ihn stellte. Oppolzer besaß ein hohes Maß von Initiative und Tatkraft. Viel hätte man von ihm noch erwarten können, wenn nicht der unerbittliche Tod ihn allzufrüh dahingerafft hätte. Im privaten Leben war Oppolzer ein äußerst feinfühlender und liebenswürdiger Mensch, der jeden durch die Eigenart seines Temperamentes zu fesseln verstand. Wer jemals Gelegenheit hatte ihm näher zu treten, wird ihn in bleibender, treuer Erinnerung bewahren.

Die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeitsmassen und die Gestalt der Himmelskörper. II.

Von S. OPPENHEIM in Prag. (Schluß.)

III. Die Stabilität der Gleichgewichtsfiguren.

§. 10. Mit der Frage nach der Stabilität der Gleichgewichtsfiguren, d. i. der Eigenschaft, nach einer unendlich kleinen Deformation wieder ihre frühere Gestalt anzunehmen. befaßte sich als erster D'Alembert.[1]) Seine Schlußweise ist die folgende: Für den Fall des Gleichgewichtes besteht zwischen der Größe φ d. i. dem Verhältnisse der Fliehkraft zur Schwere auf der Oberfläche der zu untersuchenden Gleichgewichtsfigur und ihrer Exzentrizität ε. wie § 4 erwähnt wurde, die Beziehung

$$\frac{2\varphi}{3} = \frac{(3+\varepsilon^2)\, arctg\, \varepsilon - 3\,\varepsilon}{\varepsilon^3}$$

Dieser entsprechen, so lange φ unter der Grenze $\varphi = 0{\cdot}33700$ liegt, zwei Wurzeln. Es sei ε_1 die kleinere und ε_2 die größere. Zunächst werde eine Gleichgewichtsfigur angenommen, deren Exzentrizität ε_1 ist. Wird ihr Gleichgewicht gestört und damit die Figur deformiert, so können, was die Exzentrizität ε der neuen geänderten Figur anlangt, zwei Fälle eintreten. Es kann $\varepsilon < \varepsilon_1$ oder $\varepsilon > \varepsilon_1$ sein. Der erstere Fall involviert eine Vergrößerung des Gewichtes des Polkanals (nach der Newtonschen Vorstellung) gegenüber dem des Äquatorkanals, dadurch ein Herausstoßen des Wassers aus diesem d. h. das Bestreben, die Exzentrizität der Figur zu vergrößern oder die ursprüngliche Form des Gleichgewichtes wieder herzustellen. Die Figur ist eine stabile. Der zweite Fall $\varepsilon > \varepsilon_1$ bewirkt eine Vergrößerung des Gewichtes des Äquatorkanals gegenüber dem des polaren, damit die Tendenz, das Wasser gegen die Pole hinzutreiben d. h. die Exzentrizität der gestörten Figur zu verkleinern und den ursprünglichen Gleichgewichtszustand von neuem herzustellen. Die Figur ist also auch dieser Störung gegenüber eine stabile. Genau das Entgegengesetzte tritt ein, wenn die Exzentrizität der ursprünglichen Figur der größere Wurzelwert ε_2 der Hauptgleichung ist. Diese Figur ist daher eine instabile. Der Fall, daß die beiden Wurzeln ε_1 und ε_2 zusammenfallen, welcher für $\varphi = 0{\cdot}33700$ eintritt, gibt eine Lösung, die D'Alembert als von zweifelhaftem Stabilitätscharakter bezeichnet.

Die Untersuchungen von Laplace in seiner Mécanique céleste zur Frage nach der Stabilität der Gleichgewichtsfiguren beschränken sich auf Fälle, welche für die Theorie der Ebbe und Flut wichtig sind, nämlich die spezielle Annahme, daß die Erde aus einem starren Kerne bestehe, den eine bestimmte Wassermasse bedecke. Laplace kommt zu dem Ergebnisse, daß das Gleichgewicht der auf der Erde befindlichen Wassermassen ein stabiles sei, so lange deren Dichte kleiner ist als die mittlere Dichte des Erdkernes, dagegen ein labiles bei entgegengesetzter Annahme.

Als erste und wertvolle Beiträge zur Lösung des Problems über die Stabilität sind die Arbeiten von Dirichlet[2]) und Riemann[3]) anzusehen. Beide behandeln die Aufgabe, alle möglichen

[1]) D' Alembert. Sur la figure de la terre . . in Opuscules mathématiques. Paris 1773.

[2]) Dirichlet: Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik. Göttingen 1860.

[3]) Riemann: Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen Ellipsoids. Göttingen 1861.

Bewegungen einer flüssigen Masse aufzufinden unter den Annahmen, daß ihre Form die eines dreiachsigen Ellipsoides ist, daß auf ihrer Oberfläche ein konstanter Druck lastet, während ihre Teilchen sich mit das Newtonsche Gesetz befolgenden Kräften gegenseitig anziehen. Sie untersuchen speziell die Bedingungen, unter denen diese Bewegungen unendlich kleine Schwingungen der Teilchen sind, sodaß durch sie die ursprüngliche Gestalt nur unendlich wenig geändert wird.

In neuester Zeit glückte Poincaré in Paris[1]) eine endgiltige Lösung des Stabilitätsproblems. Sie stützt sich auf das bekannte Theorem von Dirichlet, nach welchem ein ruhendes mechanisches System dann im stabilen Gleichgewichte ist, wenn für die Ruhelage die potentielle Energie kleiner ist als für alle benachbarten Anordnungen, ein Theorem, das, wie man leicht einsieht, identisch ist mit dem aus der elementaren Mechanik bekannten Satze, daß ein schwerer Körper sich im stabilen Gleichgewichte befindet, wenn sein Schwerpunkt die möglichst tiefste Lage einnimmt, daher jede Störung des Gleichgewichtes ein Heben desselben und damit einen Arbeitsaufwand erfordert, der bewirkt, daß der Körper wieder in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt. Gilt dieses Prinzip, in dieser Weise ausgesprochen, nur für den Fall des absoluten Gleichgewichtes eines ruhenden Köpers, so dehnt Poincaré es auch auf den des relativen Gleichgewichtes einer rotierenden Flüssigkeitsmasse aus und formuliert es in folgender Weise: Eine Gleichgewichtsfigur ist dann und nur dann stabil, wenn ihre totale Energie, u. z. die potentielle Energie ihrer Anziehungskräfte und die kinetische ihrer Rotation im Verhältnisse zu allen möglichen unendlich benachbarten Massenanordnungen ein Minimum ist.

Will man nach diesem Prinzipe die Stabilität einer Gleichgewichtsfigur untersuchen, so hat man die Aufgabe. ihre Energie zunächst für die gegebene und dann für eine durch irgendwelche Kräfte deformierte Form zu berechnen, den Unterschied der beiden festzustellen und dann zu entscheiden, wann dieser Unterschied, welches auch immer die deformierenden Kräfte sein mögen, positiv ist. Es zeigt sich, daß sich die Untersuchung auf die Betrachtung gewisser Größen reduzieren läßt, welche Poincaré die Stabilitätskoeffizienten einer Gleichgewichtsfigur nennt, und den Nachweis, ob und wann diese positiv sind. Im speziellen folgt, daß die Stabititätskoeffizienten einer Kugel durchwegs positiv sind. Die Kugel ist daher eine absolut stabile Gleichgewichtsfigur. Dagegen sind die Stabilitätskoeffizienten der unendlich großen kreisförmigen Scheibe, welche die Reihe der ellipsoidischen Gleichgewichtsformen abschließt, alle negativ. Diese ist daher eine labile Form.

§ 11. Wie verhält es sich aber mit der Stabilität einer Gleichgewichtsfigur, wenn in einem bestimmten Fall einer oder mehrere ihrer Stabilitätskoeffizienten Null werden? Die Antwort auf diese Frage bildet in ihren ganz neuen Ergebnissen den zweiten interessanten Teil der Poincaré'schen Untersuchungen, nämlich die Lehre von der reihenweisen Anordnung der Gleichgewichtsfiguren und ihrer Verzweigung in jenen kritischen Punkten, in denen ein Stabilitätskeeffizient den Wert Null hat.

Gesetzt, man habe für eine bestimmte Anfangsbedingung mehrere Gleichgewichtsfiguren erhalten. Offenbar kann man durch eine unendlich kleine Veränderung der Anfangsbedingung jede einzelne der Figuren in eine neue überführen, die sich von der ursprünglichen nur unendlich wenig unterscheidet. Aus diesen neu abgeleiteten läßt sich eine dritte Gruppe bilden usw. Es entstehen auf diese Art durch aufeinanderfolgende Änderungen der Anfangsbedingungen ebensoviele Reihen von Gleichgewichtsfiguren, als ursprünglich solche vorhanden waren, oder in geometrischer Auffassung, ebensoviele Kurvenzweige, von denen jeder eine Formenreihe repräsentiert, in welcher die einzelnen Formen kontinuierlich ineinander übergehen. Man kann aber zunächst nicht sagen, wo diese Reihen beginnen, wo sie enden und ob sie sich in irgendwelchen kritischen Punkten schneiden oder verzweigen, in welchem Falle zwei sonst zwei Reihen angehörige Figuren in eine einzige zusammenfallen. Figuren solcher Art sollen Verzweigungs- oder Kreuzungsfiguren genannt werden.

[1]) Poincaré: Sur l' équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. Acta mathematica 1885.

Führt man diese Überlegung rein mathematisch durch, so läßt sich beweisen, daß ein solcher Kreuzungspunkt dann und immer nur dann auftreten kann, wenn einer der Stabilitätskoeffizienten zu Null wird. Gleichzeitig ist aber damit, da an dieser Stelle der Stabilitätskoeffizient sein Vorzeichen wechselt, d. h. aus dem positiven ins negative oder aus dem negativen ins positive Zahlengebiet übergeht, ein Wechsel der Stabilität verbunden. Der eine Kurvenzug, der vor der Verzweigung stabile Figuren gab, liefert nach derselben labile und umgekehrt die Reihe, in der vor der Kreuzung die instabilen Figuren lagen, wird nachher zu einer Serie von stabilen.

Eine solche Reihe von Gleichgewichtsfiguren bilden die Rotationsellipsoide. Die Reihe beginnt mit der Kugel, deren Stabilitätskoeffizienten alle positiv sind und endet mit der unendlich großen kreisförmigen Scheibe, deren Stabilitätskoeffizienten wiederum durchwegs negativ sind Es müßten daher zwischen diesen beiden Grenzfiguren Stellen vorhanden sein, in denen die einzelnen Koeffizienten Null, dann negativ werden und bei einer weiteren Änderung der Anfangsbedingung auch negativ bleiben. Die erste dieser Stellen ist bestimmt durch den Wert $\varphi = 0{\cdot}28063$. Tatsächlich beginnt hier eine neue Reihe von Gleichgewichtsfiguren, nämlich die der dreiachsigen Ellipsoide und das diesem Werte von φ entsprechende Ellipsoid ist daher eine Verzweigungsfigur Die Reihe der Rotationsellipsoide verläuft stabil von der Kugel ab bis zu diesem Verzweigungsellipsoid, Von da ab beginnt als stabile Reihe die der dreiachsigen Ellipsoide. Sie endet, wie schon bekannt, mit der unendlich langen und unendlich dünnen nadelförmigen Figur. Da diese offenbar labil ist, so muß auch hier wieder eine Verzweigung eintreten

Poincaré glückte es diese Stelle aufzufinden, (für sie ist $\varphi = 0{\cdot}2130$) und auch die neue sich anschließende Reihe der Gleichgewichtsfiguren aufzustellen. Die Begrenzungsfläche derselben ist nicht mehr eine ellipsoidische, sondern eine kompliziertere. Die Flüssigkeitsmasse scheint sich an einer bestimmten Stelle einzuschnüren, derart, daß der eine größere Teil sich wieder der Kugelform nähert, der zweite kleinere dagegen aus dem Ellipsoide heraustritt, als ob er sich von der Hauptmasse trennen wollte. Mann nennt diese neuen Figuren Poincarésche oder nach ihrer Ähnlichkeit mit einer Birne auch birnenförmige (pearshaped) Figuren.

Wie diese neue Reihe von Gleichgewichtsformen sich fortsetzt, ob, was für eine mathemetische Durcharbeitung der Kant-Laplaceschen kosmogonischen Hypothese von besonderem Interesse wäre die Einschnürung kontinuierlich fortschreitet, so daß endlich die Masse in zwei selbständige Teile zerfällt, die sich zueinander wie Sonne und ein Planet, oder ein Planet und sein Mond verhalten, ist bisher noch nicht durchzuführen gelungen. Es suchte daher G. H. Darwin[1]) der berühmte Sohn des Naturforschers Ch. Darwin, dem Problem von der entgegengesetzten Seite beizukommen. Er geht von der Annahme aus, daß ein System von zwei flüssigen Körpern, die nahezu eine kugelförmige Gestalt haben und sich in einem Kreise umeinander bewegen, so daß sie sich stets dieselbe Seite zukehren, als eine stabile Gleichgewichtsfigur angesehen werden kann, wenn die beiden Teile nur hinlänglich weit voneinander entfernt stehen. Er sucht weiter die Bedingungen auf, unter welchen das Gleichgewicht fortbesteht, wenn die beiden Massen sich immer mehr nähern, sich endlich berühren und in einzige Figur zusammenfließen. Für größere Werte der Rotationsgeschwindigkeit, ferner für verschiedene Werte des Verhältnisses zwischen den Größen der beiden ursprünglieben Körper entwirft Darwin einige Zeichnungen der da auftretenden Figuren, die er ihrer Form nach als hantelförmige bezeichnet. Doch ob diese mit den Poincaréschen birnenartigen identisch sind, oder ob sie als deren Weiterentwicklung angesehen werden können, darüber ist noch nichts bekannt.

§ 12. Die Anwendung dieser Ergebnisse, besonders die der reihenweisen Anordnung der stabilen Gleichgewichtsfiguren auf das Laplacesche Problem der Kosmogonie ist die folgende: Es sei eine homogene oder mindestens nahezu homogene Flüssigkeitsmasse gegeben. Ihre Gleichgewichtsfigur wird offenbar eine Kugel sein. Wenn ihre Rotationsgeschwindigkeit mit zunehmender Kontraktion langsam wächst, wird sie sich immer mehr zu einem Rotationsellipsoid

[1]) G. H. Darwin: On figures of Equilibrium of rotating masses of fluid. London 1888 und On the pearshaped form of Equilibrium. London 1902.

abplatten, bis endlich jenes erreicht ist, das dem Werte $\varphi = 0{\cdot}28063$ entspricht. Sinkt die Temperatur noch weiter, so wird wegen der nun rascher zunehmenden Dichte von da ab die Größe φ wieder abnehmen, die Masse auf den geringsten Anstoß hin die Revolutionsform verlieren und in ein dreiachsiges Ellipsoid übergehen. Ohne jenen Stoß hat sie, wie hier zuerst Schwarzschild[1]) bemerkt, keinen Grund, die Rotationsform zu verlassen und dieser Umstand ist es, welcher Jacobi das Auftreten dieser um die Rotationsaxe nicht symmetrischen Gleichgewichtsformen so merkwürdig erscheinen ließ. Doch eine kleine Unregelmäßigkeit, wie sie in der Natur immer vorkommt, genügt, um das Verlassen der Rotationsform herbeizuführen, und dabei bleibt es noch der Natur dieser Unregelmäßigkeit, oder, wie man bei nicht näher bekannten Ursachen zu sagen pflegt, dem Zufall überlassen, welche Stelle des Äquators sich zum Scheitel der Hauptsache des Jacobischen Ellipsoides ausbildet.

Bei weiterer Kontraktion, daher zunehmender Dichte der Flüssigkeit durchläuft die Masse die Reihe der Jacobischen Ellipsoide bis zu jenem, an das sich die Poincarésche birnenförmige Figur anschließt. Was von da ab geschieht, ist noch nicht bekannt. Wie die Zeichnungen dieser neuen Figuren zeigen, scheint sich bei diesen ein größerer Teil der Masse, wie es wieder der Zufall will, an dem einen oder an dem anderen Ende der großen Achse von der ellipsoidischen Figur an, abzutrennen. Es entsteht etwa ein Planet mit seinem Monde, dessen Masse jedoch ziemlich großer Bruchteil der des Planeten sein müßte. Ein solches Größenverhältnis zeigt sich aber höchstens bei dem Erdmonde, dessen Masse $^1/_{80}$ der der Erdmasse ist, keineswegs jedoch bei den übrigen Planetenmonden, deren Massen im Maximum 1/11000 der betreffenden Planeten sind.

Schwarzschild hat daher den Fall eines sehr kleinen Mondes in der Nähe eines Planeten einer besonderen Behandlung unterzogen und den Nachweis erbracht, daß für diese eine ganz andere Art der Entstehung und Lostrennung vom Hauptkörper angenommen werden muß. Es gibt, schließt Schwarzschild seine Untersuchung, keine kontinuierliche Reihe stabiler Gleichgewichtsfiguren, die ein sehr kleiner Mond vom Kontakt mit dem Hauptkörper an bis zu einer größeren Entfernung von ihm sich stetig deformierend und zuletzt in eine Kugel übergehend, durchlaufen würde. Da eine solche Reihe erst in der Entfernung

$$D = 2.44\ R\ \sqrt[3]{\varrho_1/\varrho}$$

vom Hauptkörper ansetzt, so muß ein kleiner Mond, wenn er überhaupt durch Abtrennung vom Hauptkörper entstanden ist, eine Periode stürmischerer Entwickelung durchgemacht haben, für die nicht eine statische Betrachtung von Gleichgewichtsfiguren genügen, sondern eine dynamische Methode der Untersuchung erforderlich sein dürfte.

Dagegen gibt es eine ganze Klasse von Sternen, die in ihrer Entstehung als von einander losgetrennte Massenteile mit weit größerer Wahrscheinlichkeit auf die Poincaréschen birnenförmigen Gleichgewichtsfiguren hinweisen, als die Planetenmonde oder auch die Planeten. Es sind dies die Doppelsterne, namentlich jene unter ihnen, die bis heute noch nicht visuell getrennt werden konnten, sondern deren Doppelnatur teils aus spektroskopischen, teils photometrischen Beobachtungen ihres Lichtwechsels, teils aus einer Kombination beider erschlossen wurde. In erster Linie gehört hieher der veränderliche Stern, β Lyrae, Algol genannt, für welchen Vogel und Scheiner in Potsdam die folgenden Bahnelemente berechneten:

Radius des Haupsternes	= 1,255.000 *km*
„ „ dunklen Begleiters	= 980.000 „
Distanz der Mittelpunkte beider von einander	= 5,190.000 „
Masse des Hauptsternes	= $^4/_9$ der Sonnenmasse
„ „ Begleiters	= $^2/_9$ „ „

Hier sehen wir zwei Massen im Größenverhältnisse von 2 : 1 in einer Distanz ven einander befindlich, die die Rochesche Distanzgrenze eines Mondes von seinem Hauptplaneten nur wenig übertrifft. Es ist $\varDelta = 4.14$ R, statt $\varDelta = 2.48$ R.

[1]) Schwarzschild: Die Poincarésche Theorie des Gleichgewichtes einer homogenen rotierenden Flüssigkeitsmasse. München 1896.

IV. Theorie des Saturnringes.

§ 13. Bekanntlich war Galilei der erste, der die Beobachtung machte (Juli 1610), daß Saturn ein ganz anderes Aussehen habe als die anderen Planeten. „Altissimum planetam tergeminum observavi" äußerte er in einer schriftlichen Mitteilung an seinen Freund Vinta. Mit seinem teils noch sehr unvollkommenen, teils nur mäßig vergrößernden Fernrohr sah er den Saturn als eine helle leuchtende Scheibe, begleitet von zwei Sternen, die beiderseits und stets in gleicher Entfernung von ihm stehen, gleichsam der alte Saturn unterstützt von zwei Gehilfen. Erst Huyghens erkannte (1659) die wahre Gestalt desselben als die einer abgeplatteten Scheibe, umgeben von einem Ringe, welcher ihn frei umschwebt und gegen seine Bahnebene gegen 30° geneigt ist. Einige Jahre später, 1672, machte Cassini die Wahrnehmung, daß nicht ein, sondern zwei konzentrische Ringe vorhanden sind, ein äußerer etwas weniger heller und ein innerer, hellerer Teil und daß beide Teile durch einen breiten dunklen Streifen voneinander getrennt sind, den man seinem Entdecker zu Ehren die Cassinische Trennungslinie nennt. Spätere Beobachter haben noch andere weniger ausgeprägte Teilungen besonders auf dem äußeren Ringe (wie die Enkesche Bleistiftlinie) aufgefunden und man ist geneigt anzunehmen, daß diese kleinen Teilungen nicht bleibend sind, sondern sich bald öffnen, dann wieder schließen und so bald scharf und deutlich sichtbar sind, bald nur verschwommen auftreten. Fast 200 Jahre nach Cassini machten (1860) Bond in Cambridge U. S. und Dawes in England die neue Entdeckung, daß sich innerhalb des wohlbekannten zwei helle Ringe und der Planetenscheibe noch ein dritter seiner Helligkeit nach etwas schwächerer Ring befinde, der durchsichtig ist, da man durch ihn hindurch den Rand der Planeten ziemlich deutlich sehen könne und auch gesehen habe. Dieser dunkle Ring, Florring genannt, ist heute sehr gut und deutlich sichtbar, selbst in kleineren Fernrohren. Es ist daher merkwürdig, daß er erst in den letzten Jahren entdeckt worden und so lange unbemerkt geblieben ist.

Die Messungen der Dimensionen des Saturn und seines Ringsystems ergaben folgende Resultate, ausgedrückt in Kilometern oder Äquatorhalbmessern des Saturn, R_o, diesen zu 59900 *km* angenommen.

Äquatorhalbmesser des Saturn	= 59900 *km*	=	R_o
Polarhalbmesser „ „	= 54000 „	= 0.90	R_o
mittlerer Radius des äußeren Ringes	= 132000 „	= 2.20	R_o
„ „ „ inneren „	= 106000 „	= 1.77	R_o
Breite des äußeren Ringes	= 16300 „	= 0.27	R_o
„ „ inneren „	= 28800 „	= 0.47	R_o
Breite der Cassinischen Trennungslinie	= 3250 „	= 0.05	R_o

Zur Erklärung der eigentümlichen Form des Saturn sind mehrere Hypothesen aufgestellt worden; die erste nimmt an, daß der Ring ein fester Körper sei, eine zweite, daß er im flüssigen Zustande sich befinde, und eine dritte hält ihn für ein Konglomerat von sehr vielen kleinen, aber so dicht gedrängt nebeneinander stehenden dunklen Körpern nach Art der Monde eines Planeten, daß sie den Eindruck hervorrufen, als ob sie ein einheitliches Ganzes bilden würden. Die Theorie der Gleichgewichtsfiguren hat hier die Frage zu beantworten, in wie weit ein Ring von einem bestimmten Querschnitt nicht nur eine mögliche, sondern auch eine stabile Gleichgewichtsform einer rotierenden Flüssigkeitsmasse ist. Hiezu ist vor allem notwendig, die anziehenden Kräfte zu berechnen, die ein solcher Körper auf Punkte seiner Oberfläche ausübt. Laplace löste diese Aufgabe zuerst, aber nur genähert, indem er für den Ring einen unendlich langen Zylinder von gleichem Querschnitt substituierte. Die Grenzen, innerhalb welcher diese Annäherung der Wahrheit entspricht, bestimmt er aber nicht. Tisserand[1]) ersetzt den ringförmigen Körper durch einen hohlen Zylinder, dessen Höhe identisch ist mit der Dicke des Ringes und

[1]) Tisserand: Mémoire sur l'anneau de Saturne. Toulouse 1880.

dessen Dicke gleich ist der Breite des Ringes. Erst Frau Sophie Kowalewsky[1]) und Poincaré[2]) fassen den Ring in allgemeinster Weise als einen Rotationskörper auf, dessen erzeugende Figur eine geschlossene Linie ist, die nur wenig von einer Ellipse abweicht und eine Symmetrieachse besitzt, die in ihrer Verlängerung die Rotationsachse rechtwinklig schneidet. Die Ergebnisse dieser neueren Rechnungen stimmen darin überein, daß ein ringförmiger Körper wohl eine Gleichgewichtsfigur einer rotierenden flüssigen Masse sein kann, sogar ohne daß ein Zentralkörper vorhanden ist. Die erzeugende Figur des Ringes muß nur eine Ellipse sein, die ihre große Achse nach dem Hauptkörper gerichtet hat, oder, im Falle ein solcher nicht vorhanden ist, deren große Achse in ihrer Verlängerung auf der Rotationsachse senkrecht steht. Für das Verhältnis der beiden Achsen der Ellipse läßt sich eine Gleichung dritten Grades aufstellen, die unter gewissen Bedingungen zwei positive reelle Wurzeln hat, deren eine, nahe gleich Eins, den elliptischen Querschnitt nahezu kreisförmig erscheinen läßt, während die zweite einer stark abgeplatteten Ellipse entspricht.

Bezeichnet man mit λ das Verhältnis der beiden Achsen, mit D die Distanz des Hauptkörpers vom Mittelpunkte des Ringquerschnittes oder, was dasselbe ist, den mittleren Radius des Ringes, mit ϱ dessen Dichte und ϱ_1 die der Planeten, so lautet die Gleichung dritten Grades zur Berechnung von λ

$$\frac{\varrho_1}{\varrho}\left\{\frac{R_0}{D}\right\}^3 = \frac{3\lambda\,(\lambda-1)}{(\lambda+1)(3\lambda^2-1)}$$

und die Bedingung, daß sie zwei positive Wurzeln hat, wird

$$\frac{\varrho_1}{\varrho}\left\{\frac{R_0}{D}\right\}^3 < 0{\cdot}1629 \text{ oder} > \frac{\varrho}{\varrho_1}\ 6.14\left\{\frac{R_0}{D}\right\}^3$$

Mit den oben angegebenen Werten $D = 2.20\ R_0$ für den äußeren und $D = 1.77\ R^0$ für den inneren hellen Ring würde

1. äußerer Ring $\varrho > 0.57\varrho_1$
2. innerer Ring $\varrho > 1.10\varrho_1$

folgen und das sind Werte, die viel zu groß sind, als daß sie der Wahrheit entsprechen könnten In Wirklichkeit müßte wegen der äußerst geringen Masse des ganzen Ringes gegenüber der des Saturn ϱ bedeutend kleiner als ϱ_1 anzunehmen sein. Endlich läßt sich der Bedingungsgleichung auch noch die Form

$$D > 1.87\ R_0 \sqrt[3]{\varrho_1/\varrho}$$

geben, welche zeigt, daß sie mit der Rocheschen Distanzgrenze für die Stabilität eines sich um seinen Hauptplaneten bewegenden Mondes identisch ist, gleichzeitig aber auch den Nachweis bringt, daß, wenn ϱ sehr klein ist gegenüber ϱ_1, der Saturnring sich innerhalb dieser Distanzgrenze befindet und daher keine stabile Gleichgewichtsfigur ist. Ein homogener flüssiger Ring von überall gleichem Querschnit ist somit wohl eine mögliche, aber keine stabile Gleichgewichtsfigur einer rotierenden Flüssigkeitsmasse.

§ 14. Die Schwierigkeit, die in der Annahme liegt, daß der Saturnring ein flüssiger Körper ist, suchte Laplace zunächst dadurch zu umgehen, daß er ihm eine unregelmäßige Form zuschrieb. Doch auch diese Hilfshypothese erwies sich als nicht zureichend. Wie die Rechnung zeigt, müßten die anzunehmenden Unregelmäßigkeiten sehr groß sein, ein Ergebnis, das wieder der Beobachtung, d. i. dem Anblick des Ringes im Fernrohr und der Regelmäßigkeit, in der er da erscheint, in keiner Weise entspricht. Die zweite Annahme, die diese Schwierigkeit beseitigen soll, ist die, daß der Ring nicht ein einheitliches Ganzes sei, sondern aus einer Reihe einzelner

[1]) Frau Sophie Kowalewsky: Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchungen über die Gestalt des Saturnringes. Kiel 1885.

[2]) Poincaré: Sur l' equilibre d'une masse fluide. Paris 1885.

schmaler konzentrischer Teilringe bestehe. Diese Annahme entspricht der Beobachtung mehr als die erstere, da die Cassinische und andere hie und da auf der Ringfläche sichtbare Linien tatsächlich auf solche Teilungen hinweisen. Doch müßten, wie durch die Rechnung nachgewiesen werden kann, diese Teilringe sehr schmal sein, zu schmal, als daß sie für sich allein bestehen könnten.

Zu gleichen Resultaten gelangt man auch bei der Annahme, daß der Ring ein fester Körper ist. Für diesen Fall führte Maxwell[1]) die betreffenden Rechnungen in ausführlicherer Weise durch als Laplace. Er findet, daß, wenn der Ring im Ganzen homogen ist, und nur an einer Stelle eine Unregelmäßigkeit aufweist, die da aufzulegende Masse mindestens $^4/_5$ der ganzen Masse des Ringes gleich sein müßte, um seine Stabilität zu ermöglichen. Ebenso müßten bei der Annahme einer variablen Dichte des Ringes die Grenzen dieser Veränderlichkeit zwischen den Werten 2.7 und 0.04 liegen. Sie sind daher viel zu weit, um seine Regelmäßigkeit beim Anblick im Fernrohre zu erklären. Dazu kommt, wie schon Maxwell bemerkte, und später unabhängig von ihm Hirn[2]) nachwies, daß bei den ungeheueren Druckkräften, welche der Saturn durch sein Anziehung auf den Ring ausübt, es unmöglich ist, daß er im festen Zustand sich befindet. Selbs ein Eisenring von so gewaltigen Dimensionen in der Länge, aber so geringen in der Dick müßte unter der Einwirkung dieser Druckkräfte seine Härte verlieren und in einen halbflüssigen Zustand übergehen.

Es bleibt daher von den drei über die innere Konstitution des Saturnringes aufgestellten Hypothesen nur mehr die letzte übrig, nach welcher er einer Staubwolke gleicht, d. h. aus einer sehr großen Zahl nicht zusammenhängender und dicht nebeneinander stehender Monde be steht die nur wegen ihrer großen Entfernung von der Erde und im hellblendenden Glanze des Saturn den Eindruck hervorrufen, als ob sie ein einheitliches Ganzes bilden. Das auftretende mathematische Problem, welche Bewegungen ein solcher Schwarm von Monden von allen möglichen Größen in seinen einzelnen Teilen ausführt, löste Maxwell. Er beweist, daß, wenn die Masse jedes einzelnen Mondes recht klein ist gegenüber der des Saturn, wenn ferner die einzelnen Monde nicht gar zu sehr an Größe voneinander verschieden sind, keine verworrene Bewegung eintritt, sondern jeder um die ihm zukommende Stelle hin und her oszilliert, kurz in diesem Falle Stabilität vorhanden ist. In den beiden äußeren Teilen des Ringes die durch die Cassinische Linie voneinander getrennt erscheinen, mögen diese Monde viel dichter nebeneinander stehen, in dem inneren Florring dagegen viel spärlicher, so daß dieser durchscheinend, ja fast durchsichtig ist.

Mit der Hypothese einer staubförmigen Konstitution des Ringes steht eine Beobachtung Keelers auf der Lycksternwarte im Einklang. Eine auf Grund des Dopplerschen Prinzips durchgeführte Messung der Geschwindigkeit der Bewegung der einzelnen Ringteile zeigte, daß die Massen am äußeren Rande des Ringes sich auf der einen Seite von der Erde weg, auf der anderen Seite zur Erde hin bewegen und daß die Geschwindigkeit dieser Bewedung nicht in allen Teilen des Ringes die gleiche ist, sondern daß sie zunimmt, je weiter man im System nach innen geht, bis sie für den innersten Ring ihren größten Wert erreicht. Es ist dies nichts anderes als der Ausdruck der Tatsache, daß jeder Teil des Ringes sich so bewegt, als ob er ein selbständiger Körper wäre.

Einen weiteren Beweis für die meteorische Zusammensetzung des Ringes gaben photometrische Beobachtungen von Müller in Potsdam und deren Erklärung durch Seeliger.[3]) Müller fand aus einer größeren Reihe von Helligkeitsmessungen des Saturn und des Ringes, daß die Helligkeit der letzteren wesentlich davon abhängig sei, ob der Ring, von der Erde aus gesehen, ganz von vorne beleuchtet werde, oder ob die Beleuchtung etwas mehr von der Seite komme. Im letzteren Falle sinke sie plötzlich bis auf die Hälfte der ursprünglichen. Seeliger gibt eine Erklärung dieser seltsamen Erscheinung in seiner Theorie der Beleuchtung staubförmiger Körper.

[1]) Maxwell: On the stability of the motion of Saturn rings. Cambridge 1859.

[2]) Hirn: Sur les conditions de l'équilibre et sur la masse probable des anneaux de Saturn. Paris 1872.

[3]) Seeliger: Zur Theorie der Beleuchtung der großen Planeten, insbesondere des Saturn. München 1887.