Ein einfacher Beweis für die Trägheit der Energie.

Von Philipp Frank.

(Vortrag, gehalten am 6. Dezember 1922 in der physikalischen Fachgruppe des „Lotos".)

Die Aussage des Satzes von der Trägheit der Energie soll zunächst in möglichst konkreter Weise formuliert werden. Etwa so: Wenn zwei vollkommen unelastische Kugeln der gleichen Masse m in zentrischem Stoß längs einer und derselben Geraden mit entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten aneinanderprallen, so kommen sie zur Ruhe und verlieren ihre gesamte lebendige Kraft E. Die beiden Kugeln haben aber dafür jetzt nicht mehr die träge Masse 2 m wie vor dem Zusammenstoß, sondern die Masse $2m + \frac{E}{c^2}$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum bedeutet.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß dieser Satz eine einfache Folgerung des speziellen Relativitätsprinzips ist und aus den mechanischen Gleichungen allein hergeleitet werden kann, ohne daß es der Heranziehung der Strahlungstheorie bedarf. Allerdings wird sich zeigen, daß der Beweis nicht so einfach sein kann, wie er in vielen elementaren und halbelementaren Lehrbüchern geführt wird, wo im Interesse der Kürze und Einfachheit dann ein Scheinbeweis zustandekommt, der das Wesen des Satzes eher verschleiert als klarstellt.

Wir wollen, um alles entbehrliche beiseite zu lassen, nur Bewegungen betrachten, die längs einer festen Geraden erfolgen. Nennen wir die Masse eines materiellen Punktes m, seine Geschwindigkeit v und die auf ihn wirkende Kraft P, so tritt an Stelle der Newtonschen Bewegungsgleichung $m\frac{dv}{dt} = P$, in der Lorentz-Einsteinschen Theorie die Bewegungsgleichung

$$1. \qquad \frac{m}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}}\frac{dv}{dt} = P$$

Man sagt dann, daß die Masse, d. h. der Quotient aus Kraft und Beschleunigung von der Geschwindigkeit v abhängig wird und nur ihr Wert für verschwindende Geschwindigkeit, die Ruhmasse, eine dem Massenpunkt eigentümliche Konstante bleibt, die hier wie im folgenden mit m bezeichnet werden soll. Man hat oft dagegen eingewendet, daß man durch multiplizieren beider Seiten der Gl. 1 mit der Quadratwurzel im Nenner die Gleichung wieder auf die Form der Newtonschen bringen kann, und daß daher die Lorentz-Einsteinschen Bewegungsgleichungen eigentlich gar nichts anderes aussagen als die Newtonschen. Bei der experimentellen Prüfung der Gl. 1 durch die Untersuchung der Einwirkung elektrischer Kräfte auf rasch fliegende Ladungen (Betastrahlen des Radiums) wird diese Entscheidung dadurch ermöglicht, daß die Kraft P eine durch die felderzeugenden Umstände und die Theorie des elektrischen Feldes genau gegebene Größe ist. Man kann aber fragen, ob eine solche Entscheidung noch möglich ist, wenn die Kraft P, wie es die allgemeine Mechanik gestattet, eine beliebige Funktion der Lage und Geschwindigkeit der Masse m ist.

Wenn man aber zwei Massen m_1 und m_2 betrachtet, die nur Kräften unterworfen sind, die sie gegenseitig aufeinander ausüben, so gilt, wenn v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten der Massen sind, P_1 und P_2 aber die auf sie wirkenden Kräfte, nach Newton die Gleichung

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} + m_2 \frac{dv_2}{dt} = P_1 + P_2 \tag{2.}$$

nach Lorentz und Einstein aber

$$\frac{m_1}{\sqrt{\left(1-\frac{v_1^2}{c^2}\right)^3}} \frac{dv_1}{dt} + \frac{m_2}{\sqrt{\left(1-\frac{v_2^2}{c^2}\right)^3}} \frac{dv_2}{dt} = P_1 + P_2 \tag{3.}$$

Da nun nach dem Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung $P_2 = -P_1$ ist, verschwindet nach Newton bei wechselseitiger Beeinflussung zweier Massen die linke Seite der Gl. 2, nach Lorentz-Einstein aber die linke Seite von Gl. 3, was für beliebige Gestalt der Kräfte einen prinzipiell experimentell feststellbaren Unterschied ergibt.

Wie aus dem Verschwinden der linken Séite von Gl. 2 die Konstanz von $m_1 v_1 + m_2 v_2$ folgt, ergibt sich aus demselben Grunde aus Gl. 3 mit Hilfe der Differentiationsformel

$$\frac{d}{dv} \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}}$$

die Konstanz von $G_1 + G_2$, wobei

$$G = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.}$$

und G_1, G_2 die analoge Bedeutung haben. Die Größe G heißt dann die Bewegungsgröße der Masse m; bei wechselseitiger Einwirkung zweier Massen aufeinander wird also die Summe ihrer Bewegungsgrößen nicht geändert.

Multiplizieren wir wieder beide Seiten der Gl. 1 mit v, so ergibt sich mit Hilfe der Differentiationsformel

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=\frac{1}{c^2}\frac{v}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}}$$

die Beziehung

5. $$\frac{dE}{dt}=Pv$$

wobei

6. $$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Da Pv die in der Zeiteinheit geleistete Arbeit der Kraft P ist, so ist E diejenige Funktion der Geschwindigkeit v, deren Zunahme der geleisteten Arbeit gleich ist, also das, was in der gewöhnlichen Mechanik als Energie der Masse m bezeichnet wird.

In den Lehrbüchern wird dann oft folgende Betrachtung angeknüpft: Wenn man E nach Potenzen von $\frac{v^2}{c^2}$ entwickelt, erhält man in erster Näherung

$$E=mc^2+\frac{m}{2}v^2$$

Da nun $\frac{m}{2}v^2$ die kinetische Energie der Masse m ist, besteht die Gesamtenergie außerdem noch aus einem Teil mc^2, der auch in der ruhenden Masse noch vorhanden ist und der wegen der enormen Größe der Lichtgeschwindigkeit c gegenüber den gewöhnlichen Körpergeschwindigkeiten v der weitaus überwiegende ist. Zwischen der Energie einer Masse im Ruhezustand E_0 und der Ruhmasse m besteht also die Beziehung

7. $$m=\frac{E_0}{c^2}$$

Der angeführte Beweis für die in der heutigen Physik so wichtige Beziehung 7 ist allerdings sehr einfach, aber nicht überzeugend. Da nämlich die Funktion E in Gl. 5 nur durch ihren Differentialquotient vorkommt, kann als Energie genau so gut wie der Ausdruck 6 auch jeder um eine willkürliche Konstante davon verschieden bezeichnet werden. Wir können also

8. $$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+a$$

setzen, wo a eine ganz willkürliche Konstante bedeutet. Damit ist aber die ganze Argumentation hinfällig. Es ist auch ohne jede mathematische Betrachtung klar, daß aus einer Beziehung, die, wie Gl. 5 angibt, wie eine gewisse Funktion der Geschwindigkeit durch Anwendung von Arbeit anwächst, man nichts über den Energieinhalt des Körpers im Ruhezustand aussagen kann. Es ist ja auch nicht einzusehen, wie man aus den Gleichungen für reine Bewegungsvorgänge auf irgendeine sonstige Energieart sollte schließen können.

Hingegen kann man ganz sinngemäß den Begriff der kinetischen Energie aus der gewöhnlichen Mechanik übertragen, wenn man in Gl. 8 die Konstante a so bestimmt, daß für verschwindende Geschwindigkeiten auch die Energie verschwindet. Für die so definierte kinetische Energie K ergibt sich wegen $a = -mc^2$ der Ausdruck

9. $$K = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

Um nun einen richtigen Beweis für die Gl. 7 zu führen, wenn etwa E_0 die beim unelastischen Zusammenstoß verlorene kinetische Energie, also auch die dabei entwickelte Wärmeenergie ist, denken wir uns die entwickelten Gleichungen für Körper, die in Wechselwirkung miteinander stehen, auf den in den Eingangsworten geschilderten Stoßvorgang angewendet.

Bezeichnen wir allgemein die Geschwindigkeiten der beiden Massen m_1 und m_2 vor dem Stoß mit u_1 und u_2, nach dem Stoß mit v_1 und v_2, so ergibt sich der Zusammenhang zwischen ihnen nach der klassischen Mechanik aus dem Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße

10. $$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

und der für den Stoß absolut unelastischer Körper charakteristischen Beziehung $v_1 = v_2$.

Beziehen wir die Geschwindigkeiten auf ein Bezugssystem, das sich mit der Geschwindigkeit q geradlinig gleichförmig in bezug auf das ursprüngliche bewegt, so sind die Geschwindigkeiten unserer Massen in diesem System

11. $$u_1' = u_1 - q, \quad u_2' = u_2 - q, \quad v_1' = v_1 - q, \quad v_2' = v_2 - q.$$

Aus Gl. 10 folgt also auch

12. $$m_1 u_1' + m_2 u_2' = m_1 v_1' + m_2 v_2',$$

d. h. wenn die Summe der Bewegungsgrößen in bezug auf ein System erhalten bleibt, tut sie das auch in bezug auf jedes andere. Man kann dann auch von dem besonderen System ausgehen, in bezug auf das die Summe der Bewegungsgrößen vor dem Stoß verschwindet, so daß $m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0$. Nehmen wir insbesondere an, daß beide Massen gleich sind, also $m_1 = m_2 = m$, so bedeutet das $u_1 + u_2 = 0$, also einen Zusammenstoß mit entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit bewegter Kugeln. Aus Gl. 12 folgt dann auch $v_1 + v_2 = 0$. Wenn wir nur von der Erfahrungstatsache Gebrauch machen, daß bei einem derartigen Zusammenprall vollkommen unelastischer Kugeln beide zur Ruhe kommen, also $v_1 = v_2 = 0$ wird, können wir ohne Zuhilfenahme des Erhaltungssatzes der Bewegungsgröße in einem beliebigen System nur aus dem Relativitätsprinzip, nach den Transformationsformeln 11 berechnen, wie sich zwei mit beliebigen Geschwindigkeiten u_1' und u_2' zusammenstoßende Kugeln von gleicher Masse m verhalten. Aus ihnen folgt nämlich für $u_1 + u_2 = 0$, $v_1 = v_2 = 0$

$$v_1' = v_2' = \frac{1}{2}(u_1' + u_2'),$$

was schon Huyghens auf diesem Wege berechnete.

Wir führen nun dieselbe Betrachtung für die Lorentz-Einsteinsche Mechanik durch.

In dem betrachteten Bezugssystem mögen die beiden Körper von der Ruhmasse m die Anfangsgeschwindigkeiten $u_1 = u$, $u_2 = -u$ haben, dann sind ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoß wie früher Null, also $v_1 = v_2 = 0$. Bezeichnen wir die Bewegungsgrößen vor dem Stoß mit G_1 und G_2, nach dem Stoß mit H_1 und H_2, so ist also nach Gl. 4

13. $$G_1 = \frac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \quad G_2 = -\frac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \quad H_1 = H_2 = 0$$

Der Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße

14. $$G_1 + G_2 = H_1 + H_2$$

ist also offenbar in dem betrachteten Bezugssystem erfüllt. Die kinetische Energie jeder Masse vor dem Stoß ist nach Gl. 9

$$mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - 1\right),$$

nach dem Stoß aber Null, so daß die gesamte beim Stoß verlorene kinetische Energie K_0

15. $$K_0 = 2mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - 1\right)$$

beträgt. Betrachten wir den ganzen Vorgang wieder von einem mit der Geschwindigkeit q bewegten System und bezeichnen wir die Geschwindigkeiten in diesem System mit u_1', u_2', v_1', v_2', die Bewegungsgrößen mit G_1', G_2', H_1', H_2', so kann man sich leicht überzeugen, daß aus der Gl. 14 nicht mehr die Beziehung

16. $$G_1' + G_2' = H_1' + H_2'$$

folgt, die den Erhaltungssatz der Bewegungsgröße für das neue System ausdrückt. Nach dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten ist nämlich nach Einstein

17. $$u_1' = \frac{u_1 - q}{1 - \frac{qu_1}{c^2}}, \text{ usw.}$$

also für die in unserem Falle vorliegenden Werte von u_1, u_2, v_1, v_2

18. $$u_1' = \frac{u_1 - q}{1 - \frac{qu}{c^2}} \qquad u_2' = -\frac{u + q}{1 + \frac{qu}{c^2}} \qquad v_1' = v_2' = -q$$

Die Bewegungsgrößen sind dann

19. $$G_1' = \frac{mu_1'}{\sqrt{1 - \frac{u_1'^2}{c^2}}}, \quad G_2' = \frac{mu_2'}{\sqrt{1 - \frac{u_2'^2}{c^2}}}, \quad H_1 = \frac{mv_1'}{\sqrt{1 - \frac{v_1'^2}{c^2}}},$$

$$H_2' = \frac{mv_2'}{\sqrt{1 - \frac{v_2'^2}{c^2}}}$$

Durch Einsetzen von 18 in 19 erhalten wir nach leichter Rechnung

20. $$G_1' = \frac{m(u - q)}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}\sqrt{1 = \frac{u^2}{c^2}}}, \quad G_2' = -\frac{m(u + q)}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

$$H_1' = H_2' = -\frac{mq}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$$

Daraus folgt

21. $$G_1' + G_2' = H_1' + H_2' - \frac{2mq}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1\right)$$

Die Gl. 16 ist also nicht erfüllt. Es tritt vielmehr nach dem Zusammenstoß eine früher nicht vorhanden gewesene Bewegungsgröße auf. Nach Gl. 4 ist das die Bewegungsgröße einer Masse von der Geschwindigkeit $-q$, die also die Bewegung der Körper nach dem Stoß mitmacht. Der Betrag dieser Masse ist aber nach Gl. 21 und 20

22. $$u = 2m\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1\right)$$

also nach Gl. 15

23. $$u = \frac{K_0}{c^2}$$

Die Annahme, daß nach dem Stoß die Ruhmasse der Körper immer noch m ist, führt also zu einem Widerspruch gegen das Relativitätsprinzip. Es würde nämlich im ursprünglichen System der Erhaltungssatz der Bewegungsgröße für den betrachteten Stoßvorgang erfüllt sein, im neuen gleichförmig bewegten aber nicht.

Setzen wir aber das Relativitätsprinzip als richtig voraus, so muß auch im neuen System der Erhaltungssatz gelten. Das ist mit der von uns abgeleiteten Gl. 21 nur vereinbar, wenn wir an-nehmen, daß beim Zusammenstoß ein Zuwachs der Ruhmasse um μ entsteht, der durch Gl. 22 gegeben ist. Machen wir nämlich diese Annahme, so tritt in dem Ausdruck für H_1' und H_2' in Gl. 20 an Stelle von m jetzt $m + \mu$. Es ist also

$$H_1' = H_2' = -\frac{(m+\mu)q}{\sqrt{1-\frac{q}{c^2}}}$$

Daraus ergibt sich in Verbindung mit den Ausdrücken für G_1' und G_2' aus Gl. 20 und Gl. 22 wieder die Gl. 16, also die Erfüllung des Relativitätsprinzips.

Aus diesem folgt also, wie wir gesehen haben, daß beim unelastischen Zusammenstoß zweier Körper diese einen Massenzuwachs erfahren, welcher der verlorenen lebendigen Kraft proportional ist. Da nach dem Energiesatz diese als Wärmeenergie in den Körpern zum Vorschein kommt, können wir auch sagen, daß jede Zunahme der Wärmeenergie von einem entsprechenden Massenzuwachs begleitet ist.

Dadurch wird die Vermutung nahegelegt, daß die gesamte Ruhmasse m mit dem gesamten Energieinhalt des Körpers im Ruhezustand E_0 ebenfalls in dieser Beziehung steht, was durch die Gl. 7 ausgedrückt wird.

Zum Schluß sei noch auf die mathematische Wurzel der ganzen Betrachtung hingewiesen. In der Newtonschen Mechanik ist die Bewegungsgröße ein Vektor des dreidimensionalen Raumes. Sein Verschwinden in einem Bezugssystem hat eine bestimmte vom System unabhängige Bedeutung und ist gegenüber der Galileitransformation invariant. In der Relativitätstheorie ist die Bewegungsgröße nur die Projektion eines Vektors des vierdimensionalen Raumes in einen dreidimensionalen; also ist von der Wahl dieses Raumes, die auf eine Lorentztransformation hinausläuft, das Verschwinden der Projektion abhängig. Nur das Verschwinden des gesamten Vektors, dessen Projektion die Bewegungsgröße ist, hat eine gegenüber der Lorentztransformation invariante Bedeutung. Und ebenso hat die Erhaltung der Bewegungsgröße nur dann eine vom Bezugssystem unabhängige Bedeutung, wenn sie für alle vier Komponenten des genannten Vektors gilt, nicht nur für die Bewegungsgröße allein.