Zur Geometrie ebener Variationsprobleme.

Von Ludwig Berwald.

Im Folgenden wird über einige Ergebnisse berichtet, die ich bei einer eingehenderen Untersuchung der Krümmungseigenschaften des einfachsten zweidimensionalen Variationsproblemes erhalten habe. Eine ausführliche Veröffentlichung soll an anderer Stelle erscheinen.

I. Krümmungseigenschaften zweidimensionaler allgemeiner Räume. [1])

1. Unter einem zweidimensionalen allgemeinen (metrischen) Raum R verstehen wir eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, in der durch das Grundintegral eines Variationsproblemes einfachster Art

(1) $$s=\int_{t_0}^{t} F\,(x,\,y,\,\dot{x},\,\dot{y})\;\;dt \qquad \left(\dot{x}=\frac{dx}{dt}\,,\;\dot{y}=\frac{dy}{dt}\right)$$

auf jeder Kurve eine Bogenlänge definiert ist. Von F setzen wir, außer den nötigen Regularitäts- und Homogeneitätseigenschaften voraus, daß es in dem betrachteten Bereiche seiner vier Argumente positiv ist. Außerdem soll das Variationsproblem $\delta s=0$ in diesem Bereiche regulär, d. h. die Weierstrass'sche Funktion F_1 von Null verschieden sein.

Vermöge der Grundfunktion F läßt sich in R ein Fundamentaltensor erklären, mit den Komponenten

(2) $$e=\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\,(F^2)}{\partial\,\dot{x}^2},\qquad f=\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\,(F^2)}{\partial\,\dot{x}\;\partial\,\dot{y}},\qquad g=\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\,(F^2)}{\partial\,\dot{y}^2}.$$

Die aus diesen Komponenten gebildete Determinante hat den Wert

(3) $$e\,g-f^2=F^3\;F_1$$

und besitzt daher dasselbe Vorzeichen wie F_1. [2])

Den Fundamentaltensor kann man in der üblichen Weise zur Messung der Längen und Winkel von Vektoren in Bezug auf ein Linienelement benutzen [3]). Dabei ist es zweckmäßig, vorauszusetzen, daß die quadratische Form der Veränderlichen X, Y

$$(4) \qquad e\,X^2 + 2f\,X\,Y + g\,Y^2$$

positiv-definit ist. Diese Voraussetzung soll indessen weiterhin immer nur dann in Kraft treten, wenn von Längen die Rede ist. (Die Winkelmessung mittels des Fundamentaltensors bleibt im Folgenden außer Betracht.)

Wir erklären jetzt als Länge eines beliebigen Vektors (ξ, η) im Punkte (x, y) in Bezug auf das willkürliche Linienelement $(x, y;\ \dot{x}, \dot{y})$ in diesem Punkte die positive Quadratwurzel aus dem Ausdrucke

$$(5) \qquad l^2 = e\,\xi^2 + 2\,f\,\xi\,\eta + g\,\eta^2.$$

2. Das zweite grundlegende Element der Geometrie in R bildet der Begriff der Parallelverschiebung. Zu diesem Begriff, der für allgemeine Räume von beliebiger Dimensionenzahl zuerst bei Fräulein E. Noether[4]) auftritt, gelangen wir auf folgende Weise:

Wir führen als unabhängige Veränderliche den Bogen s ein und berechnen aus der Differentialgleichung $T = 0$ der Extremalen und der Nebenbedingung $\frac{d\,F}{d\,s} = 0$ die zweiten Ableitungen $\frac{d^2 x}{d\,s^2}, \frac{d^2 y}{d\,s^2}$. Wir erhalten so die Differentialgleichungen der Extremalen in der Gestalt

$$(6) \qquad x'' + \varphi\ (x, y, x', y') = 0, \quad y'' + \psi\ (x, y, x', y') = 0,$$

wo die Ableitungen nach s durch Striche bezeichnet sind, was im Folgenden festgehalten werden soll. In (6) haben φ und ψ die Werte

$$(6^*) \qquad \begin{cases} \varphi = \dfrac{1}{FF_1} \left\{ x'\,F_1\ (x'F_x + y'F_y) + F_{y'}\ (F_{x'y} - F_{y'x}) \right\}, \\ \psi = \dfrac{1}{FF_1} \left\{ y'\,F_1\ (x'F_x + y'F_y) - F_{x'}\ (F_{x'y} - F_{y'x}) \right\} \end{cases}$$

Hier bedeuten die angehängten Buchstaben partielle Ableitungen. φ und ψ sind in x', y' homogen von zweiter Dimension.

Jetzt ordnen wir jedem Punkte (x, y) von R einen, etwa infinitesimalen Vektor (dx, dy) zu, das ausgezeichnete Linienelement dieses Punktes, und erklären sodann als parallele Uebertragung des (kontravarianten) Vektors (ξ, η) im Punkte (x, y) von (x, y) nach dem beliebigen, unendlich benachbarten Punkte $(x + \delta\,x,\ y + \delta\,y)$ den Uebergang vom Vektor (ξ, η) im Punkte (x, y) zum Vektor $(\xi + \delta\,\xi,\ \eta + \delta\,\eta)$ im Punkte $(x + \delta\,x,\ y + \delta\,y)$, wenn

$$(7) \qquad \begin{cases} \delta\xi = -\dfrac{1}{2} \left\{ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial\,dx^2}\,\xi\,\delta\,x + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial\,dx\ \partial dy}\,(\xi\,\delta y + \eta\,\delta\,x) + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial\,dy^2}\,\eta\,\delta\,y \right\}, \\ \delta\eta = -\dfrac{1}{2} \left\{ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial\,dx^2}\,\xi\,\delta\,x + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial\,dx\ \partial dy}\,(\xi\,\delta y + \eta\,\delta\,x) + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial\,dy^2}\,\eta\,\delta\,y \right\}. \end{cases}$$

Dabei sind in φ und ψ die Argumente x, y, dx, dy zu denken. Wie man, ausgehend von der parallelen Uebertragung kontravarianter Vektoren die Parallelübertragung beliebiger Tensoren erklärt, ist bekannt.

Nach dem Vorstehenden hängt die Parallelübertragung in R im allgemeinen außer vom Orte in der Mannigfaltigkeit auch noch ab von der Wahl des Feldes der ausgezeichneten Linienelemente. Sie ist dann und nur dann unabhängig von dieser Wahl, wenn φ und ψ quadratische Formen in den Veränderlichen dx, dy sind mit Koeffizienten, die von x, y abhängen oder konstant sind. Ein allgemeiner Raum mit dieser Eigenschaft ist affin-zusammenhängend im Sinne von H. Weyl.[5])

3. Nunmehr lassen sich für einen beliebigen (differentiierbaren) Skalar f (x, y, x′, y′) invariante Ableitungen $f/_1$, $f/_2$ erklären:

$$(8)\quad \begin{cases} f/_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x'}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x'} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y'}\dfrac{\partial \psi}{\partial x'} \\[2ex] f/_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x'}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y'} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y'}\dfrac{\partial \psi}{\partial y'} \end{cases}$$

Aus ihnen setzt sich die Ableitung von f nach dem Bogen s der Extremalen vom willkürlichen Ausgangselement (x, y; x′, y′) zusammen gemäß der Gleichung

$$(9)\qquad \left(\frac{df}{ds}\right)_{extremal} = x' f/_1 + y' f/_2.$$

4. Durch den Prozeß der parallelen Herumführung eines willkürlichen Vektors (ξ, η) im Punkte (x, y) um ein infinitesimales Parallelogramm gelangen wir, wenn wir dabei das ausgezeichnete Linienelement (dx, dy) des Punktes (x, y) gleichfalls parallel zu sich selbst mitführen, zum Krümmungstensor von R:

$$(10)\quad \begin{cases} \delta_1\,\delta\,\xi - \delta\,\delta_1\,\xi = -(K_1{}^{.1}{}_{12}\,\xi + K_2{}^{.1}{}_{12}\,\eta)\;(\delta x\,\delta_1 y - \delta y\,\delta_1 x), \\ \delta_1\,\delta\,\eta - \delta\,\delta_1\,\eta = -(K_1{}^{.2}{}_{12}\,\xi + K_2{}^{.2}{}_{12}\,\eta)\;(\delta x\,\delta_1 y - \delta y\,\delta_1 x). \end{cases}$$

Die Komponenten des Krümmungstensors, in denen man sich wieder die Argumente (x, y, dx, dy) zu denken hat, sind bekanntlich im wesentlichen mit denen des verjüngten Krümmungstensors identisch:

$$(11)\qquad \begin{matrix} K_1{}^{.1}{}_{12} = -K_{12}, & K_2{}^{.1}{}_{12} = -K_{22}, \\ K_1{}^{.2}{}_{12} = K_{11}, & K_2{}^{.2}{}_{12} = K_{21} \end{matrix}$$

Sie erweisen sich als die Ableitungen der Komponenten $K^1{}_{.12}$, $K^2{}_{.12}$ eines einfacher gebauten Tensors, des Grundtensors der Krümmung, nach dx, dy:

$$(12)\quad \begin{aligned} K_{1}{}_{.}{}^{1}{}_{12} &= \frac{\partial K_{.}{}^{1}{}_{12}}{\partial\, dx}, & K_{2}{}_{.}{}^{1}{}_{12} &= \frac{\partial K_{.}{}^{1}{}_{12}}{\partial\, dy}, \\ K_{1}{}_{.}{}^{2}{}_{12} &= \frac{\partial K_{.}{}^{2}{}_{12}}{\partial\, dx}, & K_{2}{}_{.}{}^{2}{}_{12} &= \frac{\partial K_{.}{}^{2}{}_{12}}{\partial\, dy} \end{aligned}$$

Diesen Grundtensor der Krümmung erhält man durch parallele Herumführung des ausgezeichneten Linienelementes (dx, dy) um ein infinitesimales Parallelogramm:

$$(13)\quad \begin{cases} \delta_1\, \delta\, dx - \delta\, \delta_1\, dx = - K_{.}{}^{1}{}_{12}\ (\delta x\, \delta_1\, y - \delta y\, \delta_1\, x), \\ \delta_1\, \delta\, dy - \delta\, \delta_1\, dy = - K_{.}{}^{2}{}_{12}\ (\delta x\, \delta_1\, y - \delta y\, \delta_1\, x). \end{cases}$$

Seine Komponenten lassen sich mittels

$$(14)\quad \begin{cases} K_{.}{}^{1}{}_{12} = - \mathfrak{K}\, F\, \dfrac{\partial F}{\partial\, dy} \\ K_{.}{}^{2}{}_{12} = + \mathfrak{K}\, F\, \dfrac{\partial F}{\partial\, dx} \end{cases}$$

durch einen Skalar $\mathfrak{K}$ (x, y, dx, dy), den Krümmungsskalar von R, ausdrücken. [6])

Außer dem Krümmungsskalar $\mathfrak{K}$ spielt auch noch die Asymmetrie $\mathfrak{A}$ des verjüngten Krümmungstensors

$$15)\quad \mathfrak{A} = \frac{1}{2}\, \frac{K_{12} - K_{21}}{\sqrt{eg - f^2}}$$

eine gewisse Rolle. Von ihr hängen insbesondere die Ableitungen von $\mathfrak{K}$ nach dx und dy ab.

5. Schließlich haben wir noch den Begriff der Parallelübertragung mit dem in Nr. 1 erklärten Längenbegriff in Verbindung zu bringen.

Bei paralleler Uebertragung der Figur, die aus einem Vektor (ξ, η) im Punkte (x, y) und dem ausgezeichneten Linienelement (dx, dy) dieses Punktes besteht, ändert sich im allgemeinen die Länge des Vektors in Bezug auf das ausgezeichnete Linienelement. Hieraus folgt, daß man bei Herumführung dieser Figur um ein infinitesimales Parallelogramm im allgemeinen mit einer anderen Länge in den Ausgangspunkt zurückkommt, d. h., daß eine Streckenkrümmung vorhanden ist. Wie die Rechnung zeigt, ist

$$(16)\quad \delta_1\, \delta\, (l^2) - \delta\delta_1\, (l^2) = \frac{4\, (eg - f^2)^{\frac{3}{2}}}{F^2}\ \mathfrak{S}\, .\, (\xi\, dy - \eta\, dx)^2\, (\delta x\, \delta_1\, y - \delta y\, \delta_1\, x).$$

Hierin bedeutet

$$(17)\quad \mathfrak{S} = - \frac{1}{2\, F^2\, F_1} \left\{ \frac{\partial F}{\partial\, dx}\, \frac{\partial\, (\mathfrak{K}\sqrt{eg - f^2})}{\partial\, dy} - \frac{\partial F}{\partial\, dy}\, \frac{\partial\, (\mathfrak{K}\sqrt{eg - f^2})}{\partial\, dx} \right\}$$

den Skalar der Streckenkrümmung.

Die Skalare $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{S}$ sind in dx, dy homogen von nullter Dimension. Sie ändern sich daher auch nicht bei Einführung einer anderen unabhängigen Veränderlichen an Stelle des Bogens s.

II. Über eine charakteristische Invariante zweidimensionaler allgemeiner Räume.

6. Für die Kennzeichnung zweidimensionaler allgemeiner Räume durch besondere, bei allen Punkttransformationen invariante Eigenschaften stellt sich als grundlegend heraus der Skalar

$$(18) \quad \mathfrak{J} = \frac{1}{4 F^{\frac{1}{2}} F_1^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{\partial F_1}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}} \right).$$

Dieser Skalar ist in $\dot{x}$, $\dot{y}$, die in (18) nebst x, y als Argumente zu denken sind, homogen von nullter Dimension, und daher auch bei Parametertransformationen invariant. Er bleibt ferner ungeändert bei konformer Transformation des allgemeinen Raumes, d. h. beim Übergang vom Raume mit der Grundfunktion $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ zu demjenigen mit der Grundfunktion $\tau(x, y)$. $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$, wobei τ eine willkürliche Ortsfunktion bedeutet. Mit den bisher eingeführten Skalaren ist $\mathfrak{J}$ durch die Beziehung

$$(19) \qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{K}\mathfrak{J} + \mathfrak{S}$$

verknüpft.

Die Bedeutung des Skalars $\mathfrak{J}$ beruht u. a. darauf, daß sich die Änderung der Länge eines Vektors bei Parallelübertragung sowie die Streckenkrümmung durch die extremalen Ableitungen von $\mathfrak{J}$ nach s ausdrücken lassen. Bedeutet $\delta\,(l^2)$ die Änderung, welche die quadrierte Länge eines Vektors (ξ, η) im Punkte (x, y). in Bezug auf das ausgezeichnete Linienelement (dx, dy) dieses Punktes erfährt, wenn man beide zugleich längs eines beliebigen Linienelementes $(\delta x, \delta y)$ parallel überträgt, so ist:

$$(20) \quad \delta\,(l^2) = \frac{4\,(eg-f^2)^{\frac{3}{2}}}{F^3} (\xi\, dy - \eta\, dx)^2\ (\delta x\, dy - \delta y\, dx). \left(\frac{d\mathfrak{J}}{ds}\right)_{\text{extremal}}$$

Ferner gilt für den Skalar der Streckenkrümmung

$$(21) \qquad \mathfrak{S} = \left(\frac{d^2\mathfrak{J}}{ds^2}\right)_{\text{extremal}}.$$

7. Mit Hilfe des Skalars $\mathfrak{J}$ und seiner invarianten Ableitungen können wir die wichtigsten Klassen von zweidimensionalen allgemeinen Räumen mit besonderen geometrischen Eigenschaften charakterisieren. Es sind folgende:

I. Die Räume ohne Streckenkrümmung,[7]) gekennzeichnet durch

(22) $$\left(\frac{d^2 \mathfrak{J}}{ds^2}\right)_{\text{extremal}} = 0.$$

Sie lassen sich auch als die Räume definieren, in denen die Totalkrümmung (curvatura integra) eines Gebietes existiert (Vgl. Abschnitt III.).

II. Die Landsbergschen Räume, d. h. diejenigen, in denen es ein Analogon zum Gauss-Bonnetschen Integralsatz gibt (Vgl. Abschnitt III.). Sie sind durch

(23) $$\left(\frac{d \mathfrak{J}}{ds}\right)_{\text{extremal}} = 0.$$

gekennzeichnet. Diejenigen unter ihnen, für welche die Form (4) positivdefinit ist, können auch charakterisiert werden als die Räume, in denen die Länge eines beliebigen Vektors in Bezug auf ein willkürliches Linienelement im gleichen Punkte bei beliebiger simultaner Parallelverschiebung beider ungeändert bleibt.

III. Die affin-zusammenhängenden Räume, gekennzeichnet durch

(24) $$\mathfrak{J}/_1 = \mathfrak{J}/_2 = 0.$$

IV. Die Riemannschen Räume, die durch

(25) $$\mathfrak{J} = 0$$

gekennzeichnet sind.

Jede der Klassen II.—IV. von zweidimensionalen allgemeinen Räumen ist in sämtlichen vorhergehenden als besonderer Fall enthalten.

8. Zu der vorstehenden Tabelle sind noch zwei Bemerkungen zu machen:

1.) Unter den Räumen ohne Streckenkrümmung sind in invarianter Weise ausgezeichnet auch diejenigen, deren Krümmungstensor nur vom Orte abhängt. Sie sind charakterisiert durch (22) und entweder

(22 a) $$\mathfrak{K} = 0$$
oder

(22 b) $$\frac{\partial \dot{\mathfrak{J}}}{\partial x} = \frac{\partial \dot{\mathfrak{J}}}{\partial y} = 0.$$

Zu ihnen gehören insbesondere die affin-zusammenhängenden Räume.

2.) Die affin-zusammenhängenden Räume mit $\mathfrak{K} = 0$ sind identisch mit den (zweidimensionalen) Minkowskischen Räumen, d. h. die zugehörige Grundfunktion kann durch eine Punkttransformation auf die Gestalt F $(\dot{x}, \dot{y})$ gebracht werden, die nur von den Ableitungen der Koordinaten abhängt. Alle übrigen affin-zusammenhängenden Räume sind erschöpfend gekennzeichnet durch

$$\mathfrak{K} \neq 0, \ \mathfrak{J} = \text{const.} \tag{24a}$$

9. Während es einigermaßen schwierig zu sein scheint, Räume ohne Streckenkrümmung oder Landsbergsche Räume anzugeben, die nicht affin-zusammenhängend sind, ist es leicht, Beispiele für affin-zusammenhängende Räume herzustellen. So sind affin-zusammenhängend die von G. Landsberg[8]) angegebenen Räume mit der Grundfunktion

$$F = (L_0 \dot{x} + M_0 \dot{y})^{r_0} \, (L_1 \dot{x} + M_1 \dot{y})^{r_1} \ , \ (r_0 + r_1 = 1), \tag{26}$$

wo L_0, M_0, L_1, M_1 Ortsfunktionen bedeuten, r_0, r_1 aber Konstanten; ebenso die Räume

$$F = (L_0 \dot{x} + M_0 \dot{y}) \cdot e^{-\frac{L_1 \dot{x} + M_1 \dot{y}}{L_0 \dot{x} + M_0 \dot{y}}}. \tag{27}$$

Die Invariante $\mathfrak{J}$ hat für die Räume (26) den Wert

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2} \frac{r_1 - r_0}{\sqrt{-r_0 r_1}} \tag{28}$$

für die Räume (27) ist

$$\mathfrak{J}^2 = 1. \tag{29}$$

Es ist bemerkenswert, daß die bei E. Nohel[9]) auftretenden und später auch von A. Maccone[10]) bestimmten zweidimensionalen allgemeinen Räume, die eine dreigliedrige kontinuierliche Gruppe von Punkttransformationen zulassen, entweder Riemannsche Räume oder Minkowskische Räume des Typus (26) und (27) sind.

III. Ueber die Landsbergschen Räume und den Winkelbegriff in der Variationsrechnung.

10. Wir haben oben die zweidimensionalen allgemeinen Räume, in denen ein Analogon zum Gauss-Bonnetschen Integralsatz existiert, als Landsbergsche Räume bezeichnet, weil G. Landsberg[8]) der erste war, der sie untersucht hat. Landsberg führt zunächst die extremale Krümmung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{F_1 \, (x' y'' - y' x'') \ + \ F_{xy'} - F_{yx'}}{\sqrt{F'^3 \, F_1}} \tag{30}$$

ein. Sodann erklärt er das Integral

(31) $$\Theta = \int (x'\, dy' - y'\, dx') \sqrt{\frac{F_1}{F}}$$

gebildet für einen bestimmten Punkt (x, y) und erstreckt von einer Richtung $\left(\frac{y'}{x'}\right)_0 = q_0$ bis zu einer Richtung $\left(\frac{y'}{x'}\right)_1 = q_1$ als den Winkel der beiden Richtungen (q_0, q_1) im Punkte (x, y),[11] und betrachtet den Differentialausdruck

(32) $$S = \frac{1}{\varrho} - \frac{d\Theta}{ds} = -\left(\frac{d\Theta}{ds}\right)_{extremal,}$$

der nur mehr von x, y, x′, y′ abhängt. Dann und nur dann, wenn S in x′, y′ linear, also

(33) $$S = P\,(x, y)\, x' + Q\,(x, y)\, y'$$

ist, läßt sich das Flächenintegral

(34) $$T = \iint_{\mathfrak{G}} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) (dx\, \delta y - dy\, \delta x),$$

erstreckt über ein Gebiet $\mathfrak{G}$ - die Totalkrümmung von $\mathfrak{G}$ - zurückführen auf das über den Rand $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ erstreckte Integral $-\int_{\mathfrak{R}} (P dx + Q dy) = -\int_{\mathfrak{R}} S\, ds,$ und es ergibt sich so mit Rücksicht auf (32) folgende Verallgemeinerung des Gauss-Bonnetschen Integralsatzes:

(35) $$T + \int_{\mathfrak{R}} \frac{ds}{\varrho} = \int_{\mathfrak{R}} d\,\Theta.$$

Mittels der von uns eingeführten Größen kann T in die Gestalt

(34*) $$T = \iint_{\mathfrak{G}} \mathfrak{K} \sqrt{eg - f^2}\, dx\, dy$$

gebracht werden. Ferner erweist sich die Bedingung (33) von Landsberg als identisch mit unserer Bedingung (23). Endlich ergibt sich (22) als notwendig und hinreichend dafür, daß in einem zweidimensionalen allgemeinen Raum die Totalkrümmung eines Gebietes existiert, d. h., daß der Integrand in (34*) eine bloße Ortsfunktion ist.

11. Die Quadratur, durch die man den Landsbergschen Winkel Θ erhält, läßt sich für alle zweidimensionalen allgemeinen Räume ausführen, in denen der Skalar $\mathfrak{J}$ nur vom Orte abhängt (Nr. 8).

Wenn $\mathfrak{J}^2 \neq 1$ ist, kann man nämlich Θ stets in einer der beiden Formen

$$(36)\quad \Theta = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{J}^2-1}}\left[\log\frac{e x' + \left\{f + \left(\mathfrak{J} + \sqrt{\mathfrak{J}^2-1}\right)\sqrt{eg-f^2}\right\} y'}{e x' + \left\{f + \left(\mathfrak{J} - \sqrt{\mathfrak{J}^2-1}\right)\sqrt{eg-f^2}\right\} y'}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{J}^2-1}}\left[\log\frac{\left\{f - \left(\mathfrak{J} + \sqrt{\mathfrak{J}^2-1}\right)\sqrt{eg-f^2}\right\} x' + g y'}{\left\{f - \left(\mathfrak{J} - \sqrt{\mathfrak{J}^2-1}\right)\sqrt{eg-f^2}\right\} x' + g y'}\right]_0^1$$

darstellen: für $\mathfrak{J}^2 = 1$ erhält man

$$(37)\quad \Theta = \mathfrak{J}\cdot\left[\frac{e x' + \left(f + 2\mathfrak{J}\sqrt{eg-f^2}\right) y'}{e x' + \left(f + \mathfrak{J}\sqrt{eg-f^2}\right) y'}\right]_0^1 = \mathfrak{J}\cdot\left[\frac{\left(f - 2\mathfrak{J}\sqrt{eg-f^2}\right) x' + g y'}{\left(f - \mathfrak{J}\sqrt{eg-f^2}\right) x' + g y'}\right]_0^1$$

Dabei ist auf Realität der Darstellung keine Rücksicht genommen. $\Big[\quad\Big]_0^1$ bedeutet, daß man den eingeklammerten Ausdruck zuerst für die Richtung $\left(\frac{x'}{y'}\right)_1$, sodann für die Richtung $\left(\frac{y'}{x'}\right)_0$ zu bilden und hierauf den zweiten der so erhaltenen Ausdrücke vom ersten abzuziehen hat.

Schließlich sei noch bemerkt, daß für die in Rede stehenden Räume das Produkt

$$(38)\qquad \mathfrak{R}\, e^{2\mathfrak{J}\Theta}$$

stets eine Ortsfunktion ist, wenn $\mathfrak{S} = 0$.

PRAG, im August 1925.

Anmerkungen.

1.) Der Inhalt des ersten Abschnittes ist einer im Drucke befindlichen Arbeit des Verfassers entnommen, die demnächst in der Math. Zeitschrift herauskommt. Dort findet man auch eine genauere Formulierung der hier nur angedeuteten Voraussetzungen über die Grundfunktion F.

2.) Um mit der bisherigen Literatur möglichst in Uebereinstimmung zu bleiben, haben wir die Formeln in dieser Abhandlung dem Fall $F_1 > 0$ angepaßt. Den hierdurch verursachten Uebelstand, daß sie für $F_1 < 0$ z. T. Imaginäres ergeben, kann man vermeiden, indem man überall $|eg-f^2|$ anstatt $(eg-f^2)$ schreibt.

3.) Die Längen- und Winkelmessung mittels des Fundamentaltensors ist (für eine beliebige Dimensionenzahl) unabhängig eingeführt worden von J. L Synge, Trans. Amer. Math. Soc. 27(1925), S. 61: J. H. Taylor, ebenda, S. 246; L. Berwald, Jahresber. Deutsche Math.-Ver. 34(1925), S. 213. Die Möglichkeit der Winkelmessung ist übrigens schon angedeutet bei P. Finsler, Ueber Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. Diss. Göttingen 1918, S. 42 f., wo auch implicite der Fundamentaltensor auftritt.

4.) E. Noether, Gött. Nachr. 1918, S. 37. Vgl. auch Jahresber. Deutsche Math. -Ver. 32(1923), S. 177, bes. Nr. 6.

5.) Vgl. z. B. H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. 3. Aufl. Berlin 1919, S. 100 ff.

6.) Der Krümmungskalar $\mathfrak{K}$ tritt zuerst auf bei A. L. Underhill, Trans. Amer. Math. Soc. 9(1908), S. 316.

7.) Wir gebrauchen den Namen Räume ohne Streckenkrümmung für alle Räume, für die $\mathfrak{K}^2(eg-f^2)$ Ortsfunktion ist, obwohl der Terminus Streckenkrümmung zunächst nur für die Räume erklärt ist, bei denen auch noch die Form (4) positiv-definit ist.

8.) G. Landsberg, Math. Ann. 65(1908), S. 313, bes. S. 334 f.

9.) E. Nohel, Sitzungsber. Ak. Wien 123(1914), Abt. II. a. S. 2085, bes. die Gruppen 16, 20, 25.

10.) A. Maccone, Rend. Acc. Lincei, Rom (5), 32 I. (1923), S. 327.

11.) Dieser Winkelbegriff ist nicht zu verwechseln mit dem in Nr. 1 erwähnten.