kation mit L $(x, \dot{x})$ die entsprechenden Tensoren im Finslerschen Raum. [5])

Außer der Vertauschungsregel für zweite kovariante Ableitungen behandeln wir schließlich noch die Winkelmetrik und zwar wird der Winkel zweier benachbarter Linienelemente $(x, \dot{x})$ und $(x + dx, \dot{x} + d\dot{x})$ erklärt.

[5]) E. Cartan, a. a. O., S. 32 ff.

Untersuchungen über Finslersche Räume.

Von Johannes M. Wegener.

(Auszug aus einer Dissertation. Referent: Prof. Dr. L. Berwald.)

Die vorliegende Arbeit behandelt einige Fragen aus der Theorie der Finslerschen Räume[1]). In einem solchen Raum ist die Entfernung zweier benachbarter Punkte $(x^1, \ldots, x^n)$ und $(x^1 + dx^1, \ldots, x^n + dx^n)$ durch eine entsprechenden Differenzierbarkeitsbedingungen genügende Funktion

$$(1) \qquad ds = L(x^1, \ldots, x^n;\ dx^1, \qquad dx^n) = L(x, dx)$$

gegeben, die in den dx^i positiv-homogen von erster Dimension ist. E. Cartan[2]) hat gezeigt, daß man einen Finslerschen Raum als Mannigfaltigkeit von Linienelementen mit euklidischem Zusammenhang auffassen kann, und hat auf Grund dieser Auffassung eine Theorie der Finslerschen Räume entwickelt.

I. Zwei- und dreidimensionale Finslersche Räume.

Aus der allgemeinen Theorie von Cartan wurde zunächst die Theorie der zweidimensionalen Räume hergeleitet, die Cartan schon früher auf anderem Wege aufgestellt hatte[3]). Die Geometrie dieser Räume wird durch zwei Invarianten I und K bestimmt, von denen die erste bis auf einen Zahlenfaktor mit der bei L. Berwald[4]) als Hauptskalar bezeichneten Größe identisch ist und die Torsion des Raumes bestimmt, während die zweite der von A. L. Underhill eingeführte Krümmungsskalar ist[5]). Zu den von Cartan[3]) angegebenen

[1]) P. Finsler, Über Kurven und Flächen in allgemeinen metrischen Räumen, Diss. Göttingen 1918.

[2]) E. Cartan, Les espaces de Finsler, Paris 1934. Alle im Text ohne weitere Erklärung auftretenden Größen sind mit den bei Cartan gleichbezeichneten identisch.

[3]) E. Cartan, Sur un problème d'équivalence et la théorie des espaces métriques généralisés, Mathematica 4 (1930), S. 124—136.

[4]) L. Berwald, Über zweidimensionale allgemeine metrische Räume, Crelles Journal 156 (1927), S. 191—222.

[5]) A. L. Underhill, Invariants of the function $f(x, y, x', y')$ in the calculus of variations, Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908), S. 316—338.

geometrischen Bedeutungen dieser Größen wurden folgende weitere gefunden: Trägt man in der zu einer gegebenen Kurve PQ mit der (geodätischen) Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ transversalen Richtung eine infinitesimale konstante Strecke σ ab, so erhält man für die zweite Variation der Bogenlänge die Formel[6]):

$$\delta^2 s = \sigma^2 \left[\left(\frac{I}{\varrho}\right)_Q - \left(\frac{I}{\varrho}\right)_P - \int_P^Q \left(K - \frac{I_1}{\varrho}\right) ds \right]. \tag{2}$$

Die Torsion tritt ferner auf, wenn man von jedem Linienelement einer Kurve PQ in transversaler Richtung eine (infinitesimale) Länge $\sigma(s)$ derart abträgt, daß die Endpunkte eine neue Kurve bilden und entsprechende Tangentenvektoren parallel sind. Für diese Größe σ erhält man den Ausdruck:

$$\sigma = \varepsilon e^{\int_P^Q \frac{I}{\varrho} ds} \tag{3}$$

wo ε eine infinitesimale Konstante ist. Gleichzeitig zeigt sich, daß die z. B. bei Darboux[7]) angegebenen geometrischen Deutungen der geodätischen Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ auch in zweidimensionalen Finslerschen Räumen ihre Gültigkeit behalten.

Analog wie in dreidimensionalen Riemannschen Räumen lassen sich in dreidimensionalen Finslerschen Räumen die Krümmungstensoren vierter Stufe durch solche zweiter Stufe ersetzen. Mit Hilfe des Tensors[8]) ε^{ikh} erhält man die drei Tensoren:

$$K^{ih} = \frac{1}{4}\varepsilon^{ipq}\varepsilon^{hst} R_{pqst}, \quad Q^{ih} = \frac{1}{4}\varepsilon^{ipq}\varepsilon^{hst} P_{pqst}, \quad T^{ih} = \frac{1}{4}\varepsilon^{ipq}\varepsilon^{hst} S_{pqst}, \tag{4}$$

deren symmetrische Teile in bekannter Weise in jedem Linienelement je drei Hauptrichtungen und -krümmungen geben. Da aber im allgemeinen die Tensoren K^{ih} und Q^{ih} nicht symmetrisch sind, so sind in jedem Linienelement auch zwei Bivektoren ausgezeichnet.

II. Hyperflächen als Transversalflächen einer Schar von Extremalen[9]).

Eine Hyperfläche $x^i = x^i(u^1, \ldots, u^{n-1})$ kann in der von Cartan[10]) angegebenen Weise als Transversalhyperfläche einer geeigneten Extre-

---

[6]) Die Bedeutung von I_1 ist in der unter [3]) zitierten Arbeit von Cartan angegeben.

[7]) G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces III, S. 114—115.

[8]) Vgl. z. B. T. Levi-Civita, Der absolute Differentialkalkül, Berlin 1928, S. 76 ff. Dort steht e für das ε des Textes.

[9]) Lateinische Indizes laufen von 1 bis n, griechische von 1 bis n-1.

[10]) Vgl. [2]), Abschnitt XI.

malenschar betrachtet werden. Bei dieser Auffassung erscheint die Hyperfläche als Punktmannigfaltigkeit. Ordnet man jedem zur Hyperfläche transversalen Linienelement (x, x′) das n-Bein l^i (Normalvektor) und $\vartheta^i{}_\alpha = \dfrac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$ (Hyperflächenvektoren) zu, so kommt man zu den sogenannten Ableitungsgleichungen der Hyperfläche, indem man die Vektoren Dl^i und $D\vartheta^i{}_\varrho$ nach dem n-Bein zerlegt[11]):

$$(5) \qquad Dl^i = -\pi^\varrho \vartheta^i{}_\varrho, \quad D\vartheta^i{}_\varrho = \pi_\varrho{}^\sigma \vartheta^i{}_\sigma + \pi_\varrho l^i.$$

Die Koeffizienten der Pfaffschen Form $\pi_\varrho = a_{\varrho\tau}\, du^\tau$ sind zugleich die der zweiten Fundamentalform der Hyperfläche, die Koeffizienten der Pfaffschen Form $\pi_\varrho{}^\sigma = \gamma_\varrho{}^\sigma{}_\tau du^\tau$ sind die Komponenten der in der Hyperfläche induzierten Parallelverschiebung. Durch Berechnung der bilinearen Kovarianten der Formen π_ϱ und $\pi_\varrho{}^\sigma$ erhält man die Integrabilitätsbedingungen des Systems (5):

$$(6) \qquad T_{\varrho\tau} - \left[\pi_\varrho \pi_\tau\right] = \Omega_{ik}\, \vartheta^i{}_\varrho \vartheta^k{}_\tau, \quad \left[\pi_\varrho{}^\sigma \pi_\sigma\right] - \pi_\varrho{}' = \Omega_{ko} \vartheta^k{}_\varrho.$$

$T_{\varrho\tau}$ ist die Krümmung der Hyperfläche, Ω_{ik} die des Raumes. Die Gleichungen (6) verallgemeinern die Gleichungen von Codazzi und Gauß, auf die sie sich im Falle eines euklidischen Raumes auch reduzieren.

Als Hyperebenen hat man diejenigen Hyperflächen zu bezeichnen, deren Normalvektoren parallel sind. Insbesondere in den Räumen, in denen der Tensor R_{oikh} verschwindet[12]), existieren in jeder Richtung Hyperebenen. Die Minimalhyperflächen werden definiert durch das Verschwinden der ersten Variation der (n-1)-dimensionalen Oberfläche bei festgehaltener (n-2)-dimensionaler Begrenzung. Jedoch kann nur in den Räumen, in denen der Vektor $A_\iota = 0$ ist[13]), von Minimalhyperflächen schlechthin gesprochen werden. In den anderen hängt es von der zum Vergleich herangezogenen Hyperflächenschar ab, ob eine Hyperfläche Minimalhyperfläche ist oder nicht. Im besonderen Fall der Flächen in dreidimensionalen Finslerschen Räumen zeigt sich, daß alle Sätze der gewöhnlichen Flächentheorie, die nur von Eigenschaften der Flächenkurve in einem Punkte handeln, sich unverändert übertragen. Auch die Gauß-Bonnetsche Integralformel behält ihre Gültigkeit.

---

[11]) Mit DX^i wird das absolute Differential des Vektors X^i bezeichnet. Vgl. [2]), S 5.

[12]) Vgl [2]), S. 36.

[13]) Vgl. [2]), S. 13.

III. Zwei- und dreidimensionale Finslersche Räume mit der Grundform: $L = \sqrt[3]{a_{ikl}\, x'^i\, x'^k\, x'^l}$

Im zweidimensionalen Fall hat man zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Invariante R der kubischen Form[14]) verschwindet oder nicht. Der zweite Fall gibt nur ganz allgemeine Finslersche Räume, in denen keine Invariante verschwindet, oder Minkowskische Räume. Im ersten Fall sind alle Räume affinzusammenhängend und können eventuell Minkowskisch werden.

Im dreidimensionalen Fall hat man sechs Fälle zu unterscheiden. Es zeigt sich hier, daß alle Landsbergschen Räume affinen Zusammenhang haben. Im allgemeinen Fall reduzieren sie sich auf den Minkowskischen Fall, nur für spezielle Grundformen existieren auch nicht-Minkowskische affinzusammenhängende Räume.

14) Vgl. A. Clebsch, Binäre Formen, Leipzig 1872.

Über konvexe Matrixfunktionen.*)

Von Fritz Kraus.

(Auszug aus einer Dissertation. Ref. Prof. Dr. Löwner).

Diese Arbeit beschäftigt sich mit einer Verallgemeinerung des Begriffs der konvexen, skalaren Funktion auf eine Klasse von Funktionen, wo sowohl Argument wie Funktionswert eine variable, reelle, symmetrische Matrix gegebenen Grades n sind. Sie können so beschrieben werden: Man geht von einer in einem Intervall J definierten skalaren Funktion f (ω) aus. Ist X_n eine reelle symmetrische Matrix vom Grade n, deren Eigenwerte J angehören, so wird unter dem Funktionswert f (X_n) die reelle symmetrische Matrix verstanden, die aus X_n entsteht, in dem jeder Eigenvektor v beibehalten, der zugehörige Eigenwert λ jedoch durch f (λ) ersetzt wird.

In einer Arbeit in den Math. Zeitschr. 38, 177, 1933 hat K. Löwner den Begriff der Monotonie auf die geschilderten Funktionen ausgedehnt. In Analogie hierzu wird der Begriff der Konvexität einer Matrixfunktion f (X_n) so definiert: Sei $X_n^{(1)}$, $X_n^{(3)}$ ein Paar reeller symmetrischer Matrizen vom Grade n, die dem Definitionsbereiche von f (X_n) angehören, und es sei

$$(1) \qquad X_n^{(1)} \leq X_n^{(3)}$$

(Das bedeutet, daß die zu $X_n^{(3)} - X_n^{(1)}$ gehörige quadratische Form nicht negativ ist.) Man bilde nun mit einem Werte t aus dem In-

*) Die vollständige Dissertation ist in der Math. Zeitschr., Bd. 41 (Jahrg. 1936) erschienen.