III. Zwei- und dreidimensionale Finslersche Räume mit der Grundform: $L = \sqrt[3]{a_{ikl}\, x'^i\, x'^k\, x'^l}$

Im zweidimensionalen Fall hat man zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Invariante R der kubischen Form[14]) verschwindet oder nicht. Der zweite Fall gibt nur ganz allgemeine Finslersche Räume, in denen keine Invariante verschwindet, oder Minkowskische Räume. Im ersten Fall sind alle Räume affinzusammenhängend und können eventuell Minkowskisch werden.

Im dreidimensionalen Fall hat man sechs Fälle zu unterscheiden. Es zeigt sich hier, daß alle Landsbergschen Räume affinen Zusammenhang haben. Im allgemeinen Fall reduzieren sie sich auf den Minkowskischen Fall, nur für spezielle Grundformen existieren auch nicht-Minkowskische affinzusammenhängende Räume.

[14]) Vgl. A. Clebsch, Binäre Formen, Leipzig 1872.

Über konvexe Matrixfunktionen.*)

Von Fritz Kraus.

(Auszug aus einer Dissertation. Ref. Prof. Dr. Löwner).

Diese Arbeit beschäftigt sich mit einer Verallgemeinerung des Begriffs der konvexen, skalaren Funktion auf eine Klasse von Funktionen, wo sowohl Argument wie Funktionswert eine variable, reelle, symmetrische Matrix gegebenen Grades n sind. Sie können so beschrieben werden: Man geht von einer in einem Intervall J definierten skalaren Funktion f (ω) aus. Ist X_n eine reelle symmetrische Matrix vom Grade n, deren Eigenwerte J angehören, so wird unter dem Funktionswert f (X_n) die reelle symmetrische Matrix verstanden, die aus X_n entsteht, in dem jeder Eigenvektor v beibehalten, der zugehörige Eigenwert λ jedoch durch f (λ) ersetzt wird.

In einer Arbeit in den Math. Zeitschr. 38, 177, 1933 hat K. Löwner den Begriff der Monotonie auf die geschilderten Funktionen ausgedehnt. In Analogie hierzu wird der Begriff der Konvexität einer Matrixfunktion f (X_n) so definiert: Sei $X_n^{(1)}$, $X_n^{(3)}$ ein Paar reeller symmetrischer Matrizen vom Grade n, die dem Definitionsbereiche von f (X_n) angehören, und es sei

(1) $$X_n^{(1)} \leq X_n^{(3)}$$

(Das bedeutet, daß die zu $X_n^{(3)} - X_n^{(1)}$ gehörige quadratische Form nicht negativ ist.) Man bilde nun mit einem Werte t aus dem In-

*) Die vollständige Dissertation ist in der Math. Zeitschr., Bd. 41 (Jahrg. 1936) erschienen.

tervall $0 < t < 1$ die neue Matrix $(1-t)\ X_n^{(1)} + t X_n^{(3)}$, deren Eigenwerte bekanntlich auch in J hineinfallen. f (ω) heiße nun konvex von n-ter Stufe, wenn stets

$$(2) \qquad f((1-t)\ X_n^{(1)} + t\ X_n^{(3)}) \leq (1-t)\ f(X_n^{(1)}) + t \cdot f\ (X_n^{(3)})$$

wie auch $X_n^{(1)}$, $X_n^{(3)}$, t in Übereinstimmung mit unseren Forderungen gewählt werden. Die Konvexität erster Stufe fällt mit der gewöhnlichen Konvexität zusammen.

Das Ziel der Arbeit ist es, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür zu finden, daß eine Funktion konvex von n-ter Stufe sei. Die wichtigste Vorstufe zur Aufstellung derselben bildet der Beweis des Satzes:

Eine von zweiter Stufe konvexe Funktion ist mindestens zweimal stetig differenzierbar.

Auf Grund der einfachen Bemerkung, daß jede von n-ter Stufe $(n \geqq 2)$ konvexe Funktion auch von jeder niedrigeren Stufe konvex ist, folgt, daß jede Aussage, die für eine konvexe Funktion von einer bestimmten Stufe gültig ist, auch für konvexe Funktionen jeder höheren Stufe in Geltung bleibt. Es besteht also zweimal stetige Differenzierbarkeit auch bei jeder höheren Stufe. Ist aber einmal die Differenzierbarkeit nachgewiesen, so ergeben sich notwendige und hinreichende Bedingungen verhältnismäßig einfach auf Grund des Hilfssatzes.

Hilfssatz 1. Ist eine Funktion f (ω) in einem Intervall zweimal stetig differenzierbar, so auch die zugehörige Matrixfunktion. Das soll naturgemäß bedeuten, daß die Elemente der Matrix f (X_n) zweimal stetig differenzierbare Funktionen der Elemente von X_n sind.

Zu Beweisführung des oben erwähnten Satzes werden noch zwei Bemerkungen mit Vorteil ausgenützt:

Die erste sagt aus, daß die Beziehung zwischen der Matrix (C_n) und der ihr zugeordneten Matrix f (C_n) orthogonal invariant ist, das heißt, daß im Falle eine Matrix X_n^* aus X_n durch eine feste orthonogale Transformation T entsteht, mit X_n auch X_n^* dem Definitionsbereich vom f (X_n) angehört, und daß die Beziehung

$$f\ (X_n^*) = (f\ (X_n)\ )^*$$

besteht,

die zweite, daß die Ungleichung

$$A_n \leq B_n$$

invariant gegenüber jeder linearen homogenen, also insbesondere jeder othogonalen Transformation ist.

Aus diesen Bemerkungen folgt nun, daß man, wenn die Konvexität einer Matrixfunktion zum Ausdruck gebracht werden soll, annehmen kann, es sei eine der in der Konvexitätrelation (2) auftretenden Matrizen, etwa $X_n^{(2)} = (1-t)\ X_n^{(1)} + t\ X_n^{(3)}$ auf die Hauptachsen gebracht. Da wir uns hier auf den Fall $n = 2$ beschränken können, bezeichnen wir deren Eigenwerte mit $\lambda_1 \leqq \lambda_2$ und der Gedankengang des Beweises über die Differenzierbarkeiteigenschaft ist kurz folgender:

Da nach Voraussetzung (siehe (1)) $X_2^{(1)} \leq X_2^{(3)}$ und wegen $0 < t < 1$ offenbar $X_2^{(2)}$ zwischen $X_2^{(1)}$ und $X_2^{(3)}$ gelegen ist, so gilt für die Eigenwerte von $X_2^{(1)}$ die mit $\nu_1 \leqq \gamma$ bezeichnet werden sollen, das Ungleichungspaar

$$\nu_1 \leqq \lambda_1, \qquad \leqq \lambda_2$$

und für das Paar von Eigenwerten von $X_2^{(3)}$, die $\gamma^* \leqq \nu_2$ heißen mögen,

$$\lambda_1 \leqq \gamma^* \qquad \lambda_2 \leqq \nu_2.$$

Der wesentliche Gedanke des Beweises besteht darin, daß wir die Konvexitätsbedingung nicht allgemein ansetzen, sondern nur für solche Matrixtripel $X_2^{(1)}$, $X_2^{(2)}$, $X_2^{(3)}$, für die

$$\gamma^* = \gamma$$

ist. Dieser Wert liegt offenbar im Intervall $< \lambda_1, \lambda_2 >$. Es ergibt sich, daß die zweimalige Differenzierbarkeit bereits aus den Ungleichungen folgt, welche aus der Konvexitätsrelation (siehe (2)) in diesem Spezialfall fließen.

Bei der Durchführung des Beweises ist es von besonderer Wichtigkeit, die Frage zu entscheiden, ob bei willkürlicher Wahl von fünf Werten in der Anordnung

$$\nu_1 < \lambda_1 < \gamma < \lambda_2 < \nu_2 \tag{3}$$

drei Matrizen $X_2^{(1)}$, $X_2^{(2)}$, $X_2^{(3)}$ gefunden werden können, die auf einer „Geraden" liegen und von denen $X_2^{(1)}$ die Eigenwerte ν_1 und γ, $X_2^{(2)}$ die Eignewerte λ_1 und λ_2 und $X_2^{(3)}$ die Eigenwerte γ und ν_2 besitzen. Daraus, daß $X_2^{(1)}$ und $X_2^{(3)}$ den Eigenwert γ gemein haben, und $\nu_1 < \nu_2$ ist, folgt, falls die Frage überhaupt eine Lösung besitzt, jedenfalls die Ungleichung $X_2^{(1)} \leq X_2^{(3)}$, so daß diese früher in die Konvexitätsbedingung eingeführte Ungleichung hier nicht besonders angesetzt werden muß. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir bei der weiteren Untersuchung $\gamma = 0$ annehmen. In diesem Falle muß man also den Ansatz machen:

$$\begin{aligned}
X_2^{(2)}\ (x, x) &= \lambda_1\ x_1^2 + \lambda_2\ x_2^2 \\
X_2^{(1)}\ (x, x) &= \nu_1\ (b_1 x_1 + b_2 x_2)^2 \qquad (b_1^2 + b_2^2 = 1) \\
X_2^{(3)}\ (x, x) &\quad \nu_2\ (a_1 x_1 + a_2 x_2)^2 \qquad (a_1^2 + a_2^2 = 1)
\end{aligned}$$

Wir haben noch analytisch zum Ausdruck zu bringen, daß die drei Matrizen auf einer „Geraden" liegen. Das bedeutet, daß die Differenz $X_2^{(2)} - X_2^{(1)}$ sich von $X_2^{(3)} - X_2^{(2)}$ um einen skalaren Faktor c unterscheidet; dieser hängt mit dem früher eingeführten Parameter t durch die Relation $c = \frac{t}{1-t}$ zusammen. Dies drückt sich aber nach Einführung der Bezeichnung

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 = \mathfrak{L}_1, \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 = \mathfrak{L}_2$$

durch die Indentität

$$(c+1)\, X_2^{(2)}\,(x, x) = c\, \nu_2\, \mathfrak{L}_2^2 + \nu_1\, \mathfrak{L}_1^2$$

aus. Das bedeutet fünf Koeficientengleichungen, die hier nicht explicit angeschrieben werden sollen.

Durch eine nähere Betrachtung derselben ergibt sich, daß eine Lösung unserer Aufgabe dann und nur dann besteht, wenn für die Eigenwerte die Ungleichung

$$(4) \qquad \nu_1 \lambda_2 + \nu_2 \lambda_1 - \nu_1 \nu_2 \geqq 0$$

erfüllen. Läßt man die Voraussetzung $\gamma = o$ fallen, so nimmt diese offenbar folgende Gestalt an:

$$(4^*) \qquad (\lambda_1 - \xi)(\nu_2 - \xi) + (\lambda_2 - \xi)(\nu_1 - \xi) - (\nu_1 - \xi)(\nu_2 - \xi) \geqq 0.$$

Man nehme nun irgend welche fünf Werte aus dem Definitionsintervall von f (ω), die dem doppelten System von Ungleichungen (3) und (4*) genügen, bestimme die zugehörigen Matrizen $X_2^{(1)}$, $X_2^{(2)}$, $X_2^{(3)}$ und gehe mit ihnen in die Konvexitätsrelation (2) ein. Indem man die bekannten Determinantenungleichungen für eine Nicht-negative Matrix auf die linke Seite derselben anwendet, kommt man nach rechnerisch etwas schwierigen Umformungen zu dem wichtigen Resultat:

Eine in einem Intervall von zweiter Stufe konvexe Funktion ist dort zunächst im gewöhnlichen Sinne konvex und sie genügt für irgend fünf Werte des Intervalles, die der Relation (3) und (4*) genügen der Ungleichung.

$$\varkappa(\nu_1\, \xi\, \lambda_1)\, \varkappa(\lambda_2\, \xi\, \nu_2)\,(\nu_1 - \lambda_1)\,(\nu_2 - \lambda_2) - \varkappa(\lambda_2\, \xi\, \lambda_1)\, \varkappa(\nu_1\, \xi\, \nu_2)$$
$$[(\nu_1 - \xi)(\nu_2 - \xi) - (\lambda_1 - \xi)(\nu_2 - \xi) - (\lambda_2 - \xi)(\nu_1 - \xi)] \leqq 0.$$

Aus diesen Bedingungen ergibt sich durch passendes Zusammenrücken von Werten die zweimal stetige Differenzierbarkeit der Funktion f (ω). Unter $\varkappa\ (\xi, \eta\, \zeta)$ verstehen wir allgemein den mit dem Faktor $^1/_2$ multiplizierten zweiten Differenzquotienten der Funktion f (ω) für die Argumentwerte ξ, η, ζ.

Nachdem die zweimal stetige Differenzierbarkeit von Funktionen, welche von höherer Stufe konvex sind, bewiesen ist, wird zunächst der Begriff der erweiterten Differenzierbarkeit von zweiter Stufe oder der zweimaligen Differenzierbarkeit im weiteren Sinne herangezogen, der bekanntlich folgendermaßen zu definieren ist:

Eine Funktion f $(x_1, x_2 \ldots x_m)$ heißt an der Stelle $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0)$ ihres Definitionsbereiches zweimal differenzierbar im weiteren Sinne oder eigentlich differenzierbar von zweiter Stufe, wenn neben Konstanten

$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ noch weitere Konstante α_{ik} ($i, k = 1, 2 \ldots m$, $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$) angegeben werden können von folgender Art:

Zu jedem positiven ε kann ein positives $\delta_\varepsilon(x_1^0, x_2^0 \ldots x_m^0)$ so angegeben werden, daß für jeden Punkt $(x_1, x_2 \ldots x_m)$ des Definitionsintervalles der Funktion, welcher der Ungleichung

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2} < \delta_\varepsilon \quad (x_1^0, x_2^0 \ldots x_m^0)$$

genügt stets auch

$$\left| \begin{array}{l} f(x_1, x_2 \ldots x_m) - f(x_1^0, x_2^0 \ldots x_m^0) - \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i (x_i - x_i^0) - \\ - \frac{1}{2} \sum\limits_{i\,k=1}^{m} \alpha_{ik} (x_i - x_i^0)(x_k - x_k) \end{array} \right| < \varepsilon\, r^2$$

ausfällt.

Analog kann man eine Differenzierbarkeit im weiteren Sinne von höherer als zweiter Stufe definieren.

Dieser Begriff läßt sich ohne weiteres von skalaren auf Matrixfunktionen übertragen.

Eine Matrixfunktion $f(X_n)$ heiße im weiteren Sinne zweimal differenzierbar von k-ter Stufe, wenn ihre Elemente von k-ter Stufe differenzierbare Funktionen der Elemente der Matrix X^n sind.

Nach Einführung dieses Begriffes werden zunächst zwei Hilfssätze bewiesen:

Hilfssatz II: Ist die skalare Funktion $f(\omega)$ in ihrem Definitionsbereich überall von zweiter Stufe im weiteren Sinne differenzierbar, so kann dasselbe von der Matrixfunktion $f(X_n)$ behauptet werden.

Hilfssatz III: Ist eine skalare Funktion, (die wir uns der Einfachheit halber in einem offenen Prisma

$$a_i < x_i < b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

definiert denken), dort überall eigentlich differenzierbar von zweiter Stufe in weiterem Sinne und kann das in der Definition der Differenzierbarkeit auftretende δ_ε bei jedem positiven ε für alle Punkte gleich gewählt werden (gleichmäßige Differenzierbarkeit im weiteren Sinne), dann ist die Funktion im ganzen Prisma zweimal stetig differenzierbar.

Unter Verwendung dieser beiden Hilfssätze wird dann der Beweis des Hilfssatzes I. geführt.

Im letzten Abschnitt der Arbeit werden dann die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Konvexität n-ter Stufe einer in einem offenen Intervall definierten Funktion abgeleitet, die die t durch die Relation $c = \frac{t}{1-t}$ zusammen. Dies drückt sich aber nach Einführung der Bezeichnung

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 = \mathfrak{L}_1, \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 = \mathfrak{L}_2$$

durch die Indentität

$$(c + 1)\ X_2^{(2)}\ (x, x) = c\ \nu_2\ \mathfrak{L}_2^{\,2} + \nu_1\ \mathfrak{L}_1^{\,2}$$

aus. Das bedeutet fünf Koeficientengleichungen, die hier nicht explicit angeschrieben werden sollen.

Durch eine nähere Betrachtung derselben ergibt sich, daß eine Lösung unserer Aufgabe dann und nur dann besteht, wenn für die Eigenwerte die Ungleichung

(4) $$\nu_1\ \lambda_2 + \nu_2\ \lambda_1 - \nu_1\ \nu_2 \geqq 0$$

erfüllen. Läßt man die Voraussetzung $\gamma = o$ fallen, so nimmt diese offenbar folgende Gestalt an:

(4*) $$(\lambda_1 - \xi)\ (\nu_2 - \xi) + (\lambda_2 - \xi)\ (\nu_1 - \xi) - (\nu_1 - \xi)\ (\nu_2 - \xi) \geqq 0.$$

Man nehme nun irgend welche fünf Werte aus dem Definitionsintervall von f (ω), die dem doppelten System von Ungleichungen (3) und (4*) genügen, bestimme die zugehörigen Matrizen $X_2^{(1)}$, $X_2^{(2)}$, $X_2^{(3)}$ und gehe mit ihnen in die Konvexitätsrelation (2) ein. Indem man die bekannten Determinantenungleichungen für eine Nicht-negative Matrix auf die linke Seite derselben anwendet, kommt man nach rechnerisch etwas schwierigen Umformungen zu dem wichtigen Resultat:

Eine in einem Intervall von zweiter Stufe konvexe Funktion ist dort zunächst im gewöhnlichen Sinne konvex und sie genügt für irgend fünf Werte des Intervalles, die der Relation (3) und (4*) genügen der Ungleichung.

$$\varkappa\ (\nu_1\ \xi\ \lambda_1)\ \varkappa\ (\lambda_2\ \xi\ \nu_2)\ (\nu_1 - \lambda_1)\ (\nu_2 - \lambda_2) - \varkappa\ (\lambda_2\ \xi\ \lambda_1)\ \varkappa\ (\nu_1\ \xi\ \nu_2)$$
$$[(\nu_1 - \xi)\ (\nu_2 - \xi) - (\lambda_1 - \xi)\ (\nu_2 - \xi) - (\lambda_2 - \xi)\ (\nu_1 - \xi)] \leqq 0.$$

Aus diesen Bedingungen ergibt sich durch passendes Zusammenrücken von Werten die zweimal stetige Differenzierbarkeit der Funktion f (ω). Unter $\varkappa\ (\xi,\ \eta\ \zeta)$ verstehen wir allgemein den mit dem Faktor $^1/_2$ multiplizierten zweiten Differenzquotienten der Funktion f (ω) für die Argumentwerte ξ, η, ζ.

Nachdem die zweimal stetige Differenzierbarkeit von Funktionen, welche von höherer Stufe konvex sind, bewiesen ist, wird zunächst der Begriff der erweiterten Differenzierbarkeit von zweiter Stufe oder der zweimaligen Differenzierbarkeit im weiteren Sinne herangezogen, der bekanntlich folgendermaßen zu definieren ist:

Eine Funktion f $(x_1, x_2\ .\ x_m)$ heißt an der Stelle $(x_1^{\,0}, x_2^{\,0}, ..\, x_m^{\,0})$ ihres Definitionsbereiches zweimal differenzierbar im weiteren Sinne oder eigentlich differenzierbar von zweiter Stufe, wenn neben Konstanten

$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ noch weitere Konstante α_{ik} ($i, k = 1, 2 \ldots m$, $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$) angegeben werden können von folgender Art:

Zu jedem positiven ε kann ein positives $\delta_\varepsilon (x_1^0, x_2^0 \ldots x_m^0)$ so angegeben werden, daß für jeden Punkt $(x_1, x_2 \ldots x_m)$ des Definitionsintervalles der Funktion, welcher der Ungleichung

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2} < \delta_\varepsilon \quad (x_1^0, x_2^0 \ldots x_m^0)$$

genügt stets auch

$$\left| \begin{array}{l} f(x_1, x_2 \ldots x_m) - f(x_1^0, x_2^0 \ldots x_m^0) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (x_i - x_i^0) - \\ - \frac{1}{2} \sum_{i\,k=1}^{m} \alpha_{ik} (x_i - x_i^0)(x_k - x_k) \end{array} \right| < \varepsilon\, r^2$$

ausfällt.

Analog kann man eine Differenzierbarkeit im weiteren Sinne von höherer als zweiter Stufe definieren.

Dieser Begriff läßt sich ohne weiteres von skalaren auf Matrixfunktionen übertragen.

Eine Matrixfunktion $f(X_n)$ heiße im weiteren Sinne zweimal differenzierbar von k-ter Stufe, wenn ihre Elemente von k-ter Stufe differenzierbare Funktionen der Elemente der Matrix X_n sind.

Nach Einführung dieses Begriffes werden zunächst zwei Hilfssätze bewiesen:

Hilfssatz II: Ist die skalare Funktion $f(\omega)$ in ihrem Definitionsbereich überall von zweiter Stufe im weiteren Sinne differenzierbar, so kann dasselbe von der Matrixfunktion $f(X_n)$ behauptet werden.

Hilfssatz III: Ist eine skalare Funktion, (die wir uns der Einfachheit halber in einem offenen Prisma

$$a_i < x_i < b_i \quad (i = 1, \cdots, m)$$

definiert denken), dort überall eigentlich differenzierbar von zweiter Stufe in weiterem Sinne und kann das in der Definition der Differenzierbarkeit auftretende δ_ε bei jedem positiven ε für alle Punkte gleich gewählt werden (gleichmäßige Differenzierbarkeit im weiteren Sinne), dann ist die Funktion im ganzen Prisma zweimal stetig differenzierbar.

Unter Verwendung dieser beiden Hilfssätze wird dann der Beweis des Hilfssatzes I. geführt.

Im letzten Abschnitt der Arbeit werden dann die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Konvexität n-ter Stufe einer in einem offenen Intervall definierten Funktion abgeleitet, die die

Gestalt von Differentialungleichungen haben. Der Gedankengang ist folgender:

Daß eine Funktion f (ω) konvex von n-ter Stufe ist, bedeutet, daß die zugehörige Matrixfunktion f (X_n) auf einer „Geraden"

$$X_n = L_n + t\,H_n \tag{5}$$

mit einem $H_n \geq o$ die Eigenschaft besitzt, daß die zu $f(L_n + t\,H_n) = \Phi(t)$ gehörige quadratische Form in n Veränderlichen für jede Wahl derselben eine im gewöhnlichen Sinne konvexe, skalare Funktion von t ist. Nun ist aber bewiesen, daß $f(X_n)$ zweimal stetig differenzierbar von X_n abhängt. Es ist also auch die eben eingeführte skalare Funktion von t zweimal stetig differenzierbar im t. In diesem Falle wird bekanntlich die Konvexität durch die Nichtnegativität der zweiten Ableitung vollständig zum Ausdruck gebracht. Es ist also

$$\Phi''(t) \geq 0$$

und insbesondere, falls L_n zum Definitionsbereich vom $f(X_n)$ gehört

$$\Phi''(o) \geq 0 \tag{6}$$

$\Phi''(o)$ ist von der Wahl von L_n und H_n abhängig.

Die Konvexität wird vollständig durch die Ungleichung (6) zum Ausdruck gebracht, wenn man L_n alle möglichen Matrizen, deren Eigenwerte in das Definitionsintervall von f (ω) hineinfallen und H_n alle nichtnegativen Matrizen durchlaufen läßt.

Um also für die notwendigen und hinreichenden Konvexitätsbedingungen einen analytischen Ausdruck zu erhalten, wird die Berechnung von $\Phi''(o)$ wirklich durchgeführt.

Das sich aus dieser zunächst ergebende Kriterium besagt, daß die Matrix

$$\left(\sum_{l=1}^{n} \varkappa\,(\lambda_i\ \lambda_k\ \lambda_l)\ d\,x_{il}\,d\,x_{kl}\right) \geq o \tag{7}$$ [1]

sein muß für $d\,X_n \geq 0$.

Durch eine weitere Spezialisierung der dx_{ik} folgen aus dieser Ungleichung n weitere, nämlich

$$\sum_{i,k=1}^{n} \varkappa\,(\lambda_i\ \lambda_k\ \lambda_m)\ \xi_i\ \xi_k \geqq 0 \qquad (m = 1, 2 \quad n) \tag{8}$$

und aus den Bestehen der n Ungleichungen (8) folgt wieder (7) zurück.

Damit ist erkannt, daß durch die Ungleichungen (8) notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konvexität n-ter Stufe der Funktion f (ω) gegeben sind.

---

[1]) Falls Zusammenfallen von Werten in k $(\lambda_i, \lambda_k, \lambda_l)$ stattfindet, hat man darunter den entsprechenden Differenzialausdruck zu verstehen.

Da die Nichtnegativität einer quadratischen Form durch Nichtnegativität ihrer Hauptminoren zum Ausdrucke gebracht werden kann, so spricht sich das Hauptergebnis der Arbeit in folgendem Satze aus:

Damit eine Funktion in einem offenen Intervall konvex von n-ter Stufe sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie das selbst zweimal stetig differenzierbar ist, und daß alle Determinanten von der Form

$$\left| \varkappa\,(\xi_0, \xi_i, \xi_k) \right|_{i,k=1}^{p}$$

für **p < n** bei **beliebiger** Wahl der p + 1 Argumente $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ aus dem Definitionsintervall der Funktion f (ω) und für **p = n** bei der **einzigen Einschränkung** daß ξ_0 mit einem der folgenden ξ_i-Werte **zusammenfällt,** nicht negativ ausfallen.

Die Arbeit schließt mit der aus den Ungleichungen (8) sich ergebenden Bemerkung, daß Konvexität der Matrixfunktion sogar in dem erweiterten Sinne besteht, daß in der Relation (5) für H_n eine beliebige Matrix eingesetzt werden kann.

Eine Normalform für Vierererzöpfe. [1])

Von Walter Fröhlich, Prag.

§ 1. Einleitung.

Nach Artin läßt die Gruppe der Vierererzöpfe die Darstellung durch zwei Erzeugende

$$a \quad \sigma$$

mit den definierenden Relationen [2])

$$a^4 = (a\sigma)^3 \qquad \sigma \rightleftarrows a^2 \sigma a^{-2}$$

zu. O. Schreier hat eine Normalgestalt für Dreierzöpfe angegeben und damit auch das Transformationsproblem für sie gelöst. Im folgenden soll eine Normalform für Vierererzöpfe aufgestellt werden: Wir schlagen zunächst den gleichen Weg ein wie Schreier und setzen

$$a\sigma = b \tag{1}$$

Dann wird aus der ersten Relation

$$a^4 = b^3 \tag{2}$$

---

[1]) Über die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit habe ich unter dem gleichen Titel am „II. Kongreß der Mathematiker der slaw. Länder" (23.—28. IX. 1934 in Prag) ganz kurz berichtet.

[2]) E. Artin, Theorie der Zöpfe, in den „Abhandlungen aus dem mathem. Seminar der Hamburger Universität", Bd. IV, Seite 54, Formeln (16) und (17).