neben selbständigen Vorträgen auch Berichte über die neuesten Ergebnisse der geographischen Forschung im weitesten Sinne des Wortes gegeben werden sollen.

Ein Grundstock für Mitglieder der „geographischen Sektion" ist bereits vorhanden und es werden hiermit alle P. T. Mitglieder und Freunde des Lotos, welche der Sektion beitreten wollen, ersucht, sich entweder im Sekretariat des „Lotos", Prag II, Weinberggasse 3a, oder bei Herrn Dr. Karl Schneider, Assistent am geographischen Institut der deutschen Universität in Prag, Obstmarkt 7 III, zu melden.

Prag, im November 1907.

Prof. Alfred Birk. Prof. Dr. Oskar Lenz.

Die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeitsmassen und die Gestalt der Himmelskörper.

(Auszug aus einem für die „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen" bestimmten Referate.)

Von S. OPPENHEIM (Prag.)

§ 1. Die erste Anregung zu theoretischen Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper, einschließlich der der Erde, gab Newton in seinem grundlegenden Werke „Principia mathematica philosophiae naturalis."[1]) Die Tatsache, daß die beiden großen Planeten des Sonnensystems, Jupiter und Saturn, im Fernrohre schon bei ganz mäßiger Vergrößerung nicht als kreisförmige, sondern als elliptische Scheiben mit deutlich sichtbarer Abplattung erscheinen, dürfte Newton zu dem Analogieschlusse geführt haben, daß auch die Erde nicht eine Kugel, sondern ein an den Polen abgeplattetes Ellipsoid sei. Es lag dann für ihn der Gedanke nahe, diese eigentümliche Form der Erde dem Zusammenwirken der zwei hauptsächlichsten auf ihrer Oberfläche tätigen Kräfte zuzuschreiben, nämlich der Schwere und der durch die Rotation um ihre Achse entstehenden Flieh- oder Schwungkraft. Für die erstere hatte Newton selbst das Gesetz ihrer Wirkungsweise aufgestellt und den Grundsatz ausgesprochen, daß sie als Resultierende der unendlich vielen einzelnen anziehenden Kräfte anzusehen sei, welche die Teilchen aller Körper gegenseitig aufeinander ausüben. Das Gesetz und die Wirkungsweise der zweiten Kraft war einige Jahre vorher von Huyghens in seinem Horologium oscillatorium[2]) aufgefunden worden und Newton ebenfalls bekannt.

So entstand und wurde zum ersten Male ein Problem formuliert, das seitdem bis zum heutigen Tage in intensiver Weise die Mathematiker beschäftigt, wie wenig andere physikalische Probleme zur Entwicklung der Mathematik beitrug, eine strenge Lösung aber bis heute noch nicht gefunden hat. Das Problem lautet: welche Form nimmt im Falle des Gleichgewichtes eine Flüssigkeitsmasse an, oder, wie weiterhin stets der Kürze halber gesagt werden soll, welches ist die Gleichgewichtsfigur einer Flüssigkeitsmasse, von der folgende Annahmen gemacht werden: 1. daß sie frei im Weltraume schwebe, 2. daß ihre Teilchen gegenseitig auf sich anziehende Kräfte ausüben, die das Newtonsche Gesetz befolgen, und 3. daß die ganze flüssige Masse wie ein starrer Körper um eine im Raume feste Achse mit konstanter Geschwindigkeit rotiere.

Die theoretische Bedeutung der Lösung dieses Problems ist eine mannigfache. In ihr liegt vor allem die Beantwortung der Frage nach der Gestalt der Erde und der Planeten, d. i. der Frage nach dem Gesetze, nach welchem die Abplattungen derselben von der Schwere und der Fliehkraft abhängen. In ihr liegt ferner die Bestimmung der speziellen Gestalten, die dem Monde, der Erde und den Satelliten der Planeten zukommen. Durch sie ist man in das Geheimnis eingedrungen, das das Entstehen des den Saturn frei umschwebenden Ringes umgibt. Durch sie lernte man ebenso die Kräfte kennen, die die eingentümlichen Formen und Gestalten

[1]) Newton: Principia, London 1687. Deutsche Ausgabe von Wolfers. Berlin 1872.

[2]) Huyghegs: Horologium Leyden 1673.

der Kometen verursachen. In ihr sind endlich die ersten Keime zu einer mathematischen Behandlung der Kant-Laplace'schen Hypothese der Entstehung des Sonnensystems enthalten. Bekanntlich besteht diese Hypothese im wesentlichen in der Annahme, daß das ganze Sonnensystem ursprünglich eine chaotische Nebelmasse war, von der sich infolge der wachsenden Fliehkraft bei zunehmender Rotationsgeschwindigkeit nach und nach ringförmige Massen abtrennten, die sich wieder zu neuen rotierenden Nebelmassen zusammenballten. Um nun hiefür eine strengere, d. h. mathematische Begründung zu erlangen, hat man nur die Aufgabe, alle möglichen Formen aufzuzählen, welche eine rotierende Flüssigkeitsmasse bei langsamer Abkühlung infolge der dadurch sich steigernden Rotationsgeschwindigkeit durchmachen kann, und sodann zu untersuchen, wie diese nicht als End-, sondern als Zwischenformen des Gleichgewichtes kontinuierlich ineinander übergehen.

I. Die Gestalt der Erde und der Planeten.

§ 2. Die Lösung, welche Newton von dem von ihm angeregten Problem gibt, ist nur eine genäherte. Ohne nämlich den Beweis dafür zu erbringen, daß ein abgeplattetes Rotationsellipsoid eine mögliche Gleichgewichtsfigur einer rotierenden Flüssigkeitsmasse ist, nimmt er diese Form für die Erde wie für die Planeten als gegeben an und sucht sofort aus dem Verhältnisse der Schwere zur Fliehkraft die Größe der Abplattung zu berechnen, wobei er noch die Beschränkung hinzufügt, daß die gegebene Flüssigkeit homogen, d. h. von durchwegs gleicher Dichte ist.

Für die Größe des Verhältnisses der Fliehkraft zur Schwere, für welches im folgenden stets das Zeichen φ gelten möge, nimmt Newton die Zahl:

$$\varphi = 1/288$$

an. In der Tat folgt selbst aus neueren Messungsergebnissen,

Rotationsgeschwindigkeit der Erde . . . . $\omega = 2\pi : 86164$
Äquatorradius der Erde nach Bessel . . . . $a = 6377397\ m$
die Beschleunigung der Fliehkraft am Äquator . . . $\omega^2 a = 0{,}0339117\ m/\mathrm{sec}^2$
die Beschleunigung der Schwere nach Helmert . . . $g = 9.7800\ m/\mathrm{sec}^2$
das Verhältnis beider

$$\varphi = \frac{\omega^2 a}{g} = 0.00346745 = 1 : 288{\cdot}397$$

Als Gleichgewichtsbedingung benützt Newton ein Prinzip, das seitdem von allen älteren Mathematikern benützt wurde, ehe in der Folge von Clairaut, Euler und D'Alembert die Bedingungsgleichungen den Formeln der analytischen Mechanik entsprechend aufgestellt wurden. Das Prinzip lautet: Man denke sich durch die Erde zwei Kanäle gezogen, den einen vom Pol bis zum Erdmittelpunkt, den anderen von da bis zu einem beliebigen Punkte des Äquators. Beide Kanäle seien mit Wasser gefüllt. Im Falle des Gleichgewichtes müssen die Wassermassen in ihnen gleich schwer sein, d. h. von der Erde gleiche Anziehung erfahren. Würde die Erde nicht rotieren, so könnte dies nur dann eintreten, wenn beide Kanäle gleiche Länge haben. Da aber die Erde rotiert, und die aus dieser Rotation entstehende Fliehkraft am Äquator am größten ist, während sie an den Polen verschwindet, so wird dadurch die Wassermasse des Äquatorkanals leichter erscheinen u. z. um den 288. Teil als die des durch den Pol gehenden Kanals. Daher muß, um das Gleichgewicht herzustellen, die Länge des Äquatorkanals größer sein als die des Polkanals u. z. um so viel, daß die Gewichte der in ihnen enthaltenen Wassermassen sich verhalten wie 289 : 288.

Man würde jedoch fehlgehen, daraus auch schon den Schluß zu ziehen, daß die Längen der Kanäle sich verhalten wie 289 : 288, d. h., daß der Äquatorradius um den 288. Teil größer sein müsse als der Polarradius. Dies würde nur dann der Fall sein, wenn die Erde eine Kugel wäre, da nur für eine Kugel ihre Gesamtanziehung als Resultierende der partiellen Anziehungen ihrer einzelnen Teilchen auf einen beliebigen Punkt außerhalb oder auf ihrer Oberfläche nur von ihrer Masse und der Entfernung ihres Mittelpunktes vom angezogenen Punkte abhängt, für alle anderen Körper außerdem noch ihre Form maßgebend ist. Um daher die Schwere jedes der beiden Kanäle zu bestimmen, mußte Newton die Anziehung eines Ellipsoides auf einen Punkt des Äquators und des Pols berechnen. Diese schwierige Integrationsaufgabe beschäftigte die Mathematiker seit Newton aufs lebhafteste. Sie bildete einen beliebten Kräftemesser für ihren Wettbewerb untereinander. Newton löste sie nur genähert mit einer Genauigkeit, die der Berücksichtigung der ersten Potenz der Abplattung des Ellipsoides und der Vernachlässigung aller höheren Potenzen gleichkommt.

Bedeutet a den Äquatorradius der Erde, c den Polarradius, so soll der Bruch

$$\alpha = (a - c)/a$$

stets als Abplattung bezeichnet werden. Newton setzt ein Ellipsoid mit der Abplattung $\alpha = 1/100$ voraus und findet, daß ein solches Ellipsoid einen Punkt am Pol mit einer um 1/500 größeren Kraft anzieht als einen Punkt am Äquator. Nun ist wegen der angenommenen Abplattung die Masse des Wassers im Polkanal um 1/100 kleiner als die im Äquatorkanal, daher bleibt für die Änderung durch die Fliehkraft die Differenz

$$1/100 - 1/500 = 4/500 = 4/5 \,.\, 1/100$$

übrig, d. h. der Äquatorkanal muß um 4/500 länger angenommen werden als der Polkanal, um das Gleichgewicht herzustellen. Für die Abplattung 1/100 gibt also das Verhältnis der Fliehkraft zur Schwere $\varphi = 4/5 \,.\, 1/100$; für jede andere Abplattung α wird daher in gleicher Art die Beziehung

$$\varphi = \frac{4}{5}\,\alpha \quad \text{oder umgekehrt} \quad \alpha = \frac{5}{4}\,\varphi$$

gelten. Diese Gleichung gibt das Newtonsche Hauptresultat an. Sie sagt: „Wenn eine homogene Flüssigkeitsmasse, die mit konstanter Geschwindigkeit um eine feste Achse rotiert, als Gleichgewichtsfigur die Form eines Rotationsellipsoides besitzt, so ist die Abplattung

$$\alpha = \frac{5}{4}\,\varphi = \frac{5}{4} \cdot \frac{\text{Fliehkraft am Äquator}}{\text{Schwere am Äquator.}}$$

Für die Erde folgt daraus $\alpha = 1/230$. Doch konnte Newton zu seiner Zeit die Richtigkeit des Resultates in keiner Weise bestätigen. Es lagen damals noch zu wenig Gradmessungen auf der Erde vor, um aus ihnen die Abweichung der Erde von der Kugelgestalt bestimmen zu können. Newton gab erst durch seine Theorie den Anlaß dazu, solche Messungen in ausgedehnterem Maße auf der Erdoberfläche auszuführen. Er suchte daher, auf einem anderen Wege eine Bestätigung zu erlangen, und fand sie, wenn auch nur genähert, in der Berechnung der Abplattung des Planeten Jupiter. Indem er annimmt:

Rotationszeit der Jupiter $= 9^h\ 56^m$

Dichte des Jupiter $= \frac{94 \cdot 5}{400}$ mal Dichte der Erde, findet er

$$\alpha = \frac{1}{230}\left(\frac{23^h\ 56^m}{9^h\ 56^m}\right)^2 \cdot \left(\frac{400}{94 \cdot 5}\right) = \frac{1}{9^1/_3}$$

während die damaligen Beobachtungen für sie Werte ergaben, die zwischen

1/11 und 1/13

variieren, und, wie man sieht, mit dem theoretischen Ergebnis Newtons in ziemlicher Übereinstimmung stehen.

Außer der Abplattung zeigt sich die Wirkung der Fliehkraft auf der Erde noch in einer Änderung der Schwere oder, da von dieser die Länge eines Sekundenpendels abhängt, in einer Änderung dieser Pendellänge. Hier konnte Newton an bekannte Tatsachen anknüpfen. Richer hatte im Jahre 1672 gefunden, daß er sein von Paris mitgenommenes Sekundenpendel um $1^1/_4$ Pariser Linien $= 3$ *mm* in Cayenne verkürzen mußte, daß es da ebenfalls ein Sekundenpendel sei. Ebenso hatte Halley 1677 sein von London nach der Insel St. Helena gebrachtes Pendel um $1^1/_2{}''' = 3 \cdot 5$ *mm* verkürzen müssen. Newton zeigt, daß die Notwendigkeit dieser Verkürzung nur zum kleinsten Teile der Wirkung der höheren Tagestemperaturen in Cayenne und auf St. Helena gegenüber denen in Paris und London zuzuschreiben sei, sondern vielmehr von der Änderung der Schwere infolge der Fliehkraft herrühre. Er nimmt für die Pendellänge ohne Beweis die Formel

$$l_\varphi = l_0\ (1 + 1/230\, sin^2 \varphi)$$

an, wenn l_φ die Länge des Sekundenpendels für die geographische Breite φ und l_0 die für den Äquator ist, und gibt eine Tafel dieser Längen für Breiten von 0°—90°.

$\varphi = 0^0$ $l_0 = 441.468''' = 0.995875\ m$ nach Helmert: 0.990918 m
$\varphi = 45^0$ $l_{45} = 442.428''' = 0.998042\ m$ 0.993549 m
$\varphi = 90^0$ $l_{90} = 443.387''' = 1.000205\ m$ 0.996180 m

Zum Vergleiche mit neueren Beobachtungen sind die Pendellängen nach Helmert[1]) nebengestellt.

§. 3. Dieselben Tatsachen der Änderung der Schwere auf der Erde regten auch Huyghens[2]) zu seinen Untersuchungen über die Gestalt der Erde an. Seine Behandlung des Problems unterscheidet sich wesentlich von der Newtons. Namentlich leugnet er die Newtonsche Anschauung, daß die Schwere aus den unendlich vielen Anziehungen von Molekül zu Molekül eines Körpers resultiere, sondern nimmt an, daß sie eine konstante Kraft sei, die nur im Mittelpunkte der Erde ihren Satz habe, daß ihr am Äquator die Fliehkraft entgegenwirke und sie um den 288. Teil ihrer Intensität vermindere. Als Gleigewichtsbedingung stellt er das Prinzip auf, daß die Oberfläche der Erde in allen ihren Teilen auf der Resultierenden zwischen der konstanten Schwere und der Fliehkraft senkrecht stehe und leitet daraus für die Abplattung den Wert ab

$$\alpha = \frac{1}{2}\varphi \quad \text{d. h. für die Erde} \quad \alpha = 1/576$$

Clairaut[3]) machte zuerst darauf aufmerksam, daß man der Huyghensschen Auffassung von der Schwere folgende physikalische Deutung geben könne. Man nehme an, daß die Erde keine homogene Flüssigkeit sei, sondern daß ihre Dichte von der Oberfläche zum Mittelpunkte zunehme, u. zw. so, daß sie in diesem einen unendlich großen Wert habe. Dann wird auch nach der Newtonschen Ansicht, da die Anziehung des Mittelpunktes die aller anderen Moleküle bedeutend überwiegt, es so ausschauen, als ob einzig dieser Punkt als Sitz der Anziehung vorhanden ist. Die zwei theoretisch gefundenen Werte der Abplattung können daher als Grenzwerte aufgefaßt werden, von denen der erste Newtonsche ($\alpha_1 = {}^5/_4\,\varphi$) dem Falle entspricht, daß die Erde durchwegs von gleicher Dichte ist, der zweite Huyghenssche ($\alpha_2 = {}^1/_2\,\varphi$) wieder dem, daß ihre Masse ganz im Mittelpunkte konzentriert ist. Der wahre Wert der Abplattung muß daher für alle Himmelskörper, sofern sie nur ellipsoidischer Form sind, zwischen diesen beiden Werten liegen.

Die folgende Tafel mag ein Bild davon geben, inwieweit dieses Ergebnis der Wahrheit entspricht. Sie gibt für die größeren Planeten des Sonnensystems, Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn (Uranus und Neptun ausgeschlossen, da man deren Rotationsdauer noch nicht kennt) und auch für die Sonne alle Zahlenangaben, aus denen man die Größen φ, $\alpha_1 = {}^5/_4\,\varphi$ (Newton) $\alpha_2 = \frac{1}{2}\varphi$ (Huyghens) berechnen kann, sowie endlich die gemessene Abplattung α.

	Rotationsdauer	Dichte im Verh. zum Wasser	φ	α_1	α_2	α
Merkur	24^h ?	5.65	1 : 341	1 : 275	1 : 682	unmeßbar
Venus	24 ?	5.41	1 : 222	1 : 178	1 : 445	unmeßbar
Erde	23 56^m	5.56	1 : 288	1 : 230	1 : 576	1 : 297
Mars	24 37	3.99	1 : 217	1 : 174	1 : 435	1 : 230
Jupiter	9 55	1.31	1 : 11·8	1 : 9·4	1 : 23·5	1 : 15
Saturn	10 29	0.72	1 : 6·4	1 : 5·1	1 : 12·8	1 : 10
Sonne	25^d 4 .	1.42	1 : 46700	1 : 37500	1 : 93400	unmeßbar

Es zeigt sich tatsächlich, daß bei den Planeten Erde, Mars, Jupiter und Saturn, deren Abplattung zu messen bisher schon gelungen ist, diese stets zwischen den beiden Grenzwerten α_1 und α_2 liegt. Doch liegt der gemessene Wert bei den Planeten Erde und Mars näher dem Newtonschen, beim Saturn umgekehrt näher dem Huyghensschen, während er beim Jupiter in der Mitte zwischen beiden liegt. Daraus läßt sich der folgende interessante Schluß auf die Massen-

[1]) Helmert: Die math. u. physik. Theorien der höheren Geodäsie, Leipzig 1884.
[2]) Huyghens: Discours de la cause de la pesanteur. Leyden 1690.
[3]) Clairaut: An Inquiry concerning the Figure of Planets, London 1783.

verteilung innerhalb der genannten 4 Planeten ziehen: „Bei der Erde und beim Mars ist die Zunahme der Dichte von der Oberfläche zum Mittelpunkte nur eine geringe, die Massenverteilung in ihrem Inneren kann halbwegs noch als eine homogene angesehen werden, weshalb die bei ihnen beobachteten Abplattungen sich mehr dem Newtonschen Werte anschließen. Wesentlich anders verhält es sich beim Saturn. Bei diesem dürfte die Dichte von der Oberfläche an gegen das Innere rasch zunehmen und im Mittelpunkte einen sehr großen Wert haben. Daher liegt seine Abplattung näher dem Huyghensschen Werte. Der Planet Jupiter hält zwischen diesen beiden Fällen die Mitte.

§. 4. Der Erste, dem die Aufgabe glückte, die Anziehungskräfte eines Rotationsellipsoids von homogener Masse auf einen Punkt seiner Oberfläche allgemein zu berechnen, war Mac-Laurin[1]). Auf dieser Grundlage konnte er nunmehr den strengen Beweis dafür erbringen, daß das abgeplattete Rotationsellipsoid eine Gleichgewichtsfigur einer rotierenden Flüssigkeitsmasse ist. Als gesuchte Beziehung zwischen der Größe φ und der Abplattung des Ellipsoides oder dessen Exzentrizität

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{c^2}}, \text{ woraus } \alpha = \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2} - 1}{\sqrt{l+\varepsilon^2}}$$

ergab sich ihm die Gleichung

$$\varphi = \frac{3}{2\,\varepsilon^3}\left[(3+\varepsilon^2)\operatorname{arctg}\varepsilon - 3\,\varepsilon\right]$$

Mac-Laurin verwendet sie nur für den Fall, daß ε sehr klein ist, und findet durch einfache Reihenentwicklung in Übereinstimmung mit dem Newtonschen Resultat $\alpha = {}^5/_4\ \varphi$. Eine strenge Diskussion bezüglich ihrer reellen Wurzeln lieferte erst Laplace[2]). Sie lautet:

1. Für kleine Werte von φ hat die Gleichung stets zwei reelle Wurzeln, die eine kleiner als 1, die andere größer als 1. Für die kleinere gilt der Newtonsche Näherungswert $\alpha = {}^5/_4\ \varphi$, die größere dagegen ist aus $\varepsilon = 2\pi/4\varphi$ zu berechnen. Es entsprechen daher einem kleinen Wert von φ, d. h. einer kleinen Rotationsgeschwindigkeit der gegebenen Flüssigkeitsmasse zwei mögliche Gleichgewichtsfiguren, die eine mit sehr kleiner, die andere mit sehr großer Abplattung. Was die Erde anlangt, für welche $\varphi = 1/288$ ist, so wäre die eine Gleichgewichtsform ein Ellipsoid mit der Abplattung 1/230, die andere würde mehr schon einer elliptischen Scheibe mit sehr großem Äquatorradius und sehr kleinem Polarradius gleichen; denn ihre Abplattung wäre 679/680, d. h. der Radius der Scheibe wäre 680mal größer als ihre Dicke.

2. Ist die Rotationsgeschwindigkeit und damit auch $\varphi = 0$, so wird die kleinere Wurzel ebenfalls Null, die größere dagegen unendlich. Die eine Gleichgewichtsfigur geht in eine Kugel über, die andere wird eine kreisförmige, unendlich dünne Scheibe mit unendlich großem Radius.

3. Läßt man dagegen die Rotationsgeschwindigkeit und damit auch die Größe φ anwachsen, so kommt man endlich auf einen Wert $\varphi = 0{\cdot}33700$, für welchen beide Wurzeln zusammenfallen, u. z. wird

$$\varepsilon = 2{\cdot}5292 \quad \alpha = 0{\cdot}6323$$

und über welchen hinaus keine reellen Wurzeln mehr vorhanden sind. Eine ellipsoidische Gleichgewichtsfigur ist dann nicht mehr möglich. Für die Erde beträgt diese größte Rotationsgeschwindigkeit oder die kleinste Rotationsdauer, bei welcher eine ellipsoidische Gleichgewichtsfigur noch möglich ist

$$T = 23^h\ 56^m \sqrt{\frac{1}{288} \cdot \frac{1}{0.33700}} = 2^h\ \ 25^m$$

für jeden anderen Planeten, dessen Dichte ϱ^1 ist gegenüber der der Erde ϱ, berechnet sich diese aus

$$T = 2^h\ \ 25^m \sqrt{\varrho/\varrho_1}$$

[1]) Mac-Laurin: Treatise of Fluxions. Edinburgh 1742.

[2]) Laplace: Mécanique céleste. Livre III. Paris 1799.

Man erhält so folgende Tafel:

	Dichte	Kleinste Rot.-Dauer	wirkliche Rot.-Dauer
Merkur	5·65	2^h 24^m	24^h ?
Venus	5·41	2 28	24 ?
Erde	5·56	2 25	23 56^m
Mars	3·99	2 52	24 37
Jupiter	1·31	5 0	9 55
Saturn	0·72	6 45	10 29
Uranus	0·80	6 40	unbekannt
Neptun	1·17	5 17	unbekannt
Sonne	1·42	4 58	25^t 4 .

Auch hier zeigen — wie im Falle der Abplattung — die beiden Planeten Jupiter und Saturn eine exzeptionelle Stellung gegenüber den anderen, besonders Erde und Mars.

§ 5. Im Jahre 1834 machte der deutsche Mathematiker Jacobi die Entdeckung, daß auch ein dreiachsiges Ellipsoid eine mögliche Gleichgewichtsfigur einer rotierenden Flüssigkeit sei. Doch untersuchte Jacobi die einschränkenden Bedingungen, unter denen dies möglich ist, nicht näher. Man war daher anfangs gegen diese Entdeckung sehr mißtrauisch, da es kaum glaublich und den physikalischen Anschauungen nicht zu entsprechen schien, daß eine rotierende Flüssigkeit im Gleichgewicht stehen könne, ohne die Gestalt einer Rotationsfigur zu besitzen, d. h. in bezug auf die Rotationsachse symmetrisch zu sein. Eine strenge Diskussion der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen bestätigte jedoch bald das Jacobische Resultat, zeigte aber auch, daß ein solches Ellipsoid mit drei ungleichen Achsen nur dann eine Gleichgewichtsfigur sein könne, wenn seine Abplattung mindestens 0·414 ist. Eine solch große Abplattung zeigen aber nicht einmal die beiden am schnellsten rotierenden Planeten Jupiter und Saturn; für die Erde wie für die Planeten kommt daher diese Gleichgewichtsform nicht weiter in Betracht.

Als ein weiteres Ergebnis der Diskussion der Gleichgewichtsbedingung werde erwähnt, daß auch hier, wie im Falle der Rotationsellipsoide, zu kleinen Werten der Rotationsgeschwindigkeit zwei Werte der Exzentrizitäten gehören, die aber miteinander vertauschbar sind, so daß sie zwei Gleichgewichtsfiguren mit demselben Achsenverhältnisse, aber vertauschtem Meridianhauptschnitte entsprechen und daher nicht wesentlich voneinander verschieden sind. Je größer die Rotationsgeschwindigkeit wird, um so mehr rücken die beiden Exzentrizitäten zusammen und endlich für den Wert $\varphi = 0·28063$ werden sie einander gleich. Das dreiachsige geht in ein Rotationsellipsoid über.

§ 6. Die Annahme, daß die Himmelskörper von homogener Masse sind, entspricht der Wahrheit nicht. Schon Newton machte die Bemerkung, daß, wenn zwischen der von ihm berechneten Abplattung des Planeten Jupiter und der tatsächlichen durch vielfache Beobachtungen festgestellten ein Unterschied bestehe, dies dem Umstande zuzuschreiben sei, daß seine Dichte und wohl auch die aller anderen Planeten keineswegs als konstant angesehen werden könne. Es entstand so ein neues Problem, neben der Theorie der Gleichgewichtsfiguren für homogene Flüssigkeiten auch eine solche für heterogene aufzustellen und zwar unter verschiedenen Annahmen für die Änderung der Dichte in ihrem Inneren. Diese Untersuchungen haben eine besondere Bedeutung erlangt in ihrer Anwendung auf die Erde, nämlich eine schärfere theoretische Bestimmung ihrer Abplattung und eine kritische Prüfung verschiedener über ihre innere Konstitution aufgestellter Hypothesen.

An der Lösung dieses neuen Problems waren besonders zwei Mathematiker beteiligt: Clairaut[1]) und Laplace[2]). Den Ausgangspunkt für ihre Untersuchungen bildeten folgende Annahmen:

[1]) Clairaut: Théorie de la figure de la terre. Paris 1783.

[2]) Laplace: Mécanique céleste. Livre III. Paris 1799.

1. Die Erde oder die Flüssigkeitsmasse, deren Gleichgewichtsfigur bestimmt werden soll, besteht aus unendlich vielen, unendlich dünnen Schichten, die alle eine gemeinschaftliche Rotationsachse haben und deren Dichte von Schichte zu Schichte variiert u. z. zunehmend von der Oberfläche gegen die Mitte hin. Diese Zunahme braucht aber nicht eine kontinuierliche, sondern kann auch eine sprunghafte sein.

2. Die Annahme, daß alle einzelnen Schichten ursprünglich flüssig waren, ist nicht notwendig. Nur die Oberflächenschichte muß als eine flüssige angesehen werden, die durch die gleichmäßige Rotation eine bestimmte Form erlangte und sie auch beibehielt. Die inneren Schichten können auch als von Anfang an fest angenommen werden. Die Lösung des Problems umfaßt daher ebenfalls den allgemeinen Fall, daß man die Erde als einen festen Körper ansieht, der von einer Wassermasse bedeckt ist.

3. Jede dieser einzelnen Schichten hat die Form eines Rotationsellipsoides von sehr kleiner Abplattung, so daß in der Rechnung bloß deren erste Potenz berücksichtigt, die zweite und noch mehr die höheren Potenzen derselben vernachlässigt werden können. Die Abplattungen der einzelnen Schichten sind verschieden, aber notwendigerweise von Schichte zu Schichte stetig veränderlich.

Clairaut berechnet die Anziehungskräfte einer unendlich dünnen, von zwei Rotationsellipsoiden begrenzten Schale und daraus durch Integration die Anziehung des ganzen Ellipsoides, das aus unendlich vielen solchen Schalen von variabler Dichte sich zusammensetzt. Durch Substitution der so gefundenen Werte in die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht erhält er in erster Linie eine Differentialgleichung, welcher die Abplattungen der einzelnen Schichten von gleicher Dichte genügen müssen. In etwas anderer Form geht Laplace vor, gelangt aber zu derselben Differentialgleichung.

In sie geht als Hauptgröße das Gesetz ein, nach welchem die Dichten der einzelnen Schichten von der Oberfläche zum Mittelpunkte zu wachsen und, da dieses Gesetz nicht bekannt ist, läßt sich die Gleichung nicht integrieren. Trotzdem haben sich mit dieser Integration unter verschiedenen Hypothesen für die Variation der Dichte sehr viele hervorragende Mathematiker beschäftigt. Es handelte sich vornehmlich bei diesen hypothetischen Versuchen darum, solche Funktionswerte für die Dichte der Erde in ihrer Abhängigkeit von Radiusvektor aufzufinden, die gewissen durch Beobachtungen mit einiger Genauigkeit festgelegten Größen genügen. Diese sind:

1. die mittlere Dichte der Erde, die aus nach verschiedenen Methoden durchgeführten Versuchen zu $\varrho_m = 5{\cdot}513$ mit einem geringen mittleren Fehler anzunehmen ist;

2. der aus geologischen Beobachtungen gefolgerte Mittelwert der Dichte auf der Oberfläche der Erde, $\varrho_0 = 2{\cdot}6 - 2{\cdot}8$;

3. der aus geodätischen Messungen wie aus Pendelbeobachtungen sich ergebende Wert der Abplattung der Erde zu $\alpha = \frac{1}{297} - \frac{1}{299}$;

4. endlich die aus der Theorie der Präzession folgende Differenz der beiden Hauptträgheitsmomente der Erde um eine beliebige Äquatorachse, A, und die Rotationsachse, C, für welche der Wert $(C - A)/C = \frac{1}{305{\cdot}7}$ ebenfalls mit einem sehr geringen mittleren Fehler anzusetzen ist.

Merkwürdigerweise ist es bisher noch nicht gelungen, durch eine Annahme über das Gesetz der Variation der Dichte eine volle Übereinstimmung mit allen diesen Größen zu erzielen. Als die beste erwies sich noch die Annahme Legendre's, wornach für die Zunahme der Dichte von der Oberfläche zum Mittelpunkte der Erde

$$\varrho = \frac{G}{a} \sin m a$$

gesetzt wird, wenn ϱ die variable Dichte der Erde von Schichte zu Schichte, a den Abstand einer Schichte vom Erdmittelpunkt, den Erdradius $= 1$ angenommen, und G und m zwei Konstante bedeuten. Eine Tafel einander zugehöriger Werte der Größen ϱ, α u. s. w., entnommen dem Lehrbuche Tisserand's[1]), möge hier folgen:

m	G	Oberflächen-Dichte $= \varrho_0$	Dichte im Erdmittelp. $= \varrho_2$	Abplatt. α	$(C - A)/C$
138	4.37	2·93	10.53	1 : 288·7	1 : 294·7
140	4.40	2·83	10.75	1 : 291·2	1 : 297·9
142	4.43	2·73	10.98	1 : 293·9	1 : 301·2
144	4.46	2·63	11.22	1 : 296·7	1 : 304·8
146	4.50	2·52	11.47	1 : 299·7	1 : 308·5

Die interessanteste Kolonne in ihr ist die vierte, welche die Werte für die Dichte der Erde im Mittelpunkte angibt (man erhält diese durch die Substitution $\alpha = 0$) u. z. $\varrho_2 = 10·5 - 11·5$, woraus folgt, daß ihr Inneres sich aus schweren Metallen zusammensetzt.

Dieser wenn auch kleine Mangel an Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung gab Anlaß zu einer neuen Anschauung über die innere Konstitution der Erde, nach welcher ihr keine kontinuierliche, sondern eine diskontinuierliche Massenverteilung zuzuschreiben sei. Roche[2]) nimmt an, daß die Erde aus 3 Schichten von verschiedener, aber konstanter Dichte bestehe; Wiechert[3]) gelangt zu dem Ergebnisse, daß den bekannten Beobachtungsdaten am besten genügt werde durch die Annahme, daß die Erde sich aus zwei wesentlich voneinander verschiedenen Schichten zusammensetze, nämlich einem Eisenkerne von etwa 5000 *km* Radius mit der mittleren Dichte 7·5 — 8, und einem ihn umhüllenden Gesteinsmantel von etwa 1500 *km* Dicke und der mittleren Dichte 2·6.

Ein zweites Ergebnis der Clairautschen Rechnungen über die Gleichgewichtsfigur der Erde, diese als von variabler Dichte angenommen, ist der wichtige nach ihm als das Clairautsche Theorem benannte Lehrsatz, welcher es gestattet, einzig aus Messungen von Längen eines Sekundenpendels die Abplattung der Erde zu berechnen. Wenn man für die Änderung dieser Länge den Ausdruck
$$l\,\varphi = l_0\,(1 + \lambda \sin^2 \varphi)$$
aufstellt, so lautet dieser
$$\alpha = \frac{5}{2}\,\varphi - \lambda.$$

Eine sorgfältige Diskussion aller bisher angestellten Pendelbeobachtungen, die den Zeitraum von 1818—1880 umfassen und sich über die geographischen Breiten von 79° nördlich bis 62° südlich erstrecken, führte Helmert[4]) durch, und findet
$$l\,\varphi = 0.990918\,(1 + 0·005310 \sin^2 \varphi) \text{ Meter}$$
d. h. $\lambda = 0·005310$, woraus wegen $\varphi = 1 : 288·4 = 0·003467$
$$\alpha = 0·003358 = 1 : 297·89$$
und, wenn man, wie dies Helmert tut, im Clairautschen Satze noch einige Glieder zweiter Ordnung berücksichtigt, als besserer Wert
$$\alpha = 0·0033416 = 1 : 299·26$$
folgt. Dieser ist mit dem von Bessel[5]) aus geodätischen Messungen abgeleiteten Wert der Abplattung $\alpha = 1 : 299·1528$ fast identisch.

§ 7. Weitere Methoden zur Bestimmung der Abplattung der Erde gibt die theoretische Astronomie noch zwei, eine aus der Theorie der Präzession folgende und die zweite, die sich auf kleine Unregelmäßigkeiten in der Bewegung des Mondes gründet.

Auf den Zusammenhang zwischen der Präzession und der Abplattung der Erde und die Möglichkeit, aus der Größe der ersteren letztere zu berechnen, machte zuerst D'Alembert in

[1]) Tisserand: Mécanique céleste. Vol. II. Paris 1891.

[2]) Roche: Mémoire sur la densité de la terre. Montpellier 1845.

[3]) Wiechert: Über die Massenverteilung im Inneren der Erde. Göttingen 1897.

[4]) Helmert. Die math. u. physik. Theorien der höheren Geodäsie. Band II. Leipzig 1884.

[5]) Bessel, Bestimmung der Achsen des Rotationsellipsoids, welches den vorhandenen Messungen von Meridianbogen der Erde am besten entspricht. Astron. Nachr., Band 14, 1837.

seinem grundlegenden Werke „Zur Theorie der Präzession“ (Paris, 1749) aufmerksam. Sind, wie oben pag. 164, A und C die Hauptträgheitsmomente der Erde, diese als Rotationsellipsoid angenommen, so ist die Präzession abhängig von dem Verhältnisse $C—A/C$. D'Alembert findet für dasselbe den Wert 1 : 324, Laplace in der Mécanique céleste 1 : 304. nach den neuesten Bestimmungen der Präzession hat es den Wert 1 : 305·6. Für ein homogenes Ellipsoid wäre es mit der Abplattung direkt identisch, und daher $\alpha = 1 : 305{\cdot}6$. In der Tat ist das Verhältnis aber von der inneren Schichtung der Erde abhängig und aus ihm die Abplattung erst dann berechenbar, wenn über diese eine spezielle Annahme gemacht wird. Immerhin kommt der Wert $\alpha = 1 : 305{\cdot}6$ schon der Wahrheit ziemlich nahe.

Eine bessere Annäherung gibt die zweite Methode, nach welcher die Erdabplattung aus kleinen Unregelmäßigkeiten in der Bewegung des Mondes abgeleitet werden kann. Sie findet ihre Begründung in der folgenden Tatsache: Nur eine Kugel übt auf einen anderen Körper eine anziehende Kraft aus, so als ob ihre ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre. Für jeden anders geformten Körper ist dessen Anziehung außerdem von der Form selbst, speziell für ein Rotationsellipsoid daher von seiner Abplattung abhängig. Die Erde als Kugel bewirkt in ihrer Anziehung auf den Mond dessen reine ungestörte elliptische Bewegung, durch die Abplattung kommt eine kleine Zusatzkraft hinzu, die diese rein elliptische Bahn stört, d. h. kleine Unregelmäßigkeit in der Bewegung des Mondes hervorruft. Laplace war der erste, der diese Störung erkannte und aus ihr die Abplattung der Erde zu $\alpha = 1 : 304$ bestimmte. Aus den neuen von Hansen (1864) berechneten Mondtafeln folgt der Wert $\alpha = 1 : 297{\cdot}8$, der sich von dem Besselschen aus Gradmessungen abgeleiteten $\alpha = 1 : 299$ nur wenig unterscheidet.

II. Die Gleichgewichtsfigur des Mondes.

§ 8. Die theoretischen Untersuchungen über die Gestalt des Erdmondes beginnen mit D'Alembert. Dieser stellte das folgende, zunächst rein mathematische Problem auf: Eine homogene flüssige Masse rotiere mit konstanter Geschwindigkeit um eine feste Achse. Sie stehe einerseits unter der Einwirkung der Gravitationskräfte ihrer eigenen Massenteilchen, andererseits unter dem Einfluß der Anziehung eines entfernten Körpers. Es ist die Gestalt zu bestimmen, welche die Masse im Falle des Gleichgewichtes annimmt.

Erinnert man sich der Tatsache, daß der Mond in derselben Zeit eine Rotation um seine Achse ausführt, in welcher er seinen Umlauf um die Erde zurücklegt, und daß, wie die Beobachtungen zeigen, die Rotationsachse auf der Bahnebene fast senkrecht steht, nämlich mit ihr einen Winkel von $83^1/_2{}^0$ einschließt, so hat man, um das D'Alembertsche Problem auf den Mond anzuwenden, nur die Annahme zu machen, daß der störende Körper in der Äquatorebene des Mondes, d. h. der rotierenden flüssigen Masse liegt. Diesen speziellen Fall behandelte Laplace. Den Ausgangspunkt seiner Untersuchungen bilden daher folgende Annahmen: Eine homogene flüssige Masse bewege sich als Satellit in einem Kreise um einen Zentralkörper, wie der Mond um die Erde, derart, daß der Satellit diesem stets dieselbe Seite zuwende.

Die gegebene Masse stehe

1. unter der Einwirkung der Gravitationskräfte ihrer eigenen Teilchen,
2. unter dem Einflusse der Anziehung des Zentralkörpers und
3. der aus der Rotation entstehenden Fliehkraft, die aber wegen der sehr geringen Rotationsgeschwindigkeit sehr klein ist.

Die Lösung, welche Laplace von diesem Problem gibt, ist nur eine genäherte. Sie sagt, daß die Figur des Mondes die eines dreiachsigen Ellipsoides ist, dessen kürzeste Achse mit der Rotationsachse zusammenfällt und dessen längste Achse gegen die Erde gerichtet erscheint, während die auf dieser senkrecht stehende Achse einen Mittelwert besitzt. Doch sind die Exzentrizitäten und daher auch die Abplattungen sehr klein, nämlich

$$\alpha = 0.0000375 \qquad \alpha_1 = 0.0000094,$$

wobei α die Abplattung der gegen die Erde gerichteten und α_1 der auf ihr normalen

Achse bedeuten. Nimmt man den Radius der Mondkugel zu 1741 *km* an, so erhält man für die Unterschiede dieser zwei Achsen gegen die kürzeste die Zahlenwerte

$$a - c \doteq 65\ m \qquad \text{und} \qquad b - c = 16\ m,$$

die so klein sind, daß sie durch eine direkte Messung der sichtbaren Mondscheibe am Himmel wohl schwer konstatierbar werden dürften. Für die Erde ist bekanntlich dieser Unterschied der Achsen, aus dem Werte $\alpha = 1:299$ berechnet, $a - c = 21{\cdot}3\ km$. In der Tat ergaben auch alle Messungen der Mondfigur für den Umriß seiner Scheibe bis auf die überragenden Mondberge völlig die Form eines Kreises. Erst Franz[1]) gelang es 1899 durch Messungen auf Mondphotographien den Nachweis zu erbringen, daß der Mond ein tatsächlich gegen die Erde hin verlängertes Ellipsoid ist. Für die Größe der Verlängerung findet er den Wert $\alpha = 0{\cdot}00114$, welcher zwar noch immer klein, aber doch fast dreißigmal so groß ist als der aus der Lehre der Gleichgewichtsfiguren gefolgerte.

Neben dieser direkten Messung bietet außerdem die Theorie der physischen Libration des Mondes ein Mittel, seine Figur zu bestimmen. Aus ihr lassen sich die Differenzen der Trägheitsmomente in bezug auf die drei Hauptachsen berechnen, deren Verhältnisse, wie dies schon näherungsweise bei der Erde angenommen werden konnte, hier direkt den Abplattungen gleichzusetzen sind. Die Theorie liefert die Werte

$$\alpha = 0.000614 \qquad \alpha_1 = 0.000299,$$

welche ebenfalls bedeutend größer sind als die theoretischen.

Will man es versuchen, diesen Unterschied zwischen Theorie und Beobachtung zu erklären, so gelangt man, auf die Entstehung des Mondes zurückgreifend, zu der Hypothese, daß wohl der Mond ursprünglich so wie die Erde im feuerig flüssigen Zustande war und in diesem eine bestimmte Gleichgewichtsfigur annahm, daß er aber beim Erstarren diese Form nicht beibehielt, sondern sie, wenn auch nur wenig, änderte. Was die Kräfte betrifft, die diese Änderung hervorgerufen haben könnten, so nimmt Laplace an, daß beim Erstarren des Mondes die Höhenungleichheiten, die sich auf seiner Oberfläche zeigen, auf die Differenzen seiner Trägheitsmomente einen viel größeren Einfluß ausgeübt hatten, als es bei der Erde der Fall war, und daher eine merkliche Änderung seiner von der Gleichgewichtstheorie geforderten Gestalt verursachten, um so mehr, als der Mond an sich nur eine sehr geringe Abplattung besitzt und dazu noch seine Masse bedeutend kleiner als die der Erde.

§. 9. Die strenge Diskussion der allgemeinen Gleichung für das Gleichgewicht, durch welche die Gestalt eines Mondes bestimmt wird, führte Roche[2]) durch. Er gelangte zu dem folgenden Resultate: Ist die Distanz des Mondes vom Hauptkörper sehr groß, mithin auch nach dem dritten Kepplerschen Gesetze seine Umlaufszeit um diesen und die der Annahme nach damit identische Rotationszeit um eine Achse ebenfalls sehr groß, so existieren zwei ellipsoidische Grenzfiguren, von denen die eine nahezu eine Kugel, die andere wie das Jacobische Ellipsoid für eine kleine Rotationsgeschwindigkeit eine unendlich dünne nach dem Hauptkörper gerichtete Nadel ist. Vermindert sich die Distanz und wächst in gleichem Verhältnisse die Rotationsgeschwindigkeit, so geht die Kugel in ein mehr und mehr sich abplattendes dreiachsiges Ellipsoid über, das um die kleinste Achse rotiert, während die größte dem Hauptkörper zugewandt ist, das zweite nadelförmige Ellipsoid dagegen verkürzt sich immer mehr. Endlich für eine bestimmte Distanz des Mondes vom Hauptkörper vereinigen sich beide Formenreihen zu einem einzigen Ellipsoid; über dieses hinaus sind keine weiteren ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren möglich. Ist die Dichte des Mondes gleich ϱ, die des Hauptplaneten (Erde) $= \varrho_1$, ferner R dessen Radius so ist diese Grenzdistanz Δ gegeben durch

$$\Delta = 2{\cdot}44\ R \sqrt[3]{\frac{\varrho_1}{\varrho}}$$

[1]) **Franz** in Astron. Beobachtungen der Sternwarte in Königsberg. Band 38. 1899.

[2]) **Roche**: La figure d'une masse fluide soumise à l'attraction d'un point éloigné. Acad. de Montpellier 1847, 1850.

Für den Fall Mond-Erde, in welchem $\varrho_1/\varrho = 1{\cdot}63$ ist, wird:

$$\varDelta = 2{\cdot}87\, R$$

Tatsächlich ist aber die Distanz des Mondes von der Erde 384000 $km = 60\, R$ ungefähr.

Dieses interessante Resultat läßt sich auf folgendem elementaren Wege ableiten, nämlich durch Aufstellung der Bedingung, daß die Stabilität des Mondes ihr Ende erreicht, wenn die Schwere auf ihm vollständig aufgehoben wird einerseits durch die anziehende Kraft des Hauptplaneten, andererseits durch die Fliehkraft. Ist M die Masse des Mondes, r sein Radius, so ist die Schwere auf seiner Oberfläche gegeben durch

$$M/r^2$$

Ist ferner E die Masse der Erde, $\varDelta$ ihre Distanz vom Monde, so ist die Anziehung, die sie auf einen Punkt E der Mondoberfläche ausübt,

$$\frac{E}{(\varDelta - r)^2} - \frac{E}{\varDelta^2} = \frac{2\,E r}{\varDelta^3}$$

approximativ, wenn man r gegen $\varDelta$ als kleine Größe ansieht. Die Fliehkraft endlich auf dem Monde, wenn man nach dem dritten Keplerschen Gesetze das Quadrat der Rotationsgeschwindigkeit ω^2 durch $E/\varDelta^3$ ersetzt, ist bestimmt durch: $\omega^2 r = E\, r/\varDelta^3$.

Die Resultierende dieser drei Kräfte ist

$$M/r^2 - 2\, E\, r/\varDelta^3 - E\, r/\varDelta^3$$

und muß im Grenzfall gleich Null sein. Aus dieser Bedingung folgt:

$$\varDelta = \sqrt[3]{\frac{E\, r^3}{M}}$$

oder, wenn man noch $E = \frac{4\pi}{3}\varrho_1 R^3 \qquad M = \frac{4\pi}{3}\varrho\, r^3$ substituiert,

$$\varDelta = R \sqrt[3]{3\frac{\varrho_1}{\varrho}}$$

welche Gleichung, auf die Verhältnisse Mond-Erde angewendet,

$$\varDelta = 1{\cdot}67\ \ R$$

in genügender Übereinstimmung mit dem oben angegebenen $\varDelta = 2{\cdot}87\, R$ gibt. (Forts. folgt.)

Mitteilungen über die Verbreitung der Bryophyten im Isergebirge.

Von VIKTOR SCHIFFNER (Wien).

18. *Lophozia barbata* (Schmid.) Dum. — Scheint im Isergebirge selten zu sein; ich fand sie nur einmal gemischt mit *L. Floerkei* var. *Baueriana* an den Gipfelfelsen des Sieghübel, 1120 *m.*

19. *L. Floerkei* (W. et M.) Schffn. — Im Isergeb. sehr verbreitet, doch seltener in der typischen Form (= I. *densifolia* N. ab E.), zu dieser gehören die Pflanzen von folgenden Standorten: Feuchter Granit an der Stolpichstraße, ± 900 *m.* — Wälder an der Iserstraße beim Wittighause auf Waldboden; 860—900 *m.* — An der Straße gegen Darre, 820 *m.* — Kleine Iserwiese, z. T. ♂. — Kleine Knieholzwiese, 980 *m.* — Sieghübel, Abstieg zum Wittighause, auf Waldboden, ± 900 *m.*

Var. *squarrosa* N. ab E. — Auf Sumpfboden, viel häufiger als die anderen Formen, sehr wechselnd in Größe und Habitus: „Schöne Wiese", 900 *m.* — Kleine Knieholzwiese, 980 *m.* — Große Iserwiese. — Bei der Wolfswiese, 1000 *m.* — Knieholzwiese beim „Strittstück" an der Landesgrenze, ± 870 *m.* — Kl. Iserwiese (Sauere Ebene) an Moorgräben und Tümpeln, ± 850 *m* (ist unter Nr. 182 in Bauer: Bryoth. Bohemica ausgegeben). — Kleines Hochmoor unter dem