plementbindung". Vortragender gibt zunächst eine Erläuterung des Wesens der Komplementbindung nach den Vorstellungen der Seitenkettentheorie. Dieser Hypothese entsprechend kann es zu einem spezifischen Schwund des Komplements nur dann kommen, wenn die cytophile Gruppe des Ambozeptors an den spezifischen Rezeptor verankert ist. Die Versuche des Vortragenden sowie seiner Mitarbeiter haben aber ergeben, daß eine Verankerung nur dann zustandekommt, wenn das Antigen in einer korpuskulären Form wirkt, daß eine Bindung zwischen Ambozeptor und Antigen aber fehlt, wenn letzteres in gelöstem Zustand zur Verfügung steht. Analoge Versuche von Starkenstein mit Fermenten haben dasselbe Resultat gezeitigt. Da nun trotz Fehlens der Verankerung eine spezifische Komplementbindung erfolgt, so ist damit die Grundanschauung der Seitenkettentheorie „corpora non agunt nisi fixata" widerlegt. Es zeigt sich vielmehr, daß für die Verankerung nur grob physikalische Verhältnisse die Hauptrolle spielen, daß aber bei der spezifischen Wirkung noch andere Momente in Betracht kommen. Weitere Untersuchungen haben gelehrt, daß die zur Komplementbindung führenden Antikörper in erster Linie von den stabilen Rezeptoren (Weil und Felix) erzeugt werden, welche eine physikalisch intensivere Beeinflussung des Antigens bewirken. Schließlich wurde in quantitativen Versuchen die Menge des gebundenen Komplementes bestimmt, mit dem Ergebnis, daß nur die Menge des Antigens von ausschlaggebender Bedeutung ist. Doch nimmt die Quantität des gebundenen Komplementes nicht proportional zur Antigenmenge zu, sondern wird in unverhältnismäßig viel stärkerem Maße gebunden. Die Menge des komplementbindenden Immunkörpers ist aber von keiner Bedeutung.

Sitzung am 18. Jänner 1921.

Dr. Macella: „Methodisches zur Herzmechanik"

Sitzung am 25. Jänner 1921.

Prof. Dr. A. Pascher: „Ueber Entwicklungsparallelismen im Pflanzen- und Tierreiche"

Flächeninhalt und Winkel in der Variationsrechnung.

Von Dr. Paul Funk und Dr. Ludwig Berwald in Prag.

In der letzten Zeit sind verschiedene Arbeiten erschienen, die darauf hinzielen, in der Variationsrechnung Gesichtspunkte der elementaren und differentiellen Geometrie zur Geltung zu bringen.[1]) Hier soll insbesondere der Versuch gemacht werden, den Begriff „Flächeninhalt" in zweckmäßiger Weise zu verallgemeinern und die erhaltene Verallgemeinerung auf die Ableitung des Winkelbegriffes anzuwenden. Weitere Anwendungen bleiben einer späteren Veröffentlichung vorbehalten.

1. Beim Problem der kürzesten Linie auf einer Fläche:

$$(1)\quad \int F(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt \equiv \int \sqrt{e\,\dot{x}^2 + 2f\,\dot{x}\,\dot{y} + g\,\dot{y}^2}\, dt = \text{Min.}^{2)}$$

erklärt man als Flächeninhalt das Doppelintegral:

$$(2)\quad \Omega = \iint \sqrt{eg - f^2}\, dx\, dy.$$

Der Integrand von (2) ergibt sich aus dem des ersten Integrales (1) in folgender Weise:

$$(3)\quad \sqrt{eg - f^2} = \sqrt{F^3 .\ F_1}.$$

Dabei ist:

$$(4)\quad F_1 = \frac{F_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2} = -\frac{F_{\dot{x}\dot{y}}}{\dot{x}\dot{y}} = \frac{F_{\dot{y}\dot{y}}}{\dot{x}^2}.$$

Analog wollen wir auch bei einem beliebigen Variationsproblem, das wir in der Weierstraß'schen homogenen Form annehmen:

$$(5)\quad \int F(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt = \text{Min.}^{3)}$$

den Begriff „Flächeninhalt" definieren.

Zu diesem Zwecke denken wir uns zunächst in der xy-Ebene eine bestimmte, von einem Parameter abhängende Kurvenschar:

$$(6)\quad x = x(t, \alpha),\quad y = y(t, \alpha)$$

vorgelegt, durch die ein „Feld" erklärt sein möge.[4]) Dann betrachten wir wieder das Doppelintegral:

$$(7)\quad \Omega = \iint \sqrt{F^3(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, F_1(x, y, \dot{x}, \dot{y})}\, dx\, dy,$$

in dem F_1 durch (4) gegeben und der Radikand als wesentlich

---

[1]) Vgl. z. B. insbesondere: G. Landsberg, Ueber die Krümmung in der Variationsrechnung. Math. Ann. 65 (1908), 313—349; P. Finsler, Ueber Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. Dissertation, Göttingen 1918; W. Blaschke, Geometrische Untersuchungen zur Variationsrechnung I. Ueber Symmetralen. Math. Zeitschr. 6 (1920), 281—285.

[2]) Die Punkte bedeuten Ableitungen nach t. e, f, g sind (etwa zweimal stetig partiell nach x und y differentiierbare) Funktionen von x und y allein; $eg - f^2 > 0$. — Alle auftretenden Quadratwurzeln sind positiv zu ziehen. Partielle Ableitungen bezeichnen wir durchwegs durch Anhängung von Buchstaben.

[3]) Ueber die Funktion unter dem Integralzeichen machen wir dabei die in der Variationsrechnung üblichen Annahmen. Vgl. etwa O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung. Leipzig und Berlin 1909; § 25, insbes. S. 193 ff.

[4]) Siehe O. Bolza, l. c. S. 96 ff., 249 ff. — Die Kurvenschar (6) muß nicht notwendig aus Extremalen bestehen. Ferner lassen wir auch „uneigentliche Felder" (O. Bolza, l. c. S. 98) zu.

positiv vorausgesetzt ist. Da F in $\dot{x}$, $\dot{y}$ positiv-homogen von erster Ordnung angenommen wird, so ist der Integrand in (7) positiv-homogen von nullter Ordnung in $\dot{x}$, $\dot{y}$, also eine Funktion des orientierten Linienelementes $(x, y; \vartheta)$, wobei ϑ erklärt ist durch:

$$(8) \quad \cos\vartheta = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}, \quad \sin\vartheta = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}},$$

und $\dot{x}$, $\dot{y}$ aus (6) zu entnehmen sind. Das Integral (7) ist eine absolute Invariante gegenüber Punkt- und Parameter-Transformationen, wie man durch Rechnung unmittelbar erkennt. Wir wollen es „den zu der vorgelegten Kurvenschar (6) gehörigen Flächeninhalt“ nennen.

Der so definierte Begriff des „Flächeninhaltes“ ist natürlich im allgemeinen von der vorgelegten Kurvenschar abhängig. Der einzige Ausnahmefall ist der Fall des Variationsproblemes (1), in dem die Funktion unter dem Integralzeichen die Quadratwurzel aus einer binären quadratischen Form der Variabeln $\dot{x}$, $\dot{y}$ ist. (Gauß' Flächentheorie, bzw. Riemann'sche Maßbestimmung.)

2. Um von diesem Flächeninhaltsbegriff eine erste Anwendung zu machen, wollen wir seinen Zusammenhang mit dem von G. Landsberg[5]) in die Variationsrechnung eingeführten Winkelbegriff herstellen.

Landsberg erklärt den „Winkel“ durch folgende Formel:

$$(9) \quad v = \int (\dot{x}\, d\dot{y} - \dot{y}\, d\dot{x}) \sqrt{\frac{F_1(x_0, y_0, \dot{x}, \dot{y})}{F(x_0, y_0, \dot{x}, \dot{y})}}.$$

Hierin sind x_0, y_0 als fest zu betrachten, und das Integral ist in der $\dot{x}\,\dot{y}$-Ebene über ein beliebiges, einfaches, stetiges Kurvenstück vom Punkte P_1 $(\dot{x}_1, \dot{y}_1)$ zum Punkte P_2 $(\dot{x}_2, \dot{y}_2)$ zu erstrecken. Es ist vom Weg unabhängig und stellt eine Funktion:

$$(10) \quad v = v(x_0, y_0; \dot{x}_1, \dot{y}_1; \dot{x}_2, \dot{y}_2)$$

dar, die sowohl in $\dot{x}_1$, $\dot{y}_1$ als auch in $\dot{x}_2$, $\dot{y}_2$ positiv-homogen von nullter Ordnung ist. Somit ändert der „Winkel“ v seinen Wert auch nicht, wenn man P_1, bzw. P_2 auf dem Halbstrahl verschiebt, der den Nullpunkt der $\dot{x}\,\dot{y}$-Ebene mit P_1, bezw. P_2 verbindet. Wir können daher P_1 und P_2 auf dem Einheitskreise der $\dot{x}\,\dot{y}$-Ebene annehmen und diesen als Integrationsweg wählen. Setzen wir dementsprechend:

$$(11) \quad \dot{x} = \cos\vartheta, \quad \dot{y} = \sin\vartheta,$$

so erhalten wir aus (9):

$$(9^*) \quad v(x_0, y_0; \vartheta_1; \vartheta_2) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{\frac{F_1(x_0, y_0, \cos\vartheta, \sin\vartheta)}{F(x_0, y_0, \cos\vartheta, \sin\vartheta)}}\, d\vartheta.$$

Hierin bedeutet ϑ_1 (ϑ_2) den Wert von ϑ, der dem Punkte P_1 (P_2) entspricht.

3. Wir bezeichnen als verallgemeinerte „Länge“ das dem Variationsproblem zugrunde liegende Integral (5). Als vorgelegte

---

[5]) l. c. S. 330 f, 337 ff.

Kurvenschar betrachten wir die von einem Punkte 0 (x_0, y_0) ausgehenden Extremalen unseres Variationsproblemes, für welche die Richtung ϑ des Ausgangselementes $(x_0, y_0; \vartheta)$ der Ungleichung

$$\vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_2 \quad (\vartheta_1 < \vartheta_2 < \vartheta_1 + 2\pi)$$

genügt. Auf jeder dieser Extremalen tragen wir die gleiche „Länge" R — im verabredeten Sinne — ab, wobei R hinreichend klein gewählt werden muß, damit die Feldeigenschaft nicht zerstört wird. Der so begrenzte Bereich heiße der Sektor $(x_0, y_0; \vartheta_1, \vartheta_2; R)$.

Wir wollen nun zeigen, daß in vollständiger Analogie zur Elementargeometrie zwischen dem „Flächeninhalt" und dem „Winkel" dieses Sektors die folgende Beziehung gilt:

$$\text{(I.)} \quad v = \lim_{R \to 0} \frac{2\,\Omega}{R^2}$$

4. Zum Beweise denken wir uns als krummlinige Koordinaten eingeführt die „Länge" u auf einer Feldextremalen, gemessen vom Ausgangspunkte 0 aus und den ihre Ausgangsrichtung kennzeichnenden Euklidischen Winkel ϑ. Dann erhalten wir für Ω:

(12)

$$\Omega = \int_0^R \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{F^3(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \quad F_1(x, y, \dot{x}, \dot{y})}. \quad (x_u\, y_\vartheta - y_u\, x_\vartheta)\, du\, d\vartheta$$

Die Funktionaldeterminante $x_u\, y_\vartheta - y_u\, x_\vartheta$ verschwindet im Punkte 0, weil alle Feldextremalen durch 0 gehen und aus diesem Grunde:

$$\text{(13)} \quad [x_\vartheta]_{u=0} = [y_\vartheta]_{u=0} = 0$$

ist. Wir zeigen jetzt, daß man:

$$\text{(14)} \quad x_u\, y_\vartheta - y_u\, x_\vartheta = u \left(\frac{1}{F^2(x_0, y_0, \cos\vartheta, \sin\vartheta)} + [u] \right)$$

hat, wo [u] eine Reihe nach steigenden ganzen Potenzen von u bedeutet, die mit dem linearen Gliede beginnt.

Zunächst folgt:

$$\text{(15)} \quad \left[\frac{\partial (x_u\, y_\vartheta - y_u\, x_\vartheta)}{\partial u} \right]_{u=0} = \left[\begin{vmatrix} x_{uu} & x_\vartheta \\ y_{uu} & y_\vartheta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_u & x_{u\vartheta} \\ y_u & y_{u\vartheta} \end{vmatrix} \right]_{u=0}.$$

Die erste Determinante rechts verschwindet, wegen (13). Um in der zweiten die Differentiationen durchzuführen, nehmen wir an, der Parameter t bedeute die Euklidische Bogenlänge der Feldextremalen, vom Punkte 0 aus gerechnet, so daß die Gleichung besteht:

$$\text{(16)} \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1.$$

Dann ist:

$$\text{(17)} \quad x_u = \frac{\dot{x}}{\dot{u}} = \frac{\dot{x}}{F(x, y, \dot{x}, \dot{y})}, \quad y_u = \frac{\dot{y}}{\dot{u}} = \frac{\dot{y}}{F(x, y, \dot{x}, \dot{y})},$$

also wegen (8) und (16):

$$(18)\ [x_u]_{u=0}=\frac{\cos\vartheta}{F(x_0, y_0, \cos\vartheta, \sin\vartheta)}, [y_u]_{u=0}=\frac{\sin\vartheta}{F(x_0, y_0, \cos\vartheta, \sin\vartheta)}$$

und somit auch:

$$(19)\ \begin{cases} [x_{u\vartheta}]_{u=0}=\left[-\dfrac{\sin\vartheta}{F}-\dfrac{\cos\vartheta}{F^2}F_\vartheta\right]_{u=0}, \\ [y_{u\vartheta}]_{u=0}=\left[\ \dfrac{\cos\vartheta}{F}-\dfrac{\sin\vartheta}{F^2}F_\vartheta\right]_{u=0}, \end{cases}$$

wobei in F dieselben Argumente zu nehmen sind, wie in (18). Durch Einsetzen dieser Werte in (15) ergibt sich die Richtigkeit unserer Behauptung (14).

Nunmehr bezeichnen wir mit Ψ (u, ϑ) die Funktion:

$$(20)\ \Psi(u, \vartheta) = \sqrt{F^3(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \quad F_1(x, y, \dot{x}, \dot{y})} \left(\frac{1}{F^2(x_0, y_0, \cos\vartheta, \sin\vartheta)} + [u]\right).$$

Dann gibt der erste Mittelwertsatz der Integralrechnung:

$$(21)\ \int_0^R u\,\Psi(u, \vartheta)\,du = \frac{R^2}{2}\Psi(\Theta R, \vartheta), \quad (0 \leqq \Theta \leqq 1).$$

Wir erhalten daher aus (12) und (14):

$$(22)\ \Omega = \frac{R^2}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\Psi(\Theta R, \vartheta)\,d\vartheta.$$

Endlich liefert Einsetzen des Wertes (20) für Ψ (u, ϑ) und Uebergang zur Grenze für $R = 0$:

$$(23)\ \lim_{R\to 0}\frac{2\Omega}{R^2}=\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\sqrt{\frac{F_1(x_0, y_0, \cos\vartheta, \sin\vartheta)}{F(x_0, y_0, \cos\vartheta, \sin\vartheta)}} = v(x_0, y_0; \vartheta_1; \vartheta_2),$$

womit die Beziehung (I.) bewiesen ist.

5. Wir erwähnen schließlich noch, daß G. A. Bliss[6]) und P. Finsler[7]) andere Definitionen des „Winkels“ in der Variationsrechnung gegeben haben. Es ist zu vermuten, daß bei passender Annahme der Kurvenschar, die der Erklärung des „Flächeninhaltes“ zugrunde gelegt werden muß, auch für diese Winkelbegriffe ähnliche Beziehungen zwischen „Flächeninhalt“ und „Winkel“ bestehen. Der Vorzug der Landsberg'schen Definition scheint uns darin zu liegen, daß sie unmittelbar zu einer Verallgemeinerung des Gauß'schen Satzes von der curvatura integra führt.

Prag, den 15. Juli 1920.

---

[6]) G. A. Bliss, A. generalization of the notion of angle. Trans. Amer. Math. Soc. 7 (1906), 184—196.

[7]) l. c. [1]).