Das n-fach iterierte Fehlerintegral.

Von R. Fürth, Prag.

In der Fehlerrechnung und in der Statistik kommt man mitunter in die Lage, die sukzessiven Ableitungen des Fehlerintegrals zu benutzen, für die auch bereits Tabellen, z. B. von Bruns[1]), bestehen.

Es gibt aber auch Probleme, bei denen man mit den Integralen des Fehlerintegrals zu tun hat, für die es meines Wissens keine Tabellen gibt. Ich gebe daher im folgenden eine Formel für das n-fach iterierte Fehlerintegral, die es gestattet, dasselbe sofort zu berechnen, wenn man eine Tabelle des Fehlerintegrals selbst und der Funktion e^{-x^2} zur Verfügung hat.

Wir definieren als Fehlerintegral die Funktion

$$\psi(x) = \int_x^\infty e^{-\xi^2}\, d\xi$$

und nennen die iterierten Integrale der Reihe nach

$$\psi_1(x) = \int_x^\infty \psi(\xi)\, d\xi, \quad \psi_2(x) = \int_x^\infty \psi_1(\xi)\, d\xi,$$

dann läßt sich allgemein $\psi_n(x)$ berechnen mit Hilfe der leicht zu beweisenden Hilfsformeln

$$(1a) \qquad I_n(x) = \int_x^\infty e^{-\xi^2} \xi^n\, d\xi = \frac{e^{-x^2}}{2} \sum_{\nu=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{\frac{n-1}{2}}{\nu} \nu^1 \cdot x^{n-1-2\nu} + \frac{(n-1)(n-3)\cdot \ldots \cdot 5 \cdot 3}{2^{\frac{n}{2}}} \cdot \psi(x)$$

für gerade n und

$$(1b) \qquad I_n(x) = \frac{e^{-x^2}}{2} \sum_{\nu=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{\frac{n-1}{2}}{\nu} \nu^1 \cdot x^{n-1-2\nu}$$

für ungerade n und

$$(2) \qquad K_n(x) = \int_x^\infty \psi(\xi) \xi^n\, d\xi = \frac{1}{n+1} \left[I_{n+1}(x) - x^{n+1} \psi(x)\right]$$

[1]) A. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre, Teubner 1906.

indem man der Reihe nach $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, durch $\psi(x)$, e^{-x^2} und Polynome in x ausdrückt.

Das allgemeine Bildungsgesetz für $\psi_n(x)$ läßt sich dann aus der Reihe der ψ absehen und liefert

$$(3) \quad \psi_n(x) = (-1)^n \psi(x) \sum_{v=0}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^{2v} \cdot v! \cdot (n-2v)!} x^{n-2v}$$

$$+ (-1)^{n+1} \cdot e^{-x^2} \sum_{v=0}^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{2^{2v+1}(v+1)! \cdot (n-2v-1)!} \cdot \frac{\sum\limits_{s=0}^{v} \binom{n}{s}}{\binom{n}{v+1}} \cdot x^{n-v2-1}$$

wobei beidemal die Summation bis zu der zur ausgeschriebenen oberen Grenze nächstniederen ganzen Zahl zu erstrecken ist.

Prag, im Jänner 1924.

Faunistische Mitteilungen.

Böhmen. Lepidoptera.

Hier sollen Neufunde der letzten Jahre zur allmählichen Veröffentlichung gelangen, die ich zwar für den im Manuskripte fertiggestellten Prodromus der Lepidopterenfauna Böhmens reserviert hatte, jedoch nunmehr unter dieser Rubrik der Öffentlichkeit zur Kenntnis bringen will, weil das Erscheinen des Prodromus in Folge der Ungunst der Verhältnisse wohl noch Jahre wird auf sich warten lassen müssen.

Agrotis subrosea var. subcoerulea Stgr.

Ein tadelloses ♀ dieser, nur in den baltischen Provinzen des alten Rußland, sowie in Schweden vorkommenden seltenen Art fing ich am 15. August 1916 in Heidemühle bei Hirschberg am Licht. Der Standort ist ein typisches Torfmoor, auf dem die Art auch sonst vorkommen soll. Wie mir Herr Hofrat Prof. Dr. Rebel (Wien) mitteilt, wurde die Art im gleichen Jahre auch in Hamburg einmal gefangen, was auf ein zufälliges Verfliegen außerhalb ihres normalen Verbreitungsgebietes hindeuten würde.

Was den böhmischen Standort betrifft, so möchte ich ein derartiges zufälliges Vorkommen nicht annehmen, sondern glaube, daß es sich um ein bodenständiges Element handelt. Die Umgebung des Heidemühlteiches, wo offenbar noch niemand am Licht Schmetterlinge gefangen hat, ist ganz darnach angetan, ein Refugium solcher örtlicher Arten zu bilden, ebenso wie auch botanisch, keine Wegstunde weit, sich ein orientalisches Relikt, Ligularia sibirica, vorfindet.

Jedenfalls verdient der Fund zoogeographisch ein ganz besonderes Interesse. Dr. Sterneck (Karlsbad).