$$(14)\quad G\left[x,\ f_1\ (x,\ c_1,\ c_2, \qquad c_n),\ f_2\ (x,\ c_1,\ c_2, \qquad c_n), \right.$$
$$\left. f_n\ (x,\ c_1,\ c_2, \qquad c_n)\right] = 0$$

identisch in $x,\ c_1,\ c_2, \qquad c_n$.

Satz III. ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von E. Picard[2].) Bei Picard sind die Funktionen $Q_k\ (x,\ f_1,\ f_2,\ .\ f_n)$ von x unabhängig und es handelt sich dort nur um ein partikuläres Lösungssystem $f_k\ (x)$.

Jedem der drei Sätze, auf deren Beweis hier verzichtet werden muß, entspricht natürlich ein Satz über Differenzengleichungen n-ter Ordnung von der Form

$$(15)\quad f\ (x + nh) = P\ \{x,\ f\ (x),\ f\ (x + h), \qquad f\,(x + (n-1)\,.\,h)\}.$$

Auch diese Sätze können hier nicht angeführt werden.

[2]) Acta math. 18 (1894), 133-154; 23 (1899), 333-337.

# Zur natürlichen Geometrie der projektiven Gruppen der Ebene.

Von Elias Altmann.

(Referent: Prof. Dr. L. Berwald.)

Die Arbeit enthält als Hauptresultat eine Tabelle der Grundgrößen und Grundrelationen der Differentialgeometrien aller Typen von projektiven Gruppen der Ebene.*) Da eine vollständige Wiedergabe dieser Tabelle zu viel Raum beanspruchen würde, soll hier nur ein kleiner Teil davon reproduziert werden, u. zw. jener, der sich auf die allgemeine projektive Gruppe, sowie die sechs- und fünfgliedrige projektive Gruppe mit festem Punkt bezieht.

**Bezeichnungen:** Das Bogenelement der Gruppe wird mit ds bezeichnet. Untere Indices zeigen Ableitung nach x, Striche oben Ableitungen nach s an. Ferner wird zur Abkürzung gesetzt:

$$x^{(m)}\ y^{(n)} - y^{(m)}\ x^{(n)} = (m\ n) \qquad (X-x)\ y^{(i)} - (Y-y)\ x^{(i)} = P_i$$

Endlich bedeutet:

$\Omega$ die Funktion, die im Flächenelement der Gruppe auftritt,
J die Differentialinvariante niedrigster Ordnung,
u, v die kovarianten Koordinaten u. zw. ist $v = 0$ die Gleichung der Tangente, $u = 0$ die der „Normalen“ in (x, y).

**Anordnung:** Neben die Nummer der Gruppe*) werden die erzeugenden infinitesimalen Transformationen angeschrieben, da-

*) Nach der Tafel in Lie-Scheffers, Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen, Leipzig 1893, S. 288 ff.

runter die endlichen Gleichungen der Gruppe. Sodann kommen ds und $\Omega$. Hierauf werden J, u, v in Ableitungen nach x ausgedrückt. Es folgt die Identität, die zwischen den Ableitungen der Koordinaten nach s besteht, die Ausdrücke für J, u, v in Ableitungen nach s und die Identitätsbedingungen.

Nur bei der Gruppe Nr. 1 wurden der Uebersichtlichkeit halber die Ausdrücke für J, u, v in den Ableitungen nach x weggelassen.

1. $\boxed{p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ x^2p + xyq,\ xyp + y^2q}$

$$\bar{x} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3} \qquad \bar{y} = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}$$

$$ds = \frac{1}{3\sqrt[3]{2}\, y_2} \sqrt[3]{9 y_2^2 y_5 - 45 y_2 y_3 y_4 + 40 y_3^3}\ dx,$$

$$\Omega = \frac{1}{54 y_2^4} (9 y_2^2 y_5 - 45 y_2 y_3 y_4 + 40 y_3^3).$$

$$9 (12)^2 [(15) + 5 (24)] - 45 (12) (13) [2 (23) + (14)] + 40 (13)^3 - 54 (12)^3 = 0,$$

$$J = \frac{(23)}{(12)} + \frac{1}{2} \frac{(14)}{(12)} - \frac{2}{3} \frac{(13)^2}{(12)^2},$$

$$u = \frac{6 (12) P_2 - 4 (13) P_1}{6 (12)^2 + [4 (12) J - (14)] P_1 + 2 (13) P_2}$$

$$v = - \frac{6 (12) P_1}{6 (12)^2 + [4 (12) J - (14)] P_1 + 2 (13) P_2}$$

$$\frac{du}{ds} = uv + Jv - Ju^2 - 1 \qquad \frac{dv}{ds} = -u - Juv + v^2.$$

3. $\boxed{xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ x^2p + xyq,\ xyp + y^2q}$

$$\bar{x} = \frac{a_1 x + b_1 y}{a_3 x + b_3 y + c_3} \qquad \bar{y} = \frac{a_2 x + b_2 y}{a_3 x + b_3 y + c_3}$$

$$ds = \frac{1}{3 y_2 (x y_1 - y)} [(3 y_2 y_4 - 4 y_3^2)(x y_1 - y)^2 - 6 y_2^2 (x y_3 + 3 y_2)(x y_1 - y) + 9 x^2 y_2^4]^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\Omega = \frac{1}{27 y_2^4 (x y_1 - y)^3} [(3 y_2 y_4 - 4 y_3^2)(x y_1 - y)^2 - 6 y_2^2 (x y_3 + 3 y_2)(x y_1 - y) + 9 x^2 y_2^4]^{\frac{3}{2}}$$

$$J = \frac{(x y_1 - y)^3 \; (9 y_2^2 y_5 - 45 y_2 y_3 y_4 + 40 y_3^3)}{2 \left[ (3 y_2 y_4 - 4 y_3^2)(x y_1 - y)^2 - 6 y_2^2 (x y_3 + 3 y_2)(x y_1 - y) + 9 x^2 y_2^4 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$u = - \frac{[xY - Xy] . [(3 y_2 y_4 - 4 y_3^2)(x y_1 - y)^2 - 6 y_2^2 (x y_3 + 3 y_2)(x y_1 - y) + 9 x^2 y_2^4]^{\frac{1}{2}}}{(x Y - X y) \; [y_3 (x y_1 - y) - 3 x y_2^2] + 3 y_2 (x y_1 - y)(Y - X y_1)}$$

$$v = - \frac{[(Y - y - y_1 (X - x)] [(3 y_2 y_4 - 4 y_3^2)(x y_1 - y)^2 - 6 y_2^2 (x y_3 + 3 y_2)(x y_1 - y) + 9 x^2 y_2^4]}{3 y_2^2 \; \{(xY - Xy) [y_3 (x y_1 - y) - 3 x y_2^2] + 3 y_2 (x y_1 - y) \; (Y - X y_1)\}}$$

$$\frac{1}{3} \frac{(14)}{(12)} + \frac{4}{3} \frac{(23)}{(12)} - \frac{4}{9} \frac{(13)^2}{(12)^2} - \frac{2}{3} \frac{(02)\,(13)}{(01)\,(12)} + \frac{(02)^2}{(01)^2} - 2 \frac{(12)}{(01)} - 1 = 0,$$

$$J = \frac{(02)}{(01)} - \frac{2}{3} \frac{(13)}{(12)}$$

$$u = \frac{3 \; (01) \; (12) \; P_0}{- 3 (12) (01)^2 + [3 (02) (12) - (01) (13)] P_0 - 3 (12) (01) P_1}$$

$$v = \frac{3 \; (01)^2 \; P_1}{- 3 (12) (01)^2 + [3 (02) (12) - (01) (13)] P_0 - 3 (12) (01) P_1}$$

$$\frac{du}{ds} = u^2 + J u - 1 \qquad \frac{dv}{ds} = uv - u + 2 J v.$$

5. $\boxed{xq, \; xp - yq, \; yp, \; x^2 p + x y q, \; x y p + y^2 q}$

$$\bar{x} = \frac{a_1 x + b_1 y}{a_3 x + b_3 y + 1}, \quad \bar{y} = \frac{a_2 x + b_2 y}{a_3 x + b_3 y + 1}, \quad (a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1).$$

$$ds = \frac{y_2^{\frac{2}{3}}}{x y_1 - y} dx, \qquad \Omega = \frac{y_2}{(x y_1 - y)^3},$$

$$J = \frac{(3 y_2 y_4 - 4 y_3^2)(x y_1 - y)^2 - 6 y_2^2 (x y_3 + 3 y_2)(x y_1 - y) + 9 x^2 y_2^4}{9 \; y_2^{\frac{10}{3}}}$$

$$u = \frac{- 3 \; y_2^{\frac{5}{3}} \; (x Y - X y)}{[y_3 (x y_1 - y) - 3 x y_2^2] (x Y - X y) + 3 y_2 (x y_1 - y)(Y - X y_1)},$$

$$v = \frac{- 3 \; y_2^{\frac{4}{3}} \; [Y - y - y_1 (X - x)]}{[y_3 (x y_1 - y) - 3 x y_2^2] (x Y - X y) + 3 y_2 (x y_1 - y)(Y - X y_1)}.$$

$$(12)^2 - (01)^3 = 0,$$

$$J = - \frac{3}{2} \frac{(12)}{(01)} - \frac{1}{2} \frac{(03)}{(01)} + \frac{3}{4} \frac{(02)^2}{(01)^2}$$

$$u = \frac{2 \; (01) \; P}{- 2 (01)^2 + (02) P_0 - 2 (01) P_1}, \; v = \frac{2 \; (01)^{\frac{1}{2}} \; P_1}{- 2 (01)^3 + (02) P_0 - 2 (01) P_1},$$

$$\frac{du}{ds} = J u^2 - 1 \qquad \frac{dv}{ds} = - u + J u v$$