ost zum miozänen Mediterranmeere. Damals lag allerdings unsere Küstenlinie mit den genannten Vierteln etwa 400 m tiefer als heute, der Böhmerwald erlebte eben seine erste (oligo-miozäne) Aufwölbung und die Böhmisch-mährische Grenzhöhe ward noch nicht gespannt.

Längs des Nordsaumes des Mittelböhmischen Waldgebirges liegen gleichgrobe miozäne Schotter wie um den Südfuß. Die Höhenschotter beiderseits des Egergrabens besitzen feineres Korn und die Schotter des Egerflusses führen Kieselschiefer, die heute wohl auf sekundärer Lagerstatt ruhen. Da haben wir also Schottervorkommen von Flüssen einer nördlichen Abdachung vor uns, gerichtet zur oligozänen Strandlinie Sachsens und der miozänen in der Mark. Auch das Erzgebirge begann sich damals erst zu entwickeln. So trennte als oligo-miozäne Hauptwasserscheide das Mittelböhmische Waldgebirge die beiden großen mittelböhmischen Abdachungen in einem Lande, das heute im Viereck von Wasserscheiden abgeschlossen ist. Zentrifugal war das tertiäre Flußnetz Böhmens mit einer Wasserscheide in der Mitte, zentripetal sammelt es sich heute um den Schnittpunkt der Landesdiagonalen und ignoriert epigenetisch den alten Wurzelknoten.

Die reiche Beschotterung des böhmischen Vorlandes der Sudeten findet auch diesseits des ostwestlichen Elbelaufes eine Fortsetzung in das obere Sazau- und Zwittachland über die böhmisch-mährische Wasserscheide zum böhmisch-mährischen Miozänmeere. Es war demnach auch Ostböhmens jungtertiäres Flußnetz von der Adler westwärts bis an die Iser nach Süd und Südost zentrifugal aus dem Lande hinaus gerichtet. Die Splitterschollen des nordwestlichen Mähren dämmten es ab und veranlaßten seine Ablenkung zum Diagonalknoten des fertigen Böhmischen Beckens.

Man erkennt aus diesen übersichtlichen Angaben leicht den paläogeographischen Wert der fluviatilen Kontinentalabsätze und es ist vom Geographen mit Genugtuung zu begrüßen, daß ihnen heute die geologischen Aufnahmen weit mehr Beachtung und Sorgfalt zuwenden als noch vor wenigen Dezennien.

Beiträge zur affinen Flächentheorie.

Von Fred Rößler.

(Referent: Prof. Dr. L. Berwald.)

Zunächst werden die in der Arbeit benötigten Grundformeln der affinen Flächentheorie zusammengestellt bzw. — soweit sie nicht allgemein bekannt sind — abgeleitet. Hierauf wird eine

Anwendung der affinen Flächentheorie in der Theorie der infinitesimalen Verbiegung einer Fläche $\mathfrak{x}$ gemacht, die darin besteht, daß als „charakteristische Funktion“ zur Bestimmung des „Drehrisses“ und der der Fläche $\mathfrak{x}$ durch Orthogonalität der Elemente zugeordneten Fläche $\bar{\mathfrak{x}}$ statt der von Weingarten benützten Invariante des Differentialausdruckes

$$\bar{\mathfrak{x}}\, d\mathfrak{x} \tag{1}$$

bezüglich der ersten metrischen Grundform der Fläche $\mathfrak{x}$

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \tag{2}$$

die Invariante δ des Differentialausdruckes (1) bezüglich der ersten affinen Grundform der Fläche $\mathfrak{x}$

$$e du^2 + 2f du dv + g dv^2 \tag{3}$$

eingeführt wird, wodurch man erzielt, daß sich die „charakteristische Gleichung“ der „charakteristischen Funktion“ δ zu

$$-\frac{1}{2}\Delta_2 \delta = H\delta \tag{4}$$

vereinfacht, wobei Δ_2 den Beltramischen Differentiator in Bezug auf die erste affine Grundform und H die mittlere Affinkrümmung der Fläche $\mathfrak{x}$ bedeutet.

Im Hauptteile der Arbeit werden einige anscheinend neue Sätze über Affinminimalflächen bewiesen, die sich zum Teile aus der Theorie der infinitesimalen Verbiegung dieser Flächen, besonders aber aus dem Zusammenhange mit speziellen W-Strahlensystemen und daraus ergeben, daß die Asymptotenlinien spezieller Affinminimalflächen linearen Komplexen angehören.

Die wichtigsten unter diesen Sätzen seien hier angeführt:

1. Die Affinnormalen in entsprechenden Punkten der Brennflächenmäntel eines W-Strahlensystemes sind dann und nur dann parallel, wenn die Brennflächenmäntel Affinminimalflächen sind.

Die Sätze 2.—4. schließen an folgenden Satz von Darboux an: Zieht man durch jeden Punkt P einer Schiebfläche mit entgegengesetzt gewundenen Erzeugenden die Schnittgerade der Schmiegebenen der beiden durch P gehenden Erzeugenden, so bildet deren Gesamtheit ein W-Strahlensystem, dessen Brennflächenmäntel Affinminimalflächen sind.

2. Die beiden Schmiegebenen durch einen Strahl werden durch die beiden Brennebenen dieses Strahles harmonisch getrennt.
3. Den Affinkrümmungslinien eines Brennflächenmantels entsprechen jene Kurven des zweiten Mantels, die den Asymptotenlinien des Krümmungsbildes dieses zweiten Mantels entsprechen. Daß die zuletzt genannten Kurvenscharen ein

konjugiertes System bilden, ist für die Affinminimalflächen kennzeichnend.

4. Die beiden Brennflächenmäntel eines Darbouxschen W-Strahlensystems haben — abgesehen von einem Sonderfalle — in entsprechenden Punkten dann und nur dann gleiches gewöhnliches Krümmungsmaß, wenn sie die Evolutenflächen einer Minimalfläche sind. — Für den genannten Sonderfall ist die Mittelfläche eine Ebene und das W-Strahlensystem entsteht aus dieser nach der Darbouxschen Konstruktion durch spezielle Zuordnung zweier konjugiert komplexer Geradenscharen dieser Ebene.

5. Die Affinminimalflächen, deren eine bzw. beide Scharen von Asymptotenlinien linearen Komplexen angehören, sind dadurch gekennzeichnet, daß eine bzw. beide Scharen der Kurven ihres Krümmungsbildes, die den Asymptotenlinien der Fläche entsprechen, in den Ebenen eines bzw. je eines Büschels durch den Ursprung liegen.

6. Die Asymptotenlinien einer Affinminimalfläche gehen bei einer infinitesimalen Verbiegung der Fläche, deren Drehriß das Krümmungsbild der Fläche ist, dann und nur dann wieder in die Asymptotenlinien der Fläche über, wenn die Fläche eine uneigentliche Affinsphäre ist.

Die uneigentlichen Affinsphären sind — wie im Wesentlichen bekannt ist *) — die einzigen Affinsphären, deren beide Scharen von Asymptotenlinien Kurven in linearen Komplexen sind. Dieser Satz wird hier direkt bewiesen und durch folgenden ergänzt:

7. Die beiden Scharen der Asymptotenlinien einer uneigentlichen Affinsphäre gehören zwei Scharen von entgegengesetzt gewundenen linearen Komplexen an, deren Durchmesser zur Richtung der Affinnormalen der uneigentlichen Affinspäre parallel sind und die — für jede Schar — auseinander durch Translation hervorgehen.

8. Alle Strahlen eines linearen Komplexes, die zu einer Durchmesserebene parallel sind und eine gegebene Kurve schneiden, bilden die allgemeinste windschiefe uneigentliche Affinsphäre.

9. Ist eine windschiefe uneigentliche Affinspäre $\mathfrak{x}$ nach Satz 8 gegeben und spiegelt man den linearen Komplex in der Richtung seiner Durchmesser an einer Nullebene, so bilden alle $\mathfrak{x}$ berührenden Geraden des gespiegelten Komplexes ein W-Strahlensystem, dessen zweiter Brennflächenmantel eine windschiefe uneigentliche Affinsphäre mit derselben Richt-

---

*) Vgl. etwa G. Fubini-E. Čech, Geometria projettiva differenziale, I, S. 168.

ebene und dessen Mittelfläche eine zur Richtebene parallele Ebene ist.

Zum Schluß der Arbeit wird eine Zuordnung zwischen uneigentlichen Affinsphären und Minimalflächen untersucht. Sie beruht auf Folgendem:

Die Integrabilitätsbedingungen der Grundgleichungen der affinen Differentialgeometrie reduzieren sich für eine auf die Affinbogen u, v ihrer Asymptotenlinien bezogene uneigentliche Affinsphäre auf

$$f f_{uv} - f_u f_v + 1 = 0. \tag{5}$$

In analoger Weise reduzieren sich die Integrabilitätsbedingungen der Grundgleichungen der metrischen Differentialgeometrie für eine auf die natürlichen Parameter u, v ihrer Minimalkurven bezogene Minimalfläche auf

$$F F_{uv} - F_u F_v + F = 0. \tag{6}$$

Die Gleichungen (5) und (6) lassen sich nun durch die Transformation

$$F = \frac{f^2}{2} \tag{7}$$

ineinander überführen. Einer auf die Affinbogen u, v ihrer Asymptotenlinien bezogenen uneigentlichen Affinsphäre

$$\begin{aligned} x_1 &= U_1 + V_1 \\ x_2 &= U_2 + V_2 \\ x_3 &= U_1 V_2 - U_2 V_1 + \int (U_1 dU_2 - U_2 dU_1) - \int (V_1 dV_2 - V_2 dV_1) \end{aligned} \tag{8}$$

wird hiebei die auf die natürlichen Parameter ihrer Minimalkurven bezogene Minimalfläche

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{i}{2} \int \left[\left(\frac{dU_1}{du} \right)^2 - \left(\frac{dU_2}{du} \right)^2 \right] du + \frac{i}{2} \int \left[\left(\frac{dV_1}{dv} \right)^2 - \left(\frac{dV_2}{dv} \right)^2 \right] dv \\ \xi_2 &= \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{dU_1}{du} \right)^2 + \left(\frac{dU_2}{du} \right)^2 \right] du + \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{dV_1}{dv} \right)^2 + \left(\frac{dV_2}{dv} \right)^2 \right] dv \\ \xi_3 &= -i \int \frac{dU_1}{du} \cdot \frac{dU_2}{du} \, du - i \int \frac{dV_1}{dv} \cdot \frac{dV_2}{dv} \, dv \end{aligned} \tag{9}$$

zugeordnet. *)

---

*) In (8) und (9) sind die Ui, Vi ($i = 1, 2$) Funktionen von u bzw. v allein.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Lotos - Zeitschrift fuer Naturwissenschaften

Jahr/Year: 1933

Band/Volume: 81

Autor(en)/Author(s): Rößler Fred

Artikel/Article: Beiträge zur affinen Flächentheorie 13-16