Ein Monochord

mit spiralförmigem Stege zur Darstellung der pythagoraeischen der physikalischen und der gleichschwebend temperirten Tonintervalle.

Von

Anton Michalitschke,

Assistent an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.

In meiner Abhandlung „Ueber eine räumliche Darstellung der Tonreihe und deren Ausnützung in einem Apparate als Lehrmittel im musiktheoretischen Unterrichte“[1]) habe ich gezeigt, dass die logarithmische Spirale ein getreues Abbild der Tonreihe, der in ihr herrschenden Verhältnisse und Gesetze liefert, und dass man mit Hilfe dieser Darstellung sämmtliche Tonverhältnisse zur Anschauung bringen kann; sämmtliche Tonverhältnisse, die überhaupt je in Betracht kommen können — so lange es richtig bleibt, dass das, was wir als verschiedene Tonhöhe wahrnehmen, in der Verschiedenheit der Schwingungsmenge des Tonerregers begründet ist. Dann ist ja die Tonreihe nichts anderes als die Zahlenreihe, und die Spirale ist nichts anderes als das geometrische Bild der Zahlenreihe. Man kann gewiss bei dieser Auffassung der Töne als Zahlen unzählige Bilder der Tonreihe sich schaffen, doch ist jene von mir gewählte logarithmische Spirale, deren Gleichung

$$r = e^{\frac{log\,2}{2\pi}\varphi}$$

ist, in ganz besonderer Weise zur Darstellung geeignet, indem gerade in ihren charakteristischen Eigenschaften zugleich das

[1]) „Lotos“ 1892, neue Folge, XII. Bd., vgl. auch „Deutsche Mittelschule“ Jahrg. V. (Separatabdruck bei O. Damm, Dresden.)

Charakteristische in den Beziehungen der Töne sich ganz von selbst wiederspiegelt.

Als Ausdruck für das Intervall zweier Töne, deren Schwingungszahlen $r_1 = e^{m\varphi_1}$ und $r_2 = e^{m\varphi_2}$ sind, ergibt sich bei dieser Darstellung zunächst $i = \frac{r_2}{r_1} = e^{m(\varphi_2 - \varphi_1)} = e^{m\alpha} = e^{\frac{log\,2}{2\pi}\alpha} = 2^{\frac{1}{2\pi}\alpha}$

und damit die Winkelgrösse $\varphi_2 - \varphi_1 = \alpha = 2\pi \frac{Log\frac{r_2}{r_1}}{Log\,2}$.

Es ist somit der **Winkel** zwischen zwei Radienvectoren, welche als Schwingungszahlen angesehen werden, das **Bild** für das **Intervall** zweier Töne, die durch die zugehörigen Curvenpunkte dargestellt werden, indem beide einzig und allein nur von dem Verhältnisse der Radien, beziehungsweise der Schwingungszahlen abhängen.

Andererseits findet das arithmetische Verhältnis der Schwingungszahlen seinen Ausdruck im spiralischen **Bogen**; dieser ist proportional der Differenz der einschliessenden Radienvectoren, indem

$$s = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m}(r_2 - r_1) = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m}(e^{m\alpha} - 1)\, e^{m\varphi_1}$$

ist.

Er entspricht somit der **Differenz** der Schwingungszahlen oder der **Tondistanz**, welche bei demselben Grundtone $(e^{m\varphi_1})$ grösser ist für grössere Intervalle und für gleiche Intervalle grösser ist bei höherem Grundtone.

I.

Es liegt nun gewiss nahe, die **Radienvectoren** der Spirale andererseits als **Saitenlängen** zu fassen. Dann dürfen aber die Radienvectoren, da sich mit ihren verschiedenen Lagen nur Längenunterschiede ergeben, nur Saiten von derselben materiellen Beschaffenheit, demselben Querschnitte und derselben Spannung, kurz eine Saite von veränderlicher Länge darstellen.

Unter dieser Voraussetzung hängt die **Tonhöhe** lediglich von der **Saitenlänge** ab, indem die kürzere Saite den höheren Ton gibt. Da sich die Schwingungszahlen zweier Töne umgekehrt wie deren Saitenlängen verhalten, so ist auch hier das Intervall nur durch den Quotienten aus den Saitenlängen bestimmt, d. h. es wird unter der Annahme, dass die Leitstrahlen Saitenlängen darstellen, ebenfalls allen gleichen Intervallen eine bestimmte Winkelgrösse entsprechen, die eben von dem Verhältnisse der Leitstrahlen abhängt. Nur hat man hier, um von tieferen zu höheren Tönen zu gelangen, die Spirale in der Richtung der abnehmenden Winkel (im Sinne des Uhrzeigers) zu verfolgen, in welcher die Radienvectoren, wie die Saitenlängen, abnehmen.

Nachdem für ein Intervall die beiden Verhältnisse, der Quotient $\frac{r_2}{r_1}$ aus den Schwingungszahlen, und jener aus den Saitenlängen $\frac{r_1'}{r_2'}$, einander gleich sein müssen, so ist der Winkel seiner absoluten Grösse nach in beiden Fällen der Darstellung derselbe.

Man wird also, um irgend ein Tonsystem mit seiner bestimmten Intervallenfolge in dieser Weise darzustellen, von irgend einem Anfangsradius ausgehen, der die Saitenlänge eines Ausgangstones darstellt, und nun jene Winkel neben einander in der der Aenderung der Tonhöhe entsprechenden Richtung auftragen, die sich aus den Schwingungsverhältnissen oder aus dem Verhältnisse der Saitenlängen für die benachbarten Intervalle ergeben. Die diese Winkel begrenzenden Radienvectoren stellen dann die Saitenlängen jener Töne dar, welche unter einander die verlangten Intervalle bilden. Sie sind direct die Saitenlängen bestimmter Töne oder diesen nur proportional, je nachdem der Anfangsradius die Saitenlänge des Ausgangstones selbst oder ihr nur proportional ist.

Denkt man sich einen Anfangsradius der linksgewundenen Spirale zugleich als Ausdruck für die Saitenlänge und für die Schwingungszahl eines Ausgangstones (C), so stellen die Radien $r_2\, r_3\, r_4 \,..$ die mit dem Anfangsradius r_1 die Winkel $\alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4 \,..$ bilden, die Schwingungszahlen jener Töne ($D, E, F, \ldots$) dar, deren Saitenlängen die Radien $r_2'\, r_3'\, r_4'$ sind, welche mit dem

Anfangsradius r_1 die gleich grossen Winkel $-\alpha_2$, $-\alpha_3$, $-\alpha_4, \ldots$[1] in entgegengesetzter Richtung bilden.

Nimmt man diesen Anfangsradius als Einheit (sowohl für die Saitenlängen, wie für die Schwingungszahlen), so sind die in beiden Drehungsrichtungen von jenem gleichweit abstehenden Leitstrahlen einander reciprok. Ist z. B. der Radius für C als Saitenlänge wie als Schwingungszahl $r_1 = 1$, so ist die Saitenlänge für D $r_2' = e^{-m\alpha_2} = \frac{8}{9}$, jene für E $r_3' = e^{-m\alpha_3} = \frac{4}{5}$, und die Schwingungszahl für D $r_2 = e^{m\alpha_2} = \frac{1}{r_2'} = \frac{9}{8}$, jene für E $r_3 = e^{m\alpha_3} = \frac{1}{r_3'} = \frac{5}{4}, \ldots$

Auf der Peripherie eines Kreises liegen die Punkte, in welchen jene von der Schwingungszahl und von der Saitenlänge eines und desselben Tones geschnitten wird, symmetrisch in Bezug auf jenen Durchmesser, in welchem die Schwingungszahl und die Saitenlänge des Ausgangstones zusammenfallen.

Andererseits sind die Leitstrahlen r_2, r_3, r_4, ..., welche mit r_1 die Winkel $+\alpha_2$, $+\alpha_3$, $+\alpha_4, \ldots$ einschliessen, die Saitenlängen solcher Töne, welche mit dem Ausgangstone r_1 die gleichen Intervalle bilden, wie die Töne, deren Saitenlängen r_2', r_3', r_4', ... sind; nur liegen jene ersteren tiefer, diese letzteren höher als der Ausgangston. Das umgekehrte Verhältnis in den Tonhöhen gilt, wenn sämmtliche Leitstrahlen als Schwingungszahlen gefasst werden.

Da je zwei dieser Radienvectoren, welche alle auf den des Ausgangstones $r_1 = 1$ bezogen sind, einander reciprok sind, kann man die ihnen entsprechenden Töne kurz „reciproke Töne" nennen.[2] So wären z. B. D und ${}_1B_{-1}$, E und As_{-1}, F und $G_{-1}, \ldots$ reciproke Töne in Bezug auf C. Ihre Saitenlängen sind r_2' und $\frac{1}{r_2'}$, r_3' und $\frac{1}{r_3'}$, ... ihre Schwingungszahlen r_2 und $\frac{1}{r_2}$, r_3 und

---

[1]) Die bestimmten Werthe für gr. Secund, gr. Terz, Quart u. s. w. sind im „Lotos", sowie auch weiter unten angegeben.

[2]) Steiner („Grundzüge einer neuen Musiktheorie", Wien 1891) nennt (pag. 3) zwei gleiche Intervalle, die zu beiden Seiten eines Ausgangstones liegen, reciprok. Es sind eben die Zahlenausdrücke für die beiden Intervalle reciprok.

$\frac{1}{r_3}, \ldots$ Nach dem Früheren ist $r_2' = \frac{1}{r_2}$, $r_2 = \frac{1}{r_2'}$; es gibt somit der Radiusvector, welcher einem von zwei reciproken Tönen als Saitenlänge entspricht, die Schwingungszahl des anderen und umgekehrt — beides mit Bezug auf den Radius des Ausgangstones, welcher Saitenlänge und Schwingungszahl darstellt.

Auf der Peripherie des Kreises liegen jene Punkte, in welchen dieselbe von Saitenlängen oder Schwingungszahlen reciproker Töne geschnitten wird, in der angegebenen Weise symmetrisch. In diesem Sinne könnten solche Töne symmetrisch genannt werden, wenn auch bei den Tönen selbst von einer derartigen Symmetrie nicht die Rede ist, wie ja auch die den Tönen entsprechenden Curvenpunkte nicht symmetrisch liegen.

Hält man von der ersten Darstellung her die Richtung der wachsenden Winkel für das Fortschreiten von tieferen zu höheren Tönen fest, so hat man für den Fall, dass die Radien Saitenlängen darstellen, eine Spirale zu wählen, deren Radienvectoren in dieser Richtung abnehmen. Und zwar wird man jene rechts gewundene Spirale wählen, welche der obigen links gewundenen vollkommen symmetrisch ist in Bezug auf die gemeinsame Polaraxe. Der absolute Wert der Constanten m des Exponenten in der Curvengleichung

$$r = e^{-m\varphi}$$

ist dann derselbe wie früher und es ergeben sich für die Intervalle ganz dieselben Winkel.

Sind beide Spiralen, die rechts- und die linksgewundene für denselben Pol und dieselbe Axe construirt, so schneiden sie sich in Punkten, welche in der Polaraxe und in ihrer Verlängerung über den Pol hinaus liegen. Ihnen entsprechen in der rechtsgewundenen Spirale die Winkel $\varphi = \mp k\pi$, in der links gewundenen $\varphi = \pm k\pi$, worin k jede ganze Zahl und Null bedeutet. Entspricht der Leitstrahl $r = 1$, der für beide Spiralen derselbe ist, in der rechts gewundenen der Saitenlänge, in der links gewundenen der Schwingungszahl eines Ausgangstones, so wird dann auf jedem einzelnen Strahle von der rechtsgewundenen Spirale die relative Saitenlänge und von der linksgewundenen die zugehörige Schwingungszahl abgeschnitten, wenn man — wie zuletzt angenommen — in der Richtung entgegen der Uhrzeigerbewegung von tieferen zu höheren Tönen fortschreitet.

II.

Man kann sich nun die (rechts gewundene) Spirale als Steg und den Radiusvector als Saite denken, welche von dem Pole ausgeht und in einem anderen Punkte auf dem Stege aufliegt, so dass durch eine Drehung um den festen Punkt längs des Steges ihre freie Länge verkleinert oder vergrössert wird, je nachdem die Drehung in der Richtung der wachsenden oder der abnehmenden Winkel erfolgt. Die Saite ist in allen Lagen dieselbe und von gleicher Spannung. Die Töne, zu denen sie in den verschiedenen Lagen angeregt werden kann, sind dann je nach der Drehungsrichtung immer höhere oder tiefere.

Ein derartiges Instrument stellt eine sehr dichte Tonreihe zur Verfügung, so dass jedes beliebige Tonsystem und die kleinsten Unterschiede in der Tonhöhe zu Gehör, die unter der Grenze der Wahrnehmung liegenden wenigstens zur Anschauung gebracht werden können.

Dies ist nun natürlich mittels des Monochords ebenfalls möglich. Doch dürfte sich manches finden lassen, was zu Gunsten jener Anordnung spricht.

In beiden Fällen sind Längenverhältnisse darzustellen; dass diese allein in Bezug auf einander nicht aufgefasst werden können, ist wohl klar. — Gibt die Saitenlänge l den Ton C, so ist die Saitenlänge des Tones D $\frac{8}{9} l$, jene von F $\frac{3}{4} l$, jene von G $\frac{2}{3} l$. Die Verhältnisse der Saitenlängen von C und D und von F und G sind dieselben $\left(\frac{9}{8}\right)$, doch wird dies Niemand sehen. Bei der Darstellung durch die Spirale ist der Exponent des Verhältnisses durch den constanten Winkel, um welchen die Saiten bei beiden Tonpaaren auseinanderliegen, gekennzeichnet. Hier wird die Saite für alle gleichen Intervalle um einen stets gleichen

Bogen gedreht, beim Monochord ist die Verschiebung des Steges für jedes einzelne unter gleichen Intervallen von anderer Länge, da die Differenzen der Saitenlängen eben verschieden sind. Diesen entsprechen die spiralischen Bögen, die wie die Differenzen kleiner sind für höher liegende Intervalle.

Der Unterschied z. B. zwischen der temperirten und der reinen Quart ist das Intervall $\sqrt[12]{2^5} \quad \frac{4}{3}$, annähernd gleich $\frac{10011}{10000}$, das Verhältnis der zugehörigen Saitenlängen $\frac{10000}{10011}$. Wenn nun die Länge für C l ist, so ist die für das reine F $\frac{3}{4}\,l$, jene für temperirte (F^*) $\frac{3}{4} \quad \frac{10000}{10011} \quad l$. Die Endpunkte der Saitenlängen für F und F^* liegen demnach um $\frac{11}{10011} \cdot \frac{3}{4} \quad l$ von einander entfernt. Wäre die Saitenlänge für den Grundton $C\,1\,m$, so ist die für das reine $F\,0{\cdot}75\,m$, jene für das temperirte $\frac{10000}{10011} \cdot 0{\cdot}75\,m = 0{\cdot}7491759\,m$, es beträgt demnach der Unterschied der beiden Längen $0{\cdot}0008241\,m$, der in den höheren Lagen immer kleiner wird.

Bei der Darstellung durch die Spirale entspricht dem obigen Intervalle ein Winkel von $w = 35'\,11''\,5$, dem bei einem Durchmesser von 1 *m* eine Bogenlänge von 0·51189 *cm* zugehört. (Der tiefste Ton würde hier von der Saitenlänge 0·5 *m* gegeben; doch lässt sich eine andere Saite finden, die bei dieser Länge einen gleich hohen Ton gibt, wie jene des Monochords bei 1 *m* Länge.)

Es sind also einerseits die Grössenverhältnisse, die bei einer wirklichen Ausführung gewiss in Betracht kommen, hier günstiger; andererseits ist das Intervall in der zweiten Darstellungsform sehr leicht zu erkennen und für Vergleiche festzuhalten, während von einem Auffassen obigen Zahlen- oder Längenverhältnisses natürlich gar keine Rede ist.

III.

Ich habe nun ein Modell eines Apparates ausführen lassen, welcher die Tonverhältnisse in der angegebenen Weise gleichzeitig zur Anschauung und zu Gehör bringen soll.

Auf einer kreisrunden Scheibe von 39 *cm* Durchmesser, die um eine durch den Mittelpunkt gehende Axe drehbar, ist die rechts gewundene logarithmische Spirale gezeichnet. Ein Messingband ist als Steg nach der Spirale gekrümmt und an der Scheibe in dieser Form festgehalten. Durch die Mitte der Scheibe geht ein Zapfen aus Stahl, der in einem Unterlagsbrette eingelassen ist, welches in einen die Scheibe umschliessenden Rahmen übergeht. Dieser Rahmen trägt einen Wirbel, an welchem eine gespannte Metallsaite endigt, die in dem Mittelzapfen ihren Anfang hat. Sie bildet also den Radiusvector, dessen Länge durch den Steg begrenzt und insoferne verändert wird, als die Scheibe mit dem festen Stege um den Mittelzapfen im Rahmen gedreht werden kann, während die Saite selbst mit dem Rahmen ruht. An dem Unterlagsbrette sind zwei Streben angebracht, so dass der Apparat nicht nur aufliegend, sondern auch stehend verwendet werden kann.

Der grösste Radiusvector, bei dem die Spirale beginnt, gibt die grösste Saitenlänge von 38 *cm*, bei welcher die Saite auf den Normalton a_1 eingestimmt werden kann.

Von diesem Radius aus sind die Intervalle auf der Scheibe (auf Leinwand) eingezeichnet und die ihnen entsprechenden Töne mit den Namen, die sie in Bezug auf jenen Ausgangston führen, eingetragen.

Im Folgenden ist, wie dies auch in der Zeichnung auf der Scheibe der Fall ist, die Octavenbezeichnung beim Namen des Tones weggelassen.

Da wir das Tongebiet von einem Tone C aus durchschreiten wollen, welcher um eine kleine Terz $\left(\frac{6}{5}\right)$ höher, oder um eine grosse Sext $\left(\frac{5}{3}\right)$ tiefer liegt, als jener Ausgangston A, so haben wir zunächst die Lage (der Saite) des Tones C gegen jene von A einzuzeichnen, d. h. wir haben einen Radiusvector zu zeichnen, welcher mit dem von A einen Winkel von

$$\alpha = 2\,\pi\,\frac{Lg\,6 - Lg\,5}{Lg\,2} = 94^0\ 41'\ 33''\ \text{einschliesst.}$$

Quint-Tonsystem.

Von diesem Punkte C des innersten (violett) ausgezogenen Kreises nun gehen wir in Quintenschritten

$\left(\frac{3}{2}\right)$ aufwärts und abwärts, d. h. wir tragen in der Richtung der wachsenden und in der der abnehmenden Winkel immer die gleichen Winkel $\alpha_5 = 210^0\ 35'\ 11''\ 5$ neben einander auf; dadurch erhalten wir auf der Kreisperipherie die Punkte, welche die Lagen der Saiten für die betreffenden Töne geben. Diese Punkte sind die Projectionen der Punkte der Spirale, welche den Quinttönen entsprechen, und zeigen unmittelbar nur die gegenseitige Lage dieser Töne in einem und demselben Octavenraume. Dann sieht man aber sofort, dass man zu denselben Tönen (dem Namen nach dieselben, ohne Rücksicht auf die Ordnungszahlen ihrer Octav von dem bestimmten C aus) auch in anderen Schritten gelangen kann.

Der Ueberschuss zweier Quinten nämlich über eine Octave ist ein (grosser) Ganzton ($210^0\ 35'\ 11''5 \times 2 - 360^0 = 61^0\ 10'\ 23''$)[1]; es ist daher der zweite Quintton irgend eines Grundtones die grosse Secund zur Octave jenes Ausgangstones. Bei Berücksichtigung der Beziehungen nur in einer Octave findet man also, dass man von einem Ausgangstone aus zu demselben Tone gelangt durch Fortschreiten um 2 Quinten oder um 1 (grossen) Ganzton.

Man erhält somit durch Fortschreiten von einem Ausgangstone aus in (grossen) Ganztönen nach beiden Richtungen hin die geradstelligen Quinttöne; um mit denselben Schritten die ungeradstelligen zu erhalten, hat man von der ersten Ober- (oder Unter-)Quinte aus nach auf- und abwärts fortzuschreiten.[2])

Der innerste voll ausgezogene Kreis der Zeichnung enthält also die Quinttöne, welche sich beim Fortschreiten von C aus nach auf- und abwärts ergeben; die Namen der Oberquinten sind aussen, jene der Unterquinten (mit Ausnahme von F)

---

[1]) Das Schwingungsverhältnis ergibt sich durch die entsprechenden Operationen: $\left(\frac{3}{2}\right)^2\ \ 2 = \frac{3^2}{2^3}$; daraus der Winkel $\alpha_2 = \frac{2\pi}{\mathrm{Log}\,2}\,\mathrm{Log}\left(\frac{3^2}{2^3}\right)$.

[2]) So erscheinen dann die 1., 2., 3., 4., grosse Ober- (oder Unter)-Secund eines Ausgangstones als im 2., 4., 6., 8., . . Grade, seine Oberquint und deren 1., 2., 3., grosse Obersecund, ebenso seine Unterquint und deren 1., 2., 3., . grosse Untersecund als „im 1., 3., 5., Grade quintverwandte Töne“ in Bezug auf den Ausgangston.

innen bemerkt. Die Zahlen unter und über den Namen der Töne geben die Anzahl der Quintenschritte, also den Grad der Quintverwandtschaft.[1])

Die beiden benachbarten gestrichelten Kreise machen das Fortschreiten in (grossen) Ganztönen ersichtlich.

So ergeben sich von *C* aus folgende Quinttöne, deren 17 nach oben, 13 nach unten hin eingezeichnet sind:

in Quintenschritten: in Ganztonschritten:

	C			C				
1.)	G	F					G	F
2.)	D	${}_{I}b$	1)	D	${}_{I}b$			
3.)	A^{I} .	${}_{I}es$				1)	A^{I} .	${}_{I}es$
4.)	E^{I} .	${}_{I}as$	2)	E^{I} .	${}_{I}as$			
5.)	H^{I} .	${}_{II}des$				2)	H^{I} .	${}_{II}des$
6.)	fis^{II}	${}_{II}ges$	3)	fis^{II}	${}_{II}ges$			
7.)	cis^{II}	${}_{II}ces$				3)	cis^{II}	${}_{II}ces$
8.)	gis^{II}	${}_{II}fes$	4)	gis^{II}	${}_{II}fes$			
9.)	dis^{II} .	. . ${}_{III}bb$				4)	dis^{II}	. ${}_{III}bb$
10.)	ais^{III}	. ${}_{III}eses$	5)	ais^{III} .	. ${}_{III}eses$			
11.)	eis^{III} .	. ${}_{III}ases$				5)	eis^{III}	. ${}_{III}ases$
12.)	his^{III} .	. ${}_{IV}deses$	6)	his^{III}	. ${}_{IV}deses$			
13.)	$fisis^{IV}$	. ${}_{IV}geses$				6)	$fisis^{IV}$	. ${}_{IV}geses$
14.)	$cisis^{IV}$	—	7)	$cisis^{IV}$	—			
15.)	$gisis^{IV}$	—				7)	$gisis^{IV}$	—
16.)	$disis^{IV}$	—	8)	$disis^{IV}$	—			
17.)	$aisis^{V}$	—				8)	$aisis^{V}$	—

Die den Namen der Töne beigefügten Zeiger (rechts oben und links unten) haben vorläufig, solange man im Systeme der Quinttöne bleibt, keine Bedeutung. Sie sind nur mit Rücksicht auf späteres gleich hier mit aufgenommen und werden dann diese Töne von anderen auch ohne die Bezeichnung „pythagoraeisch“ oder „dem Quintsysteme angehörig“ scheiden. Die einfachen Namen sind hier wie im weiteren durch grosse Buchstaben ausgedrückt, während die abgeleiteten Namen mit kleinen Anfangsbuchstaben geschrieben sind.

---

[1]) Nur bei *F* ist die Ziffer 1 neben den Buchstaben gesetzt.

Die den gleichstelligen Quintenstufen (reciproke Töne) entsprechenden Peripheriepunkte liegen symmetrisch in Bezug auf den durch C gehenden Durchmesser.

Der $n$ten Quintenstufe von irgend einem Ausgangstone aus nach oben $(+n)$ oder nach unten $(-n)$ hin entspricht ein Winkel $\pm n\,\alpha_5$, gezählt von jenem Ausgangstone aus. Nachdem nun zwischen Quint, Octav und Ganzton die Beziehung

$$2\,\alpha_5 = \alpha_8 + \alpha_2$$

besteht, so ist

$$n\,\alpha_5 = \frac{n}{2}(\alpha_8 + \alpha_2).$$

Ist n eine gerade Zahl, so zeigt sich im Bilde nur der Ueberschuss $\frac{n}{2}\,\alpha_2$ über $\frac{n}{2}$ Umläufe im Kreise, das ist zugleich der der $\frac{1}{2}\,n$ten Ganztonstufe von demselben Ausgangstone aus entsprechende Winkel. Ist n eine ungerade Zahl, so erscheint als Winkel der Ueberschuss $\frac{1}{2}\,\alpha_8 + \frac{n}{2}\,\alpha_2$ über $\frac{n-1}{2}$ ganze Umläufe, und dies ist der der $\frac{n-1}{2}$ten Ganztonstufe von der ersten Quinte des Ausgangstones aus entsprechende Winkel, da

$$\frac{1}{2}\,\alpha_8 + \frac{n}{2}\,\alpha_2 = \frac{1}{2}(\alpha_8 + \alpha_2) + \frac{n-1}{2}\,\alpha_2 = \alpha_5 + \frac{n-1}{2}\,\alpha_2.\text{[1]}$$

Es bildet somit die $n$te Quintenstufe mit dem Ausgangstone dasselbe Intervall (abgesehen vom Octavenunter-

---

1) Die obigen Gleichungen entsprechen folgenden Beziehungen der Schwingungszahlen:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\pm n} = \left(2 \cdot \frac{3^2}{2^3}\right)^{\pm \frac{n}{2}};$$

ist n gerade, so ist

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\pm n} : 2^{\pm \frac{n}{2}} = \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^{\pm \frac{n}{2}},$$

wenn n ungerade, so ist

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\pm n} : 2^{\pm \frac{n-1}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\pm 1} \left(\frac{3^2}{3^3}\right)^{\pm \frac{n-1}{2}}.$$

schied), wie die $\frac{n}{2}$te Ganztonstufe mit demselben Ausgangstone, wenn n gerade ist; wenn n ungerade ist, bildet sie mit jenem dasselbe Intervall, wie die $\frac{n-1}{2}$te Ganztonstufe von der ersten Quinte aus mit demselben Ausgangstone.

Sowohl aus den Schwingungsverhältnissen, wie aus den Ausdrücken für die Winkel ist ersichtlich, dass das Verhältnis zwischen Quint und Octav, ebenso dasjenige zwischen Ganzton und Quint, oder zwischen Ganzton und Octav kein rationales[1]) ist, dass also Quinten- und Octavenschritte nie zusammentreffen werden, ebenso wenig Ganzton- und Quintenschritte, und Ganzton- und Octavenschritte.

Verfolgt man nun in der Peripherie des äusseren der violett gestrichelten Kreise die Ganztonschritte, so bemerkt man, dass

---

[1]) Quint-Octav: $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2^y \quad \frac{x}{y} = \frac{Log\ 2}{Lg\ 3 - Lg\ 2} = 1{\cdot}7095$

Ganzton-Quint: $\left(\frac{3^2}{2^3}\right)^{x_1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{y_1}; \frac{x_1}{y_1} = \frac{Lg\ 3 - Lg\ 2}{2\ Log\ 3 - 3\ Lg\ 2} = 3{\cdot}4424$

Ganzton-Octav: $\left(\frac{3^2}{2^3}\right)^{x_2} = 2^{y_2}; \frac{x_2}{y_2} = \frac{Log\ 2}{2\ Lg\ 3 - 3\ Lg\ 2} = 5{\cdot}8849$

Setzt man die $y = 1$, so ergeben sich die Beziehungen:

Octav = 1·7095 Quinten
Quint = 3·4424 Ganztöne
Octav = 5·8849 Ganztöne

Als dritter Näherungswerth für das Verhältnis zwischen Octav und Quint ergibt sich $\frac{x}{y} = \frac{12}{7}$ mit dem weiter unten angegebenen Fehler. Den gleichen Fehler zeigen die 1. Näherungswerthe $\frac{x_1}{y_1} = \frac{7}{2}$ und $\frac{x_2}{y_2} = 6$. Die 3. Näherungswerthe für diese Verhältnisse sind $\frac{x_1}{y_1} = \frac{31}{9}$ und $\frac{x_2}{y_2} = \frac{53}{9}$. Durch Winkel ausgedrückt ergeben sich folgende Unterschiede:

31 Ganztöne — 9 Quinten = 1° 5′ 9″ 5
53 Ganztöne — 9 Octaven = 2° 10′ 19″

Aus den beiden letzten Verhältnissen ergibt sich als (5.) Näherungswerth für $\frac{x}{y} = \frac{53}{31}$ mit der Annäherung, dass

53 Quinten — 31 Octaven = 1° 9″ 5.

man das erste Mal der Octave des Ausgangstones am nächsten kommt nach 6 Ganztonschritten, u. zw. ist die Summe jener Schritte grösser als eine ganze Octav. Für den Ueberschuss erhält man den Betrag

$$6\,\alpha_2 - \alpha_8 = 7^0\,2'\,18'' = \varkappa$$

welcher sich als das Intervall zwischen der 6. grossen (Ober- oder Unter-) Secund und der 1. (Ober- oder Unter-) Octav irgend eines Ausgangstones ergibt.

a) Pythagoraeisches Komma.

Nach dem Früheren gelangt man nach der doppelten Anzahl von Quintenschritten zu einem Tone, welcher mit irgend einer Octave des Ausgangstones ein gleiches Intervall bildet; aus der Beziehung

$$12\,\alpha_5 = 6\,(\alpha_8 + \alpha_2) = 7\,\alpha_8 + \varkappa$$

wird ersichtlich, dass dieses Intervall zugleich der Unterschied zwischen 12 Quinten und 7 Octaven ist. Es ist das pythagoraeische Komma[1]) und erscheint immer zwischen jeder *n*ten und der (*n*—12)ten Quinte, oder zwischen der *n*ten und (*n*—6)ten grossen Secund und zwischen der *n*ten und (*n*—6)ten grossen Secund von der Quinte des gemeinschaftlichen Ausgangstones. Die hier zuerst genannte Stufe ist die höhere oder tiefere des resultirenden Intervalles, je nachdem sie im Fortschreiten nach auf- oder nach abwärts erreicht worden ist.

---

[1]) Das Schwingungsverhältnis, welchem jener Winkel entspricht, ergibt sich folgendermassen: $\left(\frac{3^2}{2^3}\right)^6 : 2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{12} : 2^7 = \frac{3^{12}}{2^{19}}$.

Aus $\left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right)^x = \frac{3^2}{2^3}$ erhält man $x = -\frac{2\,Log\,3 - 3\,Lg\,2}{12\,Lg\,3 - 19\,Lg\,2} = 8{\cdot}691$.

für das Verhältnis zwischen dem pyth. Komma und dem gr. Ganztone. Die drei ersten Näherungswerthe für obiges Schwingungsverhältnis sind

$\frac{74}{73}$, der entsprechende Winkel $7^0\,4'\,3''\,9$

$\frac{223}{220}$, $7^0\,2'\,4''\,1$

$\frac{520}{513}$, $7^0\,2'\,19''\,4$.

Das pyth. Komma ist das Intervall zwischen zwei „im 12. Grade quintverwandten Tönen".

Die Ordnungszahlen der nächst benachbarten Töne des Quinttonkreises zeigen diese Beziehungen, indem die Differenz der betreffenden Zahlen 12 gibt. Hiebei sind die Ordnungszahlen positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die betreffenden Töne Ober- oder Unterquinten des Ausgangstones C sind.

Für das Verhältnis zwischen dem pythag. Komma und dem (grossen) Ganztone ergibt sich $\frac{\alpha_2}{\varkappa} = 8{\cdot}691$.

In der Zeichnung auf der Scheibe findet man dieses Intervall zwischen den Tönen $C - \underset{12.}{his^{III}}$, $\overset{5.}{{}_{II}des} - \underset{7.}{cis^{II}}$, $\overset{10.}{{}_{III}eses} - \underset{2.}{D}$, $\underset{2.}{D} - \overset{14}{cisis^{IV}}$, $\overset{3.}{{}_{I}es} - \underset{9.}{dis^{II}}$, $\overset{8.}{{}_{II}fes} - \underset{4.}{E^{I}}$, $\underset{4.}{E^{I}} - \overset{16.}{disis^{IV}}$, u. s. w. und den zu diesen symmetrisch liegenden.

b) Pythagoraeische Halbtöne.

Geht man in der Peripherie des inneren der gestrichelten Kreise von der 1. Oberquinte (G) des Ausgangstones (C) aus, so gelangt man nach 2 Ganztonschritten zu einem Tone (H^{I}), der tiefer, nach 3 Ganztonschritten zu einem Tone (cis^{II}), welcher höher liegt als die Octav (C_{I}) des Ausgangstones.

Im zweiten Falle ist der Unterschied zwischen dem Gesammtintervalle und der Octave, also das Intervall zwischen C und cis^{II}

$$(\alpha_5 + 3\,\alpha_2) - \alpha_8 = 34^{0}\,6'\,20''\,5 = t_1.$$

Im ersten Falle beträgt der Unterschied zwischen der Octave und dem aus den angegebenen Schritten bestehenden Gesammtintervalle, also das Intervall $H^{I} - C$

$$\alpha_8 - (\alpha_5 + 2\,\alpha_2) = 27^{0}\,4'\,2''\,5 = t_2.$$

Die beiden Intervalle t_1 und t_2 haben den (grossen) Ganzton zur Summe und sind dessen ungleiche Theile, deren Unterschied das pythag. Komma ist:

$$t_1 = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \varkappa) \text{ und } t_2 = \frac{1}{2}(\alpha_2 - \varkappa)$$

Man bezeichnet die beiden Intervalle als pythagoraeische Halbtöne, u. zw. t_1 als den grossen (Apotome) und t_2 als den kleinen (Limma).

Jene Töne, welche um das Intervall t_1, den grossen pythagoraeischen Halbton, auseinander liegen, erhalten Benennungen, deren eine von der anderen abgeleitet ist, und man bezeichnet den einen der beiden Töne als die Erhöhung, beziehungsweise Vertiefung, des anderen um einen (grossen) Halbton.

Die 3 Ganztonschritte von der (Ober- oder Unter-) Quinte des Ausgangstones aus entsprechen 6 Quintenschritten von derselben Quinte aus; man erhält also denselben Ton, der, abgesehen vom Octavenunterschied, mit dem Ausgangstone das Intervall t_1 bildet, indem man von diesem um 7 Quintenschritte fortschreitet. In der Beziehung

$$7\,\alpha_5 = \frac{7}{2}\,(\alpha_8 + \alpha_2) = 4\,\alpha_8 + \frac{1}{2}\,(\alpha_2 + \varkappa)$$

zeigt sich dann der grosse pythag. Halbton als der Unterschied zwischen 7 Quinten und 4 Octaven. Er ist (in einem Octavenraume) das Intervall zwischen der $n$ten und der $(n-7)$ten Quintenstufe eines gemeinschaftlichen Ausgangstones (C).

Wenn nun die Bezeichnung der Töne in der schon erwähnten Weise mit Rücksicht auf dieses Intervall in dem Quinttonsysteme durchgeführt ist, so sind die Namen der, von dem jeweiligen Ausgangstone aus gezählten, beiderseitigen 7., 14., 21., Quinttöne von dem Namen des Ausgangstones abgeleitet. Man bedarf daher nur sieben verschiedener Namen, um beliebig viele Töne des Systemes zu benennen. Nur die Bezeichnung „*b*" (= *hes*) macht eine Ausnahme, oder vielmehr der Name „*H*". für welchen consequenter Weise „*bis*" zu sagen wäre, nachdem das historische „*b*" beibehalten worden („*b molle*" und „*b durum*").

Der grosse Halbton[1]) liegt zwischen den Tönen: C —

---

[1]) Das Schwingungsverhältnis ergibt sich analog den obigen Beziehungen:

$$\frac{3}{2} \quad \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^3 : 2 = \left(\frac{3}{2}\right)^7 : 2^4 = \frac{3^7}{2^{11}} = \frac{2187}{2048}.$$

Die drei ersten Näherungswerthe für dieses Schwingungsverhältnis sind

$\frac{15}{14}$, der entsprechende Winkel 35° 34′ 59″ 1

$\frac{16}{15}$, 33° 31′ 10″

$\frac{47}{44}$ 34° 15′ 14″ 4.

$\underset{7}{cis^{II}}$ — $\underset{14}{cisis^{IV}}$, $\overset{12}{{}_{IV}deses}$ — $\overset{5}{{}_{II}des}$ — $\underset{2}{D}$ — $\underset{9}{dis^{II}}$ — $\underset{16}{disis^{IV}}$, $\overset{10}{{}_{III}eses}$ — $\overset{3}{{}_{I}es}$ — $\underset{4}{E^{I}}$ — $\underset{11}{eis^{III}}$, $\overset{8}{{}_{II}fes}$ — $\overset{1}{F}$ — $\underset{6}{fis^{II}}$ — $\underset{13}{fisis^{IV}}$ u. s. w. und zwischen den zu diesen symmetrisch liegenden: C — $\overset{7}{{}_{II}ces}$, $\underset{12}{his^{III}}$ — $\underset{5}{H^{I}}$ — $\overset{2}{{}_{I}b}$ — $\overset{9}{{}_{III}bb}$, u. s. w.

Aus dem obigen folgt ohne weiteres, dass zwischen den Tönen C — $\overset{5}{{}_{II}des}$ — $\overset{10}{{}_{III}eses}$, $\underset{12}{his^{III}}$ — $\underset{7}{cis^{II}}$ — $\underset{2}{D}$, $\underset{14}{cisis^{IV}}$ — $\underset{9}{dis^{II}}$ — $\underset{4}{E^{I}}$ — $\overset{1}{F}$ — $\overset{6}{{}_{II}ges}$ — $\overset{11}{{}_{III}ases}$, u. s. w. ebenso von C abwärts zwischen den Tönen C — $\underset{5}{H^{I}}$ — $\underset{10}{ais^{III}}$ — $\underset{15}{gisis^{IV}}$ $\overset{12}{{}_{IV}deses}$ — $\overset{7}{{}_{II}ces}$ — $\overset{2}{{}_{I}b}$ — $\underset{3}{A^{I}}$ — $\underset{8}{gis^{II}}$ — $\underset{13}{fisis^{IV}}$ u.s.w. der kleine pythag. Halbton liegt. Er ist das Intervall zwischen jedem $n$ten und $(n-5)$ten Quinttone von einem Ausgangstone (C) aus; seiner Grösse nach ist er der Unterschied zwischen 3 Octaven und 5 Quinten:

$$5\,\alpha_5 = \frac{5}{2}\,(\alpha_8 + \alpha_2) = 3\,\alpha_8 - \frac{1}{2}\,(\alpha_2 - \varkappa).\,[1]$$

1.

Pythagoraeische Tonleiter.

Werden irgendwelche 7 einander unmittelbar benachbarte Quinttöne eines Quinttonsystemes in einen

---

Die Beziehung zwischen dem grossen Halbtone und dem (grossen) Ganztone ergibt sich aus $\left(\frac{3^7}{2^{11}}\right)^x = \frac{3^2}{2^3}$, oder aus $x\,t_1 = \alpha_2$; u. zw. ist $x = 1{\cdot}7936$. Die Apotome ist das Intervall zwischen zwei „im 7. Grade verwandten Quinttönen".

[1]) Als Schwingungsverhältnis für den kleinen Halbton erhält man:

$$2 : \left\{\frac{3}{2} \quad \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^2\right\} = 2^3 : \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{2^8}{3^5} = \frac{256}{243}.$$

Das Limma ist das Intervall zwischen zwei „im 5. Grade verwandten Quinttönen".

Octavenraum versetzt, so ergeben sich zwischen je zweien derselben jene Intervalle, welche der erste Intervallenring enthält, der den Kreisen der Quinttöne benachbart ist. Er zeigt somit die Intervallenfolge einer pythagoraeisch gestimmten Tonleiter.

Die 2., 4., 6. Quinte über dem Ausgangstone gibt die 1., 2. und 3. grosse Secund derselben, die 1., 3. und 5. Quint gibt die Oberquint und deren 1. und 2. Secund. Es sind mithin die 7 neben einander liegenden Intervalle 5 (grosse) Ganztöne (violette Bogenstücke) und 2 kleine pythag. Halbtöne (grüne Bogenstücke); diese letzteren liegen zwischen der 3. Obersecund und der Oberquinte des Ausgangstones und zwischen der 2. Obersecund der Quinte und der oberen Octave des Ausgangstones.

Unter der gemachten Voraussetzung können sich nur diese zwei verschiedenen Intervallgrössen innerhalb einer Octave ergeben, und auch die gegenseitige Stellung der Ganz- und Halbtöne ist für alle Gruppen von 7 anschliessenden Quinttönen dieselbe: vom 1. Quinttone (dem Ausgangstone) der Gruppe aus folgt der Halbton abwechselnd nach 3 und nach 2 Ganztönen. Daraus ist aber ersichtlich, dass insoferne verschiedene Tonleitern aus demselben Tonsysteme mit derselben Gruppe von anschliessenden Quinttönen gebildet werden können, als für jede einzelne Tonleiter ein anderer von den verwendeten Qinttönen als absolut tiefster Ton gewählt werden kann. Dadurch ergeben sich 7 verschiedene Tonleitern, die sich nur durch die Stellenzahl der Halbtöne unter den 7 Intervallen einer Leiter unterscheiden.

Die Halbtöne stehen in der Tonleiter an

4.	und	7.	Stelle,	wenn der	1.	Ton,
3.		7.			2.	
3.		6.			3.	
2.		6.			4.	
2.		5.			5.	
1.		5.			6.	
1.	„	4.	„	„ „	7.	„

der verwendeten Gruppe von Quinttönen als tiefster Ton genommen wird. Sie bestimmen in dieser Weise 7 verschiedene Arten einer Sieben-Quint-Tonleiter.[1])

---

[1]) Ueber den Aufbau der Tonleitern bei Steiner a. a. O. — Die Leitern VII 1 bis VII 7.

Der Intervallenring, der nach dem Gesagten für jede Sieben-Quinten-Gruppe und für jede der sieben verschiedenen Arten der Intervallenfolge gilt, enthält speciell die sieben benachbarten Quinttöne

$$F,\ C,\ G,\ D,\ A^{\mathrm{I}},\ E^{\mathrm{I}},\ H^{\mathrm{I}},$$

von denen jeder als absolut tiefster Ton einer Leiter erscheinen kann. Dadurch ist die Stellung der Halbtöne und damit eine specielle „Tonart" eines diatonischen Tonsystems bestimmt.

Wählt man unter diesen Arten der Intervallgruppirung irgend eine aus und setzt die ihr entsprechende Intervallenfolge für jede Tonleiter fest, die man auf irgend einem Tone aufbauen will, so ist die jedesmal entstehende Tonleiter eine sogenannte Transpositions-Scala jener Tonart für den betreffenden Ton als Grundton.

Alle diese Transpositions-Scalen können nur Quinttöne des ursprünglichen Quintton-Systemes enthalten, so lange deren Grundtöne nur diesem Systeme entnommen sind. Es sind dies eben die verschiedenen Sieben-Quint-Tonleitern, deren jede aus einer anderen Sieben-Quintengruppe des ursprünglich gewählten Quinttonsystemes gebildet ist, während in jeder der gleichvielte Ton der Gruppe als tiefster Ton genommen ist. Man kann also mit Hilfe der Zeichnung eine beliebige Anzahl von Transpositions-Scalen für jede der 7 Tonarten bilden und zu Gehör bringen. Ihre Anzahl ist nur insoferne beschränkt, als eben nur eine bestimmte Anzahl von Quinttönen eingezeichnet ist.

Es sei nun jene Tonleiter als typisch für eine Reihe von Transpositions-Scalen zu Grunde gelegt, in welcher der zweite Quintton (C) der obigen Gruppe als tiefster Ton genommen ist, also die „Durtonleiter"

$$C,\ D,\ E^{\mathrm{I}},\ F,\ G,\ A^{\mathrm{I}},\ H^{\mathrm{I}},\ C_{\mathrm{I}}.$$

Die Transpositions-Scalen, welche die von C aus nach oben und nach unten hin sich ergebenden Quinttöne zu Grundtönen haben, setzen sich immer aus einer Sieben-Quinten-Gruppe zusammen, deren zweiter Quintton der jeweilige Grundton der Scala ist. Nun sind auf der Scheibe 17 Ober- und 13 Unter-Quinten von C aus eingezeichnet; die letzte Gruppe der ersteren umfasst die Töne eis^{III} bis $aisis^{\mathrm{V}}$, die tiefste Gruppe die Töne ${}_{IV}$*geses* bis ${}_{II}$*ces*. Der zweite Quintton in der ersten Gruppe ist *his*^{III}, in der zweiten ${}_{IV}$*deses*. Mithin kann man mit Hilfe der 31 eingezeichneten Töne zu der obigen Durtonleiter 24 Transpositions-Scalen bilden, deren Grundtöne die von *C* aus auf- und abwärts einander folgenden Quinttöne sind.

In allen diesen Tonleitern entsprechen den einzelnen Stufen mit Bezug auf den Grundton der Leiter folgende Intervallgrössen[1]) (zugleich durch die Halbtöne ausgedrückt):

der Prim	$\alpha_1 =$		0^0	
Secund	$\alpha_2 = 2\,\alpha_5 -$	$\alpha_8 =$	$61^0\,10'\,23''$	$= 2\,t_1 - \varkappa$
(grossen) Terz	$\alpha_3' =$	$2\,\alpha_2$	$= 122^0\,20'\,46''$	$= 4\,t_1 - 2\,\varkappa$
Quart	$\alpha_4 = \alpha_8 -$	α_5	$= 149^0\,24'\,48''5$	$= 5\,t_1 - 3\,\varkappa$
Quint	$\alpha_5 =$		$= 210^0\,35'\,11''5$	$= 7\,t_1 - 4\,\varkappa$
(grossen) Sext	$\alpha_6' = 3\,\alpha_5 -$	α_8	$= 271^0\,45'\,34''5$	$= 9\,t_1 - 5\,\varkappa$
(grossen) Septim	$\alpha_7' = 5\,\alpha_5 -$	$2\,\alpha_8$	$= 332^0\,55'\,57''5$	$= 11\,t_1 - 6\,\varkappa$
Octav	$\alpha_8 =$		$= 360^0$	$= 12\,t_1 - 7\,\varkappa$

Die Beziehung der einzelnen Intervalle zum kleinen Halbton ergibt sich hieraus mit Rücksicht darauf, dass $t_1 = t_2 + \varkappa$.

2.

Physikalische Tonleiter.

A) Oberterz-Tonsystem.

Während nun in allen diesen pythagoraeisch gestimmten Tonleitern, die ihre Elemente dem Quinttonsysteme entnehmen, auf der 1., 4. und 5. Stufe pythagoraeische grosse Terzen $\left[\left(\frac{9}{8}\right)^2\right]$ stehen, welche die Summe aus zwei (grossen) Ganztönen bilden, verlangt die physikalische Dur-Tonleiter auf diesen Stufen, welche die ersten drei der verwendeten Sieben-Quinten-Gruppe sind, eine kleinere grosse Terz, die physikalische oder natürliche grosse Terz, welcher das Schwingungsverhältnis $\frac{5}{4}$.

[1]) Die obigen Winkel entsprechen den relativen Schwingungszahlen:

$$1,\ \frac{9}{8},\ \frac{81}{64},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{27}{16},\ \frac{243}{128},\ 2.$$

oder der Winkel $\alpha_3 = 115^0\,53'\,38''5$ entspricht. Da dieses Intervall dem Quinttonsysteme vollständig fremd ist, so muss ein neues Tonsystem zu jenem hinzutreten, wenn die entsprechenden Tonleitern gebildet werden sollen.[1])

---

[1]) Sämmtliche pythagoraeischen Intervalle, die sich zwischen Tönen eines Quintensystemes ergeben können, lassen sich auf die Quint und die Octav zurückführen und durch die beiden ausdrücken, so dass jeder Intervallausdruck als ein Product von der Form $i = \left(\frac{3}{2}\right)^m 2^n$ erscheint, m und n irgend welche positive oder negative ganze Zahlen bedeuten. Der Ausdruck für die natürliche grosse Terz bringt den Factor 5 in die Intervallausdrücke, der sich aus den obigen Beziehungen nie ergeben kann.

Die pythagoraeischen Tonverhältnisse erscheinen eben als Ergebnis gleicher Intervallschritte oder einer Theilung eines Intervalles in gleiche Theilintervalle — die physikalischen dagegen vorherrschend als das Resultat der Theilung eines Intervalles nach gleichen Tondistanzen (Differenz der Schwingungszahlen). So bildet die Schwingungszahl der Quint das arithmetische Mittel zwischen der des Grundtones und jener seiner Octav, so dass die Quint als Zwischenton die dem Intervalle der Octav entsprechende Distanz in zwei gleiche Theildistanzen theilt, denen verschiedene Intervalle, Quint und Quart, zugehören. In derselben Weise wird das Intervall der Quint durch die grosse Terz auf dem Grundtone getheilt; die Theildistanz, welche der grossen Terz, und jene, welche der ihr unmittelbar folgenden kleinen Terz zugehört, sind einander gleich.

Die dem Intervalle der grossen Terz zugehörige Distanz wird in gleiche Theildistanzen getheilt, welche den beiden verschiedenen Ganztönen $\left(\frac{9}{8} \text{ und } \frac{10}{9}\right)$ entsprechen. Im Allgemeinen wird ein Intervall von der Form $\frac{z}{n}$, welchem die Distanz $\Delta = z - n$ zugehört, in r Intervalle nach gleichen Distanzen $\delta = \frac{\Delta}{r} = \frac{z-n}{r}$ zerlegt, wenn die Theilintervalle der Beziehung

$$\frac{z}{n} = \frac{n+\delta}{n} \cdot \frac{n+2\,\delta}{n+\delta} \cdots \frac{n+(r-1)\,\delta}{n+(r-2)\,\delta} \cdot \frac{n+r\,\delta}{n+(r-1)\,\delta}$$

$$= \frac{r\,n+\Delta}{r\,n} \cdot \frac{r\,n+2\,\Delta}{r\,n+\Delta} \cdots \frac{r\,n+(r-1)\,\Delta}{r\,n+(r-2)\,\Delta} \cdot \frac{r\,(n+\Delta)}{r\,n+(r-1)\,\Delta}$$

genügen. Speciell liegen zwischen Tönen, deren Schwingungszahlen zueinander sich wie $1:2:3:4:5:6:.$ verhalten, gleiche Distanzen; wird eines dieser neben einander liegenden ungleichen Intervalle nach gleichen Distanzen in Theilintervalle zerlegt, so gehören diese der obigen Intervallenreihe $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5},\ .$ an und sind in ihr einander unmittelbar benachbart.

Dieses zweite Tonsystem, welches mit dem Quinttonsysteme combinirt werden muss, besteht somit aus den grossen Terzen über den Quinttönen. Man wird sie erhalten, wenn man von der grossen Terz (E) über dem Ausgangstone (C) des ersten Systems wieder in Quintenschritten auf- und abwärts schreitet. Die Ordnungszahl eines jeden sich ergebenden Tones ist zugleich die Ordnungszahl desjenigen Quinttones im ersten Systeme, über welchem jener als grosse Terz steht.

In Bezug auf einander bilden die Töne des zweiten Systemes natürlich wieder ein Quintensystem (E-Quinten-System), in Bezug auf das erste (C-Quinten-System) aber mögen sie Oberterztöne heissen. Ihre Lage unter einander und gegen jene des Quinttonsystemes zeigt der (von innen aus) zweite voll (u. zw. roth) ausgezogene Kreis.

Der Ausgangston (E) für das System der Oberterzen, welcher mit dem Ausgangstone (C) der Quinttöne die natürliche grosse Terz bildet, liegt tiefer als die 4. Oberqinte (E^{I}) im Quintensysteme, welche die pythagor. grosse Terz (über der 2. Octave) des Ausgangstones ist. Der Unterschied zwischen diesen beiden

---

Inwieweit der Tonempfindung das Intervall und die Distanz zu Grunde liegen, ist hier nicht die Frage. Nur kurz bemerkt sei, dass Personen, welche nicht durch irgend welchen Musikunterricht auf das Intervall eingeschult, aber doch im Stande sind, einen unter zwei Tönen, die in beliebigen Höhenlagen angeschlagen werden, ohne Irrthum als den höheren oder tieferen zu bezeichnen, ganz allgemein um den Vergleich zweier Tonunterschiede, z. B. zwischen c, g und g, d_1, oder c, e und e, gis u. s. w. befragt, den zweiten grösser finden, während sie Unterschiede, wie $c_{-1} - c$, $c - g$ und $g - c_1$ als gleich bezeichnen. (Musikalisch gebildete Gehörorgane empfinden dies natürlich alles um so schärfer; es kommt darauf an, die Aufmerksamkeit nicht darauf allein zu richten, worauf sie nach so und so oftmaliger Anleitung die Gewohnheit hintreibt.) Ebenso finden sie einen Unterschied wie $c_{-2} - cis_{-2}$ viel kleiner als den Unterschied $c_1 - cis_1$ z. B. — In Accorden wie $c - e - g$, oder $g - c_1 - e_1 - g_1$, liegen (bei reiner Stimmung) gleiche Distanzen neben einander (Schwingungszahlen: n, $\frac{5}{4}\,n$, $\frac{3}{2}\,n$, und n', $\frac{4}{3}\,n'$, $\frac{5}{3}\,n'$, $2n'$; die constanten Differenzen sind $\frac{1}{4}\,n$ und $\frac{1}{3}\,n'$).

grossen Terzen ($C — E^{I}$ und $C — E$) ist das Intervall ($E—E^{I}$)

$$2\, \alpha_2 - \alpha_3 = 6^0\, 27'\, 7''5 = k$$

das syntonische Komma.[1]) Um dieses Intervall nun werden alle, von den beiden Ausgangstönen aus gezählten, gleichstelligen Quinttöne in beiden Systemen auseinander liegen, u. zw. sind die Oberterztöne (die Töne des E-Quinten-Systemes) tiefer als die Töne des ersten Systemes (des C-Quinten-Systemes).

Je zwei solche Töne, der eine dem einen, der andere dem anderen Tonsysteme angehörig, führen denselben Namen, welchem nur das Kennzeichen dieses Höhenunterschiedes beigefügt ist, u. zw. erhalten die Namen der Oberterztöne, als solche der tieferen, um einen Strich rechts oben weniger und links unten mehr, als die gleichnamigen des ersten Systemes.

Es ist klar, dass man die Oberterztöne nicht nur durch Fortschreiten um Quinten vom neuen Ausgangstone (E) aus, sondern ebenso durch Fortschreiten in (grossen) Ganztönen von diesem Ausgangstone aus und von dessen erster Ober- (oder Unter-) Quinte (H oder A) aus erhält. Diese letzteren Schritte zeigen die dem (rothen) voll ausgezogenen Kreise zu beiden Seiten benachbarten (rothen) gestrichelten Kreise.

---

1) Das Schwingungsverhältnis ist $\left(\frac{3^2}{2^3}\right)^2 \; \frac{5}{2^2} = \frac{3^4}{2^4\, 5} = \frac{81}{80}$.

Die Beziehung zwischen dem Komma und dem (grossen) Ganztone ist $\alpha_2 = 9{\cdot}4811 \quad k$.

Für das Verhältnis zwichen der natürlichen grossen Terz und der Quinte, zwischen jener und der Octave, endlich zwischen dem (grossen) Ganztone und jener Terz ergibt sich

$\frac{\alpha_5}{\alpha_3} = 1{\cdot}81706$ daher Quint $= 1{\cdot}8171$ gr. Terzen,

$\frac{\alpha_8}{\alpha_3} = 3{\cdot}10628$ Octav $= 3{\cdot}1063$

$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = 1{\cdot}80371$ Terz $= 1{\cdot}8037$ gr. Ganzton.

Die 3. grosse Oberterz eines Grundtones ist um das Intervall $3\,k - \varkappa$ tiefer, als dessen Octav, während 3 pythag. gr. Terzen um das Intervall $\varkappa$ grösser sind als eine Octav.

Man erhält somit die Oberterztöne:

in Quintenschritten:		in Ganztonschritten:			
E		*E*			
1) *H*	*A*			*H*	*A*
2) fis^{I}	${}_{I}D$	1) fis^{I}.	${}_{I}D$		
3) cis^{I}	${}_{I}G$			1) cis^{I}	${}_{I}G$
4) gis^{I}.	${}_{I}C$	2) gis^{I}.	${}_{I}C$		
5) dis^{I}.	${}_{I}F$			2) dis^{I}	${}_{I}F$
6) ais^{II}.	${}_{II}b$	3) ais^{II}	${}_{II}b$		
7) eis^{II}.	${}_{II}es$			3) eis^{II}	${}_{II}es$
8) his^{II}.	${}_{II}as$	4) his^{II}	${}_{II}as$		
9) $fisis^{III}$	. ${}_{III}des$			4) $fisis^{III}$.	. ${}_{III}des$
10) $cisis^{III}$	. ${}_{III}ges$	5) $cisis^{III}$.	. ${}_{III}ges$		
11) $gisis^{III}$	. ${}_{III}ces$			5) $gisis^{III}$	. ${}_{III}ces$
12) $disis^{III}$	${}_{III}fes$	6) $disis^{III}$	. ${}_{III}fes$		
13) $aisis^{IV}$	${}_{IV}bb$			6) $aisis^{IV}$	${}_{IV}bb$
14) —	. ${}_{IV}eses$	7) —	${}_{IV}eses$		
15) —	. ${}_{IV}ases$			7) —	${}_{IV}ases$
16) —	${}_{V}deses$	8) —	${}_{V}deses$		
17) —	${}_{V}geses$			8) —	${}_{V}geses$

Die den beiderseitigen Quinttönen von *E* aus entsprechenden Punkte liegen symmetrisch in der Peripherie des Kreises in Bezug auf einen durch *E* gehenden Durchmesser; die gleichstelligen sind also in Bezug auf diesen reciprok. Die beiderseitigen Ganztöne liegen symmetrisch theils in Bezug auf den durch *E*, theils in Bezug auf den durch *H* oder durch *A* gehenden Durchmesser; letztere endlich auch symmetrisch in Bezug auf jenen ersten, da ja *H* und *A* symmetrisch liegen in Bezug auf *E*. Da Quinttöne übrigens symmetrisch liegen in Bezug auf jeden beliebigen Durchmesser, der durch einen derselben geht, so kann man sich das System der Oberterztöne als Ergebnis einer Drehung des *C*-Quinten-Systems um den Bogen $C - {}_{I}C$ in der Richtung der abnehmenden Winkel denken, wodurch also sämmtliche Töne dieses Systemes um das gleiche Intervall — das synton. Komma — vertieft werden, und kann das neue System als ein ${}_{I}C$-Quinten-System („Komma-*C*-Quinten-System") bezeichnen.

Die Oberterztöne unter einander bilden die gleichen Intervalle, wie die analog benannten Quinttöne; es ergeben sich auch hier das pythagor. Komma und die beiden pythagor. Halbtöne zwischen den einander zunächst liegenden Tönen des Systems.

Der (in der Zeichnung) orangefarbene Kreis (der dritte von innen) enthält (nebst anderen später zu erklärenden Punkten) die Projectionen der Quinttöne (violett) und die von deren grossen Oberterzen (roth). Zwei einander zunächst liegende violette Peripherie-Punkte gehören zwei Quinttönen an, welche um ein pythagor. Komma auseinander liegen; zwei ebenso liegende, rothe Punkte entsprechen zwei Oberterztönen, welche um das gleiche Intervall auseinander liegen. Ein rother und ein violetter Punkt, welche zwei gleich benannten Punkten entsprechen, liegen um ein syntonisches Komma auseinander, daher ist das Intervall zwischen zwei einander am nächsten liegenden Punkten, deren einer roth — Oberterzton — deren anderer violett — Quintton — ist, der Unterschied zwischen den beiden Komma

$$\varkappa - k = 35' \, 10'' 5 = q,$$

ein Intervall[1]), um welches jedesmal der Oberterzton höher ist, als der um diesen Bogen entfernte Quintton. Es liegt zwischen der $n$ten Quint von E und der $(n-8)$ten Quint von C, wobei n positiv für Ober-, negativ für Unterquinten von E zu nehmen ist.

Werden nun von den 7 anschliessenden Quinttönen, die zum Aufbaue der pythagoraeischen Tonleiter verwendet wurden, die 3 letzten durch die gleichnamigen um ein synton. Komma tiefer liegenden Oberterztöne ersetzt, also z. B. entsprechend der früheren Gruppe die Töne

$$F, \; C, \; G, \; D \text{ und } A, \; E, \; H$$

---

[1]) Das diesem Intervalle entsprechende Schwingungsverhältnis ist

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} \quad \frac{3^4}{2^4 . 5} = \frac{3^8 . 5}{2^{15}};$$

dessen Näherungswerthe sind

$$\frac{886}{885}, \quad \frac{887}{886}, \quad \frac{1773}{1771}.$$

Es ist ungefähr: $k = 11\,q$, $\alpha_2 = 104{\cdot}3\,q$, $\alpha_5 = 359\,2\,q$, $\alpha_8 = 614{\cdot}1\,q$.

gewählt[1]), so ergeben sich in einem Octavenraume, in welchem wie früher die Glieder 1, 3, 5, 7, 2, 4, 6 der verwendeten Tongruppe einander folgen, zwischen dem 3. und 5. und zwischen dem 4. und 6. Gliede Ganztöne, welche um ein synton. Komma kleiner sind, als die früheren (grossen) Ganztöne, die auch hier zwischen dem 1. und 3., dem 2. und 4. und dem 5. und 7. Gliede liegen. Darum ist hier der pythagoraeische als grosser Ganzton von dem kleinen zu unterscheiden. Diesem entspricht die Winkelgrösse

$$\beta_2 = \alpha_3 - \alpha_2 = \alpha_2 - k = 54^0\ 43'\ 15''\ 5.$$

Die Halbtöne zwischen dem 7. und 2. Gliede und zwischen dem 6. und der höheren Octave des 1. Gliedes — die grossen Halbtöne — sind in Folge dessen um ein synton. Komma grösser als die an den analogen Stellen liegenden pythagoraeischen kleinen Halbtöne. Diesem Intervalle entspricht die Winkelgrösse

$$\beta_3 = \alpha_8 - (\alpha_5 + \alpha_3) = t_2 + k = 33^0\ 31'\ 10''.$$

Der Unterschied zwischen dem kleinen Ganztone und diesem grossen Halbtone ist das Intervall

$$\beta_4 = \beta_2 - \beta_3 = \alpha_2 - (\beta_3 + k) = 21^0\ 12'\ 5''\ 5$$

der kleine Halbton. Der Unterschied zwischen dem grossen Ganztone und dem grossen Halbtone ist um ein Komma grösser.

Der Unterschied zwischen den beiden Halbtönen ist

$$\beta_3 - \beta_4 = 12^0\ 19'\ 4''5 = 3k - \varkappa = 2k - q.$$

Zwei Töne, welche um das Intervall β_3 oder $\beta_3 \pm nk$ auseinander liegen, z. B. $E - F$, $H - C$, $cis^{\mathrm{I}} - D$ u. s. w. sind verschieden benannt, während zwei Töne, welche das Intervall β_4 oder $\beta_4 \pm nk$ mit einander bilden, $C - cis^{\mathrm{I}}$, ${}_{\mathrm{I}}des - D$ u. s. w. Namen führen, die von einander abgeleitet sind; sie bezeichnen den einen Ton als Erhöhung, beziehungsweise als Erniedrigung des anderen. Der Bestandtheil $\pm nk$ der Intervallgrösse macht

[1]) Die letzten drei Töne sind die natürlichen gr. Oberterzen der ersten drei Quinttöne; es kommen somit die Begrenzungstöne dreier anschliessenden Quinten und ferner jene Töne zur Verwendung, welche die einer jeden Quinte entsprechende Distanz halbieren.

jedoch noch eine hierauf bezügliche Bezeichnung nöthig. Es ist im Allgemeinen die Benennung derart durchgeführt, dass die Erhöhung und die Vertiefung eines Tones um einen kleinen Halbton, β_4, durch Anfügung der Silbe *— is* (*— s*) und *— es* (*— s*) ausgedrückt wird und bei jeder weiteren Erhöhung oder Vertiefung um nk dem Namen des Tones n Striche oben oder unten angefügt werden [1]. — Nachdem nun der pythagor. grosse Halbton um $2k$ grösser ist, als dieser physikalische kleine ($\beta_4 = t_1 - 2k$), müssen die Aenderungen um jenes pythagor. Intervall durch Anfügen der Bezeichnung $-is^{\mathrm{II}}$, beziehungsweise ${}_{\mathrm{II}}{-es}$ ausgedrückt werden; dort, wo der einfache Name der pythag. Töne (E^{I}, A^{I}, H^{I}) schon mit einem Striche versehen ist, erscheinen bei den Ableitungen 3 Striche [2].

a) Dur-Tonleiter.

Der zweite Intervallenring, welcher dem Kreise der Quint- und Terztöne benachbart ist, enthält die Intervallenfolge einer physikalisch gestimmten diatonischen Tonleiter. Es folgt wieder, wie in der pythagoraeischen, vom Ausgangstone der Sieben-Ton-Gruppe aus der Halbton abwechselnd nach 3 und nach 2 Ganztönen, unter denen immer der zweite ein kleiner Ganzton ist. Die grossen Ganztöne sind als violette Ringstücke gekennzeichnet, die kleinen als rothe, die Halbtöne als grüne Ringstücke. Ebenso sind die 4 Quinttöne von den 3 Oberterztönen als violett und roth unterschieden.

---

1) In der Zeichnung, wie im vorliegenden Texte wurden diese Striche rechts oben und links unten angefügt, weil dies mit keiner sonst etwa üblichen Art der Octavenbezeichnung collidiren kann. Für diese letztere ist wohl jene den anderen vorzuziehen, die den Normalton mit a_1, die höheren Octaven mit a_2, a_3, die tieferen mit a, a_{-1}, a_{-2}, bezeichnet.

2) Dem kleinen Ganztone entspricht das Schwingungsverhältnis

$$\frac{5}{2^2} \quad \frac{3^2}{2^3} = \frac{2\,.\,5}{3^2} = \frac{10}{9}, \text{ dem grossen Halbtone}$$

$$2 \left(\frac{3}{2} \quad \frac{5}{2^2} \right) = \frac{2^4}{3\,.\,5} = \frac{16}{15}, \text{ dem kleinen Halbtone}$$

$$\frac{2\,.\,5}{3^2} \quad \frac{2^4}{3 \quad 5} = \frac{5^2}{3\,.\,2^3} = \frac{25}{24}.$$

Die Wahl eines der 7 Töne als absolut tiefsten Ton je einer Leiter entscheidet auch hier über die Stellenzahl der Halbtöne unter den Intervallen und bestimmt damit die Tonart. Mit dem 2. Quinttone (C) als tiefstem Tone — Grundton der Tonleiter — ergibt sich die physikalisch gestimmte Durtonleiter.

$$C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ A,\ H,\ C,$$

mit dem Halbtone an 3. und 7. Stelle.

In ihr stehen auf dem Grundtone die folgenden Intervalle[1]), die sich zugleich sämmtlich durch die Octav, die Quint und die grosse Terz ausdrücken lassen:

Prim	$\alpha_1 =$		0^0
Secund	$\alpha_2 =$	$2\,\alpha_5 - \alpha_8$	$= 61^0\ 10'\ 23''$
gr. Terz	$\alpha_3 =$		$115^0\ 53'\ 38''5$
Quart	$\alpha_4 =$	$\alpha_8 - \alpha_5$	$= 149^0\ 24'\ 48''5$
Quint	$\alpha_5 =$		$210^0\ 35'\ 11''5$
gr. Sext	$\alpha_6 =$	$\alpha_8 - \alpha_5 + \alpha_3$	$= 265^0\ 18'\ 27''$
gr. Septim	$\alpha_7 =$	$\alpha_5 + \alpha_3$	$= 326^0\ 28'\ 50''$
Octav	$\alpha_8 =$		360^0

Jede Transpositions-Scala dieser Tonart muss wieder 4 anschliessende Quinttöne enthalten, deren zweiter ihr Grundton ist, und ferner 3 Töne, welche die grossen Terzen auf dem Grundtone, seiner Ober- und Unterquinte sind. Gehören die Quinttöne dem eingezeichneten Quint-Tonsysteme an, so finden sich die erforderlichen Oberterzen (die 3., 6. und 7. Stufe der Leiter) unter den eingezeichneten Terztönen und man wird mit Hilfe der Zeichnung, indem man die typische Intervallenfolge festhält, 24 Transpositions-Scalen der Durtonart bilden können, deren Grundtöne die 12 Ober- und die 12 Unterquinten von C sind. Es sind dies die Scalen:

---

[1]) Die relativen Schwingungszahlen sind

$$1,\ \left(\frac{3}{2}\right)^2\ 2 = \frac{3^2}{2^3},\quad \frac{5}{2^2},\quad 2 : \frac{3}{2} = \frac{2^2}{3},\quad \frac{3}{2}.$$

$$\left(2\quad \frac{3}{2}\right)\quad \frac{5}{2^2} = \frac{5}{3},\quad \frac{3}{2}\quad \frac{5}{2^2} = \frac{3 \cdot 5}{2^3},\ 2.$$

			O.-T.-töne			O.-T. töne	O.-T.-töne	
12)	his^{III}	$cisis^{IV}$	$disis^{III}$	eis^{III}	$fisis^{IV}$	$gisis^{III}$	$aisis^{IV}$	his^{III}
11)	eis^{III}	$fisis^{IV}$	$gisis^{III}$	ais^{III}	his^{III}	$cisis^{III}$	$disis^{IV}$	eis^{III}
10)	ais^{III}	his^{III}	$cisis^{III}$	dis^{II}	eis^{III}	$fisis^{III}$	$gisis^{III}$	ais^{III}
9)	dis^{II}	eis^{III}	$fisis^{III}$	gis^{II}	ais^{III}	his^{II}	$cisis^{III}$	dis^{II}
8)	gis^{II}	ais^{III}	his^{II}	cis^{II}	dis^{II}	eis^{II}	$fisis^{III}$	gis^{II}
7)	cis^{II}	dis^{II}	eis^{II}	fis^{II}	gis^{II}	ais^{II}	his^{II}	cis^{II}
6)	fis^{II}	gis^{II}	ais^{II}	H^{I}	cis^{II}	dis^{I}	eis^{II}	fis^{II}
5)	H^{I}	cis^{II}	dis^{I}	E^{I}	fis^{II}	gis^{I}	ais^{I}	H^{I}
4)	E^{I}	fis^{II}	gis^{I}	A^{I}	H^{I}	cis^{I}	dis^{I}	E^{I}
3)	A^{I}	H^{I}	cis^{I}	D	E^{I}	fis^{I}	gis^{I}	A^{I}
2)	D	E^{I}	fis^{I}	G	A^{I}	H	cis^{I}	D
1)	G	A^{I}	H	C	D	E	fis^{I}	G
	C (*v*)	D (*r*)	E (*gr*)	F (*v*)	G (*r*)	A (*v*)	H (*gr*)	C
1)	F	G	A	${}_{I}b$	C	${}_{I}D$	E	F
2)	${}_{I}b$	C	${}_{I}D$	${}_{I}es$	F	${}_{I}G$	A	${}_{I}b$
3)	${}_{I}es$	F	${}_{I}G$	${}_{I}as$	${}_{I}b$	${}_{I}C$	${}_{I}D$	${}_{I}es$
4)	${}_{I}as$	${}_{I}b$	${}_{I}C$	${}_{II}des$	${}_{I}es$	${}_{I}F$	${}_{I}G$	${}_{I}as$
5)	${}_{II}des$	${}_{I}es$	${}_{I}F$	${}_{II}ges$	${}_{I}as$	${}_{II}b$	${}_{I}C$	${}_{II}des$
6)	${}_{II}ges$	${}_{I}as$	${}_{II}b$	${}_{II}ces$	${}_{II}des$	${}_{II}es$	${}_{I}F$	${}_{II}ges$
7)	${}_{II}ces$	${}_{II}des$	${}_{II}es$	${}_{II}fes$	${}_{II}ges$	${}_{II}as$	${}_{II}b$	${}_{II}ces$
8)	${}_{II}fes$	${}_{II}ges$	${}_{II}as$	${}_{III}bb$	${}_{II}ces$	${}_{III}des$	${}_{II}es$	${}_{II}fes$
9)	${}_{III}bb$	${}_{II}ces$	${}_{III}des$	${}_{III}eses$	${}_{II}fes$	${}_{III}ges$	${}_{II}as$	${}_{III}bb$
10)	${}_{III}eses$	${}_{II}fes$	${}_{III}ges$	${}_{III}ases$	${}_{III}bb$	${}_{III}ces$	${}_{III}des$	${}_{III}eses$
11)	${}_{III}ases$	${}_{III}bb$	${}_{III}ces$	${}_{IV}deses$	${}_{III}eses$	${}_{III}fes$	${}_{III}ges$	${}_{III}ases$
12)	${}_{IV}deses$	${}_{III}eses$	${}_{III}fes$	${}_{IV}geses$	${}_{III}ases$	${}_{IV}bb$	${}_{III}ces$	${}_{IV}deses$

Für Transpositions-Scalen auf den Grundtönen *A*, *E* und *H* der *C*-Dur-Tonleiter müssten sämmtliche Töne der Scalen 3, 4 und 5 (oben) um ein synton. Komma erniedrigt werden.

b) Moll-Tonleiter.

Wird als tiefster Ton zum Aufbau einer Tonleiter der 5. Ton (*A*) der verwendeten Sieben-Tongruppe gewählt, so liegen die beiden Halbtöne an 2. und 5. Stelle und die so bestimmte Intervallenfolge ist typisch für die Moll-Tonart. Der Grundton dieser Tonleiter liegt um eine grosse Sext (α_6) höher, oder um eine kleine Terz

$$\alpha_8 - \alpha_6 = \alpha_5 - \alpha_3 = 94^0\,41'\,33''$$

tiefer als jener der Durtonleiter aus derselben Sieben-Tongruppe. Die beiden Tonleitern, die in dieser Beziehung stehen, welche also aus denselben (wenigstens gleichbenannten) Tönen gebildet sind, werden als parallele Tonleitern bezeichnet.

Nach dieser Definition der Molltonleiter würde man die zu den früher angegebenen Durtonleitern parallelen der Reihe nach erhalten, wenn man einfach in jeder der früheren bei der 6. Stufe beginnt und die vorangehenden 5 Töne durch deren nächst höhere Octaven ersetzt. Der Grundton jeder solchen Tonleiter (z. B. A) ist immer der erste von den Oberterztönen der verwendeten Tongruppe, dieser bildet mit dem letzten Quinttone (D) ein Intervall, welches um ein synton. Komma kleiner ist als eine Quint. In der Tonleiter erscheint dann diese umgelegt als eine um das Komma zu grosse Quart. Soll nun auch in der Molltonleiter auf dem Grundtone eine reine Quart stehen, so muss an Stelle dieses Quinttones (D) der um ein Komma tiefere Oberterzton gleichen Namens ($_{\mathrm{I}}D$) treten, so dass zum Aufbaue der Molltonleiter die 4 letzten Quinttöne der Sieben-Quinten-Gruppe durch die gleichnamigen Oberterztöne zu ersetzen sind. Man hat demnach unter der hier zu Grunde gelegten Sieben-Tongruppe die 3 Quinttöne

$$F,\ C,\ G$$

und die 4 Oberterztöne

$$_{\mathrm{I}}D,\ A,\ E,\ H;$$

der erste von diesen ist die kleine Unterterz des ersten der Quinttöne $[(3\,\alpha_5 - k) - 2\,\alpha_8 = -(\alpha_5 - \alpha_3)]$. Er findet sich immer unter den bereits aufgenommenen Oberterztönen, da er die grosse Oberterz der dem ersten Quinttone nächsten Unterquinte ist. Man kann nun das Verhältnis der Gruppenglieder umgekehrt auffassen, indem man zum Aufbaue der Molltonleiter 4 in Quinten anschliessende Oberterztöne, ferner 3 Quinttöne wählt, welche die kleinen Oberterzen der 3 ersten Oberterztöne sind. Der zweite der Oberterztöne ist als absolut tiefster Ton zu wählen und wird damit der Grundton der Tonleiter. Die kleinen Terzen stehen auf diesem, ferner auf dessen Unter- und dessen Oberquint.

Die aus dieser Tongruppe hervorgehende Molltonleiter (parallel zu *C-Dur*) ist

O.-T.-ton	O.-T.-ton			O.-T.-ton	O.-T.-ton			
A,	H,	C,	$_{\mathrm{I}}D$,		E,	F,	G,	A_{I}.

Aus dieser ergeben sich 24 Transpositions-Scalen, welche den früheren 24 Dur-Scalen parallel sind, wenn auch hier der Grundton um Quinten nach beiden Richtungen hin fortschreitet. Die Grundtöne sind Oberterztöne, ausser dem die 2., die 4. und 5. Stufe. Man erhält diese Moll-Scalen aus den früheren Dur-Scalen, wenn man die 2. Stufe dieser letzteren durch den gleichnamigen, um ein Komma tieferen Oberterzton ersetzt[1]), und hierauf die Tonfolge mit der 6. Stufe der Dur-Scala beginnt.

In jeder Molltonleiter stehen auf dem Grundtone folgende Intervalle[2]):

Prim	α_1	0
Secund	$\alpha_2 = 2\,\alpha_5 - \alpha_3 =$	$61^0\ 10'\ 23''$
kl. Terz	$\alpha_3'' = \alpha_5 - \alpha_3 =$	$94^0\ 41'\ 33''$
Quart	$\alpha_4 = \alpha_8 - \alpha_5 =$	$149^0\ 24'\ 48''5$
Quint	$\alpha_5 =$	$210^0\ 35'\ 11''5$
kl. Sext	$\alpha_6'' = \alpha_8 - \alpha_3 =$	$244^0\ 6'\ 21''5$
kl. Septim	$\alpha_7'' = 2\,\alpha_5 - \alpha_3 =$	$305^0\ 16'\ 44''5$
Octav	$\alpha_8 =$	360^0

Auf dem Grundtone steht eine kleine Terz, eine kleine Sext und eine kleine Septim. Jedes dieser Intervalle ist um einen kleinen Halbton (β_4) kleiner als das entsprechende als „gross" bezeichnete Intervall der Durtonleiter.

B) Unterterz-Tonsystem.

Für Moll-Tonleitern, welche auf den Grundtönen der Dur-Scalen aufgebaut werden sollen, wird ein neues, ein

[1]) In Folge dessen tritt hier der kleine Ganzton vor den grossen.

[2]) Die relativen Schwingungszahlen der einzelnen Stufen sind:

$$1,\ \frac{9}{8},\ \frac{6}{5},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{8}{5},\ \frac{9}{5},\ 2.$$

drittes Tonsystem nöthig. Die Grundtöne der Dur-Scalen sind die entwickelten (C-)Quinttöne. Nachdem nun in der Mollscala auf dem Grundtone, auf dessen Unter- und dessen Oberquint eine kleine Terz steht, muss ein Tonsystem zur Verfügung sein, dessen Glieder die kleinen Oberterzen auf den Gliedern des vorhandenen Quinttonsystemes sind. Es ist aber die kleine Oberterz eines Quinttones die grosse Unterterz des nächst höheren Quinttones. Bildet man also zu jedem Quinttone die grosse Unterterz, so erhält man ein drittes Quintensystem, welches mit Bezug auf das erste das System der Unterterztöne heissen möge.

Die orangefarbenen Punkte des orangefarbenen Kreises entsprechen diesen Tönen, die sich in Quintenschritten von *es*, der kleinen Oberterz, oder von *as*, der grossen Unterterz von C, aus ergeben; man erhält sie ebenso in Ganztonschritten von diesen beiden Tönen aus. Sie liegen sämmtlich um ein synton. Komma höher als die gleichnamigen ursprünglichen Quinttöne; ihre Namen haben daher einen Strich oben rechts mehr und links unten einen Strich weniger, als die Namen jener. Im Bilde ergibt sich dieses As-Quinten-System als das um die Bogengrösse des Komma in der Richtung der wachsenden Winkel gedrehte erste (C-)Quintensystem (C^{I}-Quinten-System, „C-Komma-Quinten-System").

Die Sieben-Tongruppe, die für den Aufbau der Molltonleiter auf einem der ursprünglichen Quinttöne nöthig wird, besteht aus 4 auf einander folgenden C-Quinttönen (violett) und aus 3 ebenfalls in Quinten anschliessenden Unterterztönen (orange), welche die kleinen Oberterzen der 3 ersten, oder die grossen Unterterzen der 3 höheren Quinttöne sind. Der zweite der Quinttöne ist der Grundton der Tonleiter. Die Töne ergeben sich aus einer Sieben-Quinten-Gruppe, wenn die 3 tiefsten Quinttöne durch die um ein Komma höheren Unterterztöne ersetzt werden.

Man hat also für die C-Moll-Tonleiter die 4 Quinttöne

$$F,\ C,\ G,\ D$$

und die 3 Unterterztöne

$$as,\ es,\ b.$$

Die Tonleiter, auf deren Grundtone die für die Molltonleiter bereits entwickelten Intervalle stehen, lautet dann

		U.-T.-ton			U.-T.-ton	U.-T.-ton	
C,	D,	es,	F,	G,	as,	b,	C_I.

In ihr sind (analog der C-Dur-Tonleiter) die 3., die 6. und die 7. Stufe Unter-Terztöne[1]).

Die Transpositions-Scalen, denen analoge Siebentongruppen zu Grunde liegen, erhält man aus den früheren Mollscalen, indem man sämmtliche Töne jeder Leiter um ein synton. Komma erhöht, so dass die Tonnamen selbst in beiden Fällen dieselben sind.

Es ergeben sich demnach mit Hilfe der eingezeichneten Unterterztöne noch weitere 24 Transpositions-Scalen der Molltonart.

Temperirtes Quint-Tonsystem.

Temperirte Tonleiter.

Der dritte Intervallenring endlich zeigt die gleichschwebend temperirten Intervalle, und der ihm nach innen benachbarte Kreis die Projectionen der Töne des von C aus temperirten Tonsystems innerhalb einer Octav.

Man erhält diese Töne, wenn man das pythagoraeische Komma, den Ueberschuss von 12 Quinten über 7 Octaven, auf diese 12 Quinten vertheilt und jede derselben um

$$\frac{1}{12}\varkappa = 35' \; 11'' 5 = w$$

kleiner macht, so dass man nach 12 temperirten Quinten

[1]) Hier zeigt sich ein Grund für die gewählte Bezeichnung. Die Töne der physikal. C-Durtonleiter, welche den reinen Intervallen entsprechen, die sich auf die Octav, die Quint und die natürl. gr. Terz zurückführen lassen, sind mit den blossen reinen Buchstaben benannt. In der C-Molltonleiter sind drei Töne um einen kleinen halben Ton, den Unterschied zwischen der grossen und kleinen physikal. Terz, niedriger als die gleichstelligen der C-Durtonleiter. Diese Beziehungen sind nur im Namen selbst kenntlich gemacht. Die beigefügten Striche bestimmen dann erst die Töne und Intervalle mit Bezug auf die hier vorkommenden.

zur 7. Octave des Ausgangstones gelangt. Die Grösse dieser so bestimmten temperirten Quinte[1]) ist dann

$$\alpha^*_5 = \frac{7}{12}\,\alpha_8 = 210^0.$$

Die Intervalle, die sich innerhalb eines Octavenraumes zwischen den temperirten Quinttönen ergeben, sind ganz analog denen im reinen (pythagor.) Quintensysteme zu definiren; sie lassen sich alle wieder durch die Octav und die (temperirte) Quint ausdrücken.

Der temperirte Ganzton, der hier wieder nur in einer Grösse erscheint, ist als das Intervall zwischen der 2. Quinte und der Octave des Ausgangstones

$$\alpha^*_2 = 2\,\alpha^*_5 - \alpha_8 = \frac{1}{6}\,\alpha_8 = 60^0.$$

Dem pythagor. gr. Halbtone t_1, dem Intervalle zwischen der 7. Quinte und der 4. Octave des Ausgangstones, entspricht der temperirte Halbton

$$t^* = 7\,\alpha^*_5 - 4\,\alpha_8 = \frac{1}{12}\,\alpha_8 = 30^0$$

in welchen zugleich der pythagor. kleine Halbton t_2 übergeht als Unterschied zwischen 3 Octaven und 5 Quinten:

$$t^* = 3\,\alpha_8 - 5\,\alpha^*_5 = \frac{1}{12}\,\alpha_8 = 30^0.$$

---

1) Die relative Schwingungszahl der temperirten Quint ergibt sich aus der Bedingung, dass $x^{12} = 2^7$, daher

$$x = \sqrt[12]{2^7}$$

Dem Intervalle $w = \frac{1}{12}\,\varkappa = \frac{1}{12}\,(k + q) = q + 1''$ entspricht das Schwingungsverhältnis (der Unterschied zwischen der reinen und der temperirten Quint):

$$\frac{3}{2} \quad \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{\frac{3^{12}}{2^{19}}} \left(N\,W.\,\frac{884}{883}\right).$$

Es ist beiläufig $w = \frac{1}{104{\cdot}3}\,\alpha_2,\ \frac{1}{613{\cdot}7}\,\alpha_8$.

Der temperirte Halbton ergibt sich somit als die Hälfte des temperirten Ganztones und als 12. Theil der Octav.

Nachdem nun jede 12. Quint eines Ausgangstones nach der Temperirung mit diesem (einer höheren Octav desselben) zusammenfällt, so reducirt sich das ganze ursprüngliche Quinttonsystem auf ein System von nur 12 verschieden klingenden Tönen innerhalb einer Octav, deren jeder die Namen einer der 12 Ober- oder der 12 Unterquinten, ferner die seiner 12., 24., 36., Ober- und seiner 12., 24., 36., Unterquint zu tragen hat.

Ist die Temperirung in der Art vorgenommen, dass der Ausgangston C für das reine und für das temperirte Quintensystem derselbe ist, so ist jede $n$te Oberquint von C in letzterem um das Intervall $\frac{n}{12}\varkappa = nw$ gegen die in ersterem zu tief, jede $n$te Unterquint von C um dasselbe Intervall zu hoch, der Fehler des temperirten Intervalles gegen das pythagoraeische also im ersten Falle $-nw$, im zweiten Falle $+nw$.

Es folgt nun ohne weiteres, dass in einer Tonleiter, die sich aus einer Sieben-Tongruppe des temperirten Tonsystems aufbaut, der 1., 3., 5. und 7. Ton der Gruppen, ebenso der 2., 4. und 6. einander in gleichen temperirten Ganztönen folgen, und dass zwischen dem 7. und 2. Gruppengliede (dem 3. Ganztone und der Oberquinte vom Ausgangstone aus) sowie zwischen dem 6. (dem 2. Ganztone über der Oberquinte) und der Octave des Ausgangstones je ein temperirter Halbton liegt.

Aus der Gruppe

$$F^*,\ C,\ G^*,\ D^*,\ A^*,\ E^*,\ H^*$$

ergibt sich mit dem 2. Gliede als tiefstem Tone die temperirte C-*Dur*-Tonleiter

$$C,\ D^*,\ E^*,\ F^*,\ G^*,\ A^*,\ H^*,\ C_{\mathrm{I}}$$

deren Stufen mit Bezug auf den Grundton folgende Intervalle[1]) entsprechen:

Prim	$\alpha_1 =$	0
temp. Secund	$\alpha_2{}^* = 2\,\alpha_5{}^* - \alpha_8$	$= \frac{2}{12}\,\alpha_8 = 60^0$
grosse Terz	$\alpha_3{}^* = 2\,\alpha_2{}^*$	$= \frac{4}{12}\,\alpha_8 = 120^0$
Quart	$\alpha_4{}^* = \alpha_8 - \alpha_5{}^*$	$= \frac{5}{12}\,\alpha_8 = 150^0$
Quint	$\alpha_5{}^* =$	$= \frac{7}{12}\,\alpha_8 = 210^0$
grosse Sext	$\alpha_6{}^* = \alpha_8 - \alpha_5{}^* + \alpha_3{}^*$	$= \frac{9}{12}\,\alpha_8 = 270^0$
Septim	$\alpha_7{}^* = \alpha_5 + \alpha_3{}^*$	$= \frac{11}{12}\,\alpha_8 = 330^0$
Octav	$\alpha_8 =$	$= \frac{12}{12}\,\alpha_8 = 360^0$

Die aus der obigen Gruppe sich ergebende (parallele) *A*-Moll*-Tonleiter (auf dem 5. Tone der Gruppe)

$$A^*,\ H^*,\ C,\ D^*,\ E^*,\ F^*,\ G^*,\ A_I{}^*$$

enthält auf dem Grundtone folgende Intervalle:

Prim	$\alpha_1 =$	0
temp. Secund	$\alpha_2{}^* =$	$\frac{2}{12}\,\alpha_8 = 60^0$
kleine Terz	$\alpha_3{}^{*\prime} = \alpha_5{}^* - \alpha_3{}^* =$	$\frac{3}{12}\,\alpha_8 = 90^0$
Quart	$\alpha_4{}^* =$	$\frac{5}{12}\,\alpha_8 = 150^0$
Quint	$\alpha_5{}^* =$	$\frac{7}{12}\,\alpha_8 = 210^0$
kleine Sext	$\alpha_6{}^{*\prime} = \alpha_8 - \alpha_3{}^* =$	$\frac{8}{12}\,\alpha_8 = 240^0$

[1]) Die relativen Schwingungszahlen der temperirten Stufen der Durtonleiter sind:

$$1,\ \sqrt[12]{2^2},\ \sqrt[12]{2^4},\ \sqrt[12]{2^5},\ \sqrt[12]{2^7},\ \sqrt[12]{2^9},\ \sqrt[12]{2^{11}},\ 2,$$

für die Molltonleiter:

$$1,\ \sqrt[12]{2^2},\ \sqrt[12]{2^3},\ \sqrt[12]{2^5},\ \sqrt[12]{2^7},\ \sqrt[12]{2^8},\ \sqrt[12]{2^{10}},\ 2.$$

temp. kleine Septim $\alpha_7{}^{*\prime} = \alpha_5 - \alpha_3{}^{*\prime} = \frac{10}{12}\,\alpha_8 = 300^0$

Octav $\alpha_8 = \frac{12}{12}\,\alpha_8 = 360^0$

Aus der Gruppe der temperirten Quinttöne *as**, *es**, *b**, *F**. *C*, *G**, *D**, welche um 3 Quinten tiefer beginnt, als die erste, ergibt sich die Molltonleiter auf dem Grundtone der obigen Durtonleiter

C, *D**, *es**, *F**, *G**, *as**, *b**, C_{I}

in welcher dieselben Intervalle auf dem Grundtone stehen, wie in der obigen *A*-Moll*-Tonleiter. Die *C-Moll*-Scala hat den 5. Ton der Gruppe als Grundton, die ihr parallele Dur-Scala — aus derselben Gruppe gebaut — hat den 2. Ton, *es**, zum Grundton.

Im temperirten Tonsysteme fallen diese beiden Gruppen von Moll-Tonleitern in eine zusammen; jede einzelne Scala der einen Gruppe ist zugleich eine Transpositions-Scala der anderen Gruppe. Es vertritt also z. B. die temperirte *C-Moll*-Scala sowohl die physikalische *C-Moll*-Scala als auch die physikalische $_{\mathrm{I}}$*C-Moll*-Scala, welche eine Transpositions-Scala zu *A-Moll*, also parallel zu $_{\mathrm{I}}$*es-Dur* ist; ferner aber auch jene physikalischen Mollscalen, deren Grundtöne durch die Temperirung mit *C* zusammenfallen, also *his*$^{\mathrm{III}}$- und $_{\mathrm{IV}}$*deses-Moll* und *his*$^{\mathrm{II}}$- und $_{\mathrm{V}}$*deses-Moll*.

Im pythagoraeischen Tonsysteme fallen ebenfalls die beiden Gruppen der Moll-Tonleitern in eine zusammen, da hier auch nicht die Grundtöne der beiden Gruppen als Quint- und als Terztöne zu unterscheiden sind. Die pythagor. *C-Moll*-Scala (auf dem Grundtone *C* der *C-Dur*-Tonleiter) ist zugleich die Transpositions-Scala zu *A*$^{\mathrm{I}}$*-Moll*.

Es hat somit die temperirte *C-Moll*-Tonleiter noch weiter die pythagoraeische *C-Moll*-Scala und die pythag. *his*$^{\mathrm{III}}$- und $_{\mathrm{IV}}$*deses-Moll*-Tonleiter zu vertreten.

Ebenso vertritt jede temperirte Durtonleiter eine pythagor. und eine physikalische derselben Art mit dem gleichnamigen Grundtone, ferner jene dieser beiden Systeme, deren Grundtöne durch die Temperirung mit jenem im Klange zusammenfallen.

So vertritt die temperirte *C-Dur*-Scala das pythagor. und das physikal. *C-Dur*, ferner das pythagor. und das physikal. *his*$^{\mathrm{III}}$-*Dur*, endlich beide $_{\mathrm{IV}}$*deses-Dur*.

Im temperirten Tonsysteme fallen die früher entwickelten Quinttöne in folgender Weise in 12 verschieden klingende Töne zusammen

geses 13	*deses* 12	*ases* 11	*eses* 10	*bb* 9	*fes* 8	*ces* 7	*ges* 6	*des* 5	*as* 4	*es* 3	*b* 2
F 1	*C*	*G* 1	*D* 2	*A* 3	*E* 4	*H* 5	*fis* 6	*cis* 7	*gis* 8	*dis* 9	*ais* 10
eis 11	*his* 12	*fisis* 13	*cisis* 14	*gisis* 15	*disis* 16	*aisis* 17					

Jede $n$te und $(n+12)$te Quint von C (n positiv für Ober-, negativ für Unterquinten) liefern als Grundtöne gleich klingende Scalen; mithin fallen die früheren 24 Transpositions-Scalen einer Tonart in nur 12 verschieden klingende zusammen, deren jede aber verschiedene Transpositions-Scalen des pythagor. und des physikal. Tonsystemes zu vertreten hat. Mit Rücksicht darauf ist jede einzelne in verschiedener Weise falsch.

Die Fehler der einzelnen Stufen sind nach den früheren Definitionen der Siebentongruppen, aus welchen sich die pythagoraeische und die physikalische Dur-Tonleiter (die drei letzten Glieder um ein Komma tiefere Oberterztöne) aufbauen, bei der temperirten Dur-Tonleiter gegen die Stufen

		der pythagor. Scala	der physikal. Scala
bei der	I. Stufe	0	0
	II.	$-2w$	$-2w$
	III.	$-4w$	$-4w+k=8w-q=7w+1''$
	IV.	$+w$	$+w$
	V.	$-w$	$-w$
	VI.	$-3w$	$-3w+k=9w-q=8w+1''$
	VII.	$-5w$	$-5w+k=7w-q=6w+1''$
	VIII.	0	0

Die Fehler der temperirten Stufen der parallelen Moll-Tonleiter sind mit Bezug auf die der entsprechenden

$$\text{temp. kleine Septim} \quad \alpha_7{}^{*\prime} = \alpha_5 - \alpha_3{}^{*\prime} = \frac{10}{12}\,\alpha_8 = 300^0$$

$$\text{Octav} \quad \alpha_8 = \frac{12}{12}\,\alpha_8 = 360^0$$

Aus der Gruppe der temperirten Quinttöne *as**, *es**, *b**, *F**. *C*, *G**, *D**, welche um 3 Quinten tiefer beginnt, als die erste, ergibt sich die Molltonleiter auf dem Grundtone der obigen Durtonleiter

C, *D**, *es**, *F**, *G**, *as**, *b**, C_{I}

in welcher dieselben Intervalle auf dem Grundtone stehen, wie in der obigen *A*-Moll*-Tonleiter. Die *C-Moll*-Scala hat den 5. Ton der Gruppe als Grundton, die ihr parallele Dur-Scala — aus derselben Gruppe gebaut — hat den 2. Ton, *es**, zum Grundton.

Im temperirten Tonsysteme fallen diese beiden Gruppen von Moll-Tonleitern in eine zusammen; jede einzelne Scala der einen Gruppe ist zugleich eine Transpositions-Scala der anderen Gruppe. Es vertritt also z. B. die temperirte *C-Moll*-Scala sowohl die physikalische *C-Moll*-Scala als auch die physikalische ${}_{\mathrm{I}}C$-*Moll*-Scala, welche eine Transpositions-Scala zu *A-Moll*, also parallel zu ${}_{\mathrm{I}}es$-*Dur* ist; ferner aber auch jene physikalischen Mollscalen, deren Grundtöne durch die Temperirung mit *C* zusammenfallen, also his^{III}- und ${}_{\mathrm{IV}}deses$-*Moll* und his^{II}- und ${}_{\mathrm{V}}deses$-*Moll.*

Im pythagoraeischen Tonsysteme fallen ebenfalls die beiden Gruppen der Moll-Tonleitern in eine zusammen, da hier auch nicht die Grundtöne der beiden Gruppen als Quint- und als Terztöne zu unterscheiden sind. Die pythagor. *C-Moll*-Scala (auf dem Grundtone *C* der *C-Dur*-Tonleiter) ist zugleich die Transpositions-Scala zu A^{I}-*Moll.*

Es hat somit die temperirte *C-Moll*-Tonleiter noch weiter die pythagoraeische *C-Moll*-Scala und die pythag. his^{III}- und ${}_{\mathrm{IV}}deses$-*Moll*-Tonleiter zu vertreten.

Ebenso vertritt jede temperirte Durtonleiter eine pythagor. und eine physikalische derselben Art mit dem gleichnamigen Grundtone, ferner jene dieser beiden Systeme, deren Grundtöne durch die Temperirung mit jenem im Klange zusammenfallen.

So vertritt die temperirte *C-Dur*-Scala das pythagor. und das physikal. *C-Dur*, ferner das pythagor. und das physikal. *his*$^{\mathrm{III}}$-*Dur*, endlich beide $_{\mathrm{IV}}$*deses-Dur*.

Im temperirten Tonsysteme fallen die früher entwickelten Quinttöne in folgender Weise in 12 verschieden klingende Töne zusammen

geses	*deses*	*ases*	*eses*	*bb*	*fes*	*ces*	*ges*	*des*	*as*	*es*	*b*
13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
F	*C*	*G*	*D*	*A*	*E*	*H*	*fis*	*cis*	*gis*	*dis*	*ais*
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
eis	*his*	*fisis*	*cisis*	*gisis*	*disis*	*aisis*					
11	12	13	14	15	16	17					

Jede $n$te und $(n + 12)$te Quint von C (n positiv für Ober-, negativ für Unterquinten) liefern als Grundtöne gleich klingende Scalen; mithin fallen die früheren 24 Transpositions-Scalen einer Tonart in nur 12 verschieden klingende zusammen, deren jede aber verschiedene Transpositions-Scalen des pythagor. und des physikal. Tonsystemes zu vertreten hat. Mit Rücksicht darauf ist jede einzelne in verschiedener Weise falsch.

Die Fehler der einzelnen Stufen sind nach den früheren Definitionen der Siebentongruppen, aus welchen sich die pythagoraeische und die physikalische Dur-Tonleiter (die drei letzten Glieder um ein Komma tiefere Oberterztöne) aufbauen, bei der temperirten Dur-Tonleiter gegen die Stufen

		der pythagor. Scala	der physikal. Scala
bei der	I. Stufe	0	0
	II.	$-\,2w$	$-\,2w$
	III.	$-\,4w$	$-\,4w + k = 8w - q = 7w + 1''$
	IV.	$+\;w$	$+\;w$
	V.	$-\;w$	$-\;w$
	VI.	$-\,3w$	$-\,3w + k = 9w - q = 8w + 1''$
	VII.	$-\,5w$	$-\,5w + k = 7w - q = 6w + 1''$
	VIII.	0	0

Die Fehler der temperirten Stufen der parallelen Moll-Tonleiter sind mit Bezug auf die der entsprechenden

pythagor. Scala:		physikal. Scala:
I.	$-3w$	$-3w+k=9w-q=8w+1''$
II.	$-5w$	$-5w+k=7w-q=6w+1''$
III.	0	0
IV.	$-2w$	$-2w+k=10w-q=9w+1''$
V.	$-4w$	$-4w+k=8w-q=7w+1''$
VI.	$+w$	$+w$
VII.	$-w$	$-w$
VIII.	$-3w$	$-3w+k=9w-q=8w+1''$

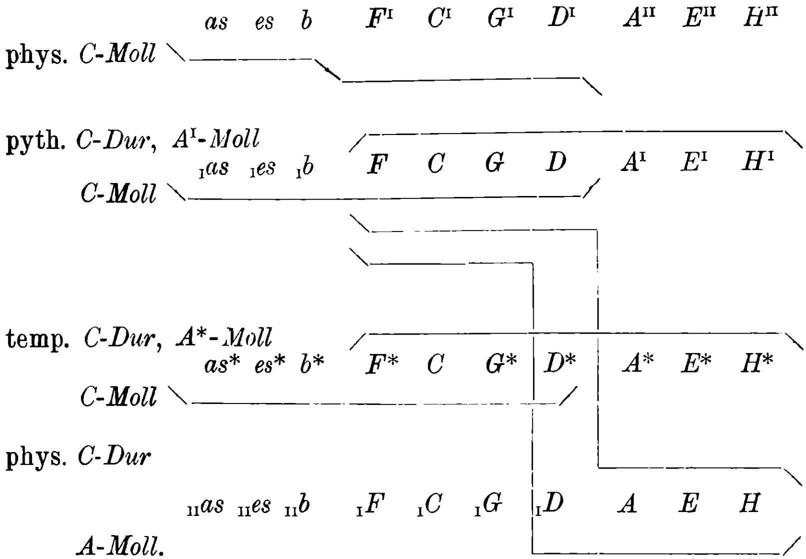
Die Fehler der temperirten Stufen der Moll-Tonleiter auf dem Grundtone der Dur-Tonleiter sind mit Bezug auf die Stufen der entsprechenden

pythag. Scala:		physik. Scala:
I.	0	0
II.	$-2w$	$-2w$
III.	$+3w$	$-3w+k=9w-q=8w+1''$
IV.	$+w$	$+w$
V.	$-w$	$-w$
VI.	$+4w$	$-4w+k=8w-q=7w+1''$
VII.	$+2w$	$+2w+k=10w-q=9w+1''$
VIII.	0	0

Die Transpositions-Scalen einer Tonart sind alle mit Bezug auf den Grundton in derselben Weise (mit den hier angebenen Fehlern) falsch. Insofern aber der Fehler des jeweiligen Grundtones gegen den reinen Quint- oder Oberterzton, den jener vertritt, bei jeder Scala ein anderer ist, werden auch die Fehler der einzelnen Stufen andere. Man erhält diese, wenn man den Fehler des Grundtones zu den obigen (algebraisch) addirt.

Die Fehler ändern sich um den geringsten Betrag ($\pm w$), wenn der Grundton in Quinten fortschreitet.

Schematisch dargestellt zeigt sich die Auswahl der Siebentongruppen aus den vier verschiedenen Quintensystemen, dem Unterterz-, dem pythagor., dem temperirten und dem Oberterz-Tonsysteme, in folgender Weise:



Auf der Scheibe ist ausserdem noch der Oberterzton *A* als Ausgangston des temperirten Tonsystems angenommen und die temperirten Intervalle von diesem aus eingezeichnet (Radien roth und grün — · —· — · —). In diesem Falle verliert jenes *C* sein Vorrecht, und man wird dasselbe *A* als Ausgangston auch des reinen Quintensystemes wählen. Es wird dann das frühere Oberterzton- oder $_{\mathrm{I}}C$-Quinten-System (*A*-Quinten-System) das ursprüngliche, das dazu gehörige Oberterztonsystem ist gegen dieses im früheren Siune ein $_{\mathrm{II}}C$-Quinten-System ($_{\mathrm{I}}A$-Quinten-System) und das Unterterzton-System ist ein *C*-Quinten-System (A^{I}-Quinten-System).

So erscheinen die drei reinen Quint-Tonsysteme gegen früher um ein syntonisches Komma vertieft, während das neue temperirte Tonsystem um das Intervall A—A^* tiefer liegt als das erste; dieses Intervall beträgt nach dem Früheren

$$-3w + k = 9w - q = 8w + 1''.$$

Es ist dann im ganzen temperirten Tonsysteme nur dieses *A* (und dessen Octaven), wie früher das *C*, rein, und die obigen Fehlerreihen gelten für die temperirte *A-Dur-*, die temperirte parallele *fis*-Moll-* und die temperirte *A-Moll*-Scala des neuen temperirten Systemes. Die deren von e_2 aus in Ganztonschritten nach auf- und abwärts schreitet, d. h. die Saitenlänge 38 von a_1 und ebenso die Saitenlänge $38 \,.\, \frac{2}{3} = 25{\cdot}\dot{3}$ von e_2 mit $\frac{8}{9}, \left(\frac{8}{9}\right)^2, \left(\frac{8}{9}\right)^3,$ multiplicirt, beziehungsweise dividirt. (Im ersten Falle hat man jede sich ergebende Saitenlänge um $\frac{1}{9}$ ihrer Grösse zu vermindern, im zweiten um $\frac{1}{8}$ zu vermehren, um die nächste zu erhalten.)

Die Saitenlängen der Töne des *C*-Quintensystems ergeben sich in derselben Weise aus den Saitenlängen von c_2, $38 \,.\, \frac{5}{6} = 31{\cdot}\dot{6}$, und von g_2, $38 \,.\, \frac{5}{6} \;\; \frac{2}{3} = 21{\cdot}\dot{1}$.

Die Saitenlängen der Töne des Unterterzton-Systemes (*As*- oder C^{I}-Quintensystem) erhält man ebenso aus denen von as_1 und es_2, nämlich $38 \,.\, \frac{25}{24} = 39{\cdot}58\dot{3}$ und $38 \,.\, \frac{25}{24} \;\; \frac{2}{3} = 26{\cdot}3\dot{8}$.

Die Saitenlängen der Töne des temperirten *C*-Quintensystems ergeben sich aus der von c_2; man wird hier einfach in temperirten Halbtönen fortschreiten, also jene Saitenlänge mit $\sqrt[12]{12}, \left(\sqrt[12]{2}\right)^2, \left(\sqrt[12]{12}\right)^3,$ multipliciren.

Im temperirten *A*-Quintensystem hat man von der Saitenlänge a_1 auszugehen (in der folgenden Tabelle ist beides ausgeführt und die den beiden Ausganstönen entsprechenden Zahlen unterstrichen).

Die absoluten Schwingungszahlen der so bestimmten Töne ergeben sich aus der von a_1, für welchen Ton die Schwingungszahl 435 genommen werden möge, in jedem einzelnen der obigen Fälle durch die umgekehrte Operation.

Innerhalb des Octavenraumes a_1—a_2 ergeben sich nun in den einzelnen Systemen folgende absolute Schwingungszahlen und Saitenlängen:

temp. Schw.-Z.	*E*-Qu.-S.		*C*-Qu.-S.		*As*-Qu.-S.		L.	temp. S. L.
							cm	
	a	435·00					38·0000	
				3.	$_{II}bb$.	439·94	37·5732	
			a^{I}	440·44			37·5308	*cm*
435·00 / 439·60	$gisis^{III}$	440·93					37·4886	38·0000 / 37·6576
				15.	a^{II}	445·94	37·0675	
			$gisis^{IV}$.	446·45 .			37·0256	
					$gisis^{V}$.	452·03	36·5673	
	$_{II}b$	458·27					36·0703	
				—2.				
460·86			$_{I}b$	464·00			35·6250	35·8649
465·74	ais^{II} .	464·52					35·5848	35·5442
				10.	*b*	469·80	35·1852	
			ais^{III}	470·33 .			35·1455	
					ais^{IV}	476·21	34·7106	
	$_{III}ces$	482·79					34·2398	
				—7.				
			$_{II}ces$.	488·82			33·8159	
	h	489·37					33·7778	
488·24				5.	$_{I}ces$.	494·93	33·3984	33·8521
493·43			h^{I}	495·49			33·3608	33·5494
	$aisis^{IV}$	496·05					33·3232	
				17.	h^{II}	501·68	32·9489	
			$aisis^{V}$.	504·75			32·9116	
					$aisis^{VI}$	508·53	32·5043	
	$_{V}deses$	508·62					32·5000	
				—12.				
			$_{IV}deses$	514·97			32·0987	
	$_{I}c$.	515·55					32·0625	
517·25					$_{III}deses$	521.41	31·7024	31·9522
522·00			*c*	522·00 .			31·6667	31·6667
	his^{II}.	522·59					31·6310	
				12.	c^{I}	528·52	31·2757	
			his^{III}	529·12 .			31·2404	
					his^{IV}	535·73	30·8548	

temp. Schw.-Z.	*E*-Qu.-S.	*C*-Qu.-S.	*As*-Qu.-S.	L.	temp. S. L.
				cm	*cm*
	${}_{III}des$. 543·14			30·4343	
		—5.			
547·99		${}_{II}des$ 549·93 .		30·0586	30·1590
553·04	*cis*^{I} 550·55			30·0247	29·8876
		7.	${}_{I}des$. 556·80	29·6875	
		cis^{II} 557·43 . .		29·6540	
			cis^{III} 564·40	29·2869	
	${}_{IV}eses$. 572·19			28·8889	
		—10.			
		${}_{III}eses$ 559·34 .		28·5322	
	${}_{I}d$. 580.00			28·5000	
580·56		2.	${}_{II}eses$ 586·59	28·1799	28·4665
585·92		*d* 587·25		28.1481	28·2102
	cisis^{III}. 587·91			28·1164	
		14.	*d*^{I}. 594·59	27·8006	
		cisis^{IV}. 595·26		27·7692	
			cisis^{V} 602·70	27·4264	
	${}_{II}es$ 611·03			27·0528	
		—3.			
615·07		${}_{I}es$ 618·67		26·7187	26·8690
621·75	*dis*^{I}. 619·36			26·6886	26·6270
		9.	*es*. 624·40	26·3889	
		dis^{II}. 627·11		26·3592	
			dis^{III} 634·95	26·0328	
	${}_{III}fes$ 643·72			25·6789	
		—8.			
		${}_{II}fes$ 651·76		25·3619	
	e 652·50			25·3333	
651·64		4.	${}_{I}fes$ 659·91	25·0488	25·3611
658·72		*e*^{I} 660·66 .		25·0206	25·1326
	disis^{III} 661·40			24·9924	
		16.	*e*^{II} 668·91	24·7117	
		disis^{IV}. 669·67		24·6838	
			disis^{V}. 678·04	24·3793	

temp. Schw.-Z.	*E*-Qu.-S.	*C*-Qu.-S.	*As*-Qu.-S.	L.	temp. S. L.
				cm	
	${}_{\mathrm{V}}$*geses* 678·15			24·3749	
		—13.			
		${}_{\mathrm{IV}}$*geses* 686·63 .		24·0740	
	${}_{\mathrm{I}}$*f*. 687·41			24·0468	*cm*
690·38		—1.	${}_{\mathrm{III}}$*geses* 695·22	23·7768	23·9378
697·88		*f* 696·00		23·7500	23·7222
	eis$^{\mathrm{II}}$. 696·79		.	23·7232	
		11.	*f*$^{\mathrm{I}}$ 704·70	23·4568	
		eis$^{\mathrm{III}}$ 705·50 .		23·4304	
			eis$^{\mathrm{IV}}$ 714·31	23·1403	
	${}_{\mathrm{III}}$*ges* 724·18			22·8257	
		—6.			
		${}_{\mathrm{II}}$*ges* 732·23 .		22·5439	
731·43	*fis*$^{\mathrm{I}}$ 734·06		.	22·5185	22·5945
739·36		6.	${}_{\mathrm{I}}$*ges*. 742·40	22·2656	22·3908
		fis$^{\mathrm{II}}$ 743·24 . .		22·2405	
			fis$^{\mathrm{III}}$ 752·53	21·9659	
	${}_{\mathrm{IV}}$*ases*. 762·92			21·6667	
		—11.			
		${}_{\mathrm{III}}$*ases* 772·46 .		21·3991	
	${}_{\mathrm{I}}$*g*. 773·33			21·3750	
774·91		1.	${}_{\mathrm{II}}$*ases*. 782·12	21·1349	21·3265
783·31		*g* 783·00		21·1111	21·1343
	fisis$^{\mathrm{III}}$. 783·88			21·0873	
		13.	*g*$^{\mathrm{I}}$. 792·79	20·8505	
		fisis$^{\mathrm{IV}}$ 793·68 .		20·8270	
			fisis$^{\mathrm{V}}$ 803·60	20·5691	
	${}_{\mathrm{II}}$*as* 814·70			20·2895	
		—4			
		${}_{\mathrm{I}}$*as* 824·89		20·0390	
820·98	*gis*$^{\mathrm{I}}$ 825·82			20·0165	20·1297
829·88		8.	*as* 835·20	19·7917	19·9483
		gis$^{\mathrm{II}}$. 836·14 .		19·7693	
			gis$^{\mathrm{III}}$ 846·59	19·5253	

temp. Schw.-Z.	E-Qu.-S.	C-Qu.-S.	As-Qu.-S.	L.	temp. S. L.
				cm	
	$_{IV}bb$. 858·29			19·2592	cm
870·00		—9.			19·0000
879·21		$_{III}bb$ 869·02		19·0214	18·8288
	a_I. 870·00			19·0000	

In der Zeichnung ist ersichtlich, in welcher Weise die im Voranstehenden entwickelten Töne eines jeden der drei Quint-Tonsysteme auf einander folgen, wenn alle in einen Octavenraum versetzt und der Höhe nach angeordnet werden. Es wurde für die Ausgangstöne $_IC$, C, C^I je ein System von 17 Ober- und 13 Unterquinten entwickelt, so dass jedes 30 + 1 Töne innerhalb der Octav liefert.

Geht man nun z. B. in dem C-Quintsysteme von C aus, so findet man die Ober- und Unterquinten in einer Octav in folgender Reihenfolge angeordnet:

$$
\begin{array}{ccc}
 & \nearrow\ 12.\ \ -5.7.\ \ -10.2.14.\ \ -3.9.\ \ -8.4.16.\ \ -13.-1.11\ \searrow & \\
0. & & -6. \\
 & & 6. \\
 & \nwarrow\ -12.\ \ 17.5.-7\ \ 10.-2.\ \ 15.3.-9.\ \ 8.-4.\ \ 13.1.-11\ \swarrow &
\end{array}
$$

Mit Hilfe der früher angegebenen Beziehungen

$$\alpha_5 = \frac{1}{2} (\alpha_8 + \alpha_2)$$

$$\alpha_8 = 6\,\alpha_2 - \varkappa, \quad \alpha_2 = t_1 + t_2, \quad t_1 - t_2 = \varkappa$$

ergeben sich die Grössen der auf dem tiefsten Tone C der betrachteten Octav stehenden p y t h a g o r a e i s c h e n I n t e r v a l l e, ausgedrückt einerseits durch Octav und Quint, andererseits durch den grossen Ganzton und die beiden pythag. Halbtöne, oder endlich durch die beiden Halbtöne allein. Sie sind immer der Ueberschuss von n Quinten über eine ganze Anzahl von Octaven von C.

Aus der allgemeinen Beziehung

$$n\,\alpha_5 = \frac{n}{2}\,\alpha_8 + \frac{n}{2}\,\alpha_2 = \frac{n}{2}\,\alpha_8 + \frac{n}{2}\,(t_1 + t_2)$$

erhält man für das über ganze Octaven hinausragende Intervall in den einzelnen Fällen folgende Ausdrücke:

Ist die Anzahl n der Quinten eine gerade, so ist das Intervall für alle $n < 12$

$$(a) \qquad n\alpha_5 - \frac{n}{2}\alpha_8 = \frac{n}{2}\alpha_2 = \frac{n}{2}(t_1 + t_2)$$

für alle geraden Zahlen $n \geqq 12$ ist dasselbe

$$(a_1) \qquad n\alpha_5 - \frac{n+2}{2}\alpha_8 = \frac{n-10}{2}\alpha_2 - 2t_2 = \frac{n-10}{2}t_1 + \frac{n-14}{2}t_2$$

Für die Unterquinten erhält man diese Intervallausdrücke negativ, also in der Richtung von C nach abwärts. Das entsprechende Intervall von C aufwärts ergibt sich dann durch Subtraction der obigen Intervallgrösse von der Grösse α_8 der Octav. Man findet:

für gerade $n < 12$

$$(a') \qquad -n\alpha_5 + \frac{n+2}{2}\alpha_8 = \frac{12-n}{2}\alpha_2 - t_1 + t_2 = \frac{10-n}{2}t_1 + \frac{14-n}{2}t_2$$

für gerade $n \geqq 12$

$$(a_1') \qquad -n\alpha_5 + \frac{n}{2}\alpha_8 = \frac{22-n}{2}\alpha_2 - t_1 + 3t_2 = \frac{20-n}{2}t_1 + \frac{28-n}{2}t_2.$$

Ist die Anzahl n der Quintenschritte eine ungerade, so ist das Intervall für alle $n < 7$

$$(b) \qquad n\alpha_5 - \frac{n-1}{2}\alpha_8 = \frac{n+5}{2}\alpha_2 + t_2 = \frac{n+5}{2}t_1 + \frac{n+7}{2}t_2$$

für ungerade $n \geqq 7$ ist es

$$(b_1) \qquad n\alpha_5 - \frac{n+1}{2}\alpha_8 = \frac{n-7}{2}\alpha_2 + t_1 = \frac{n-5}{2}t_1 + \frac{n-7}{2}t_2.$$

Den Unterquinttönen entsprechen die Intervallgrössen für ungerade $n < 7$

$$(b') \qquad -n\alpha_5 + \frac{n+1}{2}\alpha_8 = \frac{7-n}{2}\alpha_2 - t_1 = \frac{5-n}{2}t_1 + \frac{7-n}{2}t_2$$

für ungerade $n \geqq 7$

$$(b_1') \qquad . -n\,\alpha_5 + \frac{n+3}{2}\,\alpha_8 = \frac{19-n}{2}\,\alpha_2 - 2\,t_1 + t_2 = \frac{15-n}{2}\,t_1 + \frac{21-n}{2}\,t_2.$$

Der jeweilige erste Ausdruck gibt die Abstimmungsverhältnisse in Octaven- und Quintenschritten; der zweite gibt die Ganz- und Halbtonschritte, aus denen sich die Benennung des das Intervall begrenzenden Tones ergibt, wenn man berücksichtigt, dass die Vermehrung oder Verminderung um einen grossen Halbton zu einem Tone führt, welcher als Erhöhung oder Erniedrigung des dem letzten Schritte entsprechenden Tones gilt und bezeichnet ist, dessen Name also von dem des letzteren abgeleitet ist. Die Vermehrung oder Verminderung um einen kleinen Halbton führt zu einem Tone, der als Erniedrigung des nächsten Ganztones oder als Erhöhung des vorletzten Ganztones bezeichnet ist.

Die Intervalle unter (a), welche von geradstelligen Quinttönen gebildet werden, deren Stellenzahl $n < 12$ ist, bestehen aus einer Anzahl von Ganztönen, oder aus gleich viel grossen und kleinen Halbtönen; es ist die

grosse Secund, grosse Terz, übermässige Quart, überm. Quint, überm. Sext.

Im Falle (a') (geradstellige Unterquinttöne) ist das Intervall die Differenz aus einer Anzahl von Ganztönen und dem pyth. Komma. Die Anzahl der grossen Halbtöne ist um 2 kleiner als die der kleinen: es sind dies die

kleine Septim, kl. Sext, verminderte Quint, verm. Quart, verm. Terz.

Nimmt man in beiden Fällen noch $n = 12$ hinzu, wodurch man im ersten über den Octavenraum hinaus, im zweiten unter denselben hinuntergeht, so hat man unter (a) noch die übermässige Septim, unter (a') noch die verm. Secund zu rechnen. Im Octavenraum selbst erscheint die erste als pythag. Komma, die zweite als verm. None.

Im Falle (a_1) (geradstellige Quinttöne, $n \geqq 12$) ist das Intervall die Differenz aus einer Anzahl von Ganztönen und zwei kl. Halbtönen und besteht aus einer Anzahl grosser und einer um 2 kleineren Anzahl kleiner Halbtöne; hieher gehören

(das pyth. Komma), die doppelt überm. Prim,
die doppelt überm. Secund.

Unter (a_1') (geradstellige Unterquinttöne, $n \geqq 12$) gehört bei dem betrachteten Tongebiete nur die verm. None.

Im Falle (b) (ungeradstellige Quinttöne) ist das Intervall um einen kleinen Halbton grösser, als eine Anzahl von Ganztönen, im Falle (b') (ungeradstellige Unterquinttöne) um einen grossen Halbton kleiner. Die Anzahl der gr. Halbtöne ist in beiden Fällen um 1 kleiner als die der kleinen. Unter (b) gehören die

Quint, gr. Sext, gr. Septim,

unter (b') die

Quart, kleine Terz, kl. Secund.

Im Falle (b_1) ist das Intervall um einen gr. Halbton grösser, im Falle (b_1') um die Differenz aus zwei grossen und einem kleinen Halbtone kleiner, als eine Anzahl von Ganztönen; die Anzahl der grossen Halbtöne ist unter (b_1) um 1 grösser, unter (b_1') um 3 kleiner als die der kleinen. Unter (b_1) zählen die

überm. Prim, überm. Secund, überm. Terz, doppelt überm. Quart,
dopp. überm. Quint, dopp. überm. Sext;

unter (b_1') die

verm. Octav, verm. Septim, verm. Sext, doppelt verm. Quint.

Gleichstellige Ober- und Unterquinten liefern Intervalle auf dem Ausgangstone, die sich gegenseitig zur Octav ergänzen. Die beiden sind entweder als reine benannt (Octav-Quint-Quart), oder als gross und klein, oder als übermässig und vermindert, oder endlich als doppelt übermässig und doppelt vermindert.

Da die Differenzen zwischen je zwei benachbarten Ordnungszahlen der Quinttöne 12, —17, —29 sind, so sind die Unterschiede zwischen je zwei einander zunächst kommenden Intervallen, oder die Intervalle zwischen je zwei in der Octav benachbarten Quinttönen nur von dreierlei Grösse, und zwar nur

$$\begin{aligned} 12\alpha_5 - 7\alpha_8 &= \varkappa \\ -17\alpha_5 + 10\alpha_8 &= t_2 - \varkappa \\ -29\alpha_5 + 17\alpha_8 &= t_2 - 2\varkappa \end{aligned}$$

Die gleichschwebende Temperatur macht das Intervall $\varkappa$ gleich Null, die beiden anderen gleich

$$\frac{1}{12}\alpha_8 = t_2 + \frac{5}{12}\varkappa = t_1 - \frac{7}{12}\varkappa.$$

Im ${}_{\mathrm{I}}C$-Quint-Tonsysteme folgen in der auf ${}_{\mathrm{I}}C$ stehenden Octav die mit denen des obigen gleichnamigen Töne in derselben Weise aufeinander, nur sind die entsprechenden um ein **syntonisches Komma** (k) tiefer als die ersteren. Es stehen somit die gleichen Intervalle auf einem um ein syntonisches Komma tieferen Ausgangstone, und von demselben Tone C aus gemessen sind dann sämmtliche neu eintretenden Intervalle um ein synton. Komma kleiner als die gleichbenannten pythagoraeischen der ersten Reihe. Da der Unterschied zwischen zwei einander zunächst kommenden niemals weniger als ein pythag. Komma beträgt, und $k < \varkappa$ ist, so schieben sich die Töne des ${}_{\mathrm{I}}C$-Systemes in die des C-Systemes so ein, dass immer ein Intervall des letzteren dem gleichnamigen des ersteren unmittelbar folgt.

Die Intervalle des C^{I}-Quint-Tonsystemes folgen ebenfalls in derselben Weise auf einander, nur stehen sie sämmtlich auf einem um ein synton. Komma höheren Ausgangstone, als die der ersten Reihe. Von demselben C aus gemessen sind sie also um ein synton. Komma grösser, als die gleichnamigen jener Reihe. Es folgt daher immer ein Intervall des C^{I}-Systemes dem gleichnamigen des C-Systemes.

Es ergeben sich somit die Grössen der auf C stehenden, den früheren gleichbenannten Intervalle, welche das ${}_{\mathrm{I}}C$- und das C^{I}-System liefern, durch Subtraction, beziehungsweise durch Addition der Grösse k zu den entsprechenden Intervallgrössen des C-Systemes. Berücksichtigt man die Beziehung

$$k = 2\alpha_2 - \alpha_3 = 2(2\alpha_5 - \alpha_8) - \alpha_3$$

und führt an Stelle der pythag. die physikalischen Halbtöne ein, zu welchem Zwecke man mit Bezug auf die Tonbenennung

$$t_1 = \beta_4 + 2k \text{ und } t_2 = \beta_3 - k$$

zu setzen hat, so erhält man für die von C aus gemessenen

Intervalle folgende Grössen, die ausgedrückt sind durch die Octav, die Quint und die physik. gr. Terz einerseits, andererseits durch den gr. Ganzton und die beiden physik. Halbtöne und das synt. Komma.

Den unter (a) und (a') charakterisirten Intervallen entsprechen Intervallgrössen im ${}_{\mathrm{I}}C$-Systeme (gerade $n < 12$)

$$(n-4)\,\alpha_5 - \frac{n-4}{2}\,\alpha_8 + \alpha_3 = \frac{n}{2}\,\alpha_2 - k$$

$$-(n+4)\,\alpha_5 + \frac{n+6}{2}\,\alpha_8 + \alpha_3 = \frac{12-n}{2}\,\alpha_2 - \beta_4 + \beta_3 - 4k$$

im C^{I}-Systeme

$$(n+4)\,\alpha_5 - \frac{n+4}{2}\,\alpha_8 - \alpha_3 = \frac{n}{2}\,\alpha_2 + k$$

$$-(n-4)\,\alpha_5 + \frac{n-2}{2}\,\alpha_8 - \alpha_3 = \frac{12-n}{2}\,\alpha_2 - \beta_4 + \beta_3 - 2k$$

Den Intervallen unter (a_1) und (a_1') entsprechen die Grössen: im ${}_{\mathrm{I}}C$-Systeme (gerade $n \geqq 12$)

$$(n-4)\,\alpha_5 - \frac{n-2}{2}\,\alpha_8 + \alpha_3 = \frac{n-10}{2}\,\alpha_2 - 2\beta_3 + k$$

$$-(n+4)\,\alpha_5 + \frac{n+4}{2}\,\alpha_8 + \alpha_3 = \frac{22-4}{2}\,\alpha_2 - \beta_4 + 3\beta_3 - 6k$$

im C^{I}-Systeme

$$(n+4)\,\alpha_5 - \frac{n+6}{2}\,\alpha_8 - \alpha_3 = \frac{n-10}{2}\,\alpha_2 - 2\beta_3 + 3k$$

$$-(n-4)\,\alpha_5 + \frac{n-4}{2}\,\alpha_8 - \alpha_3 = \frac{22-n}{2}\,\alpha_2 - \beta_4 + 3\beta_3 - 4k$$

Jenen unter (b) und (b') entsprechen im ${}_{\mathrm{I}}C$-Systeme (ungerade $n < 7$)

$$(n-4)\,\alpha_5 - \frac{n-5}{2}\,\alpha_8 + \alpha_3 = \frac{n+5}{2}\,\alpha_2 + \beta_3 - 2\,k$$

$$-(n+4)\,\alpha_5 + \frac{n+5}{2}\,\alpha_8 + \alpha_3 = \frac{7-n}{2}\,\alpha_2 - \beta_4 - 3\,k$$

im C^{I}-Systeme

$$(n+4)\,\alpha_5 - \frac{n+3}{2}\,\alpha_8 - \alpha_3 = \frac{n+5}{2}\,\alpha_2 + \beta_3$$

$$-(n-4)\,\alpha_5 + \frac{n-3}{2}\,\alpha_8 - \alpha_3 = \frac{7-n}{2}\,\alpha_2 - \beta_4 - k$$

Den Intervallen endlich unter (b_1) und (b_1') entsprechen die Grössen:
im $_{\mathrm{I}}C$-Systeme (ungerade $n \geqq 7$)

$$(n-4)\,\alpha_5 - \frac{n-3}{2}\,\alpha_8 + \alpha_3 = \frac{n-7}{2}\,\alpha_2 + \beta_4 + k$$

$$-(n+4)\,\alpha_5 + \frac{n+7}{2}\,\alpha_8 + \alpha_3 = \frac{19-n}{2}\,\alpha_2 - 2\beta_4 + \beta_3 - 6k$$

im C^{I}-Systeme

$$(n+4)\,\alpha_5 - \frac{n+5}{2}\,\alpha_8 - \alpha_3 = \frac{n-7}{2}\,\alpha_2 + \beta_4 + 3k$$

$$-(n-4)\,\alpha_5 + \frac{n-1}{2}\,\alpha_8 - \alpha_3 = \frac{19-n}{2}\,\alpha_2 - 2\beta_4 + \beta_3 - 4k$$

Es kommt jedes irgendwie benannte Intervall in drei verschiedenen Grössen vor, die sich um ein synton. Komma von einander unterscheiden; das mit Bezug auf den Ausgangston C als pythagoraeisch gemessene ist seiner Grösse nach das mittlere. Die beiden anderen wären als das „kleinere" und das „grössere" zu bezeichnen; das erste derselben bildet mit C ein Ton des Oberterztonsystemes, das zweite ein Ton des Unterterztonsystemes.

Wenn sich nun die drei Reihen in einander schieben, so wird an jenen Stellen, wo die Differenz zweier Intervalle in der C-Reihe ein pythagor. Komma ist, auf das erste der C-Reihe, das zweite aus der $_{\mathrm{I}}C$-Reihe, dann das erste der C^{I}-Reihe und hierauf das zweite der C-Reihe folgen. An jenen Stellen, wo die Differenz der C-Reihe das Intervall $t_2 - \varkappa$ oder $t_2 - 2\varkappa$ ist, folgt dem ersten Intervall der C-Reihe das gleichbenannte der C^{I}-Reihe, dann das zweite der $_{\mathrm{I}}C$-Reihe und hierauf das zweite der C-Reihe.

Die folgende Tabelle gibt die Grössen der Intervalle, welche die Töne der $_{\mathrm{I}}C$-, der C-, der C^{I}-Reihe mit dem Grundtone C bilden. Die vor dem Namen des pythagoraeischen Intervalles, welcher durch den Druck hervorgehoben ist, stehende Zahl gibt die Quintenzahl ($+\,n$ Ober-, $-\,n$ Unterquinte) von C aus. Will man irgend ein Intervall durch Ganztöne und Halbtöne (pythag. oder physikal.) ausdrücken, so hat man diese Zahl, und zwar immer nur die absolute Zahl, in den früheren Formeln für n einzusetzen. In der Tabelle sind sämmtliche Intervalle als

Resultat einer Anzahl von Quinten-, von Octaven-, endlich (die des ${}_{\mathrm{I}}C$- und des C^{I}-Systems) von Terzenschritten dargestellt. Irgend ein Ausdruck von der Form

$$\pm p\, \alpha_5 \pm q\, \alpha_8 \pm r\, \alpha_3$$

entspricht der relativen Schwingungszahl von der Form

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\pm p} (2)^{\pm q} \left(\frac{5}{4}\right)^{\pm r}$$

Die pythagor. Intervalle sind dann noch ferner mit Bezug auf das physikal. „grosse“ Intervall gleichen Namens durch dieses, den kl. phys. Halbton und das synt. Komma ausgedrückt. Die Grössen der gleichnamigen Intervalle der beiden anderen Systeme ergeben sich aus diesen Ausdrücken mit Rücksicht auf das oben Gesagte. In dem betreffenden Ausdrucke zeigt sich zugleich die Tonbezeichnung, indem die Anzahl der Komma die Anzahl der Striche angibt, die an die Namen der von C aus folgenden Töne rechts oben, beziehungsweise links unten angefügt worden sind.

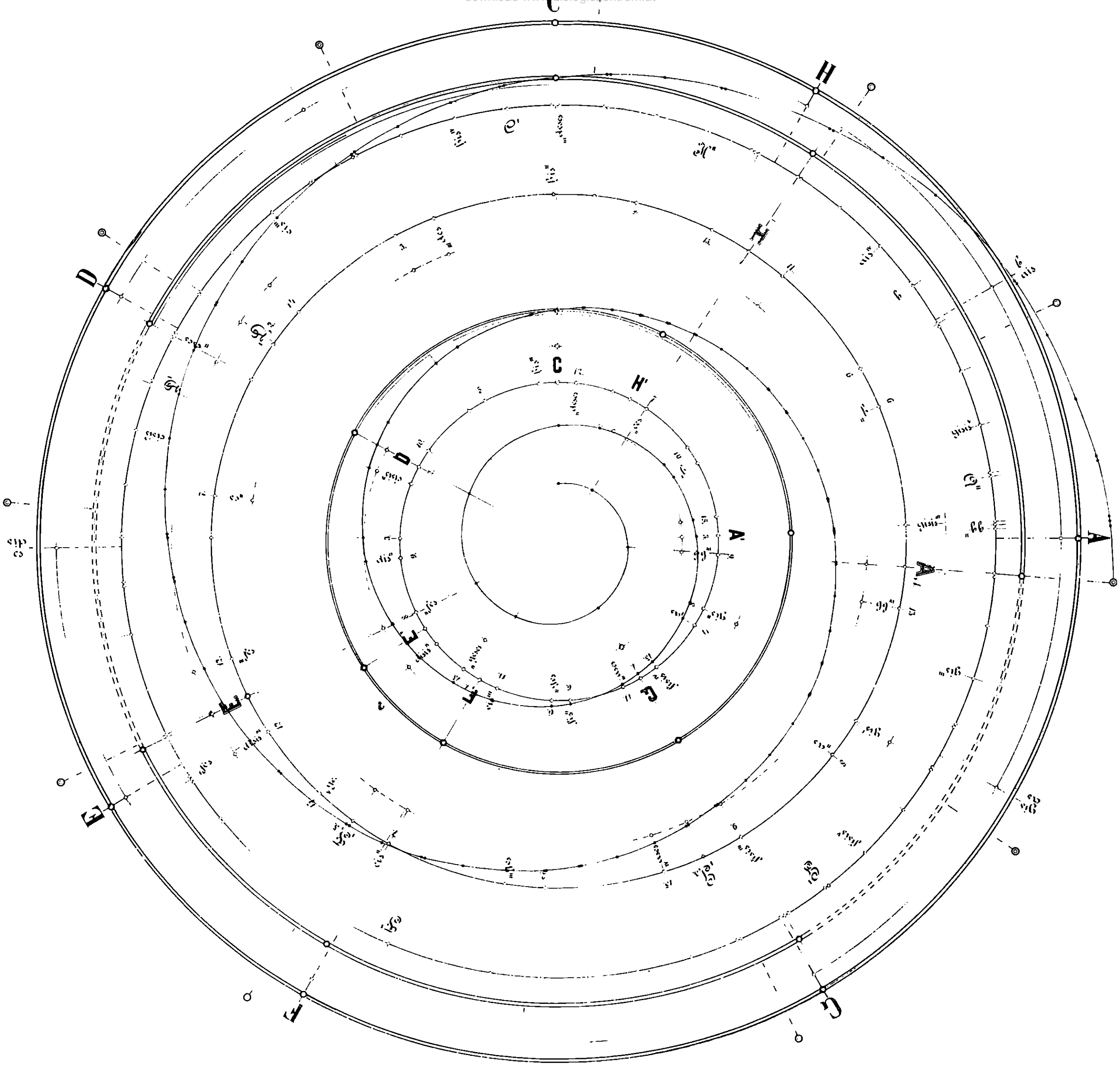
	Prim	0	
	(überm. Septim)	$8\,\alpha_5 - 5\,\alpha_8 + \alpha_3$	$= \alpha_7 + \beta_4 + 2k - \alpha_8 = \varkappa - k$
	Prim	$4\,\alpha_5 - 2\,\alpha_8 - \alpha_3$	$= k$
12.	(überm. Septim)	$12\,\alpha_5 - 7\,\alpha_8$	$= \alpha_7 + \beta_4 + 3\,k - \alpha_8 = \varkappa$
	(überm. Septim)	$16\,\alpha_5 - 9\,\alpha_8 - \alpha_3$	$= \alpha_7 + \beta_4 + 4\,k - \alpha_8 = \varkappa + k$
	kl. Secund	$-\,9\,\alpha_5 + 5\,\alpha_8 + \alpha_3$	
—5.	kl. Secund	$-\,5\,\alpha_5 + 3\,\alpha_8$	$= \alpha_2 - \beta_4 - 2\,k$
	überm. Prim	$3\,\alpha_5 - 2\,\alpha_8 + \alpha_3$	
	kl. Secund	$-\,\alpha_5 + \alpha_8 - \alpha_3$	
7.	überm. Prim	$7\,\alpha_5 - 4\,\alpha_8$	$= \beta_4 + 2\,k$
	überm. Prim	$11\,\alpha_5 - 6\,\alpha_8 - \alpha_3$	
	verm. Terz	$-\,14\,\alpha_5 + 8\,\alpha_8 + \alpha_3$	
—10.	verm. Terz	$-\,10\,\alpha_5 + 6\,\alpha_8$	$= \alpha_3 - 2\,\beta_4 - 3\,k$
	gr. Secund	$-\,2\,\alpha_5 + \alpha_8 + \alpha_3$	
	verm. Terz	$-\,6\,\alpha_5 + 4\,\alpha_8 - \alpha_3$	

2. gr. Secund	$2\alpha_5 - \alpha_8$	$= \alpha_2$	
dopp. überm. Prim	$10\alpha_5 - 6\alpha_8 + \alpha_3$		
gr. Secund	$6\alpha_5 - 3\alpha_8 - \alpha_3$		
14. dopp. überm. Prim	$14\alpha_5 - 8\alpha_8$	$=$	$2\beta_4 + 4k$
dopp. über. Prim	$18\alpha_5 - 10\alpha_8 - \alpha_3$		
kl. Terz	$-7\alpha_5 + 4\alpha_8 + \alpha_3$		
—3. kl. Terz	$-3\alpha_5 + 2\alpha_8$	$= \alpha_3 -$	$\beta_4 - k$
überm. Secund	$5\alpha_5 - 3\alpha_8 + \alpha_3$		
kl. Terz	$\alpha_5 - \alpha_3$		
9. überm. Secund	$9\alpha_5 - 5\alpha_8$	$= \alpha_2 +$	$\beta_4 + 2k$
überm. Secund	$13\alpha_5 - 7\alpha_8 - \alpha_3$		
verm. Quart	$-12\alpha_5 + 7\alpha_8 + \alpha_3$		
—8. verm. Quart	$-8\alpha_5 + 5\alpha_8$	$= \alpha_4 -$	$\beta_4 - 2k$
gr. Terz	α_3		
verm. Quart	$-4\alpha_5 + 3\alpha_8 - \alpha_3$		
4. gr. Terz	$4\alpha_5 - 2\alpha_8$	$= \alpha_3 + k$	
dopp. überm. Secund	$12\alpha_5 - 7\alpha_8 + \alpha_3$		
gr. Terz	$8\alpha_5 - 4\alpha_8 - \alpha_3$		
16. dopp. überm. Secund	$16\alpha_5 - 9\alpha_8$	$= \alpha_2 +$	$2\beta_4 + 4k$
dopp. überm. Secund	$20\alpha_5 - 11\alpha_8 - \alpha_3$		
dopp. verm. Quint	$-17\alpha_5 + 10\alpha_8 + \alpha_3$		
—13. dopp. verm. Quint	$-13\alpha_5 + 8\alpha_8$	$= \alpha_5 -$	$2\beta_4 - 4k$
Quart	$-5\alpha_5 + 3\alpha_8 + \alpha_3$		
dopp. verm. Quint	$-9\alpha_5 + 6\alpha_8 - \alpha_3$		
—1. Quart	$-\alpha_5 + \alpha_8$	$= \alpha_4$	
überm. Terz	$7\alpha_5 - 4\alpha_8 + \alpha_3$		
Quart	$3\alpha_5 - \alpha_8 - \alpha_3$		
11. überm. Terz	$11\alpha_5 - 6\alpha_8$	$= \alpha_3 +$	$\beta_4 + 3k$
überm. Terz	$15\alpha_5 - 8\alpha_8 - \alpha_3$		
verm. Quint	$-10\alpha_5 + 6\alpha_8 + \alpha_3$		
—6. verm. Quint	$-6\alpha_5 + 4\alpha_8$	$= \alpha_5 -$	$\beta_4 - 2k$
überm. Quart	$2\alpha_5 - \alpha_8 + \alpha_3$		
verm. Quint	$-2\alpha_5 + 2\alpha_8 - \alpha_3$		
6. überm. Quart	$6\alpha_5 - 3\alpha_8$	$= \alpha_4 +$	$\beta_4 + 2k$
überm. Quart	$10\alpha_5 - 5\alpha_8 - \alpha_3$		

	verm. Sext	$-15\alpha_5+9\alpha_8+\alpha_3$	
−11.	verm. Sext	$-11\alpha_5+7\alpha_8$	$=\alpha_6-2\beta_4-3k$
	Quint	$-3\alpha_5+2\alpha_8+\alpha_3$	
	verm. Sext	$-7\alpha_5+5\alpha_8-\alpha_3$	
1.	Quint	α_5	$=\alpha_5$
	dopp. überm. Quart	$9\alpha_5-5\alpha_8+\alpha_3$	
	Quint	$5\alpha_5-2\alpha_8-\alpha_3$	
13.	dopp. überm. Quart	$13\alpha_5-7\alpha_8$	$=\alpha_4+2\beta_4+4k$
	dopp. überm. Quart	$17\alpha_5-9\alpha_8-\alpha_3$	
	kl. Sext	$-8\alpha_5+5\alpha_8+\alpha_3$	
−4.	kl. Sext	$-4\alpha_5+3\alpha_8$	$=\alpha_6-\beta_4-k$
	überm. Quint	$4\alpha_5-2\alpha_8+\alpha_3$	
	kl. Sext	$\alpha_8-\alpha_3$	
8.	überm. Quint	$8\alpha_5-4\alpha_8$	$=\alpha_5+\beta_4+2k$
	überm. Quint	$12\alpha_5-6\alpha_8-\alpha_3$	
	verm. Septim.	$-13\alpha_5+8\alpha_8+\alpha_3$	
−9.	verm. Septim	$-9\alpha_5+6\alpha_8$	$=\alpha_7-2\beta_4-3k$
	gr. Sext	$-\alpha_5+\alpha_8+\alpha_3$	
	verm. Septim	$-5\alpha_5+4\alpha_8-\alpha_3$	
3.	gr. Sext	$3\alpha_5-\alpha_8$	$=\alpha_6+k$
	dopp. überm. Quint	$11\alpha_5-6\alpha_8+\alpha_3$	
	gr. Sext	$7\alpha_5-3\alpha_8-\alpha_3$	
15.	dopp. überm. Quint	$15\alpha_5-8\alpha_8$	$=\alpha_5+2\beta_4+4k$
	dopp. überm. Quint	$19\alpha_5-10\alpha_8-\alpha_3$	
	kl. Septim	$-6\alpha_5+4\alpha_8+\alpha_3$	
−2.	kl. Septim	$-2\alpha_5+2\alpha_8$	$=\alpha_7-\beta_4-k$
	überm. Sext	$6\alpha_5-3\alpha_8+\alpha_3$	
	kl. Septim	$2\alpha_5-\alpha_3$	
10.	überm. Sext	$10\alpha_5-5\alpha_8$	$=\alpha_6+\beta_4+3k$
	überm. Sext	$14\alpha_5-7\alpha_8-\alpha_3$	
	verm. Octav	$-11\alpha_5+7\alpha_8+\alpha_3$	
−7.	verm. Octav	$-7\alpha_5+5\alpha_8$	$=\alpha_8-\beta_4-2k$
	gr. Septim	$\alpha_5+\alpha_3$	
	vermin. Octav	$-3\alpha_5+3\alpha_8-\alpha_3$	
5.	gr. Septim	$5\alpha_5-2\alpha_8$	$=\alpha_7+k$

	dopp. überm. Sext	$13\alpha_5 - 7\alpha_8 + \alpha_3$	
	gr. Septim	$9\alpha_5 - 4\alpha_8 - \alpha_3$	
17.	dopp. überm. Sext	$17\alpha_5 - 9\alpha_8$	$= \alpha_6 + 2\beta_4 + 5k$
	dopp. überm. Sext	$21\alpha_5 - 11\alpha_8 - \alpha_3$	
	verm. None	$-16\alpha_5 + 8\alpha_8 + \alpha_3$	
—12.	verm None.	$-12\alpha_5 + 6\alpha_8$	$= \alpha_8 + \alpha_2 - 2\beta_4 - 4k$
	Octav	$-4\alpha_5 + 3\alpha_8 + \alpha_3$	
	verm. None	$-8\alpha_5 + 4\alpha_8 - \alpha_3$	
	Octav	α_8	$= \alpha_8$

Die nebenstehende Figur gibt nur das Bild der auf der drehbaren Scheibe des Apparates aufgezogenen Zeichnung. Das Lichtdruckbild des Monochords ergab sich wegen der verschiedenen Farben im Originale so mangelhaft, dass ich mich mit der Reproduction einer neuen, nur in einer Farbe ausgeführten Zeichnung, die das Wesentlichste wiedergibt, begnügen musste.


C
H
A
G
F
E
D