Beiträge zur Theorie der Finslerschen Räume und der affinzusammenhängenden Räume von Linienelementen.

Von Otto Varga.

(Auszug aus einer Dissertation. Referent: Prof. Berwald.)

Der erste Abschnitt der Arbeit ist dem Minkowskischen Raum gewidmet. Der leitende Gedanke ist dabei der, daß ein solcher Raum ein affiner Raum von Linienelementen ist, in dem jeder Richtung eine euklidische Metrik zugeordnet ist.

Im zweiten Abschnitt werden die affinzusammenhängenden Räume von Linienelementen und der Finslersche Raum behandelt. [1]) Für letzteren wird die Cartansche Theorie auf eine neue Weise hergeleitet.

Affinzusammenhängend soll eine Mannigfaltigkeit von Linienelementen $(x, \dot{x})$ heißen, in der das invariante Differential eines Vektors (ξ) (der, wie überhaupt alle auftretenden Größen, in Bezug auf ein Linienelement (x, x) definiert sein muß) beim Übergang zu einem beliebigen benachbarten Linienelement $(x+dx, \dot{x}+d\dot{x})$ Komponenten von der Gestalt hat

$$(1) \qquad D\xi^i = d\xi^i + C^i_{kl}(x, \dot{x})\,\xi^k\,d\dot{x}^l + \Gamma^i_{kl}(x, \dot{x})\,\xi^k\,dx^l \quad (i = 1, 2, .. \; n).$$

Wenn

$$(2) \qquad D\xi^i = o \qquad (i = 1, 2, \quad n)$$

ist, so heißt der Vektor (ξ) parallel übertragen. Man fordert also Linearität in den $2n$ Zuwächsen dx^i, $d\dot{x}^i$ einerseits und anderseits Linearität in den n Vektorkomponenten ξ^i. Durch die Forderung

$$(3) \qquad C^i_{kl}\,\dot{x}^k = o$$

sinkt die Anzahl der unabhängigen Funktionen C^i_{kl} auf $n^3 - n^2$.

Der affinzusammenhängende Raum besitzt zwei Torsionstensoren

$$(4) \qquad C^h_{kl}\,(x, \dot{x}) \qquad\qquad T^h_{kl} = {}^1/_2\,(\Gamma^{*\,h}_{\;kl} - \Gamma^{*\,h}_{\;lk})$$

und drei Krümmungstensoren

[1]) Wegen des Zusammenhanges zwischen Minkowskischen und Finslerschen Räumen vgl. L. Berwald „Über Finslersche und verwandte Räume“ Zprávy o druhém sjezdu matematiků zemí Slovanských, Praha 1934.

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Sigma^{h}_{\cdot ilm} &= \frac{\partial C^{h}_{il}}{\partial \dot{x}^{m}} - \frac{\partial C^{h}_{im}}{\partial \dot{x}^{l}} + C^{h}_{km}\, C^{k}_{il} - C^{h}_{kl}\, C^{k}_{im} \\
\Pi^{h}_{\cdot ilm} &= \frac{\partial \Gamma^{*h}_{il}}{\partial \dot{x}^{m}} - C^{h}_{im/l} + C^{h}_{ik}\, \frac{\partial \Gamma^{*k}_{sl}}{\partial \dot{x}^{m}}\, \dot{x}^{s} \\
P^{h}_{\cdot iml} &= \frac{\partial \Gamma^{*h}_{im}}{\partial x^{l}} - \frac{\partial \Gamma^{*h}_{il}}{\partial x^{m}} - \frac{\partial \Gamma^{*h}_{im}}{\partial \dot{x}^{p}}\, \Gamma^{*p}_{sl}\, \dot{x}^{s} + \frac{\partial \Gamma^{*h}_{il}}{\partial \dot{x}^{p}}\, \Gamma^{*p}_{sm}\, \dot{x}^{s} \\
&\quad + C^{h}_{ip} \Big(\frac{\partial \Gamma^{*p}_{sm}}{\partial x^{l}}\, \dot{x}^{s} - \frac{\partial \Gamma^{*p}_{sl}}{\partial x^{m}}\, \dot{x}^{s} - \frac{\partial \Gamma^{*p}_{sm}}{\partial \dot{x}^{r}}\, \dot{x}^{s}\, \Gamma^{*r}_{ql}\, \dot{x}^{q} \\
&\quad + \frac{\partial \Gamma^{*p}_{sl}}{\partial \dot{x}^{r}}\, \dot{x}^{s}\, \Gamma^{*r}_{qm}\, \dot{x}^{q} - \Gamma^{*p}_{rm}\, \Gamma^{*r}_{sl}\, \dot{x}^{s} + \Gamma^{*p}_{rl}\, \Gamma^{*r}_{sm}\, \dot{x}^{s} \Big) \\
&\quad + \Gamma^{*k}_{im}\, \Gamma^{*h}_{kl} - \Gamma^{*k}_{il}\, \Gamma^{*h}_{km}
\end{aligned}
\right.
$$

In (4) und (5) ist

$$(6)\qquad \Gamma^{*i}_{kl} = \Gamma^{i}_{kl} - C^{i}_{kr}\, \dot{x}^{m}\, \Gamma^{r}_{ml}$$

und $C^{h}_{im/l}$ bedeutet eine kovariante Ableitung, die man durch (1) leicht erklären kann. Zu den Tensoren (4) und (5) kommt man durch Anwendung Cartanscher Methoden [2]), zu den Tensoren (5) auch durch eine naheliegende Verallgemeinerung der Methode, die zu den Krümmungstensoren im Riemannschen Raum führt [3]).

Es werden dann spezielle Räume besprochen, die durch das Verschwinden folgender Tensoren gekennzeichnet sind:

a) $\Sigma^{i}_{\cdot rlk} = 0$	b) $\Sigma^{i}_{\cdot *lk} \equiv \dot{x}^{r}\ \Sigma^{i}_{\cdot rlk} = 0$
c) $T^{i}_{\ lk} = 0$	d) $\Sigma^{i}_{\cdot *lk} = 0,\ T^{i}_{\ lk} = 0$
e) $P^{i}_{\cdot rlk} = 0$	f) $P^{i}_{\cdot *lk} \equiv \dot{x}^{r}\ P^{i}_{\cdot rlk} = 0$

Als Anwendung der Theorie der affinzusammenhängenden Räume von Linienelementen wird jetzt der Finslersche Raum (aufgefaßt als Mannigfaltigkeit von Linienelementen) behandelt.

Der Abstand ds zweier unendlich benachbarter Punkte (x) und (x + dx) wird erklärt durch

$$(7)\qquad ds = L\ (x,\ dx)$$

---

[2]) Siehe dazu E. Cartan „Les espaces de Finsler“ Actualités scientifiques et industrielles 79, Paris, Hermann & Co. 1934, insbes. Seite 14.

[3]) Siehe etwa T. Levi-Civita „Der absolute Differentialkalkül“, deutsche Ausgabe von A. Duschek, Berlin, Springer 1928, insbes. Seite 90—94.

wo L eine in den dx^i von erster Dimension positiv homogene und positive Funktion bedeutet, von der vorausgesetzt wird, daß sie stetige partielle Ableitungen der ersten 4 Ordnungen besitzt und daß die quadratische Form

$$\frac{\partial^2 (\tfrac{1}{2} L^2)}{\partial dx^i \, \partial dx^k} X^i \; X^k \tag{8}$$

der Hilfsveränderlichen $X^1 \quad X^n$ für alle zulässigen Wertesysteme dx^i positiv definit ist.

Es handelt sich dann darum, durch geeignete Forderungen in dem Finslerschen Raum

A. jedem Linienelement $(x, \dot{x})$ eine positiv definite quadratische Maßbestimmung zuzuordnen, die nur von $L(x, \dot{x})$ und ihren Ableitungen abhängt.

B. einen affinen Zusammenhang einzuführen, dessen Komponenten $C^{\,i}_{kl}$ und $\Gamma^{\,i}_{kl}$ ebenfalls nur von $L(x, \dot{x})$ und ihren partiellen Ableitungen abhängen.

Wir können hier nicht auf Einzelheiten eingehen und erwähnen bloß, daß die weiteren Entwicklungen sich wesentlich auf Untersuchungen von A. Winternitz stützen.[4] Für die Maßbestimmung ist dann bestimmend der symmetrische Tensor

$$g_{ik}(x, \dot{x}) = \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 (L^2)}{\partial \dot{x}^i \, \partial \dot{x}^k} \tag{9}$$

für die Komponenten der Parallelübertragung ergibt sich

$$C_{kli} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial \dot{x}^i} \qquad (C_{kli} = g_{kr} \, C^r_{li}) \tag{10}$$

$$\Gamma_{kil} = \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right) - C_{ilr} \frac{\partial G^r}{\partial \dot{x}^k} + C_{klr} \frac{\partial G^r}{\partial \dot{x}^i} \tag{11}$$

$$(\Gamma_{kil} = g_{ri} \, \Gamma^{\,r}_{kl})$$

wobei

$$2\, G_i = 2\, g_{ir} \, G^r = \frac{\partial^2 (\tfrac{1}{2} L^2)}{\partial \dot{x}^i \, \partial x^k} \, \dot{x}^k - \frac{\partial (\tfrac{1}{2} L^2)}{\partial x^i} \tag{12}$$

Aus den Tensoren (4) und (5) ergeben sich wegen der Forderung der Homogenität 0-ter Dimension in Bezug auf $(\dot{x})$ durch Multipli-

[4]) A. Winternitz, „Über die affine Grundlage der Metrik eines Variationsproblems". Sitzungsber. d. Preuss. Ak. d. Wiss. 1930 S. 457—469.

kation mit $L(x, \dot{x})$ die entsprechenden Tensoren im Finslerschen Raum. [5])

Außer der Vertauschungsregel für zweite kovariante Ableitungen behandeln wir schließlich noch die Winkelmetrik und zwar wird der Winkel zweier benachbarter Linienelemente $(x, \dot{x})$ und $(x + dx, \dot{x} + d\dot{x})$ erklärt.

[5]) E. Cartan, a. a. O., S. 32 ff.

Untersuchungen über Finslersche Räume.

Von Johannes M. Wegener.

(Auszug aus einer Dissertation. Referent: Prof. Dr. L. Berwald.)

Die vorliegende Arbeit behandelt einige Fragen aus der Theorie der Finslerschen Räume[1]). In einem solchen Raum ist die Entfernung zweier benachbarter Punkte $(x^1, \ldots, x^n)$ und $(x^1 + dx^1, \ldots, x^n + dx^n)$ durch eine entsprechenden Differenzierbarkeitsbedingungen genügende Funktion

$$(1) \qquad ds = L(x^1, \ldots, x^n;\ dx^1, \quad dx^n) = L(x, dx)$$

gegeben, die in den dx^i positiv-homogen von erster Dimension ist. E. Cartan[2]) hat gezeigt, daß man einen Finslerschen Raum als Mannigfaltigkeit von Linienelementen mit euklidischem Zusammenhang auffassen kann, und hat auf Grund dieser Auffassung eine Theorie der Finslerschen Räume entwickelt.

I. Zwei- und dreidimensionale Finslersche Räume.

Aus der allgemeinen Theorie von Cartan wurde zunächst die Theorie der zweidimensionalen Räume hergeleitet, die Cartan schon früher auf anderem Wege aufgestellt hatte[3]). Die Geometrie dieser Räume wird durch zwei Invarianten I und K bestimmt, von denen die erste bis auf einen Zahlenfaktor mit der bei L. Berwald[4]) als Hauptskalar bezeichneten Größe identisch ist und die Torsion des Raumes bestimmt, während die zweite der von A. L. Underhill eingeführte Krümmungsskalar ist[5]). Zu den von Cartan[3]) angegebenen

[1]) P. Finsler, Über Kurven und Flächen in allgemeinen metrischen Räumen, Diss. Göttingen 1918.

[2]) E. Cartan, Les espaces de Finsler, Paris 1934. Alle im Text ohne weitere Erklärung auftretenden Größen sind mit den bei Cartan gleichbezeichneten identisch.

[3]) E. Cartan, Sur un problème d'équivalence et la théorie des espaces métriques généralisés, Mathematica 4 (1930), S. 124—136.

[4]) L. Berwald, Über zweidimensionale allgemeine metrische Räume, Crelles Journal 156 (1927), S. 191—222.

[5]) A. L. Underhill, Invariants of the function $f(x, y, x', y')$ in the calculus of variations, Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908), S. 316—338.