Geometrisches zur Zahlenlehre.[1]

Von

GEORG PICK.

Seit Gauss sind parallelogrammatische Gitter in der Ebene und entsprechende Raumfiguren vielfach zur Veranschaulichung und als heuristisches Mittel in der Zahlenlehre verwendet worden. Im Vergleich mit allen diesen Anwendungen verfolgen die nachfolgen Zeilen ein viel bescheideneres Ziel: es wird der Versuch gemacht, die Elemente der Zahlentheorie von vorn herein auf geometrische Basis zu stellen. Dazu dient eine trotz ihrer Einfachheit bisher, wie es scheint, unbemerkt gebliebene Flächenformel für Polygone, welche in ein Gitter eingezeichnet sind.

§. I. Gitter und Gitterpolygone.

Zwei Systeme aequidistanter Parallelen in der Ebene bilden ein Gitter (Fig. 1); die Schnittpunkte derselben heissen Gitterpunkte, die Parallelen selbst sollen Hauptgitterstrahlen genannt werden. Offenbar gelten folgende zwei Congruenzsätze:

I. Das Gitter (insbesondere als Inbegriff seiner Punkte) kommt durch Parallelverschiebung mit sich selbst zur Deckung, sobald irgend ein Gitterpunkt auf irgend einen anderen solchen fällt.

II. Das Gitter kommt mit sich selbst zur Deckung durch Drehung um 180° um einen seiner Punkte.

---

[1]) Bearbeitung eines in der deutschen mathem. Gesellschaft zu Prag gehaltenen Vortrages.

Die Geraden der Ebene zerfallen in solche, auf denen kein Gitterpunkt liegt, solche, die einen, und solche, die mehr als einen Gitterpunkt enthalten. Die letzteren, welche Gitterstrahlen heissen sollen, gehen, wie aus Satz I hervorgeht, durch unendlich viele aequidistant vertheilte Gitterpunkte. Aus Satz I. folgt ferner, dass parallele Gitterstrahlen congruente Gitterpunktvertheilungen besitzen. (Fig. 1, g, g'.)

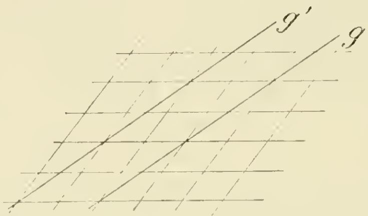

Fig. 1.

Als Einheit des Flächeninhalts soll im Folgenden die Hälfte einer einzelnen parallelogrammatischen Masche des Gitters benutzt werden.

Ein beliebiges Polygon, dessen Ecken Gitterpunkte sind, heisse ein Gitterpolygon. Die Seiten desselben sind also sämmtlich Gitterstrahlen. Ein solches Polygon zerlegen wir durch die Verbindungslinie irgend zweier auf seinem Rande gelegenen Gitterpunkte in zwei kleinere Polygone (Fig. 2. $\overline{PQ}$.) Es sei nun i die Anzahl der im Inneren des ursprünglichen Polygons gelegenen Gitterpunkte, u die Zahl der auf dem Umfang gelegenen, und es mögen i_1, u_1; i_2, u_2 die entsprechenden Anzahlen für die beiden neuen Polygone bedeuten. Endlich sei δ die Zahl der Gitterpunkte, welche auf der construirten Schnittlinie zwischen den beiden Endpunkten enthalten sind. Dann ist augenscheinlich

$$i = i_1 + i_2 + \delta$$
$$u = u_1 + u_2 - 2\delta - 2$$

und daher

$$2i + u - 2 = (2i_1 + u_1 - 2) + (2i_2 + u_2 - 2).$$

Nennen wir den zu einem Polygon gehörigen Ausdruck $2i + u - 2$ kurz die Punktzahl desselben, so hat sich also ergeben, dass die Punktzahl eines aus zwei Bestandtheilen zusammengesetzten Polygons gleich ist der Summe der Punktzahlen der Bestandtheile. Wiederholte Anwendung dieses Resultats zeigt die Richtigkeit desselben auch für beliebig viele Bestandtheile.

Für eine einzelne Masche ist

$$i = o \ , \ u = 4$$

also die Punktzahl gleich Zwei, und gibt daher direct den Flächeninhalt der Masche an. Für jede aus solchen Maschen zusammensetzbare Polygonfigur, das heisst für jede ausschliesslich von Hauptgitterstrahlen begrenzte Figur, ist daher nach dem obigen Zusammensetzungssatze die Punktzahl gleich dem Flächeninhalt. Insbesondere gilt dies von den Parallelogrammen aus Hauptgitterstrahlen. Zerlegt man ein solches Parallelogramm durch eine Diagonale, so entstehen zwei Dreiecke, welche in Folge der Sätze I und II sammt den zu ihnen gehörigen Gitterpunkten congruent sind. Also ist die Punktzahl eines jeden von ihnen halb so gross als jene des Parallelogramms, und daher wieder gleich ihrem Inhalt.

Ein beliebiges Gitterpolygon nun kann man dadurch zu einer ausschliesslich von Hauptgitterstrahlen begrenzten Figur ergänzen, dass man über allen Seiten derselben, die nicht schon selbst Hauptgitterstrahlen sind, Dreiecke errichtet, deren beide

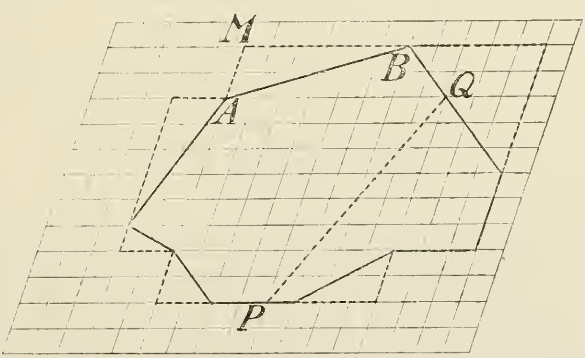

Fig. 2.

anderen Seiten Hauptgitterstrahlen sind. (Fig. 2. ABM.) Für diese ergänzenden Dreiecke ebensowohl als für die entstandene

Gesammtfigur gibt nach Vorigem die Punktzahl den Inhalt richtig an. Dies gilt also nach dem früheren Satze auch für die ursprüngliche Figur. Demnach ist für jedes Gitterpolygon der Inhalt gleich der Punktzahl.

§. 2. Der Fundamentalsatz der Zahlentheorie.

An der Spitze der Lehre von den ganzen Zahlen steht der Satz, dass zwei Zahlen, a, b, stets einen gemeinsamen Theiler m besitzen, welcher in der Form

$$m = a\beta - b\alpha$$

darstellbar ist, wo auch α, β ganze Zahlen bedeuten.

Um ihn zu beweisen, legen wir ein beliebiges Parallelcoordinatensystem in der Ebene zu Grunde.[1]) Die Punkte mit ganzzahligen Coordinaten bilden dann die Punkte eines Gitters, dessen Hauptgitterstrahlen den Axen parallel angenommen sein sollen. Den Gitterpunkt (a, b) verbinden wir mit dem Nullpunkt, und suchen die zwischen diesen Punkten auf der Verbindungslinie gelegenen Gitterpunkte auf; ihre Anzahl sei $(m - 1)$, wo m auch gleich Eins sein kann. Nach §. 1 wird die Strecke von (o, o) bis (a, b) durch diese Punkte in m gleiche Theile zerlegt.

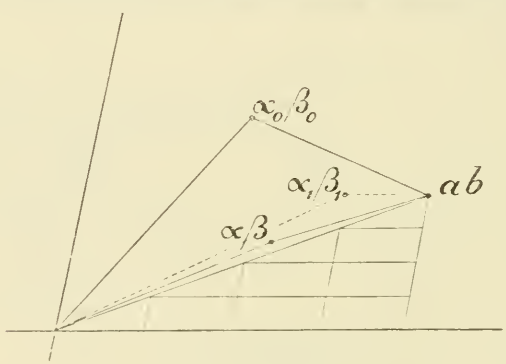

Fig. 3.

Dann ist m Theiler sowohl von a als von b. Denn zieht man durch diese $(m - 1)$ Punkte und durch (a, b) selbst Parallele

[1]) Es ist dabei durchaus unnöthig, auf den beiden Axen mit gleicher Masseinheit zu messen.

zur y—Axe, so schneiden dieselben die x—Axe in Gitterpunkten und theilen sie dabei in m gleiche Theile, woraus ersichtlich ist, dass a ein Vielfaches von m ist, und ähnlich für b. (Fig. 3.)

Nun wählen wir den Gitterpunkt (α_0, β_0) beliebig aber um Weitläufigkeiten zu vermeiden so, dass das Dreieck (o, o), (a, b), (α_0, β_0) positiven Umlaufsinn hat (Fig. 3.). Unter Voraussetzung des in §. 1 benützten Flächenmasses ist dann bekanntlich der Inhalt dieses Dreiecks gleich

$$a\beta_0 - b\alpha_0 \,.$$

Das Dreieck enthält nun mindestens $(m + 2)$ Gitterpunkte auf seiner Berandung, nämlich $(m + 1)$ solche auf der Grundlinie $\overline{(o, o), (a, b)}$ und ausserdem die Spitze (α_0, β_0). Enthält es ausser diesen auf seiner Berandung oder im Innern noch mindestens einen Gitterpunkt, so machen wir diesen zur Spitze eines neuen Dreiecks über derselben Grundlinie. Das neue Dreieck ist kleiner als das alte, und kann offenbar abermals verkleinert werden, wenn es immer noch mehr als die nothwendigen $(m + 2)$ Gitterpunkte enthalten sollte. Nach einer endlichen Anzahl von Schritten (da die Gesammtzahl, der im Ausgangsdreieck enthaltenen Gitterpunkte ja endlich sein muss) gelangt man also offenbar zu einem Dreieck mit der Spitze (α, β), welches nur mehr jene nothwendigen $(m + 2)$ Gitterpunkte auf seiner Berandung und keine in seinem Innern besitzt und dessen Inhalt also gemäss §. 1 gleich m ist. Sonach hat man

$$a\beta - b\alpha = m \,,$$

was der zu beweisende Satz ist.

§. 3. Näherungsbrüche.

Die Lehre von der näherungsweisen Darstellung reeller Zahlen durch gekürzte Brüche ist neuerdings von Hn. Hurwitz systematisch entwickelt worden [1]). Wir folgen hier genau dem von Hn. Hurwitz eingeschlagenen Wege, indem wir nur überall die arithmetische Schlussweise durch Ueberlegungen an der Gitterfigur ersetzen. Die geometrische Darlegung zeigt sich dabei an Kürze und Uebersichtlichkeit wesentlich im Vortheil.

---

[1]) „Ueber die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche." Math. Ann. 44.

Kürze halber wollen wir im Folgenden die Verbindungsstrecke zweier Gitterpunkte, wenn dieselbe keinen weiteren Gitterpunkt enthält, eine Elementarstrecke, und ein Dreieck, welches ausser seinen Ecken keinen Gitterpunkt enthält, also den Inhalt Eins besitzt, ein Elementardreieck nennen.

Wir verwenden ein Coordinatensystem, wie in §. 2, und sehen in bekannter Weise den Bruch $\frac{y}{x}$ als durch den Punkt (x, y) geometrisch repräsentirt an, so dass also Brüche gleichen Werths immer auf einer Geraden durch den Nullpunkt liegen. Gekürzte Brüche werden also durch Punkte repräsentirt, welche mit dem Anfangspunkt durch Elementarstrecken verbunden sind. Von den beiden einen und denselben Werth darstellenden gekürzten Brüchen verwenden wir im Folgenden immer denjenigen mit positivem x.

Um nun die n^{te} Farey'sche Reihe, das heisst die sämmtlichen nach der Grösse geordneten gekürzten Brüche, deren Zähler und Nenner n numerisch nicht übersteigen, zu erhalten, betrachten wir das Parallelogramm mit den Ecken $(0, -n)$, $(n, -n)$, (n, n), $(0, n)$, und lassen einen vom Nullpunkt ausgehenden Radiusvector sich aus der Anfangslage durch $(0, -n)$ in die Endlage $(0, n)$ in positivem Sine um 180° drehn. So oft der im Parallelogramm enthaltene Theil des Radiusvectors ausser dem festen Anfangspunkt noch Gitterpunkte überstreicht, markiren wir von diesen den dem Anfangspunkt am nächsten gelegenen. Diese markirten Punkte bilden in der Aufeinanderfolge, in der sie auftreten, offenbar gerade die n^{te} Farey'sche Reihe.

Aus der Entstehung folgt sofort, dass zwei aufeinanderfolgende Punkte (p, q), (p', q') mit dem Anfangspunkt ein Elementardreieck bestimmen; demnach ist

$$pq' - p'q = 1.$$

Ferner sind q, q' sicher nicht entgegengesetzt bezeichnet, da offenbar der Punkt $(1, 0)$ in jeder Farey'schen Reihe die negativen von den positiven Brüchen scheidet.

Der Uebergang von der n^{ten} zur $(n+1)^{ten}$ Farey'schen Reihe geschieht durch Hinzunahme derjenigen Gitterpunkte auf der Begrenzung des $(n+1)^{ten}$ Parallelogramms, welche mit dem Nullpunkt durch Elementarstrecken verbunden sind. Zwei solche Punkte können in der Farey'schen Reihe nicht benachbart sein, weil sie mit dem Nullpunkt ein Dreieck bestimmen, dessen Inhalt ein Vielfaches von $(n+1)$ ist, also kein Elementardreieck sein kann. Ein solcher neuer Punkt $N(r, s)$, der $(n+1)^{ten}$ Farey'schen Reihe ist also zwischen zwei Punkten $M(p, q)$, $M'(p', q')$ eingeschlossen, die schon der n^{ten} Reihe angehören und in dieser natürlich Nachbarpunkte sind (Fig. 4). Hieraus folgt, dass die drei Dreiecke: OMM', OMN, ONM' Elementardreiecke sind, also jedenfalls gleichen Inhalt besitzen. Also ist $\overline{MN}$ parallel zu $\overline{OM'}$, und $\overline{NM'}$ parallel zu $\overline{OM}$, d. h.

$$r = p + p', \quad s = q + q'.$$

Ist

$$pq' - p'q = 1$$

so sind $\frac{q}{p}$ und $\frac{q'}{p'}$ in der ersten Farey'schen Reihe, in der beide vorkommen, benachbart. Denn erstens bestimmen die beiden repräsentirenden Punkte mit dem Nullpunkt ein Ele-

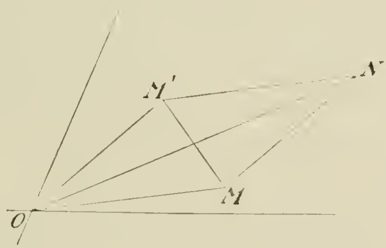

Fig. 4.

mentardreieck, ihre Verbindungslinien mit dem Nullpunkt sind also Elementarstrecken. Zweitens ist die erste Farey'sche Reihe, welche beide Punkte enthält, dadurch charakterisirt, dass der Umfang des entsprechenden Parallelogramms durch den einen M_1 hindurchlauft, während der andere M_2 im Innern liegt. Wäre nun nicht M_2, sondern etwa M_2' der M_1 benachbarte Punkt der Farey'schen Reihe, so müsste die Gerade $\overline{M_2 M_2'}$ parallel zu $\overline{OM_1}$ sein. Wegen der congruenten Gitterpunktvertheilungen auf parallelen Gitterstrahlen (S. §. 1), und weil $\overline{OM_1}$ eine Elementarstrecke ist, müsste also $\overline{M_2 M_2'}$ ein Vielfaches von $\overline{ON_1}$ sein, was offenbar in Anbetracht des Gebiets, innerhalb dessen sowohl M_2 als M_2' liegen, nur durch Zusammenfallen dieser Punkte möglich ist.

Hiemit sind die Grundlagen der Theorie der Näherungsbrüche geometrisch entwickelt. Ein weiterer Verfolg dieser Ueberlegungen führt rasch und ungezwungen zu jener schönen Versinnlichung der Kettenbrüche, welche H. Klein unter Voranstellung der gewöhnlichen arithmetischen Theorie derselben angegeben hat.[1])

§. 4. Ergänzungen zu §. 1.

Die im §. 1 entwickelte Flächenformel ist einer Verallgemeinerung fähig, die hier dargelegt werden möge; zugleich ergibt sich von selbst eine Verschärfung des Beweisverfahrens.

Wir betrachten eine aus einem oder mehreren getrennten Flächenstücken bestehende Figur mit durchaus geradliniger Begrenzung, deren Ecken sämmtlich Gitterpunkte sein sollen. Es bezeichne J die Anzahl der im Innern der Figur liegenden Gitterpunkte, U jene der auf der Berandung gelegenen. Da es vorkommen kann, dass Begrenzungstheile verschiedenen Partien der Figur gemeinsam sind, so ist eine Festsetzung hinsichtlich der Zählung von U erforderlich, welche am zweckmässigsten so formulirt wird: Man umgebe jeden auf der Begrenzung der Figur gelegenen Gitterpunkt mit einem genügend kleinen einfach zusammenhängenden (etwa kreisförmigen) Flächenstück, und zählte ab wie viele Flächentheile der Figur innerhalb dieses Stückes liegen. Gerade so oft ist der betreffende Punkt zu zählen.

Es sei noch Q die Anzahl der Querschnitte, welche erforderlich ist, um alle Bestandtheile der Figur einfach zusammenhängend zu machen, N die Zahl der getrennten Bestandtheile selbst.

Ein Querschnitt, der irgendwie gelegt wird, ändert, falls er keine Zerstückelung eines Bestandtheils herbeiführt, Q um (-1), lässt aber, falls er zerstückelt, Q ungeändert. Somit ist

$$Q - N$$

eine Zahl, die durch Construction eines Querschnitts jedesmal um eine Einheit abnimmt. Es mögen nun insbesondere nur solche

[1]) Autographirte Vorlesungshefte, III. Math. Ann. Bd. 48.

Querschnitte verwendet werden, deren Endpunkte und etwa vorhandene Knickungspunkte Gitterpunkte sind. Ein solcher Querschnitt enthalte ausser seinen Endpunkten noch δ Gitterpunkte. Beginnt und endigt der Querschnitt auf der ursprünglich vorhandenen Begrenzung, so bewirkt er offenbar eine Verminderung von J um δ, eine Vermehrung von U um $(2\delta + 2)$, und dasselbe findet offenbar auch statt, wenn er in einem seiner eigenen Punkte endigt. Somit vermehrt sich die Zahl

$$2J + U$$

bei Construction eines Querschnitts jedesmal um zwei Einheiten.

Der Ausdruck

$$2J + U + 2Q - 2N$$

ist also allen Querschnittsconstructionen gegenüber unveränderlich. Offenbar ist es nun stets möglich, durch Querschnitte der betrachteten Art die Figur in einen Complex von lauter einfach zusammenhängenden Gitterpolygonen, insbesondere von Gitterdreiecken zu verwandeln. Es seien i_k, u_k die auf ein einzelnes dieser Dreiecke bezüglichen Zahlen von inneren und Randgitterpunkten, so hat man für jenen schliesslichen Complex gemäss der oben getroffenen Festsetzung

$$J = \Sigma i_k, \; U = \Sigma u_k, \; Q = o,$$

also

$$2J + U + 2Q - 2N = \Sigma\,(2i_k + u_k - 2),$$

und diese Bewerthung gilt nach dem Gefundenen auch für die ursprüngliche Figur. Nach §. 1 ist aber

$$\Sigma\,(2i_k + u_k - 2)$$

gerade die Summe der Flächen aller Dreiecke, also nichts anderes, als der Flächeninhalt der ursprünglichen Figur. **Demnach wird der Inhalt jeder derartigen Figur durch den Ausdruck**

$$2J + U + 2Q - 2N$$

gegeben.