immer verschiedene Punktreihen dieselben Beziehungen auf, so lange sie nur derselben Curve angehören. Sowie also in der Tonreihe jedes System sich auf verschiedene Töne aufbauen kann, so können in der Spirale die festgesetzten Beziehungen von beliebigen Punkten aus genommen werden. Auf beiden Seiten, in der Spirale wie in der Tonreihe, ergeben sich damit jedesmal andere Reihenglieder, für alle Reihen gelten aber dieselben Gliederverhältnisse, und die Beziehung zweier Punktreihen der Spirale, die auf demselben Princip beruhen, ist auch das Bild der Beziehung zweier Tonreihen, denen dasselbe Tonsystem zu Grunde liegt.

Wollen wir also mittels der Spiralpunkte irgend ein Tonsystem darstellen, so haben wir die dasselbe bildenden Intervalle in unserer Art, durch die entsprechenden Winkel nämlich, auszudrücken, und diese Winkelreihe von irgend einem beliebigen Radius aus einzuzeichnen. Haben wir dann eine ganz bestimmte Tonreihe darzustellen, so stellen wir uns unter dem Ausgangspunkt in der Spirale den bestimmten Ton vor, von dem aus wir in der Tonreihe die Intervallenfolge rechnen. Alle übrigen Punkte geben die übrigen bestimmten Töne. Um aus einer Tonreihe eine andere Reihe desselben Systems zu bilden, die also nur einen anderen Ausgangspunkt der Intervallenfolge hat, drehen wir einfach sämtliche Winkel so, dass ihr Anfangsradius durch den neuen bestimmten Ausgangspunkt geht.

Darin besteht nun das Princip der ganzen Darstellung und der Ausnützung derselben zur Bildung der Tonsysteme und der diesen entsprechenden Tonreihen in einem Apparate, der als Anschauungs- und Lehrmittel dienen soll.

Soll nun die Darstellung für das diatonische Tonsystem durchgeführt werden, so sind jene Winkelgrößen aufzusuchen, die den einzelnen Intervallen entsprechen, welche die in diesem System zur Verwendung kommenden Töne aufweisen. Da in der Tonreihe alles in den aufeinander folgenden Octaven, in der Spirale in den aufeinander folgenden Umläufen wiederkehrt, so hat man die Rechnung nur innerhalb einer Octave, oder innerhalb des Winkelraumes von  $2\pi$  zu machen.

Dieses System setzt für die zu wählende Tonreihe fest, dass als Intervalle zwischen je zwei benachbarten Tönen einander folgen: 2 ganze Töne, 1 halber Ton, 3 ganze Töne, 1 halber Ton.

Von diesen sind die halben Töne gleiche Intervalle, die Ganztöne sind gross und klein, und zwar folgen abwechselnd ein grosser und ein kleiner Ganzton. Wo immer diese Reihe begonnen wird, wiederholt sie sich nach 7 Intervallen in derselben Weise.

Beziehen wir sämtliche Intervalle auf einen Ton, bei dem die oben angegebene Intervallenfolge beginnt, den wir, um einen Namen zu haben, mit *c* oder *do* oder *ut* bezeichnen wollen, so nennen wir dieselben, und wol auch die entsprechenden Töne selbst, mit Bezug auf den ersten, wenn wir diesen auch noch hinzunehmen

Prime, Secunde, Terz, Quarte, Quinte, Sexte, Septime, Octave; die dazu gehörigen Schwingungszahlen sind wieder mit Bezug auf den ersten (die relativen Schwingungszahlen)

$$1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}, 2.$$

Durch Division einer Zahl durch die unmittelbar vorhergehende ergeben sich die Werte der benachbarten Intervalle. Für unsere Darstellung sind diese Zahlen die Längen der die Intervalle, also die Winkel begrenzenden Radien, wenn der Anfangsradius, von dem aus die Winkel gemessen werden, als Einheit genommen wird. Man hat also den zugehörigen Winkel  $\varphi$  aus der Gleichung der Curve zu rechnen.

Darnach ergeben sich die bestimmten Winkel:

$cOc = \alpha_1^0 = 0^0$	für die Prime
$cOd = \alpha_2^0 = 61^0 10' 23''$	Secunde
$cOe = \alpha_3^0 = 115^0 53' 38'' 5$	Terz
$cOf = \alpha_4^0 = 149^0 24' 48'' 5$	Quarte
$cOg = \alpha_5^0 = 210^0 35' 11'' 5$	Quinte
$cOa = \alpha_6^0 = 265^0 18' 27''$	Sexte
$cOh = \alpha_7^0 = 326^0 28' 50''$	Septime
$cOc_1 = \alpha_8^0 = 360^0$	Octave.

Durch Subtraction erhält man die den oben angegebenen Intervallen entsprechenden Winkelgrössen, und zwar ist:

$$\begin{aligned} \alpha_2^0 - 0^0 &= cOd = \beta_1 = 61^0 10' 23'' && \text{für den grossen ganzen Ton} \\ \alpha_3^0 - \alpha_2^0 &= dOe = \beta_2 = 54^0 43' 15'' 5 && \text{kleinen „} \\ \alpha_4^0 - \alpha_3^0 &= eOf = \beta_3 = 33^0 31' 10'' && \text{grossen halben} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_5^0 - \alpha_4^0 &= fOg = \beta_1 && \text{für den grossen ganzen Ton} \\ \alpha_6^0 - \alpha_5^0 &= gOa = \beta_2 && \text{kleinen} \\ \alpha_7^0 - \alpha_6^0 &= aOh = \beta_1 && \text{grossen „} \\ \alpha_8^0 - \alpha_7^0 &= hOc_1 = \beta_3 && \text{„ „ „ halben „} \end{aligned}$$

Es ist zu beachten, dass der Multiplication und Division der Schwingungszahlen die Addition und Subtraction jener Grössen entspricht, die in unserer Art die Intervalle darstellen, dass also durch viel einfachere Operationen die Lage eines Tones gegen andere gefunden wird, in der Figur durch directes Abgreifen mit dem Zirkel.

Wir theilen nun den ganzen Kreis um  $O$  in die oben berechneten 7 Theile, dann fixiren die diese Winkel begrenzenden Radien in der Spirale Punkte, welche eine diatonische Tonreihe darstellen.

Die Intervallenfolge innerhalb der Octave ist verschieden je nach dem gewählten Anfangsintervalle. Die moderne Musik verwendet zwei Arten der Intervallenfolge, die zwei Tonarten Dur und Moll, indem sie einmal mit dem ersten, das anderemal mit dem sechsten der oben angeschriebenen Intervalle die Reihe beginnt. Indem sie nun in beiden Tonarten die jeder derselben entsprechende Intervallenfolge an jedem Ton der Reihe ansetzt, d. h. die Transpositions-Scalen für die verschiedenen Grundtöne bildet, ergeben sich jedesmal neue Töne, die zwischen den ursprünglich gewählten liegen und unter die zu verwendenden aufgenommen werden müssen.

In dem Bilde ergeben sich alle diese Scalen, indem man den in bekannter Weise getheilten Kreis, der der Typus für jede diatonische Tonleiter ist, mit seinem Anfangsradius, der für Dur und Moll ein anderer ist, an den betreffenden Grundton anlegt, also die festgehaltene Intervallenreihe um  $O$  dreht, oder eben jene Addition beziehungsweise Subtraction der Winkel vornimmt. Die genaue Lage der neuen erforderlichen Töne wird durch die einfache Beziehung der Curvenpunkte kenntlich, man sieht sie ohne jede Rechnung.

So kann man nun mit Hilfe dieser Darstellung alles, was die Musik in der Verwendung der Tonreihe mit deren Gliedern vornimmt oder auch vornehmen kann, versinnbilden und mittels der Raumvorstellung klar erfassen. Wie jede Tonleiter, so erhält auch jeder Accord ein typisches Bild, welches die Bildung desselben wie die Zusammensetzung durch die Anschauung klar macht. Was eine Temperatur der Intervalle bezweckt und was irgend eine derselben wirklich bewirkt, zeigt wohl nur eine solche Darstellung ganz



deutlich. Die Fehler der temperirten Intervalle gegen die reinen können hier am leichtesten geschätzt, verglichen und gemessen werden. Theoretische Forschungen verschiedener Art lassen sich an der Hand der Darstellung verfolgen und anschaulich machen, ja selbst auch anstellen.

Der Construction des Apparates nun liegt die entwickelte Theorie zu Grunde, sowie auch die Rücksicht darauf, dass er als geeignetes und ausreichendes Lehrmittel seinen Zweck erfülle. Darum muss einerseits die Art der mechanischen Veränderung, die an dem Apparate zur Bildung von Tonleitern, Accorden, Intervallen vorgenommen wird, jener Veränderung entsprechen, die in der Tonreihe zu denselben Zwecken wirklich erfolgt; andererseits muss sich dabei zugleich möglichst vieles im Bilde von demjenigen ergeben, was der Lernende zu erfahren hat. So zeigt der Apparat z. B. in ein und demselben Bilde die jeweiligen parallelen Transpositionsscalen mit ihren Vorzeichnungen und Grunddreiklängen, die betreffende Moll-Scala zugleich in aufsteigender und absteigender Form, ebenso die zugehörige harmonische Form derselben. In jedem Falle zeigt sich der Unterschied der reinen Scala und der verwendeten, der gleichschwebend temperirten, mit welchem Recht also dieselben Töne verschiedene Namen in den verschiedenen Scalen haben. Ebenso wird die Versetzung der Accorde, der Drei- und der Vierklänge veranschaulicht.\*) Ueber die Grenzen der Tonreihe in

\*) Das Hauptgewicht liegt bei Verwendung der Darstellung als Lehrmittel darin, dass der Bau der Scalen, der Intervalle und Accorde jederzeit klar und deutlich vor Augen steht. Zunächst ist die *c-Dur*-Scala eingestellt, damit zugleich die *a-Moll*-Scala (aufsteigend, absteigend und harmonisch) und die Grunddreiklänge für *Dur* und *Moll*. Wird nun eine andere Transpositions-Scala eingestellt, so wird dadurch, dass die typischen Bilder dieselben bleiben und nur an einen anderen Punkt angesetzt werden, deutlich, dass wohl andere Töne, also andere Namen, auftreten, dass aber die Beziehungen der Töne untereinander stets dieselben sind, und welches diese Beziehungen sind. Wird z. B. das *D* der Tonreihe auf den Ausgangspunkt der diatonischen Durtonleiter gedreht, so findet man die Töne der *D-Dur*-Scala

$$d, \bar{e}, \overline{fis}, g, \bar{a}, h, \overline{eis}, d_1.$$

zugleich den zugehörigen Grunddreiklang

$$d, \overline{fis}, \bar{a},$$

die parallele Molltonleiter (die Vorzeichnung für die Notenschrift bei *d* angegeben: 2 Kreuze)

der Höhe und in der Tiefe, ebenso über die Grenzen der Verdichtung einer gegebenen Tonreihe, über das Wahrnehmen der Intervalle in tiefen, mittleren und hohen Lagen lassen sich an der Figur Betrachtungen anstellen. Das Schwingungsverhältnis für das

$$h, \overline{cis}, d, \overline{e}, \overline{fis}, g, \overline{a}, h_1,$$

aufsteigend  $gis, \overline{ais},$   
harmonisch  $g, \overline{ais},$

und den Dreiklang  $h, d_1, \overline{fis}_1.$

Hierin bedeutet die Silbe *is* die Erhöhung des betreffenden Tones der *c*-Dur-Scala um einen kleinen halben Ton

(kl. h. T. = kl. g. T. — gr. h. T. = gr. g. T. — gr. h. T. — Komma =  $21^\circ 12' 5'' 5$ )

der oben angesetzte Strich die Erhöhung des Tones um ein Komma

$$(K. = \text{gr. g. T. — kl. g. T.} = \beta_1 - \beta_2 = 6^\circ 27' 7'' 5).$$

Die Töne *fis*, *cis* u. w. ergeben sich ganz deutlich als verschieden von den Tönen *ges*, *des*, u. s. w. also der Grund, warum sie in den verschiedenen Scalen verschiedene Namen haben, während für beide derselben (*fis-ges*, *cis-des* u. s. w.) Instrumente mit festen Tönen einen und denselben Ton zur Verfügung stellen. Es wird dabei die Nothwendigkeit einer Temperatur eingesehen und in der Figur zugleich erkannt, welche Töne durch jene in einen zusammenfallen, und wie weit die den temperirten Intervallen entsprechenden Töne von den physikalischen entfernt sind.

Da in dieser Darstellung den temperirten Intervallen

$$1, \sqrt[12]{2^2}, \sqrt[12]{2^4}, \sqrt[12]{2^5}, \sqrt[12]{2^7}, \sqrt[12]{2^9}, \sqrt[12]{2^{11}}, 2$$

die Winkelgrößen

$$\begin{array}{ll} \alpha_1' = 0^\circ & \alpha_5' = 210^\circ \\ \alpha_2' = 60^\circ & \alpha_6' = 270^\circ \\ \alpha_3' = 120^\circ & \alpha_7' = 330^\circ \\ \alpha_4' = 150^\circ & \alpha_8' = 360^\circ \end{array}$$

entsprechen, so zeigt sich zunächst, dass nach der Prime und Octave, welche rein belassen sind, den kleinsten Fehler

die Quarte, nämlich  $\alpha_4' - \alpha_4 = + 0^\circ 35' 11'' 5 = + w$

und die Quinte, nämlich  $\alpha_5' - \alpha_5 = - 0^\circ 35' 11'' 5 = - w$

aufweisen. Im übrigen ergeben sich die Fehler der temperirten Intervalle gegen die reinen in der *C*-Dur-Scala mit folgenden Werten:

für <i>c</i>	<i>o</i>	für <i>g</i>	— <i>w</i>
<i>d</i>	— $2w$	<i>a</i>	+ $8w + 1''$
<i>e</i>	+ $7w + 1''$	<i>h</i>	+ $6w + 1''$
<i>f</i>	+ $w$	<i>c_1</i>	<i>o</i> .

noch wahrnehmbare kleinste Intervalle z. B. ist nach Weber 1001 1000; diesem entspricht ein Winkel von beiläufig (etwas

Für die verschiedenen Transpositions-Scalen ergeben sich verschiedene Fehlerreihen, da immer andere Töne vorliegen, doch gilt für jede Scala diese angeschriebene Reihe, wenn man alles auf den jeweiligen Grundton bezieht, d. h. diesen als rein annimmt und seinen Fehler von allen in Abzug bringt. So erhält man z. B. für die *d-Dur*-Scala die Winkel:

	rein:		temperirt:
$\beta_1$	{	61° 10' 23''	$\frac{d}{e}$ 60°
$\beta_2$		122° 20' 46''	120°
$\beta_3$	{	177° 4' 1'' 5	$\frac{f}{is}$ 180°
$\beta_1$		210° 35' 11'' 5	$\frac{g}{a}$ 210°
$\beta_2$	{	271° 45' 34'' 5	$\frac{h}{cis_1}$ 270°
$\beta_1$		326° 28' 50''	$\frac{d_1}{cis_1}$ 330°
$\beta_2$	{	387° 39' 13''	390°
$\beta_3$		421° 10' 23''	$\frac{d_1}{d_1}$ 420°

daher die Reihe der absoluten Fehler:

für $\frac{d}{e}$	— $2w$	für $\frac{a}{h}$	— $3w$
$\frac{f}{is}$	— $4w$	" $\frac{h}{cis_1}$	+ $6w + 1''$
$g$	+ $5w + 1''$	$\frac{d_1}{d_1}$	+ $4w + 1''$
	— $w$		— $2w$

Subtrahirt man den Fehler  $-2w$  des Grundtones, so erhält man die obige Fehlerreihe. Es ist also jede einzelne Transpositions-Scala für sich in derselben Weise gestimmt, während sie unter einander verschiedene Fehler aufweisen. Dieser Unterschied ist wiederum am kleinsten beim Fortschreiten um Quinten oder um Quartan. Er beträgt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Scalen bei jeder einzelnen Tonstufe  $-w$  oder  $+w$ . Die Beziehung zwischen dem Komma und dem Intervalle  $w$  ist ausgedrückt durch  $k = 11w + 1''$ .

Eine Figur des Apparates gibt das typische Bild des Dur-Dreiklages und seiner Versetzungen. Die Intervalle sind durch Grösse und Farbe unterschieden. So wird leicht erkannt und festgehalten, welche Intervalle neben einander stehen und welche auf dem Grundtone stehen, so dass mit Bezug auf letzteres der Grundaccord  $e-e-g$  ein Terz-Quinte-Accord, die erste Versetzung  $e-g-c_1$  ein Terz-Sexte-Accord, die zweite Versetzung  $g-c_1-e_1$  ein Quarte-Sexte-Accord ist. Will man z. B. den Quarte-Sexte-Accord, der auf  $f$  steht, bilden, so hat man das  $g$  des Accordbildes an das  $f$  der Tonreihe zu setzen; die Zeiger von  $c, e$  des ersteren weisen nach  $b$  und  $d$ , so dass der verlangte Accord  $f-b-d_1$  lautet; der Zeiger von  $e$  gibt den Grundton des zugehörigen Grunddreiklages, also der Tonart an, nämlich  $b$ -Dur.

Analoges gilt von der Figur der Moll-Accorde und der Septe-Accorde. Die verschiedenen Werte der einander zur Octave (zum ganzen Kreise) ergänzenden Intervalle lassen sich ebenfalls erkennen und einprägen;

mehr)  $\frac{1^0}{2}$ . Nachdem der Octave ein Winkel von  $360^0$  entspricht, so zeigt die Darstellung, dass das Gehör innerhalb der Octave ungefähr 700 Tonstufen zu unterscheiden im Stande sei. — Gleich grossen Winkeln gehören in den engeren Windungen kleine Curvenbögen, in den weiteren grosse, schliesslich unendlich grosse Bögen an. Die Töne, deren Intervalle dasselbe ist (derselbe Winkel), liegen in der Tiefe im spiralischen Bogen zu nahe, in der Höhe zu weit auseinander, als dass ihr Intervalle eben so sicher wahrgenommen werden könnte, wie in der Mittellage.

Der Apparat gibt klare Auskunft in Fragen über verschiedene Stimmungen und Temperaturen, und die Vermittlung der Elemente der antiken Musik kann sich unter Benützung derselben Darstellung ungleich einfacher und erfolgreicher gestalten, da ja alte Tonarten eben nur in der Theorie vorliegen, auf diese Weise aber die vollständige Orientirung innerhalb der Tonreihe von beliebigen Gesichtspunkten aus möglich ist.

Diese Art der Vermittlung der Grundkenntnisse der Musiktheorie wendet sich an die Raumvorstellung, und auf diese muss sich jeglicher Unterricht stützen, selbst dort, wo die Tonvorstellung genug zu thun scheint. Darum ist der Apparat ein Lehrmittel für jeden, bei dem überhaupt irgend ein Anschauungsmittel angewendet werden kann.\*)

Die beifolgende Tafel enthält die ursprünglichen Töne der diatonischen Reihe, deren Erhöhungen und Vertiefungen um einen kleinen halben Ton ( $\beta_2 - \beta_3$ ), und die zugehörigen Erhöhungen und Vertiefungen um ein Komma ( $\beta_1 - \beta_2$ ); alle jene Töne nämlich, die innerhalb der Octave eingeschaltet werden müssen, wenn man die Transpositions-Scalen für die Töne *c, d, e, f, g, a, h*, dann für

---

sie sind zusammengestellt in den Figuren der Secunden-Septen, Terzen-Sexten, Quarten-Quinten.

Eine Figur gibt die Zusammenstellung sämtlicher Intervalle, der reinen, der grossen und kleinen, ihrer Vergrösserungen und Verminderungen um einen kl. h. T., sowie um ein Komma. Es wird ersichtlich, wie die grösseren Werte des einen Intervalles in die kleineren des anderen hinübergreifen, endlich zeigt sich, welche von den verschiedenen Intervallen durch die Temperatur einander gleichgemacht sind.

\*) Ueber die didaktischen Gesichtspunkte vgl. man meinen Aufsatz „Ueber Musikunterricht“ im Februarheft von „Böhmens deutsche Poesie und Kunst“, herausgegeben von E. F. Kastner in Eichwald.

jene Töne bilden will, welche um einen kl. h. T. höher, beziehungsweise tiefer liegen, als die ersteren. Man hat also die Sektoren, die der diatonischen Octave entsprechen und die aus der Tafel entnommen werden können, auf einer Kreisscheibe zu verzeichnen, den Mittelpunkt dieser letzteren auf den Mittelpunkt der Figur in der Tafel zu setzen, und den Anfangsradius der Scheibe an den Ton der Figur anzulegen, den man als Grundton wählt, dann geben die übrigen Radien die betreffende Transpositions-Scala. Wollte man jedoch z. B. anstatt des  $A$  ein  $\bar{a}$  (um ein K. höher als  $a$ ) als Grundton wählen, der sich beim Fortschreiten um reine Quinten von  $C$  aus ergibt, so findet man nicht alle nöthigen Töne in der Figur eingezeichnet, sondern man sieht, dass sie um ein Komma höher liegen, als jene, die dem reinen  $A$  entsprechen. Die jeweilige Molltonleiter ergibt sich in der Figur unmittelbar allerdings nur in absteigender Form, während der Apparat alle Formen gleichzeitig zeigt. Ferner sind in der Tafel auch die temperirten Intervalle eingezeichnet und die Töne angegeben, welche durch e i n e n ersetzt sind.



# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Lotos - Zeitschrift fuer Naturwissenschaften](#)

Jahr/Year: 1892

Band/Volume: [40](#)

Autor(en)/Author(s): Michalitschke Anton

Artikel/Article: [Eine räumliche Darstellung der Tonreihe und die Ausnützung derselben in einem Apparate als Lehrmittel im Musikunterricht. 11-23](#)