Lehrbuch

der

reinen und angewandten

Krystallographie

von

Dr. *Carl Friedrich Naumann*,

Professor an der Bergakademie zu Freiberg.

In zwei Bänden.

Erster Band.

Mit 22 Kupfertafeln.

Leipzig:

F. A. Brockhaus.

1830.

Den

Herren Professoren

Mohs und Weiss,

den

Koryphäen

der

teutschen Krystallographen

weihet

diese Arbeit

der

Verfasser.

Vorrede.

Als ich meinen, vor vier Jahren erschienenen, Grundriss der Krystallographie bearbeitete, in welchem ich die repräsentative und systematische Methode der Mohs'schen mit den so einfachen geometrischen Principien der Weiss'schen Krystallographie zu vereinigen suchte, da war ich noch unbekannt mit den grossen Vortheilen einer analytisch-geometrischen Behandlung dieser Wissenschaft, wiewohl selbige in der, zuerst von Weiss geltend gemachten Lehre von den Axen ihre wesentliche Grundlage gefunden hatte. Bald nachher wurde ich jedoch durch die Arbeiten von Lamé, Kupffer, Neumann u. A. auf diese Behandlungsweise aufmerksam gemacht, und gelangte allmälig zu der Ueberzeugung, dass sie die einfachste und natürlichste unter allen Methoden sey und seyn müsse. Ich versuchte nun eine Umarbeitung der ganzen Wissenschaft im Geiste dieser Methode, und habe sie auch an der hiesigen Bergakademie seit drei Jahren in ihrer neuen Form vorgetragen. Der Erfolg entsprach meinen Erwartungen vollkommen, indem zumal die krystallographischen Berechnungen eine Einfachheit und Eleganz erhielten, wie ihnen solche durch eine trigonometrische oder synthetisch-geometrische Begründung nimmer verschafft werden konnten.

Da ich nun ausserdem durch fremde Forschungen sowohl, als auch durch eigene Untersuchungen auf die Entdeckung mancher Unvollkommenheiten geleitet wurde, mit welchen jener Grundriss behaftet ist; da ich namentlich die Lehre von der Ableitung einer theilweisen, und die, früher fast nur angedeutete, Lehre von den Combinationen einer gänzlichen Umarbeitung unterwerfen musste, auch endlich die so interessanten und fruchtbaren Lehren der angewandten Krystallographie in den Kreis meiner Studien und Forschungen aufnahm, so bildete sich mir allmälig die Wissenschaft in derjenigen Form aus, in welcher ich sie gegenwärtig den Krystallographen und Mathematikern zur Prüfung vorlege.

Dieser erste Band begreift, nebst der Elementarlehre, die drei ersten Abschnitte der eigentlichen reinen Krystallographie; ein bald nachfolgender zweiter Band wird die übrigen Abschnitte der reinen und die angewandte Krystallographie enthalten, welche letztere die Lehre von den Unvollkommenheiten der Krystallformen und den Zwillingskrystallen, von der Messung, Zeichnung und Modellirung der Krystalle behandelt, und mit einer kurzen Uebersicht der Geschichte und Literatur der Wissenschaft endigen wird.

Der Elementarlehre glaubte ich eine, dem nächsten Bedürfnisse der Krystallographie entsprechende Darstellung der analytischen Geometrie der geraden Linie und Ebene einverleiben zu müssen, weil dieselbe nicht nur überhaupt weniger betrieben zu werden scheint, sondern sich auch, bei der, in den meisten Lehrbüchern befolgten, zwar etwas einfacheren, aber minder symmetrischen Schreibart der Gleichungen nicht so unmittelbar an die Bezeichnung der Krystallgestalten anschliesst, als wenn man z. B. die Gleichung $Ax+By+Cz+D=0$ auf die Form $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ bringt. Dass ich dabei die vier ebenen Winkelräume, in welche die Ebene durch beide Axen getheilt wird, allgemein Quadranten, und eben so die acht körperlichen Winkelräume, in welche der Raum durch die drei Coordinatebenen getheilt wird, allgemein Raumoctanten genannt habe, es mögen die Axen recht- oder schiefwinklig seyn, diess ist eine Licenz, welche manche Bequemlichkeit gewährt, und mir daher von den Mathematikern vergeben werden mag.

Carl Naumann.

Einleitung.

Wenn wir die Naturgeschichte des Thierreiches oder jene des Pflanzenreiches studiren wollen, so werden wir vor allen Dingen darüber ins Reine kommen müssen, was denn eigentlich zunächst der Gegenstand unserer wissenschaftlichen Betrachtung in jedem der genannten Reiche seyn kann. Das Thierreich, das Pflanzenreich ohne Weiteres in seiner Gesammtheit, und gleichsam in einem Anlaufe *en masse* zu studiren, das ist eben so unmöglich, als den Homer zu lesen, ohne Kenntniss der einzelen griechischen Worte. Vielmehr muss unser Studium mit Beobachtung und Erforschung der Einzeldinge beginnen, und kann sich nur allmälig zu den grösseren und grösseren Gruppen derselben erheben.

Was ist nun aber das Einzelding, welches wir zunächst in das Auge fassen müssen, gleichsam die Einheit, das untheilbare letzte Glied, auf welches wir gelangen, wenn wir das Thierreich oder Pflanzenreich in immer kleinere Gebiete zerfällen? — Offenbar nichts Anderes, als was der gesunde Menschenverstand als ein Thier, als eine Pflanze unterscheidet und benennt; diese vollkommen isolirten Wesen, von denen ein jedes gleichsam eine kleine Welt umschliesst, welche ihre eigenen Zwecke und die Bedingungen zur Erreichung derselben in sich trägt, und für welche die Gesammtheit der übrigen Dinge als Aussenwelt vorhanden ist. Das einzele Thier, die einzele Pflanze, mit einem Worte, das organische Individuum stellt sich unserm Blicke so unverkennbar als die selbständige und, wenn auch zu dem Ganzen contribuirende, doch von ihm losgerissene Einheit dar, dass unsere Frage ganz überflüssig, und der näheren Beachtung kaum werth zu seyn scheint. Aber dennoch ist sie es, weil Fälle eintreten, wo dieses Individuum nicht mehr so isolirt und selbständig erscheint, wie es in diesem Schmetterling oder jenem Eichbaume selbst vom Kinde anerkannt wird; weil Fälle eintreten, wo wir dieses Individuum mit unsern Sinnen kaum zu entdecken vermögen, und uns fast mehr durch Raisonnement als durch Anschauung von seinem Daseyn überzeugen müssen. In den höheren Thier- und Pflanzenclassen sind freilich die Individuen so vollkommen abgeschlossene und selbständige Einzelwesen, dass der Naturforscher gar keiner vorläufigen Ueberlegung bedarf, um sich zu überzeugen, ob er es mit Individuen zu thun habe, oder nicht. Selbst da, wo die Association der Individuen schon anfängt Gesetz zu werden, wird er nicht leicht Gefahr laufen, das Individuum zu verkennen; und erst da aufhören, gleichsam blindlings hinauszugreifen, wo, wie in den Flechten und zusammengesetzten Polypen, eine innige Verwachsung und Verschmelzung der Individuen herrschend wird.

Wenn wir uns nun im Gebiete der organischen Natur überall auf das Individuum, als das nächste Object unserer wissenschaftlichen Forschung, verwiesen finden; wenn wir in den Individuen die Gattung studiren, und uns sorgfältig hüten müssen, dieselben da, wo sie gleichsam in der organischen Masse versunken sind, zu verkennen und zu übersehen; so entsteht uns wohl ganz natürlich die Frage, wie sich denn die Sache im Gebiete der anorganischen Natur verhalte; ob auch da der Begriff des Individuums seine angemessene Verwirklichung gefunden, oder ob nur die Masse schlechthin, gleichsam im chaotischen Zustande, als eine *rudis indigestaque moles* existire. — Es kommt nur auf eine Vergleichung der organischen Individuen mit den mancherlei Vorkommnissen der anorganischen Materie an, um diese Frage mit Ja oder mit Nein zu beantworten. Räumliche Isolirung durch allseitige Abgeschlossenheit der Umrisse einer selbständigen, in sich vollendeten Gestalt ist das Erste, wodurch sich uns die Individuen der Thier- und Pflanzenwelt zu erkennen geben. Eine genauere Betrachtung belehrt uns ferner, dass diese, mancherlei Organe und Gliedmaassen umschliessende, Gestalt allen Functionen des Individuums, allen Bedürfnissen seiner inneren Oekonomie, allen Aeusserungen seiner Lebenskraft, mit einem Worte, dass sie den Zwecken seines Daseyns vollkommen angemessen ist; und, wie zusammengesetzt auch die äussere und innere Structur der Thier- und Pflanzenkörper, wie verwickelt das Spiel ihrer Thätigkeiten seyn möge, überall finden wir als höchstes Gesetz dieselbe Einheit des Zweckes in der bewundernswürdigen Harmonie ausgesprochen, mit welcher diess Alles ineinandergreift.

Im Gebiete der anorganischen Natur vermissen wir freilich das, was uns in den organischen Individuen als Lebenskraft und Lebenszweck an unsers eigenen Daseyns Bedingungen und Zwecke erinnert; hier, auf einer tieferen Stufe des Seyns und Wirkens, verlieren jene Begriffe ihre Bedeutung, und die sich im steten Kreislaufe wiederholenden biologischen Kraftäusserungen und physiologischen Processe der Thier- und Pflanzenkörper sinken zu blossen physikalischen Kraftäusserungen und chemischen Processen herab. Giebt es daher Individuen im Bereiche der anorganischen Natur, so müssen wir sie diesem allgemeinen Charakter derselben angemessen finden, so können wir an sie nicht dieselben Anforderungen machen, können sie nicht mit demselben Maassstabe messen wie die Individuen der organischen Natur. Aber ein ähnliches Verhältniss der räumlichen Isolirung, ein ähnlicher Zusammenhang zwischen der Gestalt und demjenigen, was wir als Repräsentanten der biologischen und physiologischen Kraftäusserungen so eben genannt haben, muss auch hier Statt finden, wenn anders Individuen auch in diesem Naturreiche vorhanden sind.

Es entstehen uns daher die beiden wichtigen Fragen:

1. Giebt es Vorkommnisse der anorganischen Materie von selbständiger, ringsum geschlossener Gestalt?
2. Lässt sich für diese Vorkommnisse ein Wechselverhältniss, eine nothwendige gegenseitige Beziehung und Abhängigkeit zwischen Form und Qualitäten nachweisen.

Die anorganische Materie ist bekanntlich eines dreifachen Aggregatzustandes fähig, indem sie entweder gasig, oder flüssig, oder starr auftritt. Da nun der gasförmige sowohl als der flüssige Zustand durch absolute Gestaltlosigkeit charakterisirt sind*), indem sich jede in einem dieser Zustände befindliche Substanz den Conturen der sie umgebenden starren Körper anschmiegt, und dadurch die völlige Zufälligkeit und Bedeutungslosigkeit ihrer räumlichen Begränzung beurkundet, so ist auch hiermit für die gasigen und

---

*) Die Tropfenform kann wohl kaum als eine Instanz gegen diese Behauptung gelten, so wenig als die durch die Schwerkraft bedingte horizontale Oberfläche der Flüssigkeiten.

flüssigen Substanzen jeder Gedanke an die Möglichkeit nicht nur einer selbständigen und eigenthümlichen Gestalt, sondern auch eines Causalzusammenhanges zwischen Form und Qualitäten abgewiesen. Wir finden uns daher nur noch an die starren Körper gewiesen, welche in der Stabilität ihrer Formen wenigstens die Bedingungen für jene Möglichkeit enthalten.

Es zeigen aber die starren anorganischen Körper in Bezug auf ihre Configuration zwei sehr auffallende Verschiedenheiten. Einige erscheinen in mehr oder weniger regelmässigen polyëdrischen Gestalten, deren Flächen unter bestimmten Winkeln zusammenstossen, und oft so glatt und eben sind, dass man eher einen durch künstliche Schleifung, als durch die Natur selbst facettirten Körper vor sich zu haben glaubt. Andere, und zwar die meisten anorganischen Körper dagegen treten in Gestalten auf, welche kaum Spuren von jener Regelmässigkeit zeigen, und entweder in den mannichfaltigsten, platten oder krummflächigen Begränzungen frei in den Raum hinausragen, oder in ähnlichen, zum Theil auch ganz unbestimmbaren Formen von andern Massen umschlossen werden.

Aber selbst jene regelmässig gestalteten Körper zeigen sich nicht immer in ringsum geschlossenen Formen, so dass es scheint, als könne ihnen eine allseitige räumliche Isolirung nicht immer zugestanden werden. Zwar giebt es vollkommene, ringsum ausgebildete Polyëder, welche gleichsam frei schwebend in einer sie umhüllenden Matrix suspendirt sind; allein bei Weitem die meisten polyëdrischen Formen der Art erscheinen entweder aufgewachsen auf einer fremdartigen Unterlage, deren Oberfläche die Stetigkeit ihrer Configuration unterbricht, oder sie sind dermassen neben und durch einander verwachsen, dass sie nur mit einer theilweis ausgebildeten Gestalt in den freien Raum hinausragen, nach den übrigen Richtungen aber in eine einzige Masse verschmolzen sind. Dieser letztere Umstand kann jedoch nur als ein Beweis dafür angesehen werden, dass die, schon auf den niederen Stufen der organischen Wesen unverkennbare, Tendenz zur Aggregation und Verschmelzung der Individuen in der anorganischen Natur das allgemein herrschende Gesetz des Vorkommens ist; und dass, wenn in jenen polyëdrischen Körpern das muthmaassliche Analogon der organischen Individuen vorliegt, die durch ihre Aggregation veranlassten Hemmungen und Störungen der Ausbildung nicht dazu berechtigen können, die nur theilweis ausgebildeten Vorkommnisse der Art von den vollständig ausgebildeten Vorkommnissen zu trennen. Im Gegentheile werden wir, um durch die Mangelhaftigkeit der Erscheinung nicht über das wahre Wesen dieser Dinge getäuscht zu werden, ihre Umrisse zu ergänzen, und das als unvollendetes Stückwerk erscheinende Naturproduct in Gedanken zu vervollständigen haben. Ja, wir werden uns leicht davon überzeugen, dass bei überhand nehmender Aggregation und Verwachsung vieler dergleichen polyëdrischen Körper, die Umrisse der inneren von den äusseren gänzlich verhüllt werden, so dass wir uns ganze Gebirge aus ihnen aufgethürmt denken können, ohne doch frei ausgebildete polyëdrische Formen anderswo als in den hier und da zufällig leer gebliebenen Räumen, oder in den, gewisse Bildungsfristen bezeichnenden, Gränzflächen wahrzunehmen. Und so lehrt die Beobachtung in der That, dass die meisten starren Vorkommnisse der anorganischen Materie als Aggregate von innig verwachsenen dergleichen polyëdrischen Körpern, und folglich diese Formen selbst als die wesentlichen der starren anorganischen Materie zu betrachten sind, wenn sie sich gleich in der Regel, vermöge des Gesetzes der Aggregation, der Beobachtung mehr oder weniger entziehen.

Es bedarf hiernach kaum einer Erinnerung, dass wir unsere Aufmerksamkeit zunächst auf die vollkommen ausgebildeten polyëdrischen Vorkommnisse der anorganischen Materie zu richten haben, weil sie in der That als die eigentlichen Repräsentanten jener unendlichen Menge von mehr oder weniger verdrückten und verkrüppelten Exemplaren gelten müssen, und die eine Bedingung der Individualität, eine ringsum geschlossene, selbständige Gestalt, in ihrer vollständigen Verwirklichung an sich tragen.

Schon seit längerer Zeit bezeichnete man diese regelmässigen polyëdrischen Körper mit dem Namen der Krystalle, ohne sich jedoch auf eine nähere Untersuchung weder ihrer Form noch ihrer übrigen Eigenschaften einzulassen. Als späterhin die Forschungen im Gebiete der anorganischen Natur den Weg der genaueren Beobachtung, der Messung und Rechnung betraten, als man die Nothwendigkeit einer gründlicheren Auffassung und sorgfältigeren Vergleichung der naturhistorischen Merkmale eingesehen; da gelangte man auch zu dem Resultate, dass zwischen den Körpern, welche man bisher ihrer regelmässigen polyëdrischen Gestalt wegen ohne Unterschied als Krystalle bezeichnet hatte, manche, und zum Theil so auffallende Verschiedenheiten obwalten, dass man sich zu einer Eintheilung derselben in wesentliche und Afterkrystalle, oder in Krystalle und Pseudomorphosen genöthigt sah. Auch bemerkte man bald, dass viele Krystalle eine ausgezeichnete Anlage zu regelmässiger Spaltung besitzen, und daher bei dem Zerschlagen Bruch- oder Spaltungsstücke liefern, welche sich nicht minder als die Krystalle selbst durch eine regelmässige polyëdrische Gestalt auszeichnen. Durch diese Erfahrungen war denn die Unzulänglichkeit der von jener Gestalt allein entlehnten Merkmale für die Bestimmung des Begriffes Krystall, und die Nothwendigkeit hinreichend dargethan, noch andere Merkmale in den Inhalt dieses Begriffes aufzunehmen, um diejenigen Dinge von seinem Umfange auszuschliessen, welche früher irriger Weise in denselben aufgenommen worden waren.

Da die gehörige Feststellung dieses Begriffes für uns von ganz besonderem Interesse seyn muss, so wird eine etwas ausführlichere Erörterung der dabei zur Richtschnur dienenden Verhältnisse hier nicht am unrechten Orte stehen.

Es ist zuvörderst begreiflich, dass die Kriterien, welche zur Unterscheidung der wirklichen oder ächten Krystalle von allen blos krystallähnlichen Bildungen dienen sollen, nur durch eine genauere Untersuchung und Vergleichung der Eigenschaften der Krystalle selbst gewonnen werden können. Untersuchen wir in dieser Absicht die physischen Eigenschaften derselben, um den etwaigen Zusammenhang zu entdecken, welcher zwischen ihnen und der Krystallgestalt obwaltet, so finden wir, dass diese Gestalt und der Complex jener Eigenschaften keinesweges in einer ganz beziehungslosen Unabhängigkeit von einander stehen, und dass folglich die Gesetze der Gestaltung keinesweges bedeutungslos für Denjenigen seyn können, welcher die physischen Eigenschaften der Krystalle näher erforschen will. Im Gegentheile entdecken wir eine Menge so überraschender Beziehungen, so unzweifelhafter Beweise einer gegenseitigen Abhängigkeit, eines inneren und nothwendigen Wechselverhältnisses, dass wir sehr bald zu dem Schlusse gelangen, die Krystallgestalt sey nur die Gränze des Spielraumes derselben Kräfte, welche das Daseyn des Krystalles und somit die ganze Eigenthümlichkeit seines Wesens bedingen; sie sey nur der räumliche Ausdruck dieses Wesens, das seinem inneren Gehalte entsprechende äussere Gepräge.

Prüfen wir z. B. die Cohärenz, als eine der wichtigsten, unmittelbar an der Substanz haftenden physischen Eigenschaften der festen Körper, nach der Art und Weise, wie sie sich in den Krystallen offenbart, so finden wir unsere Behauptung auf eine ganz unwiderlegliche Art bestätigt. Denn was sind jene Blätterdurchgänge am Kalkspathe, am Bleiglanze und allen Krystallen, welcher Species sie angehören mögen, was sind sie Anderes, als die nothwendigen Folgen einer nach gewissen Richtungen auf ein Minimum herabgesunkenen Cohärenz? Und wenn diese Blätterdurchgänge im genauesten, mathematisch erweislichen Zusammenhange mit der Krystallreihe der Species stehen, an welcher sie vorkommen, wenn sie jederzeit den Flächen gewisser Gestalten dieser Krystallreihe parallel laufen, wenn sie bei gehöriger Anzahl regelmässige Spaltungsstücke liefern, welche sich durch Nichts als den Mangel der Ursprünglichkeit von den Krystallgestalten unterscheiden: was Anderes kündigt sich uns in diesem Allen an, als dass die Cohärenzverhältnisse der Krystalle in nothwendigem Causalzusammenhange mit ihren Gestaltverhältnissen stehen, und dass eine gemeinschaftliche Ursache beiden zu Grunde liegen muss?

Werfen wir aber unsern Blick auf die so merkwürdigen optischen Verhältnisse der Krystalle, wie sich dieselben in den Erscheinungen der doppelten Strahlenbrechung, der Farbenwandlung, des Dichroismus u. s. w. offenbaren, so entdecken wir auch in diesen Erscheinungen, wiewohl sie nicht einzig und allein an der Substanz der Krystalle haften, sondern durch den Conflict mit dem Lichte, als einer von

Aussen herstammenden Kraftäusserung, bedingt werden, einen ähnlichen Zusammenhang mit den Gestaltverhältnissen. Oder wollen wir es als bedeutungslos übersehen, dass nur die Krystalle eines Systemes von dem Gesetze der doppelten Strahlenbrechung ausgenommen sind, während in zwei andern, auch in ihren Gestaltverhältnissen auf eine merkwürdige Art übereinstimmenden Systemen einaxige, in den übrigen Systemen zweiaxige doppelte Strahlenbrechung Statt findet? Wollen wir es übersehen, dass diese doppelte Strahlenbrechung einen attractiven oder repulsiven Charakter zeigt, je nachdem die Spaltungsgestalten der respectiven Species makroax oder brachyax sind? Wollen wir es übersehen, dass in den schillernden und farbenwandelnden Krystallen beide Erscheinungen nur nach gewissen, krystallographisch bestimmbaren Richtungen erfolgen, nach andern ganz verschwinden? Erinnert uns nicht vielmehr diess Alles, erinnert uns nicht schon die einfache und bekannte Thatsache des, auf verschiedenen Krystallflächen oft so verschiedenartigen, Glanzes, dass auch der ganze Complex der optischen Erscheinungen der Krystalle in nothwendigem Causalzusammenhange mit den Gestaltverhältnissen derselben stehe? —

Und wie wir auf diese Weise zur Anerkennung eines solchen Zusammenhanges für die Erscheinungen der Cohärenz und des Lichtes genöthigt sind, so wissen wir es auch von den durch Erwärmung bedingten Erscheinungen der Ausdehnung, von den Erscheinungen des Elektrismus mancher Krystalle, dass sie in mehr oder weniger ergründeten Beziehungen zu den Gestaltverhältnissen derselben stehen. Ja, sogar das, allen morphologischen Beziehungen anscheinend ganz entfremdete, specifische Gewicht, sogar die chemische Aequivalentzahl der Substanzen muss mit der Krystallgestalt verknüpft seyn, wenn anders sich Kupffer's merkwürdige Resultate über das Wechselverhältniss dieser drei Elemente bewähren sollten.

Fassen wir das Bisherige in wenig Worten zusammen, so erhalten wir das Ergebniss, dass in jedem wirklichen Krystalle ein nothwendiges Wechselverhältniss, ein Causalzusammenhang in der strengsten Bedeutung des Wortes zwischen seiner Gestalt und dem Complexe seiner physischen Eigenschaften Statt findet; ein Zusammenhang, welcher für die meisten dieser Eigenschaften mit Evidenz nachgewiesen, für die übrigen aber wenigstens höchst wahrscheinlich gemacht werden kann. Da sich uns nun das Wesen eines Dinges nur in dem Complexe seiner Eigenschaften offenbart, so muss jede Eigenschaft, welche wir mit dem Complexe der übrigen in nothwendiger Verknüpfung erkennen, als dem Dinge wesentlich angehörig betrachtet, und mit allem Rechte als eine wesentliche Eigenschaft desselben bezeichnet werden können. In diesem Sinne werden wir daher für jeden ächten oder wirklichen Krystall die Forderung geltend zu machen haben, dass seine Gestalt eine wesentliche Gestalt seyn müsse; und diese Wesentlichkeit der Gestalt ist das erste Kriterium für die Aechtheit der Krystalle.

Die Krystalle sind und bleiben aber in allen, und auch in denjenigen Fällen, wo menschliche Willkür die Bedingungen ihrer Entstehung künstlich herbeiführte, sie sind und bleiben immer Naturproducte. So wenig der Mensch es ist, der die Pflanze wachsen macht, weil er das Saamenkorn dem Boden anvertraut, und Wärme und Feuchtigkeit dem jungen Keime zuführt: so wenig ist er es, der den Krystall anschiessen macht, weil er die gebildete Salzauflösung allen der Krystallisation günstigen Bedingungen unterwirft. Der Krystall ist und bleibt Naturproduct, er mag im Schoosse der Erde, oder im Laboratorium des Chemikers gebildet worden seyn, und die plastischen Kräfte, welche seiner Substanz gebieten, sich gerade so und nicht anders aus dem Zustande der Flüssigkeit herauszugestalten, sind in beiden Fällen dieselben, und nicht weniger unabhängig von den Eingriffen menschlicher Kunst, als jener höhere Bildungstrieb der organischen Körper. Der Krystall verdankt daher nur der Natur, was er ist; mit allen seinen Eigenschaften, mit seiner Farbe wie mit seiner Gestalt, mit seinem Glanze wie mit seiner Klarheit wurde er von ihr ausgestattet, und auch nur so, wie er aus ihren Händen hervorgegangen ist, in der ursprünglichen Unversehrtheit seines Wesens wird er zunächst Gegenstand wissenschaftlicher Betrachtung.

Wenn die Natur einen Krystall bildet, so setzt sie sich in seiner Gestalt gleichsam die Schranken ihrer plastischen Wirksamkeit, und diese äussere Gestalt muss eben so nothwendig ihr selbsteigenes Werk seyn, als es die äussere Gestalt eines Thieres oder einer Pflanze ist. Daher fordern wir denn auch mit Recht für jeden wirklichen Krystall, dass seine Gestalt eine ursprüngliche, von der Natur selbst, unmittelbar bei seiner Bildung, ausgeprägte, nicht aber eine secundäre, erst nach seiner Bildung durch mechanische oder chemische Einwirkungen, oder gar durch Eingriffe menschlicher Kunst hervorgerufene Gestalt sey.

Erinnern wir uns des kurz vorher aufgefundenen Kriteriums von der Wesentlichkeit der Krystallgestalten, und vergessen wir nicht, wie doch nur im Reiche der anorganischen Natur, und in diesem wiederum nur im Gebiete ihrer starren oder festen Erzeugnisse von Krystallen überhaupt die Rede seyn könne; so erhalten wir durch Zusammenstellung aller Merkmale folgende Definition:

Krystall ist jeder starre, anorganische Körper, welcher eine wesentliche und ursprüngliche polyëdrische Gestalt besitzt.

Weil wir jedoch zu diesem Begriffe zunächst nur durch genauere Betrachtung der eigentlichen Krystalle gelangt sind, so fragt es sich, ob er auch eng genug sey, um alle **krystallähnlichen** Bildungen, wohin wir einerseits die regelmässigen Spaltungsstücke, anderseits die Pseudomorphosen zu rechnen haben, von seinem Gebiete auszuschliessen. Die ersteren stimmen zwar in der Wesentlichkeit ihrer polyëdrischen Gestalt mit den Krystallen vollkommen überein, so dass dieses Merkmal allein keinesweges ausreichend seyn würde, um die regelmässigen Spaltungsstücke von den Krystallen zu unterscheiden. Allein das Merkmal der Ursprünglichkeit der Gestalt geht ihnen ab, weil die Natur Spaltungsstücke als solche nicht hervorbringt, obgleich sie in den verschiedenen Cohärenzgraden die ursprünglichen Bedingungen ihrer Möglichkeit vermittelte. Jedes Spaltungsstück ist immer das Fragment eines Krystalles; die Natur erzeugt aber keine Fragmente, sondern vollständige Gebilde, keine Krystalltrümmer, sondern Krystallindividuen. Die Spaltungsstücke werden also durch den Mangel einer ursprünglichen Gestalt aus dem Umfange des Begriffes Krystall vollkommen ausgeschlossen, und rücksichtlich ihrer wäre unsere Definition gerechtfertigt.

Was nun die Pseudomorphosen betrifft, so giebt es, in der weiteren Bedeutung dieses Wortes, drei verschiedene Arten derselben. Einige sind Ausfüllungsmassen, oder Abdrücke in den Eindrücken, welche früher einmal vorhandene und nachher zerstörte Krystalle in einer sie umgebenden Masse zurückgelassen; andere sind Einhüllungsmassen oder Incrustate, welche sich nach Art eines Ueberzuges oder einer Schale um einen vorhandenen Krystall, wie um einen Kern, anlegten; noch andere endlich sind umgewandelte Massen, indem gewisse Krystalle ihrer Substanz nach eine gänzliche Veränderung erlitten, ohne dass sich die äussere Form änderte. Man sieht sogleich aus dieser Angabe ihrer Bildungsweise, dass die Gestalten der Pseudomorphosen eben so wie jene der Krystalle den Charakter der Ursprünglichkeit besitzen; denn sie entstanden ja unmittelbar während des Absatzes der Substanz; sie sind die primitiven Schranken, innerhalb welcher dieser Absatz zu erfolgen aufhörte, gerade so wie es auch die Umrisse des Krystalls für den Anwachs seiner Substanz sind. Dagegen ist aber auch nicht minder einleuchtend, dass die Gestalten der Pseudomorphosen in keinem wesentlichen und nothwendigen Zusammenhange mit den übrigen Eigenschaften derjenigen Substanzen stehen können, an welchen sie erscheinen. Die Pseudomorphosen haben daher zwar ursprüngliche aber keine wesentlichen Gestalten, und werden durch die Negation dieses letzteren Merkmales aus dem Umfange unsers Begriffes von Krystall hinlänglich ausgeschlossen.

So wäre denn unsere Definition vollständig gerechtfertigt, und uns die Regel gestellt, keinen anorganischen Körper von polyëdrischer Gestalt für einen Krystall anzusprechen, wenn diese seine Gestalt nicht eben sowohl eine ursprüngliche, als eine wesentliche Gestalt ist; beide Worte in dem hier erläuterten Sinne genommen. Hiermit ist aber auch zugleich die Antwort auf unsere obige Frage nach dem Vorkommen von Individuen im Gebiete der anorganischen Natur gefunden. Denn was Anderes fordern wir mit der Wesentlichkeit und Ursprünglichkeit der Krystallformen, als jenen inneren Zusammenhang zwischen einer von der Natur selbst ausgeprägten Gestalt und der Gesammtheit der übrigen Eigenschaften, welchen wir gleich anfangs als die nothwendige Bedingung der Individualität aufstellten? Und werden wir uns wohl weigern können, in den Krystallen die Individuen der anorganischen Natur anzuerkennen, nachdem wir uns von dem Vorhandenseyn eines solchen Zusammenhanges überzeugt haben?

Die Krystalle sind es also, in welchen der Begriff des Individuums für die anorganische Natur seine vollständige Verwirklichung gefunden hat, denn in ihnen, aber auch nur in ihnen finden wir diejenigen Bedingungen vollständig erfüllt, welche uns zur Anerkennung der Individualität nöthigen; Bedingungen, von welchen räumliche Abgeschlossenheit durch eine ringsum vollendete, ursprüngliche Gestalt die erste, und innige Verkettung dieser Gestalt mit der Gesammtheit der physischen Eigenschaften die zweite ist.

Weil aber die Krystalle grösstentheils dem oben erwähnten Gesetze der Aggregation und Verwachsung unterworfen sind, und ihre Gestalten in Folge desselben nicht nur weit unter jene Regelmässigkeit der isolirten und ringsum ausgebildeten Individuen herabsinken, sondern auch oft dermassen entstellt und verdrückt werden, dass jede Spur der krystallinischen Bildung verschwindet, und unregelmässige, körnige, stängliche oder schalige Formen als Resultat der durch das Gedränge der Individuen nach allen Richtungen gehemmten Bildung zum Vorscheine kommen; so werden wir auch dem Begriffe des anorganischen Individuums etwas weitere Gränzen anweisen müssen, als jenem des Krystalles. Denn jeder Krystall ist ein Individuum, aber nicht jedes Individuum ein Krystall; wenn sich gleich die Tendenz zur Ausprägung einer vollständigen Krystallform in den verkrüppelten Individuen eines körnigen Aggregates eben so energisch regte, als in den isolirten und vollkommen au gebildeten Krystallen. Die Krystalle können dah auch als diejenigen anorganischen Individuen defini werden, deren Ausbildung gar nicht oder nur thei weis gestört worden.

Die **Krystallologie** ist die Wissenschaft v der Gesetzmässigkeit der natürlichen Eigenschaft der Krystalle, oder die Physiologie der anorganisch Individuen. Da sich nun die natürlichen Eigenscha ten jedes Körpers in drei verschiedene Kategorie bringen lassen, wiefern sie entweder in der For oder in den Qualitäten oder in der Materie, als de jenen beiden zu Grunde liegenden Substrate, gegeb sind, so zerfällt auch die Krystallologie in die drei A schnitte: **Krystallographie** (oder Krystallometri Wissenschaft von den morphologischen Eigenschafte **Krystallophysik**, Wissenschaft von den phys schen Eigenschaften, und **Krystallochemie**, Wi senschaft von den chemischen Eigenschaften der Kr stalle.

Die Krystallographie, als Wissenschaft von d Gesetzmässigkeit der Krystallgestalten (oder als Mo phologie der anorganischen Individuen) betrachtet a den Krystallen nichts als die Gestalten, und abstr hirt von allen übrigen Eigenschaften derselben. We nun diese Gestalten nach sehr bestimmten Regeln g bildete, von ebenen Flächen umschlossene Figur sind, so ist begreiflich, dass die Krystallographie ih Aufgabe nicht anders als mit Hülfe der Geometrie z lösen vermag; ja, man könnte sie nicht mit Unrec als denjenigen Theil der angewandten Geometrie d finiren, welcher ausschliesslich die an den anorga schen Individuen verwirklichten stereometrischen Fo men zum Gegenstande hat.

Die Krystallographie zerfällt in einen reinen und einen angewandten Theil. Die reine Krystallographie setzt eine vollkommene Ausbildung und ideale Regelmässigkeit der Krystallformen voraus, und abstrahirt von allen Unvollkommenheiten, denen sie in der Wirklichkeit mehr oder weniger unterworfen sind, weil sich die mannichfaltigen Gesetze ihrer Gestaltung nur unter dieser Voraussetzung erforschen und darstellen lassen. Die angewandte Krystallographie dagegen betrachtet die Krystallformen nach der eigenthümlichen Weise ihres wirklichen Vorkommens, und lehrt zugleich alle die praktischen Hülfsmittel kennen, durch welche eine gründliche Kenntniss derselben gefördert und gesichert wird; woran sich eine geschichtliche Uebersicht dessen schliesst, was im Gebiete der Wissenschaft geleistet worden.

Erster Theil.

Reine Krystallographie.

Die genaueren und nach allen Richtungen vervielfältigten Beobachtungen führten auf die Entdeckung einer so grossen Mannichfaltigkeit von Krystallformen, dass man an einer wissenschaftlich geregelten Erforschung derselben verzweifeln müsste, wenn die Natur nicht auch hier, wie überall, die Mannichfaltigkeit ihrer Productionen unter bestimmte Gesetze gestellt hätte, welche dem Beobachter eben so viele feste Puncte darbieten, von welchen aus eine geordnete Uebersicht jenes weit ausgedehnten Gebietes gewonnen werden kann. Wie verschieden nämlich die Krystallgestalten gebildet seyn mögen, so ist es doch unverkennbar, dass sie sich nach gewissen durchgreifenden Gestaltungsgesetzen in mehre Gruppen oder Krystallsysteme absondern, zwischen welchen zwar Annäherungen, aber keine wirklichen Uebergänge Statt finden. Innerhalb eines jeden solchen Systemes giebt es nun möglicherweise zahllose Gestalten, zwischen welchen jedoch eine unauflösliche Verwandtschaft und geometrische Verknüpfung besteht, und welche nicht nur einzeln oder isolirt, sondern auch, kraft jener Verwandtschaft, in den mannichfaltigsten Verbindungen oder Combinationen auftreten.

Es wäre nicht wohl möglich, weder die einzelen Gestalten überhaupt, noch die Gesetze ihres geometrischen Zusammenhanges, noch die wesentliche Eigenthümlichkeit jener Systeme mit gehöriger Deutlichkeit und Bestimmtheit zu fixiren, ohne dabei eine Terminologie der allgemeinen Gestaltungsverhältnisse und gewisse geometrische Bestimmungen vorauszusetzen. Die reine Krystallographie beginnt daher mit einer Elementarlehre, welche die Terminologie und allgemeine Eintheilung der Krystallformen zum Gegenstande hat, und in gegenwärtigem Werke mit einem kurzen Abrisse der analytischen Geometrie der geraden Linie und Ebene eröffnet wird, da die Berechnungen der Krystallformen fast durchgängig auf sie gegründet werden, und ihre Methode weniger allgemein bekannt zu seyn scheint, als sie es bei ihrer Fruchtbarkeit und Eleganz verdient. Auf die Elementarlehre folgt die Systemlehre, in welcher die einzelen Krystallsysteme vollständig und gründlich in Betrachtung gezogen werden, weshalb sie denn auch in eben so viele Abschnitte zerfällt, als es Krystallsysteme giebt. Jeder dieser Abschnitte beginnt zuvörderst mit einer Aufzählung und Beschreibung der einzelen Gestalten seines Systemes, entwickelt darauf den zwischen diesen Gestalten bestehenden geometrischen Zusammenhang, giebt dann die Berechnung derselben, und schliesst endlich mit der Darstellung der Gesetze, welchen die Combinationen der einzelen Gestalten unterworfen sind. Hiernach vertheilt sich der Inhalt eines jeden Abschnittes in vier Capitel.

Erstes Hauptstück.

Elementarlehre.

Erster Abschnitt.

Analytische Geometrie der geraden Linie und Ebene, als Grundlage der Krystallographie.

§. 1.

Wesen und Verschiedenheit der Bestimmungsmethoden.

Die Bestimmung der Lage gegebener Puncte, Linien und Flächen ist jederzeit relativ, d. h. sie findet nur beziehungsweise auf andere, gegebene oder willkürlich gewählte Puncte, Linien oder Flächen Statt. Nach der verschiedenen Art und Lage dieser letzteren giebt es verschiedene Bestimmungsmethoden, welche jedoch alle auf die Bestimmung von Puncten hinauslaufen, weil jede Linie als eine stetige Nacheinanderfolge, und jede Fläche als eine stetige Nach- und Nebeneinanderfolge von Puncten betrachtet werden kann. Wie übrigens auch diese Methoden beschaffen seyn mögen, so werden sich bei ihrer Anwendung immer die zwei Fälle unterscheiden lassen, da die zu bestimmenden Linien und Puncte in einer Ebene enthalten sind, oder nicht; und weil im ersteren Falle die Betrachtungen viel einfacher werden, so ist es zweckmässig, mit ihm den Anfang zu machen.

Erstes Capitel.

Punct und Linie in der Ebene.

§. 2.

Allgemeine Bestimmungsmethode.

Sind uns nun in einer Ebene mehre Puncte P, P', P'' u. s. w. (Fig. 1.) gegeben, so ist eine der bequemsten und fruchtbarsten Bestimmungsmethoden diejenige, da man ihre Lage auf zwei, in derselben Ebene willkürlich gewählte, und sich in einem Puncte M schneidende gerade Linien XX' und YY' bezieht, welche die Ebene selbst in vier Quadranten theilen. Zieht man nämlich durch jeden der gegebenen Puncte mit XX' und YY' ein paar Parallelen PQ und PR, $P'Q'$ und $P'R'$ u. s. w., so wird jeder derselben als der Durchschnittspunct seiner Parallelen fixirt. Da nun eine jede dieser letzteren mit einer der Linien XX' oder YY' gleichfalls zum Durchschnitte kommt, und dadurch eine bestimmte Länge erhält, so ist einleuchtend, dass jeder Punct durch Angabe der Grösse und Lage der durch ihn gehenden Parallelen vollkommen bestimmt seyn muss. Man nennt jede der willkürlich gewählten Linien eine Axe, beide zusammen das Axensystem, ihren Durchschnittspunct den Nullpunct oder Anfangspunct des Systemes und die durch jeden Punct P gelegten Parallelen, oder auch die entsprechenden Axenabschnitte die Coordinaten des Punctes. Alle Coordinaten, welche der einen Axe parallel sind, bezeichnet man mit x; die der andern Axe parallelen mit y, und unterscheidet und benennt auch hiernach beide Axen als Axe der x und Axe der y. Der Nullpunct theilt jede Axe in zwei Halbaxen, welche wegen ihrer entgegengesetzten Richtung von diesem Puncte aus als positive (+) und negative (—) Halbaxe unterschieden werden; ein Unterschied, der auch auf die Coordinaten übergeht, indem selbige das Zeichen ihrer respectiven Halbaxen erhalten. Das Axensystem selbst ist entweder rechtwinklig oder schiefwinklig, je nachdem sich die Axen unter rechten oder schiefen Winkeln schneiden. Beide Fälle erfordern eine besondere Betrachtung.

A. Rechtwinkliges Axensystem.

§. 3.

Centraldistanz eines, und Distanz zweier Puncte.

Dass mittels eines rechtwinkligen Axensystemes jeder in einer Ebene gegebene Punct zu bestimmen sey, ist einleuchtend. Denn sobald für x und y die ihrer Grösse und Richtung nach bestimmten Werthe $\pm a$ und $\pm b$, oder, was dasselbe ist, sobald die Gleichungen $x = \pm a$ und $y = \pm b$ gegeben werden, so ist der Punct P vollständig fixirt; die Vorzeichen der Coordinaten bestimmen nämlich den Quadranten, in welchem der Punct enthalten ist, und die Grösse derselben seinen Ort in diesem Quadranten. Ist $x = 0$, so liegt der Punct in der Axe der y, und umgekehrt; weshalb denn auch für den Nullpunct selbst die Gleichungen $x = 0$ und $y = 0$ gelten. Aus der Rechtwinkligkeit der Coordinaten jedes Punctes ergiebt sich allgemein für die Centraldistanz desselben:

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und für die gegenseitige Distanz R zweier durch ihre Coordinaten x, y und x', y' gegebener Puncte:

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

welcher Werth von R allgemeine Gültigkeit hat, sobald man nur die Vorzeichen der Coordinaten berücksichtigt, wie solche durch die Lage der Puncte in diesem oder jenem Quadranten bestimmt werden.

§. 4.

Gleichung der geraden Linie ausserhalb des Nullpunctes.

Wenn eine gerade Linie LL in der Ebene der Axen gegeben ist, so schneidet sie gewöhnlich beide Axen; dadurch bestimmen sich zwei Axenabschnitte $MA = a$, und $MB = b$ (Fig. 2.), welche man die P a r a m e t e r der Linie nennt. Wollen wir nun die Linie selbst bestimmen, so haben wir nur eine Gleichung aufzusuchen, durch welche die Relation zwischen den Coordinaten irgend eines beliebigen ihrer Puncte und den Parametern a und b ausgedrückt wird. Denn weil diese Gleichung für irgend einen beliebigen, so gilt sie offenbar für einen jeden Punct der Linie, d. h. für die Linie selbst, welche ja als die stetige Nacheinanderfolge ihrer Puncte betrachtet werden kann. Wir können hierbei der Allgemeinheit der Resultate unbeschadet annehmen, dass die Linie die beiden positiven Halbaxen schneidet, oder, dass ihre Parameter positiv sind. Nehmen wir nun in dem, innerhalb der positiven Halbaxen fallenden Theile der Linie irgend einen beliebigen Punct P, ziehen dessen Coordinaten $PQ = x$, $PR = y$, so ist

$$BQ : QP = BM : MA$$

oder

$$b - y : x = b : a$$

woraus sich

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

als die gesuchte Gleichung ergiebt. Wiewohl nun dieselbe zunächst nur für den, zwischen den positiven Halbaxen liegenden Theil der Linie gefunden wurde, so gilt sie doch allgemein für die ganze Linie; indem für deren jenseits der Axe der x fallenden Theil die y, und für den jenseits der Axe der y fallenden Theil die x negativ einzuführen sind. Uebrigens sind die Parameter selbst nichts anderes, als die Coordinaten derjenigen Puncte, in welchen die Linie von den Axen geschnitten wird; wie diess auch die Gleichung anzeigt, wenn man x oder $y = 0$ setzt.

Ist die Linie einer der Axen z. B. der MX parallel, so wird offenbar der in derselben Axe liegende Parameter $a = \infty$, und folglich $\frac{y}{b} = 1$ oder $y = b$ die Gleichung einer der Axe der x parallelen Linie, welche die Axe der y in der Entfernung b vom Nullpuncte schneidet. Ganz analog ist die Bedeutung der Gleichung $x = a$.

§. 5.

Gleichung der Linie durch den Nullpunct.

Eine Linie LL von der Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ auf den Nullpunct transportiren heisst, die Gleichung einer ihr parallelen Linie durch den Nullpunct auffinden. Sey $L'L'$ (Fig. 2) diese Parallele; man wähle in ihr irgend einen Punct P' und ziehe dessen Coordinaten $P'Q' = x$, und $P'R' = Q'M = -y$, so ist

$$\triangle\ ABM \sim \triangle\ P'Q'M$$

woraus sich die Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

und die einfache Regel ergiebt, dass, um eine Linie von der Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ auf den Nullpunct zu transportiren, wir nur nöthig haben, rechter Hand vom Gleichheitszeichen 0 statt 1 oder der daselbst befindlichen Constanten zu schreiben.

Ueberhaupt ist die Gleichung einer jeden durch den Nullpunct gehenden Linie von der Form

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

Denn wenn ξ der Neigungswinkel der Linie gegen eine der Axen, z. B. gegen die Axe der x, so ist offenbar

$$y = x \tang \xi$$

oder $$\frac{x}{\cos \xi} - \frac{y}{\sin \xi} = 0$$

Auch sieht man, dass es für jede durch den Nullpunct gehende Linie durchaus nur auf das Verhältniss, nicht auf die absolute Grösse der Constanten a

und b ankommt, welche in diesem Falle nur uneigentlich als Parameter bezeichnet werden.

§. 6.

Durchschnittspunct und Neigungswinkel zweier Linien.

Sind uns zwei Linien durch ihre Gleichungen

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ und } \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1$$

gegeben, so werden für uns die Auffindung der Coordinaten ihres Durchschnittspunctes und der Tangente ihres Neigungswinkels zwei besonders wichtige Probleme. Die Coordinaten des Durchschnittspunctes finden sich leicht aus der Bedingung, dass dieser Punct ein bestimmter, beiden Linien gemeinschaftlicher Punct ist, und dass daher für ihn beide Gleichungen zugleich gelten müssen. Man combinire daher obige Gleichungen, und eliminire nach einander y und x, so folgt:

$$x = \frac{aa'(b - b')}{ba' - b'a}$$

$$y = \frac{bb'(a - a')}{ab' - a'b}$$

Die Tangente des Neigungswinkels ω findet sich leicht aus den Tangenten der Neigungswinkel ξ und ξ' beider Linien gegen eine und dieselbe Axe, z. B. gegen die Axe der x, indem

$$tang\,\omega = tang\,(\xi - \xi')$$

Da nun sowohl $tang\,\xi$ als $tang\,\xi'$ unmittelbar durch die Parameter gegeben sind, so findet sich sehr leicht:

$$tang\,\omega = \frac{ab' - a'b}{aa' + bb'}$$

Dieser Werth giebt uns für den Parallelismus beider Linien die Bedingungsgleichung

$$ab' - a'b = 0$$

und für die Rechtwinkligkeit derselben die Bedingungsgleichung

$$aa' + bb' = 0$$

§. 7.

Normale aus dem Nullpunct auf eine gegebene Linie.

Wichtig für unsere Zwecke ist auch die Aufgabe, für eine durch ihre Gleichung gegebene Linie L die Normale N aus dem Nullpuncte zu finden. Es sey

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

die gegebene Gleichung der L, und vorläufig

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 0$$

die gesuchte Gleichung der N (§. 5.), so muss, vermöge der Rechtwinkligkeit beider Linien,

$$a\alpha + b\beta = 0$$

oder $\alpha : \beta = b : - a$

seyn (§. 6.). Da es nun bei allen Linien durch den Nullpunct nur auf das Verhältniss und nicht auf die absolute Grösse der Constanten α und β ankommt (§. 5.), so wird die gesuchte Gleichung

$$\frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 0$$

Verlangt man zugleich die Grösse der N, wie sich solche durch den Nullpunct einerseits und den Durchschnittspunct der N und L anderseits bestimmt, so suche man die Coordinaten dieses Durchschnittspunctes nach §. 6., und bestimme dessen Centraldistanz (§. 3.), welche die gesuchte Grösse ist; man findet

$$N = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

B. Schiefwinkliges Axensystem.

§. 8.

Puncte, ihre Centraldistanz und Distanzlinie.

Schneiden sich beide Axen unter einem schiefen Winkel ϱ, so erhalten alle diejenigen Ausdrücke, welche sich auf Linear- und Angulargrössen beziehen, eine etwas verwickeltere Form als bisher, während die Gleichungen der Puncte und Linien ihre Form beibehalten. Jeder Punct ist daher durch zwei Gleichungen von der Form

$$x = \pm a \text{ und } y = \pm b$$

bestimmt, indem der Begriff der Coordinaten kein anderer als der von Parallellinien der Axen ist. Um die Centraldistanz D eines Punctes P durch seine Coordinaten auszudrücken, ziehe man die PM (Fig. 1), welches die gesuchte Centraldistanz ist; im Dreieck PMQ sind bekannt

$$PQ = x \quad MQ = y \quad PQM = 180° - \varrho$$

also wird

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos \varrho}$$

Fällt der Punct P in einen der Nebenquadranten, so wird $\cos \varrho$, oder auch eine der Coordinaten und folglich das Product $2xy \cos \varrho$ negativ.

Auf ähnliche Weise ergiebt sich für die Distanzlinie R zweier Puncte P und P' der Ausdruck

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + 2(x-x')(y-y') \cos \varrho}.$$

§. 9.

Gleichung der Linie.

Dass die Gleichung einer Linie LL (Fig. 3), welche die positiven Halbaxen in den Puncten A und B schneidet, und für welche sich daher die Parameter $MA = a$ und $MB = b$ ergeben, auch für dieses Axensystem noch

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

sey, ist leicht einzusehen. Denn wenn P ein beliebiger Punct des zwischen den positiven Halbaxen enthaltenen Theiles der Linie, so sind $PQ = x$ und $PR = y$ dessen Coordinaten, und es gilt auch hier ganz unabhängig von dem Neigungswinkel ϱ die Proportion

$$b - y : x = b : a$$

aus welcher unmittelbar die Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

folgt. Auch wird die Gleichung jeder durch den Nullpunct gehenden Linie wiederum

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

seyn; wie denn die Coordinaten des Durchschnittspunctes ebenfalls ihre obigen Werthe (§. 6.) behalten.

§. 10.

Neigungswinkel einer Linie gegen die Axen, und zweier Linien gegen einander.

Um die Tangenten der Neigungswinkel ξ und v einer Linie von der Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

gegen die Axen zu finden, fälle man in Fig. 3 von ihren Durchschnittspuncten A und B mit den Axen auf diese letzteren die Normalen AE und BF, so wird

$$tang\, \xi = \frac{BF}{AF} \quad tang\, v = \frac{AE}{BE}$$

Es ist aber

$$BF = b \sin \varrho \qquad AE = a \sin \varrho$$
$$AF = a - b \cos \varrho \quad BE = b - a \cos \varrho$$

und folglich

$$tang\, \xi = \frac{b \sin \varrho}{a - b \cos \varrho} \quad tang\, v = \frac{a \sin \varrho}{b - a \cos \varrho}$$

Die Tangente des Neigungswinkels ω zweier Linien gegen einander, deren Gleichungen

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ und } \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1$$

lässt sich leicht aus den Werthen von $tang\ \xi$ oder $tang\ v$ finden; es ist nämlich offenbar

$$\omega = v - v' = \xi' - \xi$$

also $$tang\ \omega = \frac{tang\ v - tang\ v'}{1 + tang\ v\ tang\ v'}$$

Substituirt man für $tang\ v$ und $tang\ v'$ den so eben gefundenen Werth, so folgt

$$tang\ \omega = \frac{(ab' - a'b)\sin\varrho}{a'(a - b\cos\varrho) + b'(b - a\cos\varrho)}$$

Aus diesem Werthe von $tang\ \omega$ ergiebt sich für den Parallelismus beider Linien die Bedingungsgleichung

$$ab' - a'b = 0 \text{ wie oben §. 6.}$$

für die Rechtwinkligkeit derselben die Bedingungsgleichung

$$a'(a - b\cos\varrho) + b'(b - a\cos\varrho) = 0$$

welche für $\varrho = 90°$ in die oben §. 6. gefundene Bedingung übergeht.

§. 11.

Normale aus dem Nullpuncte auf eine gegebene Linie.

Man sucht für die Linie L von der Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

die Normale aus dem Nullpuncte; ihre Gleichung ist von der Form

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 0$$

Weil beide Linien auf einander rechtwinklig sind, so muss

$$\alpha(a - b\cos\varrho) + \beta(b - a\cos\varrho) = 0$$

oder $$\alpha : \beta = b - a\cos\varrho : b\cos\varrho - a$$

seyn; folglich wird die gesuchte Gleichung:

$$\frac{x}{b - a\cos\varrho} - \frac{y}{a - b\cos\varrho} = 0$$

Die Coordinaten des Durchschnittspunctes beider Linien werden aber:

$$x = \frac{ab\,(b - a\cos\varrho)}{a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\varrho}$$

$$y = \frac{ab\,(a - b\cos\varrho)}{a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\varrho}$$

§. 12.

Transformation der Coordinaten.

Oft ist es nöthig, aus einem rechtwinkligen Axensysteme in ein schiefwinkliges Axensystem, oder aus diesem in jenes überzugehen; d. h. die gegebenen Coordinaten des einen Systemes so zu transformiren, dass sie sich auf das andere System beziehen. Die diesem Zwecke entsprechenden Operationen sind nach Maassgabe der Lage beider Axensysteme mehr oder weniger verwickelt. Wir werden jedoch nur den einfachen Fall in Betrachtung ziehen, da der Nullpunct und eine der Axen, z. B. die Axe der x, beiden Systemen gemeinschaftlich sind, während die neue Axe der y mit der Axe der x den Winkel ϱ bildet.

Es seyen MX und MY (Fig. 4.) die rechtwinkligen Axen, MY_1 die neue schiefwinklige Axe, ferner P ein Punct, dessen rechtwinklige Coordinaten $PQ = x$, $PR = y$, so sind offenbar die schiefwinkligen Coordinaten desselben Punctes:

$$PQ_1 = x_1 \text{ und } PR_1 = y_1$$

Will man nun die für ein rechtwinkliges Axensystem gegebenen Gleichungen so transformiren, dass sie für ein schiefwinkliges Axensystem gelten, oder umgekehrt, so kommt es nur darauf an, die rechtwinkligen Coordinaten als Functionen der schiefwinkligen Coordinaten, oder diese als Functionen von jenen auszudrücken, und die gefundenen Ausdrücke statt x und y in den gegebenen Gleichungen zu substituiren. Wir wollen diese Ausdrücke durch die Namen der orthometrischen und klinometrischen Ausdrücke unterscheiden.

Für gegebene orthometrische Coordinaten x und y werden daher die zu substituirenden klinometrischen Ausdrücke:

$$\text{für } x, = x_1 + y_1 \cos \varrho$$
$$\text{für } y, = y_1 \sin \varrho$$

und für gegebene klinometrische Coordinaten x und y werden die zu substituirenden orthometrischen Ausdrücke:

$$\text{für } x, = x_1 - y_1 \frac{\cos \varrho}{\sin \varrho}$$

$$\text{für } y, = y_1 \frac{1}{\sin \varrho}$$

Soll also eine gegebene orthometrische Gleichung klinometrisch gemacht oder so transformirt werden, dass sie einem schiefwinkligen Axensysteme von der vorher angegebenen Beschaffenheit angepasst wird, so substituirt man statt x und y die ersteren, und soll eine gegebene klinometrische Gleichung orthometrisch gemacht werden, so substituirt man statt ihrer die letzteren Werthe. Man sieht leicht, dass mittels dieser Substitution die in den §§. 8, 10 und 11 aufgelösten Probleme unmittelbar aus den Resultaten der §§. 3, 6 und 7 gefunden werden konnten.

Zweites Capitel.

Punct, Linie und Fläche im Raume.

§. 13.

Allgemeine Bestimmungen.

Wenn beliebige Flächen, Linien und Puncte im Raume gegeben sind, so ist deren Bestimmung nur mittels eines, den ganzen Raum beherrschenden, d. h. nach **drei** Dimensionen ausgedehnten Axensystemes möglich. Neben den Axen der x und y wird also die Einführung einer dritten Axe, ausserhalb der Ebene jener beiden nothwendig, und jeder Punct wird nur dann bestimmt seyn, wenn ausser seinen Coordinaten x und y auch die der dritten Axe parallele Coordinate z gegeben ist. Wir nennen diese Axe die **Axe der** z und die drei, durch je zwei Axen gehenden Ebenen die Coordinatebenen, welche den ganzen Raum in acht Raumoctanten theilen, und nach den in ihnen enthaltenen Axen als die Coordinatebenen xy, yz und zx unterschieden und bezeichnet werden. Uebrigens giebt es auch hier **rechtwinklige** oder **schiefwinklige** Axensysteme, je nachdem sich die Axen oder Coordinatebenen unter lauter rechten Winkeln schneiden, oder nicht.

A. Rechtwinkliges Axensystem.

§. 14.

Puncte, ihre Centraldistanz und Distanzlinie.

Was zuvörderst die Bestimmung eines gegebenen Punctes betrifft, so hat dieselbe keine Schwierigkeit, indem man nur durch ihn drei mit den Axen parallele Linien als Coordinaten zu legen und deren Grösse und Richtung (wie sich solche durch ihre Durchschnitte mit den Coordinatebenen und durch die Richtung der respectiven Halbaxen bestimmen) anzugeben braucht, was durch drei Gleichungen von der Form

$$x = \pm a, \quad y = \pm b, \quad z = \pm c$$

geschieht. Die Vorzeichen der Coordinatwerthe bestimmen nämlich den Raumoctanten, in welchem der Punct gelegen ist, und die Grösse derselben den Ort des Punctes innerhalb dieses Octanten. Ist eine der Coordinaten $= 0$, so liegt der Punct in der Ebene, welche nach den beiden andern Coordinaten benannt ist, und sind zwei Coordinaten $= 0$, so liegt der Punct in der Axe, welche den Namen der dritten Coordinate führt. Wie also in der Ebene zwei, so sind im Raume drei Gleichungen zur Bestimmung eines Punctes erforderlich, und wie er dort als Winkelpunct des Parallelogrammes über x und y bestimmt wurde, so wird er es hier als der Eckpunct des Parallelepipedons über x, y und z.

Eine leichte Betrachtung lehrt, dass die Centraldistanz eines jeden Punctes

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

und dass die Distanzlinie irgend zweier Puncte

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

§. 15.

Gleichung einer Fläche ausserhalb des Nullpunctes.

Ist eine Fläche (unter welchem Worte wir jederzeit eine ebene Fläche verstehen) gegeben, welche nicht durch den Nullpunct geht, so schneidet sie doch gewöhnlich alle drei Axen; dadurch bestimmen sich drei Axenabschnitte $MA = a$, $MB = b$ und $MC = c$ (Fig. 5.) als die Parameter der Fläche, welche wir in dem Octanten der positiven Halbaxen voraussetzen. Eine Gleichung, welche die Relation zwischen den Coordinaten irgend eines beliebigen Punctes der Fläche und ihren Parametern ausdrückt, wird die Fläche selbst repräsentiren, weil sie alle Puncte derselben vollständig fixirt. Zur Auffindung einer solchen Gleichung gelangt man sehr leicht, wenn man davon ausgeht, dass der von den drei Coordinatebenen und der gegebenen Fläche innerhalb des Octanten der positiven Halbaxen umschlossene Raum $MABC$ eine dreiseitige Pyramide ist. Man wähle nun irgend einen beliebigen Punct P der Fläche, verbinde ihn mit dem Nullpuncte M, und lege darauf drei schneidende Ebenen durch PM und jede der drei Axen, so werden diese Ebenen (welche die gegebene Fläche in den Linien PA, PB und PC schneiden) die Pyramide $MABC$ in die drei Pyramiden $MPAB$, $MPAC$ und $MPBC$ theilen. Berechnet man den Inhalt dieser vier Pyramiden, und wendet man dann das Axiom an, dass das Ganze = der Summe seiner Theile, so gelangt man sogleich auf folgende sehr symmetrische Gleichung der Fläche:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

welche zwar zunächt nur für den Theil ABC derselben gefunden, aber nichts desto weniger allgemein gültig für die ganze Ausdehnung derselben ist, sobald man nur die Zeichen der Coordinaten in den übrigen Raumoctanten berücksichtigt.

§. 16.

Gleichungen der Flächen, welche einer oder zwei Axen parallel sind.

Eine Fläche wird daher jederzeit durch eine Gleichung fixirt; und umgekehrt, kann eine Gleichung im Raume zunächst nur immer eine Fläche repräsentiren. Ist die Fläche einer der Axen parallel, so wird der respective Parameter = ∞, und das mit ihm behaftete Glied verschwindet aus der Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. So bedeutet z. B. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ im Raume die Gleichung einer der Axe der z parallelen Fläche, während dieselbe Gleichung in der Ebene eine Linie ausdrückt, welche die Axen der x und y in den Centraldistanzen a und b schneidet. Die Gleichung jeder Fläche, welche einer der Axen parallel läuft, ist also einerlei mit der Gleichung ihrer Durchschnittslinie in der Coordinatebene durch die beiden andern Axen. Diess ergiebt sich auch aus Folgendem. Die Gleichung der Intersection *) der Fläche $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ mit einer der Coordinatebenen folgt aus der Gleichung der Fläche selbst, indem man die ausserhalb dieser Ebene liegende Coordinate $=0$ setzt. Es wird daher z. B. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ die Gleichung der Intersection derselben Fläche mit der Coordinatebene xy; welche Gleichung offenbar einerlei mit jener für die Parallelfläche der Axe der z ist. Allein beide Gleichungen wurden durch sehr verschiedene Voraussetzungen aus der ursprünglichen Gleichung $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ abgeleitet; für die Intersection wird nämlich das letzte Glied derselben $=0$, weil $z=0$; für die Parallelfläche der Axe der z, weil $c=\infty$. Soll also die Gleichung $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ die Intersection ausdrücken, so muss zugleich die Gleichung $z=0$ gegeben seyn; während sie, sobald über z gar nichts ausgesagt ist, nur eine Parallelfläche der Axe der z darstellt, welche die Axen der x und y in den Centraldistanzen a und b schneidet. — Ist eine Fläche zweien Axen oder, was dasselbe, einer Coordinatebene parallel, so verschwinden die beiden gleichnamigen Glieder aus der Gleichung $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$; wie z. B. $\frac{x}{a}=1$ oder $x=a$ die Gleichung einer Parallelfläche der Coordinatebene yz, welche die Axe der x in der Centraldistanz a schneidet.

*) Es sey mir gestattet, das Wort Intersection jederzeit für die Durchschnittslinien einer Fläche mit den Coordinatebenen zu gebrauchen.

§. 17.

Gleichung der Fläche durch den Nullpunct.

Eine durch die Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ gegebene Fläche auf den Nullpunct transportiren, heisst die Gleichung einer ihr parallelen Fläche durch den Nullpunct auffinden. Eine leichte Betrachtung lehrt, dass sich die Gleichung der letzteren Fläche von jener der ersteren nur dadurch unterscheidet, dass sie kein constantes Glied enthält, und dass folglich rechter Hand vom Gleichheitszeichen 0 statt 1, oder überhaupt statt der daselbst befindlichen Constante zu schreiben ist. Denn, wenn die Fläche durch den Nullpunct geht, so werden es ihre Intersectionen gleichfalls, und daher $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$, $\frac{z}{c} + \frac{x}{a} = 0$, $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$ die Gleichungen dieser letzteren. Eine Fläche aber, deren Intersectionen durch diese Gleichungen ausgedrückt werden, kann offenbar nur durch die Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$$

repräsentirt werden. Daher ist diess auch die allgemeine Form der Gleichungen aller durch den Nullpunct gehenden Flächen, für welche es wiederum nur auf das Verhältniss, nicht auf die absolute Grösse der Constanten a, b und c ankommt.

§. 18.

Gleichungen der Durchschnittslinie zweier Flächen.

Sind zwei Flächen F und F′ durch die Gleichungen

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ und } \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = 1$$

gegeben, so ist das nächste Problem, ihre Durchschnittslinie zu bestimmen. Dazu werden wir gelangen, wenn wir in Anerkennung ihrer gleichzeitigen Gültigkeit beide Gleichungen combiniren, weil sich alle aus dieser Combination hervorgehende Resultate offenbar nur auf diejenigen Puncte im Raume beziehen können, welche beiden Flächen gemeinschaftlich sind; dieselben Puncte aber bilden ja eben in ihrer Nacheinanderfolge die gesuchte Durchschnittslinie. Die Combination beider Gleichungen führt nun durch successive Elimination der x, y und z auf folgende drei Gleichungen:

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}\right)y+\left(\frac{a}{c}-\frac{a'}{c'}\right)z=a-a'$$
$$\left(\frac{b}{a}-\frac{b'}{a'}\right)x+\left(\frac{b}{c}-\frac{b'}{c'}\right)z=b-b'$$
$$\left(\frac{c}{a}-\frac{c'}{a'}\right)x+\left(\frac{c}{b}-\frac{c'}{b'}\right)y=c'-c'$$

In je zweien dieser Gleichungen ist aber die dritte schon enthalten, wie sich leicht auf folgende Art beweist; man setze

$$\begin{array}{ll} a-a'=A & bc'-b'c=\alpha \\ b-b'=B & ca'-c'a=\beta \\ c-c'=C & ab'-a'b=\gamma \end{array}$$

so wird zuvörderst:

$$(1)\quad A\alpha+B\beta+C\gamma=0$$

und die obigen drei Gleichungen schreiben sich einfacher wie folgt:

$$(2)\quad \frac{\gamma}{bb'}y-\frac{\beta}{cc'}z=A$$

$$(3)\quad \frac{\alpha}{cc'}z-\frac{\gamma}{aa'}x=B$$

$$(4)\quad \frac{\beta}{aa'}x-\frac{\alpha}{bb'}y=C$$

Man eliminire nun aus irgend zweien dieser Gleichungen die ihnen gemeinschaftliche Coordinate, z. B. aus (3) und (4) die x, so folgt

$$\frac{\alpha\beta}{cc'}\,z - \frac{\alpha\gamma}{bb'}\,y = B\beta + C\gamma$$

Da nun nach (1) $B\beta + C\gamma = - A\alpha$, so wird, nach Unterdrückung des gemeinschaftlichen Factors α, und nach Vertauschung der Zeichen

$$\frac{\gamma}{bb'}\,y - \frac{\beta}{cc'}\,z = A$$

welches die obige Gleichung (2) ist. Auf dieselbe Art kann man aus (2) und (3) die (4), aus (2) und (4) die (3) ableiten; wodurch denn bewiesen ist, dass je zwei der oben gefundenen Gleichungen die dritte in sich enthalten.

Es kann aber die Bedeutung dieser drei Gleichungen in der That keine andere seyn, als dass sie eine Linie im Raume, und zwar die gesuchte Durchschnittslinie der Flächen F und F' darstellen. Da nun je zwei die dritte in sich enthalten, so wären wir schon vorläufig zu dem Resultate gelangt, dass eine Linie zu ihrer Bestimmung im Raume **zwei** Gleichungen erfordert.

§. 19.

Die Linie im Raume ist durch zwei ihrer Projectionen bestimmt.

Das zu Ende des vorigen §. ausgesprochene Resultat wird noch einleuchtender durch folgende Betrachtung. Wir sind mit allen unsern Vorstellungen von Puncten, Linien und Flächen an den **Körper** gewiesen, an welchem allein sich diese Ausdehnungen anschaulich verwirklicht finden, indem der erste als Eckpunct, die zweite als Kantenlinie, die dritte als Oberfläche erscheint. Die einzige, seinem Begriffe entsprechende Vorstellungsweise des Punctes ist es, wenn man ihn als den Durchschnittspunct dreier (oder mehrer) Flächen denkt; ebenso entspricht die Vorstellungsweise der Linie, als des Durchschnittes zweier Flächen, die Vorstellungsweise der Fläche, als der

Oberfläche eines Körpers, einzig und allein den Begriffen beider Arten von Ausdehnung. Den Punct *in abstracto* und gleichsam isolirt, als ein Etwas ohne Länge, Breite und Höhe, die Linie *in abstracto* als eine Länge ohne Breite richtig vorzustellen, scheint nicht wohl möglich. Soll nun die mathematische Auffassung dieser Ausdehnungen zu brauchbaren Resultaten führen und frei von Widersprüchen bleiben, so wird sie offenbar mit jener uns nothwendigen Vorstellungsweise im Einklange stehen müssen. Wir werden daher, wie den Punct als Durchschnitt dreier, so die Linie als Durchschnitt zweier Flächen, so endlich die Fläche selbst als Oberfläche eines Körpers im Raume fixiren müssen. Diess ist auch in der That der Fall; denn, indem wir in den drei Coordinatebenen drei Flächen willkürlich voraussetzen, wird ja offenbar jede gegebene Fläche als Theil der Oberfläche einer dreiseitigen Pyramide fixirt, und indem wir für jeden Punct drei Gleichungen wie $x = \pm a$, $y = \pm b$, $z = \pm c$ aufstellen, fixiren wir denselben eigentlich als den Durchschnittspunct dreier Ebenen, da, wie wir §. 16. gesehen haben, jede dieser Gleichungen für sich die Parallelfläche einer Coordinatebene ausdrückt.

Was nun endlich die Bestimmung der geraden Linie im Raume betrifft, so ist einleuchtend, dass solche zuvörderst jener nothwendigen Vorstellungsweise angemessen, also dergestalt beschaffen seyn müsse, dass jede Linie als der Durchschnittspunct zweier Ebenen fixirt wird. Doch werden wir zur Vereinfachung der Bestimmungsmethode diese Ebenen so zu wählen haben, dass ihre Ausdrücke möglichst einfach werden; eine Forderung, welcher vollkommen Genüge geleistet wird, wenn wir die Ebenen als Parallelflächen der Axen einführen. Man nennt aber jede Ebene, welche durch eine gegebene Linie mit einer der Axen (z. B. der Axe der x) parallel gelegt wird, eiue projicirende Ebene der Linie, und den Durchschnitt derselben mit der Coordinatebene der beiden andern Axen (z. B. mit der Ebene der yz) die Projection der Linie in dieser Coordinatebene. Da nun nach §. 16. die Gleichung jeder projicirenden Ebene einerlei mit der Gleichung der respectiven Projection, so wird offenbar jede gegebene Linie im Raume durch die Gleichungen zweier ihrer Projectionen bestimmt seyn. Dass in je zweien dieser Gleichungen die dritte enthalten ist, liegt in der Natur der Sache; dessenungeachtet ist es, wegen der grösseren Symmetrie und Eleganz der Calcüle, oft empfehlenswerth, die Gleichungen aller drei Projectionen zugleich zu berücksichtigen. Hiernach wird jede Linie durch drei Gleichungen von der Form

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1 \quad \frac{z}{\gamma} + \frac{x}{\delta} = 1 \quad \frac{y}{\varepsilon} + \frac{z}{\zeta} = 1$$

repräsentirt. Geht die Linie durch den Nullpunct, so müssen es ihre Projectionen gleichfalls, und man braucht für diesen Fall in den vorstehenden Gleichungen nur 0 statt 1 rechter Hand vom Gleichheitszeichen zu schreiben.

Die in §. 18. gefundenen Gleichungen für die Durchschnittslinie zweier Flächen F und F' sind also in der That nichts anderes, als die Gleichungen ihrer Projectionen in den Coordinatebenen.

§. 20.

Bedingungsgleichung für die Fläche F'', welche dem Durchschnitte von F und F' parallel ist.

Wenn zwei Flächen F und F' gegeben sind, so ist es wichtig, die Bedingungsgleichung für die Parameter irgend einer dritten Fläche F'' zu finden, welche der Durchschnittslinie von F und F' parallel ist.

Es sey die Gleichung der gesuchten Fläche F''

$$\frac{x}{a''} + \frac{y}{b''} + \frac{z}{c''} = 1$$

Die Gleichungen der Durchschnittslinie sind die (2), (3) und (4) aus §. 18. Aus der Bedingung des Parallelismus folgt, dass, wenn wir die Fläche F'' sowohl als die gegebene Durchschnittslinie auf den Nullpunct transportiren, die letztere ganz in die erstere fallen, und mithin jeder Punct der Linie zugleich ein Punct der Fläche F'' seyn muss. Die Gleichung der F'' durch den Nullpunct ist (§. 17.)

$$(5) \quad \frac{x}{a''} + \frac{y}{b''} + \frac{z}{c''} = 0$$

und die Gleichungen der auf den Nullpunct transportirten Durchschnittslinie sind (§. 19. zu Ende)

$$(6) \quad \frac{\gamma}{bb'}\, y - \frac{\beta}{cc'}\, z = 0$$

$$(7) \quad \frac{\alpha}{cc'}\, z - \frac{\gamma}{aa'}\, x = 0$$

$$(8) \quad \frac{\beta}{aa'}\, x - \frac{\alpha}{bb'}\, y = 0$$

Da nun die Linie ganz in die Fläche fällt, so lassen sich die x, y und z jener in die Gleichung für diese setzen. Man bestimme daher z. B. aus (7) und (8) y und z als Functionen von x, und substituire diese Werthe in der Gleichung (5), so folgt

$$\frac{aa'\alpha}{a''} + \frac{bb'\beta}{b''} + \frac{cc'\gamma}{c''} = 0$$

oder, nach Einführung der ursprünglichen Werthe von α, β und γ

$$(9) \quad a''b''(a'b - ab')cc' + c''a''(c'a - ca')bb' + b''c''(b'c - bc')aa' = 0$$

welches die gesuchte Bedingungsgleichung ist.

§. 21.

Normale aus dem Nullpuncte auf die Fläche F.

Es ist eine Fläche F durch ihre Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

gegeben, man soll die Gleichungen der Normale N aus dem Nullpuncte finden. Die fingirten Gleichungen ihrer Projectionen seyen:

$$(10)\quad \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 0$$

$$(11)\quad \frac{z}{\gamma} + \frac{x}{\delta} = 0$$

$$(12)\quad \frac{y}{\varepsilon} + \frac{z}{\zeta} = 0$$

Da nun jede der projicirenden Ebenen auf der F sowohl als auf der respectiven Projectionsebene rechtwinklig ist, so muss auch jede der Projectionen von N auf der gleichnamigen Intersection der F normal seyn. Es sind aber die Gleichungen der Intersectionen von F nach §. 16.

$$(13)\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$(14)\quad \frac{z}{c} + \frac{x}{a} = 1$$

$$(15)\quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Da nun (10) und (13), (11) und (14), (12) und (15) die Gleichungen je zweier auf einander rechtwinkliger Linien in einer und derselben Ebene sind, so gelten für sie die Bedingungsgleichungen (§. 6.)

$$\alpha a + \beta b = 0$$
$$\gamma c + \delta a = 0$$
$$\varepsilon b + \zeta c = 0$$

und folglich werden die Gleichungen der gesuchten Normale N

$$(16)\quad \frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 0$$

$$(17)\quad \frac{z}{a} - \frac{x}{c} = 0$$

$$(18)\quad \frac{y}{c} - \frac{z}{b} = 0$$

Die Grösse dieser Normale, wie solche durch den Nullpunct einerseits und durch den Durchschnittspunct mit F anderseits bestimmt wird, findet sich leicht als die Centraldistanz des letzteren Punctes aus den Coordinaten desselben. Man setze also in die Gleichung für F statt y und z ihre Werthe aus (16) und (17), so erhält man, wenn

$$\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}} = L$$

für die Coordinaten des Durchschnittspunctes von F und N

$$x = \frac{1}{a}L,\ y = \frac{1}{b}L,\ z = \frac{1}{c}L$$

also $$N^2 = \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)L^2 = L$$

und $$N = \sqrt{L} = \frac{abc}{\sqrt{a^2 b^2 + c^2 a^2 + b^2 c^2}}$$

§. 22.

Cosinus des Neigungswinkels zweier Flächen.

Der von den Normalen beider Flächen eingeschlossene Winkel V ist offenbar das Supplement des gesuchten Winkels W, und daher

$$\cos W = -\cos V$$

Da uns nun die Coordinaten x, y, z und x', y', z' der Durchschnittspuncte beider Flächen mit ihren respectiven Normalen aus §. 21. bekannt sind, so kennen wir nicht nur die Grössen N und N' dieser letzteren, sondern auch die Grösse R der Distanzlinie jener beiden Puncte, folglich alle drei Seiten des von diesen Linien eingeschlossenen Dreiecks, für dessen einen Winkel V

$$\cos V = \frac{N^2 + N'^2 - R^2}{2NN'}$$

$$= \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

Substituirt man für je zwei der Grössen x, y, z, und x', y', z' ihre aus §. 21. folgenden Werthe durch die dritte Grösse, so erhält man

$$\cos V = \frac{\frac{1}{aa'} + \frac{1}{bb'} + \frac{1}{cc'}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\ \sqrt{\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{c'^2}}}$$

oder $\cos W = -\dfrac{aa'bb' + cc'aa' + bb'cc'}{\sqrt{a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2}\ \sqrt{a'^2b'^2+c'^2a'^2+b'^2c'^2}}$

Dieser Werth von $\cos W$ giebt uns für die Rechtwinkligkeit beider Flächen die Bedingung

$$aa'bb' + cc'aa' + bb'cc' = 0$$

und für den Parallelismus derselben die Bedingung

$$a : b : c = a' : b' : c'$$

Weil ferner

$x = 0$ die Gleichung der Coordinatebene yz
$y = 0$ . . . . zx
$z = 0$ . . . . xy

so werden die Cosinus der Neigungswinkel einer gegebenen Fläche F mit den drei Coordinatebenen folgende:

mit Ebene yz, $\cos X = -\dfrac{bc}{\sqrt{a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2}}$,

. . . . . zx, $\cos Y = -\dfrac{ca}{\sqrt{a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2}}$

. . . . . xy, $\cos Z = -\dfrac{ab}{\sqrt{a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2}}$

§. 23.

Cosinus des Neigungswinkels zweier Linien.

Wir wollen beide durch ihre Gleichungen gegebene Linien L und L', wenn sie nicht schon ursprünglich durch den Nullpunct gehen, auf denselben transportiren; ihre Gleichungen werden daher:

$$(19)\quad \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 0 \text{ und } \frac{x}{\alpha'} + \frac{y}{\beta'} = 0$$

$$(20)\quad \frac{z}{\gamma} + \frac{x}{\delta} = 0 \text{ und } \frac{z}{\gamma'} + \frac{x}{\delta'} = 0$$

$$(21)\quad \frac{y}{\varepsilon} + \frac{z}{\zeta} = 0 \text{ und } \frac{y}{\varepsilon'} + \frac{z}{\zeta'} = 0$$

Hierauf nehme man in L einen willkürlichen Punct, dessen Coordinaten x, y und z, und in L' einen dergleichen Punct, dessen Coordinaten x', y' und z'. Man kennt dann nicht nur die Centraldistanzen D und D' beider Puncte, sondern auch ihre gegenseitige Distanzlinie R, folglich alle drei Seiten des Dreieckes, dessen einer, der R gegenüber liegende Winkel der gesuchte ist, und es wird daher

$$\cos. U = \frac{D^2 + D'^2 - R^2}{2DD'}$$

$$= \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

Substituirt man in diesen Ausdruck die Werthe von y und z, so wie von y' und z' als Functionen von x und x', so folgt aus

$$(19)\text{u.}(20)\ \cos U = \frac{\alpha\alpha'\delta\delta' + \beta\beta'\delta\delta' + \gamma\gamma'\alpha\alpha'}{\sqrt{\alpha^2\delta^2 + \beta^2\delta^2 + \gamma^2\alpha^2}\,\sqrt{\alpha'^2\delta'^2 + \beta'^2\delta'^2 + \gamma'^2\alpha'^2}}$$

Auf ähnliche Art folgt durch Substitution der Werthe von x und z als Functionen von y, und der Werthe von x und y als Functionen von z aus

$$(20)\text{u.}(21)\ \cos U = \frac{\gamma\gamma'\zeta\zeta' + \delta\delta'\zeta\zeta' + \varepsilon\varepsilon'\gamma\gamma'}{\sqrt{\gamma^2\zeta^2 + \delta^2\zeta^2 + \varepsilon^2\gamma^2}\,\sqrt{\gamma'^2\zeta'^2 + \delta'^2\zeta'^2 + \varepsilon'^2\gamma'^2}}$$

aus

$$(21)\text{u.}(19)\ \cos U = \frac{\varepsilon\varepsilon'\beta\beta' + \beta\beta'\zeta\zeta' + \alpha\alpha'\varepsilon\varepsilon'}{\sqrt{\varepsilon^2\beta^2 + \beta^2\zeta^2 + \alpha^2\varepsilon^2}\,\sqrt{\varepsilon'^2\beta'^2 + \beta'^2\zeta'^2 + \alpha'^2\varepsilon'^2}}$$

Die Bedingungsgleichung für die Rechtwinkligkeit ist

$$1 + \frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'} + \frac{\gamma\gamma'}{\delta\delta'} = 0 \text{ u. s. w.}$$

Die Bedingungsgleichung für den Parallelismus

$$\alpha\gamma\beta'\delta' - \alpha'\gamma'\beta\delta = 0$$

oder $\gamma : \delta = \gamma' : \delta'$ und zugleich $\alpha : \beta = \alpha' : \beta'$ u. s. w., für die beiden andern Werthe. Uebrigens erhält man die zweite und dritte Form des Werthes von $\cos U$ aus der ersten durch alphabetisches Fortrücken der Buchstaben mit jedesmaliger Ueberspringung eines derselben.

B. *Schiefwinklige Axensysteme.*

§. 24.

Eintheilung derselben.

Man kann den Begriff der schiefwinkligen Axensysteme auf zweierlei Art auffassen, indem man dabei auf die Neigungswinkel entweder der Axen oder der Coordinatebenen reflectirt. Wir werden die letztere Ansicht festhalten. Man sieht nun leicht, dass für die drei Neigungswinkel A, B und C der Coordinatebenen folgende vier Fälle möglich sind

1) Alle drei Winkel sind rechte.
2) Zwei Winkel sind rechte, der dritte ein schiefer.
3) Zwei Winkel sind schiefe, der dritte ein rechter.
4) Alle drei Winkel sind schiefe.

Der erste Fall ist der des rechtwinkligen oder orthometrischen Axensystemes, welchen wir im Vorhergehenden behandelt haben. Die den drei übrigen Fällen entsprechenden Axensysteme lassen sich durch die Namen des monoklinoëdrischen, diklinoëdrischen und triklinoëdrischen Axensystemes unterscheiden. Wir wollen jedoch an gegenwärtigem Orte nur einige der wichtigsten Probleme in Bezug auf das erste und einfachste dieser schiefwinkligen Axensysteme lösen, da seine Theorie für die Krystallographie von ganz besonderer Wichtigkeit ist. Das Nöthigste über die beiden andern Systeme soll später da beigebracht werden, wo von den ihnen entsprechenden Krystallformen die Rede seyn wird.

§. 25.

Gleichungen von Punct, Linie und Fläche.

In jedem monoklinoëdrischen Axensysteme sey uns diejenige Axe, welche sich als die Durchschnittslinie der beiden schiefwinkligen Coordinatebenen bestimmt, die Axe der z; so schneiden sich die Axen der x und der y unter demselben schiefen Winkel ϱ, wie jene zwei Coordinatebenen.

Die Gleichungen eines Punctes sind für jedes monoklinoëdrische System (wie für die schiefwinkligen Axensysteme überhaupt) wiederum von der Form

$$x = \pm a, \quad y = \pm b, \quad z = \pm c$$

die Gleichung einer Fläche von der Form

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

und die Gleichungen einer Linie von der Form

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1 \quad \frac{z}{\gamma} + \frac{x}{\delta} = 1 \quad \frac{y}{\varepsilon} + \frac{z}{\zeta} = 1$$

indem die Begriffe der Coordinaten und Parameter ganz unverändert die von Axenparallelen und Axenabschnitten bleiben, wie solche oben definirt und bisher gebraucht wurden. Wenn man daher nur immer eingedenk bleibt, dass sich in vorstehenden Gleichungen die x, y und z, die a, b und c auf schiefwinklige Axen beziehen, so wird man den sehr wesentlichen Unterschied zwischen ihnen, als klinometrischen Gleichungen und den, der Form nach ganz identischen, orthometrischen Gleichungen der §§. 14. 15. und 19. niemals aus den Augen verlieren.

§. 26.

Allgemeine Methode der Berechnung.

Die allgemeinen Berechnungen im Gebiete jedes monoklinoëdrischen Systemes sind mit grosser Leichtigkeit auszuführen, sobald man dieselben auf die in §. 12. erläuterten Transformationen der Coordinaten gründet. Es ist nämlich einleuchtend, dass die Coordinate z ganz unabhängig von dem Neigungswinkel ϱ der beiden schiefen Axen seyn müsse, da sie ja auf deren Coordinatebene, ganz so wie bisher, rechtwinklig ist. Wenn wir also irgend gegebene Gleichungen orthometrisch ausdrücken wollen, so haben wir in ihnen nur statt der schiefwinkligen Coordinaten x und y deren orthometrische Ausdrücke aus §. 12. zu substituiren, und die Transformation der Gleichungen ist vollendet. Da nun aber für diese transformirten Gleichungen alle uns interessirenden Probleme in dem Vorhergehenden bereits gelöst wurden, so lässt uns der einfache Kunstgriff der Transformation dazu gelangen, alle Rechnungen auch im Gebiete dieses Systemes nach der so höchst einfachen Methode zu führen, welche wir für das rechtwinklige Axensystem kennen gelernt haben. Nur darf man nie vergessen, dass, wenn irgend ein so gewonnenes Resultat noch die Form einer Gleichung mit unbestimmten Coordinaten hat, diese Coordinaten wieder rückwärts in ihren klinometrischen Ausdruck übersetzt werden müssen, weil die Einführung rechtwinkliger Coordinaten nur ein Nothbehelf zur Erleichterung des Calcüls, der Endzwek dieses Calcüls aber immer nur der ist, Resultate zu finden, welche sich auf das ursprünglich gegebene Axensystem beziehen.

§. 27.

Centraldistanz eines, und Distanzlinie zweier Puncte.

Man findet aus §. 14. die Centraldistanz D eines Punctes, und die gegenseitige Distanzlinie R zweier, durch ihre Coordinaten x, y, z und x', y', z' gegebener Puncte, indem man statt x den Werth $x + y \cos \varrho$, und statt y den Werth $y \sin \varrho$ substituirt; es folgt:

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy \cos \varrho}$$
$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 + 2(x-x')(y-y') \cos \varrho}$$

Sind zwei Flächen durch ihre Gleichungen

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = 1$$

gegeben, so sind die Gleichungen ihrer Durchschnittslinie natürlich einerlei mit jenen in §. 18.; eben so ist die Bedingungsgleichung für die Parameter einer dritten, mit dieser Durchschnittslinie parallelen Fläche einerlei mit der in §. 20.; nur ändert sich die Bedeutung der Buchstaben a, b, c, u. s. w. dahin, dass sie jetzt schiefwinklige Parameter bedeuten. Dagegen sind die Gleichungen für die Normale einer gegebenen Fläche, und der Ausdruck für den Cosinus des Neigungswinkels zweier Flächen für dieses Axensystem besonders zu berechnen.

§. 28.

Normale aus dem Nullpuncte auf die Fläche F.

Die Gleichung der Fläche F sey:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Man mache diese Gleichung orthometrisch, d. h. man substituire

statt x die Grösse $x_1 - y_1 \dfrac{\cos \varrho}{\sin \varrho}$

- y - - $y_1 \dfrac{1}{\sin \varrho}$

so wird sie

$$\frac{x_1}{a} + \frac{a - b\cos\varrho}{ab\sin\varrho}\, y_1 + \frac{z}{c} = 1$$

Die Gleichungen der gesuchten Normale finden sich nun unmittelbar aus dieser Gleichung, wie die Gleichungen (16) (17) und (18) in §. 21. aus der zu Anfange desselben §. stehenden Gleichung von F; sie werden also:

$$(22) \quad \frac{a - b\cos\varrho}{ab\sin\varrho}\, x_1 - \frac{y_1}{a} = 0$$

$$(23) \quad \frac{z}{a} - \frac{x_1}{c} = 0$$

$$(24) \quad \frac{y_1}{c} - \frac{a(b - \cos\varrho)\, z}{ab\sin\varrho} = 0$$

Diese Gleichungen müssen aber wieder rückwärts klinometrisch ausgedrückt werden (§. 26), indem man

für x_1 den Werth $x + y\cos\varrho$

- y_1 - - $y\sin\varrho$

substituirt; man erhält dann die gesuchten Gleichungen, wie folgt:

$$(25) \quad \frac{x}{b - a\cos\varrho} - \frac{y}{a - b\cos\varrho} = 0$$

$$(26) \quad \frac{z}{ab\sin^2\varrho} - \frac{x}{c\,(b - a\cos\varrho)} = 0$$

$$(27) \quad \frac{y}{c\,(a - b\cos\varrho)} - \frac{z}{ab\sin^2\varrho} = 0$$

wobei nur noch zu erinnern, dass bei dieser Transformation die Gleichung (26) erst alle drei Coordinaten x, y und z enthält, weshalb der durch (25) bestimmte Werth von y als Function von x in dieselbe einzuführen ist.

Die Coordinaten des Durchschnittspunctes von F und N finden sich leicht durch Combination je zweier der Gleichungen (25), (26) und (27) mit der Gleichung von F. Bezeichnet man nämlich zur Abkürzung und leichteren Uebersicht die Grössen:

abc mit E
$b - a \cos \varrho$ mit F
$a - b \cos \varrho$ mit G und
$a^2 b^2 + c^2 a^2 + b^2 c^2 - ab \cos \varrho \, (2c^2 + ab \cos \varrho)$ mit M
so werden die Coordinaten des Durchschnittspunctes

$$x = \frac{c\,EF}{M}$$

$$y = \frac{c\,EG}{M}$$

$$z = \frac{ab \sin^2 \varrho \, E}{M}$$

§. 29.

Cosinus des Neigungswinkels W zweier Flächen.

Wenn der Neigungswinkel der beiden Flächennormalen N und $N' = V$, so ist

$$\cos W = - \cos V$$

Nun sind uns aus dem vorigen §. die orthometrischen Gleichungen beider Normalen bekannt, indem für N die Gleichungen (22), (23) und (24) unmittelbar, für N' aber dieselben Gleichungen mit accentuirten Buchstaben gelten. Wir erhalten daher in Uebereinstimmung mit §. 22. für V die Function

$$\cos V = \frac{x_1 x_1' + y_1 y_1' + zz'}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z^2}\,\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2 + z'^2}}$$

Substituirt man für je zwei der Coordinaten x_1, y_1 und z, x_1', y_1' und z' ihre Werthe, wie solche als Functionen der dritten aus (22), (23) und (24) folgen, so erhalten wir

$$\cos V = \frac{aa'bb' \sin^2 \varrho + cc'(bb' \sin^2 \varrho + (a - b \cos \varrho)(a' - b' \cos \varrho))}{\sqrt{a^2 b^2 \sin^2 \varrho + c^2 (b^2 \sin^2 \varrho + (a - b \cos \varrho)^2)}\,\sqrt{a'^2 b'^2 \sin^2 \varrho + c'^2 (b'^2 \sin^2 \varrho + (a' - b' \cos \varrho)^2)}}$$

und daher $\cos W = -$

$$\frac{aa'bb' \sin^2 \varrho + cc'(aa' + bb' - ab' \cos \varrho - a'b \cos \varrho)}{\sqrt{a^2 b^2 \sin^2 \varrho + c^2 (a^2 + b^2 - 2ab \cos \varrho)}\,\sqrt{a'^2 b'^2 \sin^2 \varrho + c'^2 (a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos \varrho)}}$$

welcher Ausdruck sich für $\varrho = 90°$ auf den oben in §. 22. gefundenen Werth reducirt.

Für die Rechtwinkligkeit beider Flächen gilt die Bedingunsgleichung:

$$aa'bb' \sin^2 \varrho + cc'(aa' + bb' - ab' \cos \varrho - a'b \cos \varrho) = 0$$

und für den Parallelismus, wie a. a. O.

$$a : b : c = a' : b' : c'$$

Die Cosinus der Neigungswinkel einer gegebenen Fläche F mit den drei Coordinatebenen lassen sich leicht aus dem Werthe für $\cos W$ finden, indem man successiv für F' die Gleichungen $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$ statuirt, oder successiv die Parameter b' und c', a' und c', a' und b' unendlich gross nimmt.

§. 30.

Cosinus des Neigungswinkels zweier Linien.

Man transportire beide Linien L und L' auf den Nullpunct, so erhalten ihre Gleichungen die Form:

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 0 \qquad \frac{x}{\alpha'} + \frac{y}{\beta'} = 0$$

$$\frac{z}{\gamma} + \frac{x}{\delta} = 0 \qquad \frac{z}{\gamma'} + \frac{x}{\delta'} = 0$$

$$\frac{y}{\varepsilon} + \frac{z}{\zeta} = 0 \qquad \frac{y}{\varepsilon'} + \frac{z}{\zeta'} = 0$$

Hierauf mache man diese Gleichungen orthometrisch, d. h. man setze

satt x den Werth $x_1 - y_1 \dfrac{\cos \varrho}{\sin \varrho}$

" y " " $y_1 \dfrac{1}{\sin \varrho}$

so werden sie

$$\frac{x_1}{\alpha - \beta \cos \varrho} + \frac{y_1}{\beta \sin \varrho} = 0 \qquad \frac{x_1}{\alpha' - \beta' \cos \varrho} + \frac{y_1}{\beta' \sin \varrho} = 0$$

$$\frac{z}{\alpha\gamma} + \frac{x_1}{\delta(\alpha - \beta \cos \varrho)} = 0 \qquad \frac{z}{\alpha'\gamma'} + \frac{x_1}{\delta'(\alpha' - \beta' \cos \varrho)} = 0$$

$$\frac{y_1}{\varepsilon \sin \varrho} + \frac{z}{\zeta} = 0 \qquad \frac{y_1}{\varepsilon' \sin \varrho} + \frac{z}{\zeta'} = 0$$

Substituirt man die Parameter dieser orthometrischen Gleichungen statt der Buchstaben α, α', β, β' u. s. w. in die Ausdrücke von *cos. U* des §. 23, so folgt unter der Voraussetzung, dass die Gleichung zwischen x und y jedenfalls eine der gegebenen sey:

cos. U

$$= -\frac{\alpha\alpha'\delta\delta' + \beta\beta'\delta\delta' + \alpha\alpha'\gamma\gamma' - \delta\delta'(\alpha\beta' + \alpha'\beta)\cos\varrho}{\sqrt{\alpha^2\delta^2 + \beta^2\delta^2 + \alpha^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\delta^2\cos\varrho}\,\sqrt{\alpha'^2\delta'^2 + \beta'^2\delta'^2 + \alpha'^2\gamma'^2 - 2\alpha'\beta'\delta'^2\cos\varrho}}$$

oder *cos U*

$$= -\frac{\alpha\alpha'\varepsilon\varepsilon' + \beta\beta'\varepsilon\varepsilon' + \beta\beta'\zeta\zeta' - \varepsilon\varepsilon'(\alpha\beta' + \alpha'\beta)\cos\varrho}{\sqrt{\alpha^2\varepsilon^2 + \beta^2\varepsilon^2 + \beta^2\zeta^2 - 2\alpha\beta\varepsilon^2\cos\varrho}\,\sqrt{\alpha'^2\varepsilon'^2 + \beta'^2\varepsilon'^2 + \beta'^2\zeta'^2 - 2\alpha'\beta'\varepsilon'^2\cos\varrho}}$$

welches die gesuchten Werthe für den Cosinus des Neigungswinkels sind.

Zweiter Abschnitt.

Terminologie der Krystallformen und Eintheilung derselben.

Erstes Capitel.

Von den Begränzungselementen der Krystallformen.

§. 31.

Begränzungselemente, Schnitte, Mittelpunct.

1) Die Krystallformen sind die ebenflächigen, mehr oder weniger regelmässig gebildeten Gestalten der Krystalle oder vollkommenen anorganischen Individuen.

2) Begränzungselemente einer Krystallform heissen alle Flächen, Kanten und Ecke derselben. Für die Anzahl der verschiedenen Begränzungsele-

mente überhaupt gilt folgender merkwürdige Satz. Man setze an irgend einer Gestalt

die Zahl der Ecke $= E$
- - - Flächen $= F$
- - - Kanten $= K$

so ist jederzeit

$$E + F = K + 2$$

3) Gleichwerthige Begränzungselemente sind alle gleichnamigen B. von gleicher Figur, Grösse und Lage.
4) Mittelpunct einer Krystallform ist derjenige Punct innerhalb derselben, von welchem alle gleichwerthigen Begränzungselemente gleichweit abstehen.
5) Symmetrie einer Krystallform ist die in der Zahl, Grösse, Vertheilung und Lage ihrer verschiedenen Begränzungselemente obwaltende Gesetzmässigkeit.
6) Schnitt heisst allgemein derjenige Theil einer durch eine Gestalt gelegten Ebene, welcher innerhalb derselben enthalten ist.

§. 32.

Flächen, ihre Figuren und Arten.

1) Die Flächen werden nach der Zahl ihrer Seiten in drei-, vier-, fünf- ..... *n*seitige Figuren getheilt.
2) Nebenseiten heissen je zwei neben einander, Gegenseiten je zwei gegenüber liegende Seiten einer Figur; eine Figur von ungerader Seitenzahl hat keine Gegenseiten.
3) Die dreiseitigen Figuren erhalten die bekannten Namen der Geometrie. Die vierseitigen Figuren sind entweder Parallelogramme oder Klinogramme, je nachdem je zwei Gegenseiten parallel sind, oder nicht; die Parallelogramme sind entweder rechtwinklig oder schiefwinklig; die rechtwinkligen P. entweder gleichseitig, Quadrat,

Tetragon, oder ungleichseitig, Rectangel; die schiefwinkligen P. ebenfalls entweder gleichseitig, Rhombus, oder ungleichseitig, Rhomboid. Die Klinogramme haben entweder noch zwei parallele Gegenseiten, Trapez, oder nicht, Trapezoid.

4) Eine Figur heisst regelmässig, wenn sie gleichseitig und gleichwinklig, halbregelmässig, wenn sie gleichseitig, aber nur abwechselnd gleichwinklig ist. Eine halbregelmässige Figur hat jederzeit eine gerade Seitenzahl, und heisst ein Rhombus, Ditrigon, Ditetragon, oder Dihexagon, je nachdem sie vier-, sechs-, acht- oder zwölfseitig ist (Fig. 6, 7 und 8).

5) An jedem Rhombus und Rhomboid unterscheidet man die Makrodiagonale und Brachydiagonale.

6) Ein symmetrisches Trapezoid oder Deltoid (Fig. 9.) ist, welches durch eine seiner Diagonalen in zwei congruente Dreiecke getheilt wird; diese Diagonale (*ab*) heisst die symmetrische Diagonale. Ein gleichschenkliges Trapezoid (Fig. 10 und 11) oder Trapez (Fig. 12.) ist, welches zwei gleiche Nebenseiten hat; man kann die Diagonale (*cd*) durch die Endpuncte der gleichen Nebenseiten die gleichschenklige Diagonale nennen.

7) Ein symmetrisches Pentagon (Fig. 13.) ist, welches vier gleiche Seiten und zwei Paare gleicher Winkel hat. Die einzele Seite heisst die Grundlinie, und die aus dem gegenüberliegenden Winkel auf sie gefällte Normale die Höhenlinie des Pentagons.

§. 33.

Kanten und deren Verhältnisse.

1) An jeder Kante unterscheidet man die Kantenflächen, die Kantenlinie und den Kantenwinkel.

2) Normalebene einer Kante ist jede auf der Kantenlinie rechtwinklige Ebene.

3) Der Kantenwinkel ist jederzeit gleich dem Winkel, welchen die beiden Durchschnittslinien der Normalebene und der Kantenflächen bilden.

4) Kanten heissen gleichgross, wenn sie gleiche Kantenwinkel, gleichlang, wenn sie gleiche Kantenlinien, gleich, wenn sie beide gleich haben.

5) Eine regelmässige Kante ist, deren Flächen bei 0° Neigung congruiren, und durch die aus dem Mittelpuncte der Kantenlinie errichtete Normale in zwei congruente Hälften getheilt werden; eine symmetrische Kante besitzt nur die erstere, und eine unregelmässige Kante keine von beiden Eigenschaften.

6) Eine ausspringende Kante ist, deren Kantenwinkel nach dem Mittelpuncte der Krystallform $< 180°$; eine einspringende Kante, deren Kantenwinkel nach derselben Richtung $> 180°$ ist.

§. 34.

Ecke und deren Arten.

1) An jedem Eck unterscheidet man die Flächenwinkel, die Kantenwinkel und den Eckpunct.

2) Nach der Zahl der zu einem Ecke contribuirenden Flächen unterscheidet man drei-, vier-, fünf- . . . . . *n*flächige Ecke.

3) Ein regelmässiges Eck ist, das gleiche Flächen- und Kantenwinkel, ein halbregelmässiges Eck, das gleiche Flächen- aber nur abwech-

selnd gleiche Kantenwinkel hat. Die halbregelmässigen Ecke haben jederzeit eine gerade Flächenzahl und heissen rhombische, ditrigonale, ditetragonale und dihexagonale Ecke, je nachdem sie vier-, sechs-, acht-, oder zwölfflächig sind. Die regelmässigen heissen trigonale, tetragonale oder hexagonale Ecke, je nachdem sie drei-, vier- oder sechsflächig sind.

§. 35.

Nebenflächen, Gegenflächen, Flächensysteme.

1) Nebenfläche einer gegebenen Fläche ist jede, die eine Kante mit ihr bildet.
2) Eine Reihe von Nebenflächen heisst jede stetige Folge von Nebenflächen; was die ersten, zweiten, dritten u. s. w. Nebenflächen einer gegebenen Fläche sind, begreift sich von selbst.
3) Nachbarfläche einer gegebenen Fläche heisst jede zweite Nebenfläche, welche mit derselben noch einen Eckpunct gemeinschaftlich hat.
4) Gegenfläche einer gegebenen Fläche heisst die ihr parallele am entgegengesetzten Ende der Gestalt.
5) Die Flächen vieler Gestalten gruppiren sich zu Flächensystemen, welche man nach der Zahl ihrer Flächen Flächenpaare, oder drei-, vier- .....*n*zählige Flächensysteme nennt.
6) Jedes Flächenpaar oder Flächensystem hat seine Neben-Paare oder Systeme, und Nachbar-Paare oder Systeme. Gegenpaar oder Gegensystem eines gegebenen Flächensystemes heist das ihm gegenüberliegende, dessen einzele Flächen den einzelen des gegebenen parallel sind.

Zweites Capitel.

Von den Krystallsystemen.

§. 36.

Allgemeine Bestimmungen.

Man denke sich durch irgend einen Punct im Raume drei indefinite Ebenen, dergestalt, dass nicht alle einer Linie parallel sind, so werden dieselben den Raum um diesen Punct in acht Raumoctanten theilen, und drei, nicht in einer Ebene gelegene Durchschnittslinien von indefiniter Länge bilden. Jede gegebene Fläche wird nun wenigstens eine dieser Linien, oder zwei, oder auch alle drei schneiden müssen, und, wie in §. 15., durch Angabe der Grösse und Richtung der Linienabschnitte bestimmt seyn. Den Inbegriff von drei (oder auch mehren) dergleichen durch einen Punct gelegten Ebenen, in Bezug auf deren Durchschnittslinien man die Lage gegebener Flächen bestimmt, nennt man ein System von Coordinatebenen, jede einzele Ebene eine Coordinatebene, jede ihrer Durchschnittslinien eine Axenlinie *), und ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspunct den Nullpunct oder Anfangspunct des Systemes. Die durch eine gegebene Fläche in den Axenlinien abgeschnittenen Theile heissen die Parameter der Fläche.

§. 37.

Fortsetzung.

Weil die Krystallgestalten von lauter ebenen Flächen umschlossene Körper sind, so müssen sie gleich-

---

*) Es sey mir erlaubt, für die indefiniten Axen dieses Wort zu gebrauchen, da man in der Krystallographie unter Axe einen bestimmten Theil dieser Linien zu verstehen gewohnt ist.

falls in Bezug auf ein willkürlich gewähltes System von Coordinatebenen oder Axenlinien bestimmt werden können. Es fragt sich nur, wo der Nullpunct des Systemes gewählt, und wie viele, und unter welchen Winkeln geneigte Coordinatebenen angenommen werden sollen. Theorie und Beobachtung geben auf diese Fragen folgende Antworten;

1) Den Nullpunct des Axensystemes verlege man jederzeit in den Mittelpunct der Gestalt, weil nur so die Axen eine symmetrische Lage gegen die verschiedenen Begränzungselemente derselben erhalten können (§. 31.)
2) Die Zahl der Coordinatebenen (oder Axenlinien) ist für die meisten Gestalten auf drei, für einige jedoch auf vier zu setzen, weil nur so die geometrische Bestimmungsmethode den in der Natur gegebenen Symmetrieverhältnissen angemessen wird.
3) Die Neigungsverhältnisse der dreizähligen Coordinatebenen sind verschieden; bei den vierzähligen dagegen herrscht immer das Gesetz, dass sich drei in einer Linie unter 60° schneiden, während vie vierte auf ihnen rechtwinklig ist.

§. 38.

Allgemeine Eintheilung der Gestalten.

Die im vorigen §. enthaltenen Bestimmungen führen vorläufig zu folgender allgemeinsten Eintheilung sämmtlicher Krystallformen nach der Zahl der Coordinatebenen, oder, was dasselbe ist, nach der Zahl der Axenlinien.

A) Trimetrische Gestalten, solche, deren Symmetrieverhältnisse ein dreizähliges Axensystem gestatten.
B) Tetrametrische Gestalten, solche, deren Symmetrieverhältnisse ein vierzähliges Axensystem fordern.

In Bezug auf die verschiedenen Neigungsverhältnisse der Coordinatebenen in den trimetrischen Gestalten ist das allgemeine Neigungsverhältniss von dem besondern zu unterscheiden; jenes ist das der Rechtwinkligkeit oder Schiefwinkligkeit überhaupt, dieses ein bestimmtes, gemessenes, in Graden, Minuten u. s. w. ausgedrücktes Neigungsverhältniss. Nun ist einleuchtend, dass es in Uebereinstimmung mit §. 24. für die trimetrischen Gestalten nur vier allgemeine Neigungsverhältnisse geben kann; indem die drei Neigungswinkel A, B und C der Coordinatebenen entweder durchgängig rechte, oder durchgängig schiefe sind, oder indem gegen zwei rechte ein schiefer, oder endlich gegen zwei schiefe ein rechter Winkel vorhanden ist. Hiernach zerfallen die trimetrischen Gestalten in folgende Abtheilungen:

1) Orthoëdrische Gestalten, alle drei Winkel sind rechte.
2) Monoklinoëdrische G., ein schiefer und zwei rechte Winkel.
3) Diklinoëdrische G., zwei schiefe und ein rechter Winkel.
4) Triklinoëdrische G., alle drei Winkel sind schiefe.

Im Gebiete der tetrametrischen Gestalten giebt es nach der obigen Bestimmung nur ein einziges, vollständig bestimmtes Neigungsverhältniss, und daher auch keine weiteren Unterabtheilungen.

§. 39.

Axen und deren Grössenverhältniss.

Weil aber die Gestalt eines jeden vollständig ausgebildeten Krystalls, dergleichen künftig immer vorausgesetzt werden, einen ringsum geschlossenen Flächeninbegriff darstellt, so müssen sich durch das gemeinschaftliche Zusammentreffen aller dieser Flächen gewisse bestimmte Längen in den an und für sich indefiniten Axenlinien ergeben. Diese bestimmten Theile der Axenlinien, welche zwar von den Parametern der Flächen abhängig, jedoch keineswegs mit denselben identisch sind, heissen die **Axen der Gestalt**. Sie haben grosse Bedeutung für die Erscheinungsweise der ganzen Gestalt, und verdienen um so mehr Berücksichtigung, da von ihrer relativen Grösse das Princip zur ferneren Eintheilung der Krystallformen entlehnt wird. Man unterscheidet aber auch hier das **allgemeine** und **besondere** Grössenverhältniss, indem jenes nur das der Gleichheit oder Ungleichheit überhaupt, dieses ein bestimmtes, in Zahlen ausgedrücktes Verhältniss ist.

Was nun die trimetrischen Gestalten betrifft, so ist offenbar nur eine dreifache Verschiedenheit des allgemeinen Grössenverhältnisses ihrer Axen möglich, indem dasselbe entweder das der **durchgängigen Gleichheit**, oder der **Gleichheit zweier** gegen eine ungleiche Axe, oder das der **durchgängigen Ungleichheit** seyn kann. Während wir aber im Gebiete der orthoëdrischen Gestalten alle drei Fälle verwirklicht finden, begegnen wir im Gebiete der klinoëdrischen Gestalten nur dem letzteren Verhältnisse der durchgängigen Ungleichheit; was vielleicht darin seinen Grund hat, weil die Erscheinungsweise dieser Gestalten durch Realisirung der beiden ersteren Fälle fast nichts an Symmetrie gewinnen würde, weshalb selbst die dereinstige Nachweisung derselben keine fernere Eintheilung begründen könnte.

Im Gebiete der tetrametrischen Formen endlich treffen wir nur das einzige allgemeine Grössenverhältniss, dass die drei sich unter 60° schneidenden Axen einander gleich sind, während die auf ihnen rechtwinklige Axe grösser oder kleiner ist *).

*) Sie könnte jedoch auch dem Charakter des Systemes unbeschadet den übrigen Axen gleich seyn.

§. 40.

Krystallsysteme.

Ein Krystallsystem ist der Inbegriff al ler derjenigen Gestalten, welche bei glei cher Zahl und gleichem allgemeinen Nei gungsverhältniss der Coordinatebenen das selbe allgemeine Grössenverhältniss de Axen besitzen.

In Uebereinstimmung mit dieser Definition er giebt sich nun aus den vorigen §§. folgende Ueber sicht der Gestalten überhaupt und der Krystallsy steme insbesondre.

A. Trimetrische Gestalten.

a) Orthoëdrische Gestalten.

1) **Isometrisches** Krystallsystem, drei gleiche Axen.
2) **Monodimetrisches** K. S, zwei gleiche Axen
3) **Anisometrisches** K. S., drei ungleiche Axen

b) Klinoëdrische Gestalten.

1) **Monoklinoëdrisches** K. S.
2) **Diklinoëdrisches** K. S.
3) **Triklinoëdrisches** K. S.

B. Tetrametrische Gestalten.

1) **Monotrimetrisches** K. S.

Geometrischer Grundcharakter eines Krystallsystemes ist der Inbegriff seiner wesentlichen Merkmale, oder das ihm zukommende Zahl- und Neigungsverhältniss der Coordinatebenen und Grössenverhältniss der Axen.

§. 41.

Symmetrieverhältnisse der Krystallsysteme.

Jedes dieser Krystallsysteme zeigt gewisse, schon aus seinem geometrischen Grundcharakter folgende Symmetrieverhältnisse, welche sich besonders dadurch zu erkennen geben, dass in der Regel eine der Axen entweder ihrer Grösse oder ihrer Lage nach einen eminenten Werth erhält, kraft dessen sie einen entschiedenen Einfluss auf die Symmetrie aller um das Axensystem zu construirenden Gestalten ausübt.

In allen trimetrischen, orthoëdrischen Gestalten finden wir in Bezug auf die Lage der Axen die höchste Regelmässigkeit und Uebereinstimmung; die etwaige Verschiedenheit der Symmetrie kann daher nur in dem Grössenverhältnisse der Axen gesucht werden. Da nun im isometrischen Systeme durchgängige Gleicheit derselben gefordert wird, so zeigt dieses System auch der Grösse seiner Axen nach den höchsten Grad der Regelmässigkeit; jede Axe ist vollkommen gleichwerthig mit den beiden übrigen, und keine derselben spielt irgend eine vorherrschende Rolle. Im monodimetrischen Systeme dagegen ist eine Axe ihrer Grösse nach ungleichwerthig mit den beiden übrigen; sie offenbart dadurch eine gewisse Eminenz, und beherrscht die Symmetrie des ganzen Axensystemes. Im anisometrischen Systeme endlich sind alle drei Axen ungleichwerthig; daher ist zwar jede, aber auch jede in ihrer Art eminent, und keiner kann irgend ein Vorrecht vor der andern zuerkannt werden, weil sich durchaus nicht entscheiden lässt, ob der grösste, der kleinste oder der mittlere Werth ein solches Vorrecht bestimmen soll.

Für die klinoëdrischen Systeme ist in dem Grössenverhältnisse der Axen die gleiche und höchste Unregelmässigkeit gegeben, und folglich die Verschiedenheit der Symmetrie nur in den Neigungsverhältnissen der Coordinatebenen zu suchen. Im monoklinoëdrischen Systeme wird offenbar diejenige Coordinatebene einen eminenten Charakter haben, auf welcher die beiden andern rechtwinklig sind, und dieser eminente Charakter wird auf die beiden in ihr liegenden Axen übergehen. Im diklinoëdrischen Systeme dagegen werden die zwei auf einander rechtwinkligen Coordinatebenen als eminent erscheinen, und ihre gegenseitige Durchschnittslinie als eminente Axe bezeichnen. Im triklinoëdrischen Systeme endlich finden wir auch der Lage der Coordinatebenen nach dieselbe Ungleichheit und Unregelmässigkeit, welche schon in Bezug auf die Grösse der Axen Statt findet.

Was endlich das tetrametrische System betrifft, so zeichnet sich sowohl der Lage als Grösse nach die eine, auf den übrigen rechtwinklige Axe als eminente Axe aus.

§. 42.

Aufrechte Stellung, Hauptaxen, Normalstellung.

Der aufrecht stehende Beobachter wird jede Gestalt gleichfalls aufrecht vor sich denken, und solche überhaupt in Bezug auf sich selbst orientiren. Es fragt sich nun zuvörderst, welche Linie im Krystalle diese aufrechte Stellung bestimmen, und folglich vertical gestellt werden soll. Die Antwort kann wohl nur dahin lauten, dass eine der Axen, und zwar diejenige, oder eine von denjenigen, die verticale Richtung erhalten müsse, welche einen eminenten Charakter besitzen, und kraft dessen die Symmetrie der Formen beherrschen. Nennen wir nun jede, die aufrechte Stellung des Krystalls bestimmende Axe eine **Hauptaxe** im Vergleiche zu den übrigen als **Nebenaxen**, so erhalten wir für die verschiedenen Krystallsysteme folgende Bestimmungen:

1) Wo sich eine der Axen entweder durch ihre Grösse, wie im monodi- und monotrimetrischen, oder durch ihre Lage, wie im diklinoëdrischen Systeme, vor den übrigen Axen auszeichnet, da ist

sie jederzeit die Hauptaxe, und der Krystall nur nach ihr, also nur nach einer Richtung aufrecht.

2) Wo sich alle Axen in jeder Hinsicht vollkommen gleich sind, wie im isometrischen Systeme, da ist jede eine Hauptaxe und der Krystall nach drei Richtungen aufrecht.

3) Wo sich, wie im monoklinoëdrischen Systeme, zwei, oder, wie im anisometrischen und triklinoëdrischen Systeme, alle drei Axen, eine jede in ihrer Art, eminent zeigen, da muss eine derselben zur Hauptaxe gewählt, die einmal gewählte jedoch durchgängig als solche beibehalten werden.

Auf die Zahl und das Verhältniss der Hauptaxen gründet sich folgende Eintheilung der Krystallsysteme:

A. Vielaxiges System.

1) Isometrisches System.

B. Einaxige Systeme

a) die Hauptaxe ist rechtwinklig auf allen Nebenaxen und

α) absolut.

2) Monodimetrisches S.

3) Monotrimetrisches S.

β) relativ.

4) Anisometrisches S.

b) die Hauptaxe ist schiefwinklig auf einer der Nebenaxen.

5) Monoklinoëdrisches S.

c) die Haupttaxe ist schiefwinklig auf beiden Nebenaxen und

α) absolut.

6) Diklinoëdrisches S.

β) relativ.

7) Triklinoëdrisches S.

Durch Bestimmung der aufrechten Stellung sind jedoch die Gestalten und Axensysteme noch nicht vollständig orientirt, weil sie ja um ihre verticale

Axe durch alle Azimuths gedreht werden können. Die **Normalstellung**, welche wir künftig bei allen unsern Betrachtungen voraussetzen, bestimmt sich nun dadurch, dass eine der verticalen Coordinatebenen die Richtung auf den Beobachter hat, oder dass das Auge desselben in der Verlängerung einer dieser Coordinatebenen enthalten ist, wodurch sie selbst als **Gesichtsebene** bestimmt wird. Da es immer wenigstens **zwei** verticale Coordinatebenen giebt, und meist willkürlich ist, nach welcher man die Normalstellung bestimmt, so kann man die meisten Gestalten aus einer Normalstellung in die andre bringen, indem man sie um ihre verticale Hauptaxe so lange dreht, bis die nächste Coordinatebene zur Gesichtsebene wird. Man unterscheidet dann beide Normalstellungen als **erste** und **zweite Normalstellung**.

§. 43.

Basis, und abgeleitete Namen der Krystallsysteme.

Basis eines Krystallsystemes nennt man die Coordinatebene durch die Nebenaxen. Nach der Figur dieser Basis, wie solche durch die Endpuncte der Nebenaxen bestimmt wird, erhalten wir für das monodi- und monotrimetrische, so wie für das anisometrische System die abgeleiteten Namen des **tetragonalen, hexagonalen** und **rhombischen** Systemes, welche, gewisser, erst später zu erwähnender Verhältnisse wegen, den ursprünglichen Namen im Gebrauche vorzuziehen sind. Aus demselben Grunde werden wir auch künftig für das isometrische System den, von einer seiner charakteristischen Gestalten, dem Würfel = *tessera* entlehnten Namen **Tesseralsystem** gebrauchen. Für die klinoëdrischen Systeme lassen sich dagegen die Namen füglich beibehalten, unter welchen wir sie bereits kennen gelernt haben. Zur leichteren Auffassung dieser Synonymik diene folgende nochmalige Uebersicht:

1) Tesserales System = Isometrisches S.
2) Tetragonales S. = Monodimetrisches S.
3) Hexagonales S. = Monotrimetrisches S.
4) Rhombisches S. = Anisometrisches S.
5) Monoklinoëdrisches S.
6) Diklinoëdrisches S.
7) Triklinoëdrisches S.

§. 44.

Pol- und Mittelkanten, Querschnitte.

Der Mittelpunct theilt jede Axe in zwei Halbaxen.

Die Endpuncte einer Hauptaxe heissen Pole; fallen sie in Ecke, so werden dieselben Polecke, und die in ihnen zusammenlaufenden Kanten Polkanten genannt.

Obere oder untere Flächen einer Gestalt sind, die an sich, oder auch gehörig verlängert mit der oberen oder unteren Hälfte der (verticalen) Hauptaxe zum Durchschnitt kommen.

Mittelkanten sind, die von einer oberen und einer unteren Fläche gebildet werden; Mittelecke sind, in welchen Mittelkanten zusammentreffen.

Querschnitt heisst jeder auf eine Hauptaxe rechtwinklige Schnitt, und Mittelquerschnitt der Querschnitt durch den Mittelpunct.

Basische Schnitte heissen die mit der Basis (§. 43.) parallelen Schnitte; sie sind in allen denjenigen Systemen, in welchen die Hauptaxe rechtwinklig auf den Nebenaxen ist, mit den Querschnitten identisch.

Jede Coordinatebene ist nach §. 31. ein Schnitt, sofern sie durch die Flächen der Gestalt innerhalb derselben begränzt wird; wir nennen diese in die

Coordinatebenen fallenden Schnitte **Hauptschnitte**, und bezeichnen daher die Coordinatebenen selbst als die Ebenen der Hauptschnitte.

Drittes Capitel.

Von der Isoparametrie, Homoëdrie und Hemiëdrie.

§. 45.

Isoparametrische Flächen.

Zwei oder mehre Flächen eines und desselben Axensystemes heissen **isoparametrisch**, wenn ihre gleichnamigen, d. h. in gleichwerthigen Axen gelegenen Parameter gleich gross, und nur der Richtung nach verschieden sind.

Es sey z. B. für ein tetragonales Axensystem eine Fläche durch die Parameter m in der Hauptaxe, n und r in den Nebenaxen gegeben. Da die Axen überhaupt zweierlei Werth haben, indem die Hauptaxe vor den Nebenaxen hervortritt, so wird der Parameter m für alle zu construirende isoparametrische Flächen **nur in der Hauptaxe**, jedoch sowohl in der negativen als positiven Hälfte derselben zu wählen seyn; die beiden übrigen Parameter aber, welche in den beiden vollkommen gleichwerthigen Nebenaxen liegen, werden auch ihre Lage in denselben beliebig vertauschen können, was für jeden Quadranten der Basis zweimal möglich ist. Alle Flächen nun, welche durch die Endpuncte je dreier, auf diese Art bestimmter Parameter m, n und r gelegt werden können, heissen isoparametrisch unter einander und mit der gegebenen Fläche. Wären dagegen dieselben Parameter für eine Fläche im rhombischen Systeme gegeben, so würde offenbar die Vertauschung der Lage der Parameter *n* und *r* in den beiden Nebenaxen nicht mehr zulässig seyn, weil ja dann diese Nebenaxen selbst ungleichwerthig sind, und folglich in der einen eben so nur der Parameter *n*, in der andern nur der Parameter *r* liegen darf, wie der Parameter *m* selbst nur in der Hauptaxe enthalten seyn kann.

§. 46.

Einfache und zusammengesetzte Gestalt.

Jede einzele Krystallgestalt stellt einen Inbegriff von lauter isoparametrischen Flächen dar, und es ist daher künftig bei dem Worte Gestalt nur ein solcher Inbegriff zu denken, welche Bestimmungen auch ausserdem noch eintreten mögen.

Eine einfache Gestalt ist, deren Flächen alle gleich und ähnlich, eine zusammengesetzte Gestalt, deren Flächen zwar isoparametrisch, aber nicht alle gleich und ähnlich sind; die letzteren finden sich ausschliesslich im Gebiete der klinoëdrischen Krystallsysteme.

Theilgestalten einer zusammengesetzten Gestalt heissen die Inbegriffe aller gleichwerthigen Flächen derselben; jede Theilgestalt besteht entweder aus zwei Gegenflächenpaaren oder aus zwei einzelen Gegenflächen; diese heissen die Glieder der Theilgestalt.

Eine geschlossene Gestalt ist, deren Flächen den Raum allseitig umschliessen; eine offne Gestalt, deren Flächen den Raum nicht allseitig umschliessen. Die Theilgestalten sind immer offne Gestalten.

§. 47.

Holoëdrische und hemiëdrische Gestalt.

Eine holoëdrische Gestalt ist der Inbegriff sämmtlicher Flächen, welche rings um ein vollständig bestimmtes Axensystem für ein bestimmtes Verhältniss der Parameter möglich sind. Sie besitzt jederzeit Flächenparallelismus, d. h. für jede ihrer Flächen giebt es eine Gegenfläche (§. 35.). Denn da sich jede Axe vom Mittelpuncte aus nach entgegengesetzten Richtungen erstreckt, so werden die Parameter *m*, *n* und *r* irgend einer Fläche diesseits des Mittelpunctes, in ihren respectiven Axen nach entgegengesetzter Richtung genommen, eine Fläche jenseits des Mittelpunctes bestimmen, welche der ersteren parallel ist. Eine solche Fläche muss aber immer möglich seyn, weil jeder Parameter in seiner Axe nach beiden Richtungen vom Mittelpuncte aus genommen werden kann.

Eine hemiëdrische Gestalt ist die symmetrisch vertheilte Hälfte sämmtlicher Flächen, welche rings um ein vollständig bestimmtes Axensystem für ein bestimmtes Verhältniss der Parameter möglich sind; und eine tetartoëdrische Gestalt eben so das symmetrisch vertheilte Viertel dieser Flächen.

Wiefern jede Gestalt nur ein Flächeninbegriff ist, sofern lassen sich alle hemiëdrische und tetartoëdrische Gestalten als Hälften und Viertel derjenigen holoëdrischen Gestalten betrachten, welche den vollständigen Inbegriff derselben isoparametrischen Flächen darstellen, und aus welchen, als ihren Muttergestalten, sie durch das Verschwinden der halben oder dreiviertel Flächenzahl abzuleiten sind. Man sagt dann, die Muttergestalt erscheine hemiëdrisch oder tetartoëdrisch, und bezeichnet das Verhältniss selbst mit den Namen der Hemiëdrie und Tetartoëdrie.

§. 48.

Hemiëdrie der zusammengesetzten Gestalten.

Die Hemiëdrie und Tetartoëdrie kann sowohl bei einfachen als bei zusammengesetzten Gestalten Statt finden, ja für die letzteren ist sie als Regel der Erscheinung zu betrachten, weil in der verschiedenen Beschaffenheit der Theilgestalten jeder zusammengesetzten Gestalt eine Disposition zur Zerfällung in diese ihre Elemente gegeben ist. Die Hemiëdrie oder Tetartoëdrie findet sich daher auch bei diesen Gestalten immer in der Art verwirklicht, dass eine der Theilgestalten allein ausgebildet ist, während die andere oder die anderen entweder gänzlich verschwinden, oder doch ungleichmässig ausgebildet, und gleichsam zurückgedrängt erscheinen. Die Hemiëdrie ist also im Gebiete der klinoëdrischen Gestalten ein, seiner Art und Weise nach bestimmtes, gesetzmässiges, und mit einer gewissen Nothwendigkeit aus jener ursprünglichen Entzweiung folgendes Verhältniss, welche so auffallend in der verschiedenen Flächenbeschaffenheit der zusammengesetzten Gestalten hervortritt.

§. 49.

Hemiëdrie der einfachen Gestalten; Grundgesetz derselben.

Aber auch in den einfachen Gestalten spielt die Hemiëdrie nicht selten eine wichtige Rolle, und da in der Erscheinungsweise dieser Gestalten keine ursprüngliche Disposition zum Ausfallen dieser oder jener Flächen gegeben ist, so haben wir für sie die Gesetze der Hemiëdrie besonders aufzusuchen.

Die Hemiëdrie kann an den einfachen Gestalten sowohl nach einzelen Flächen, als nach Flächenpaaren, oder nach drei-, vier-, sechszähligen Flächensystemen erfolgen; d. h. es können nicht nur einzele Flächen, sondern auch ganze Flächensysteme verschwinden, während sich die zurückbleibenden vergrössern. Nur findet das allgemeine Gesetz Statt, dass die bleibenden Flächen oder Flächensysteme eine ringsum symmetrische Vertheilung haben müssen; ein Gesetz, welches sich auch in folgenden Formeln aussprechen lässt:

Es bleiben und verschwinden jederzeit die abwechselnden Flächen oder Flächensysteme, oder:

Für jede bleibende Fläche oder jedes bleibende Flächensystem verschwinden die Neben- und bleiben die Nachbarflächen oder Flächensysteme.

Die Hemiëdrie kann daher auch nur bei denjenigen einfachen Gestalten wirklich Statt finden, in welchen für die abwechselnden Flächen oder Flächensysteme (wenn solche vorhanden) eine vollkommen symmetrische Vertheilung rings um das Axensystem möglich ist, so dass die verschwindende Flächenhälfte ihrer Seits genau dieselbe Vertheilung hat, wie die bleibende Flächenhälfte. Lässt sich daher dieses Princip der ringsum symmetrischen Vertheilung für die halbe Anzahl weder der einzelen Flächen, noch der Flächensysteme (wo dergleichen vorhanden) geltend machen, so ist die betreffende Gestalt zur Hemiëdrie überhaupt unfähig. Hiernach lässt sich für jede Gestalt beurtheilen, ob sie der Hemiëdrie nach einzelen Flächen oder nach Flächensystemen fähig, oder ob sie derselben gar nicht fähig ist.

§. 50.

Parallelflächige und geneigtflächige Hemiëdrie.

Wenn für jede bleibende Fläche oder jedes bleibende Flächensystem die Gegenfläche oder das Gegenflächensystem verschwindet, so entsteht natürlich eine hemiëdrische Gestalt, an welcher keine Fläche der andern parallel, sondern jede gegen jede geneigt ist; wenn dagegen für jede bleibende Fläche die Gegenfläche ebenfalls bleibt, so wird auch die hemiëdrische Gestalt je zwei paralleler Flächen behalten. Auf diesen Unterschied gründet sich die sehr wichtige Eintheilung der hemiëdrischen Gestalten und der

Hemiëdrie selbst in parallelflächige und geneigtflächige. Aus der Regel in §. 49., dass immer nur die abwechselnden Flächen oder Flächensysteme bleiben, folgt unmittelbar, dass, wenn man, von irgend einer bleibenden oder verschwindenden Fläche, oder einem dergleichen Flächensysteme ausgehend, durch die Reihe der Nebenflächen oder Nebensysteme fortzählt, alle geradzähligen Nebenflächen oder Nebensysteme dem gleichnamigen, alle ungeradzähligen dem ungleichnamigen Verhältnisse unterworfen sind. Ist z B. vermöge des Principes der symmetrischen Vertheilung die Hemiëdrie nach einzelen Flächen möglich, so ist für jede bleibende Fläche die 2te, 4te, 6te ..... $2n$te Nebenfläche eine bleibende, die 1ste, 3te, 5te ..... $(2n+1)$te eine verschwindende. Hiernach lässt sich im Voraus für jede Gestalt, von welcher man bereits weiss, dass sie der Hemiëdrie nach $n$zähligen Flächensystemen fähig sey, bestimmen, ob diese Hemiëdrie auf eine parallelflächige oder geneigtflächige Gestalt führen wird. Ist nämlich das Gegensystem eines jeden Flächensystemes ein geradzähliges in der Reihe der Nebensysteme, so kann nur eine parallelflächige, ist sie ein ungeradzähliges, nur eine geneigtflächige Gestalt zum Vorschein kommen.

§. 51.

Gegenkörper.

Da übrigens jede einfache holoëdrische Gestalt zwei, an sich völlig gleichwerthige, und nur durch ihre gegenseitige Lage verschiedene Flächenhälften hat, sich auch kein Verhältniss nachweisen lässt, durch welches für die eine oder andre Flächenhälfte ein Vorrecht zum Wachsthume oder Verschwinden angezeigt wäre, so wird jede einfache Gestalt zwei, in Bezug auf ihre Begränzungselemente völlig gleiche und ähnliche, und nur durch ihre Stellung, oder durch die Verknüpfung dieser Begränzungselemente verschiedene, hemiëdrische Gestalten, oder Gegenkörper liefern.

Viertes Capitel.

Von der Ableitung der Gestalten.

§. 52.

Ableitung aus einer Grundgestalt.

Geometrische Grundgestalt eines Krystallsystemes ist möglicherweise eine jede geschlossene Gestalt, deren Flächen ein dem geometrischen Grundcharakter entsprechendes Verhältniss der Parameter haben.

Die krystallographische Ableitbarkeit ist dasjenige Verhältniss mehrer Gestalten eines und desselben Krystallsystemes, vermöge dessen jede aus jeder, oder alle aus einer durch blosse Veränderung des Grössenverhältnisses der Parameter construirt werden können. Diese Construction selbst heisst die Ableitung der Gestalten, und darf niemals auf ein den geometrischen Grundcharakter des Systemes überschreitendes Verhältniss der Axen führen. Auch sieht man, dass in denjenigen Systemen, in welchen verschiedene besondre Neigungsverhältnisse der Coordinatebenen möglich sind, für alle unter dem Verhältnisse der Ableitbarkeit stehende Gestalten dasselbe besondre Neigungsverhältniss postulirt wird: weil ja die Ableitung eine blosse Veränderung der Parameter voraussetzt.

Man geht bei der Ableitung eines gegebenen Gestalteninbegriffes jederzeit von einer geometrischen Grundgestalt aus, und nennt die dazu einmal auserwählte die krystallographische Grundgestalt oder die

Grundgestalt des gegebenen Gestalteninbegriffes schlechthin. Im Tesseralsysteme ist daher die Grundgestalt eine absolute, weil die für sie geforderte nothwendige Gleichheit aller drei Parameter möglicherweise nur eine Gestalt geben kann; in den übrigen Systemen dagegen ist sie eine relative, geometrisch-willkürliche und nur krystallographisch bestimmbare, indem gar viele Gestalten den Grundcharakter des Systemes unmittelbar repräsentiren.

§. 53.

Naturgesetz der Ableitung.

Bei aller Ableitung kommt es nach §. 52. nur darauf an, aus dem zu Grunde gelegten Verhältnisse $a:b:c$ der Parameter der Grundgestalt auf das Verhältniss $a':b':c'$ der abzuleitenden Gestalt zu gelangen. Diese Forderung wird immer in der Art erfüllt werden können, dass man statt des letzteren Verhältnisses die homologen Verhältnisse

$$ma : nb : c$$

oder

$$ma : b : rc$$

einführt, und daher, mit willkürlicher Beibehaltung eines der ursprünglichen Parameter, die beiden übrigen Parameter der abzuleitenden Gestalt als Multipla der beiden gleichnamigen Parameter der Grundgestalt ausdrückt. Die Factoren m und n oder m und r, auf deren Kenntniss es hierbei ankommt, heissen die Ableitungs-Coëfficienten.

Ein sehr merkwürdiges, aber durchgängig bestätigtes Naturgesetz für die Ableitung ist es, dass diese Ableitungs-Coëfficienten jederzeit *rationale* Zahlen, irrationale Werthe dagegen gänzlich ausgeschlossen sind.

Dieses Grundgesetz muss als das Regulativ aller Ableitungsmethoden betrachtet werden, wie es denn insofern auch den Prüfstein derselben abgiebt, inwiefern jede Methode da naturgemäss zu seyn aufhört, wo sie genöthigt ist, irrationale Ableitungscoëfficienten einzuführen.

Eine Krystallreihe ist der Inbegriff aller Gestalten, welche aus einer vollständig bestimmten Grundgestalt abgeleitet werden können.

Zwei Gestalten einer Krystallreihe befinden sich in paralleler Stellung, wenn die Axen der einen den gleichnamigen Axen der andern parallel sind.

Die hemiëdrischen Gestalten werden jederzeit aus ihren respectiven holoëdrischen Muttergestalten abgeleitet.

Fünftes Capitel.

Von der Benennung und Bezeichnung der Krystallgestalten.

§. 54.

Nomenclatur; Forderungen.

Für jede Wissenschaft, welche eine Mannichfaltigkeit verschiedenartiger Dinge zum Gegenstande hat, ist eine Nomenclatur oder wörtliche Bezeichnung dieser Dinge ein unumgängliches Bedürfniss, weil es nur durch die Anwendung dieses Hülfsmittels möglich wird, sich mit Kürze und Bestimmtheit über den jedesmaligen Gegenstand der Betrachtung auszusprechen und zu verständigen. Die Krystallographie hat also gleichfalls für die mannichfaltigen Gestalten, welche den Gegenstand ihrer Betrachtungen bilden, eine Nomenclatur zu geben, und dabei allen den Anforderungen Genüge zu leisten, welche überhaupt an jede wissenschaftliche Nomenclatur gemacht werden können. Die krystallographische Nomenclatur muss daher seyn:

1) Bezeichnend; d. h. die Namen der Gestalten müssen von Eigenschaften derselben, und zwar von recht hervorstechenden und charakteristischen Eigenschaften entlehnt werden, so dass jeder Name auf die Vorstellung seines Gegenstandes gelangen lässt.

2) Möglichst kurz; es dürfen nicht zu viele Eigenschaften in die Namen aufgenommen werden, weil selbige dann durch Schwerfälligkeit verlieren würden, was sie an Bestimmtheit gewönnen; der Name darf nicht in eine Phrase, die blosse wörtliche Bezeichnung nicht in eine förmliche Beschreibung ausarten.

3) Methodisch; die zwischen den Gestalten obwaltenden Verwandtschaften, Aehnlichkeiten und Uebergänge müssen sich auch in ihren Benennungen kund geben; diess ist nur durch Anwendung zusammengesetzter Benennungen zu erreichen.

4) Sprachrichtig; die Benennungen müssen dem Geiste und den Regeln derjenigen Sprache angemessen seyn, aus welcher sie entlehnt werden; auch ist bei ihrer Bildung auf den Wohllaut möglichst Rücksicht zu nehmen.

5) Einstimmig mit dem Sprachgebrauche verwandter Wissenschaften; so hat die Krystallographie den durch tausendjähriges Alter sanctionirten Sprachgebrauch der Geometrie möglichst zu respectiren, und nur in dringenden Fällen davon abzuweichen, weil es immer ein Uebelstand bleibt, wenn zwei so nahe verwandte Wissenschaften denselben Gegenstand mit verschiedenen Namen bezeichnen.

§. 55.

Benennung der vielaxigen oder tesseralen Gestalten.

Für die vielaxigen oder tesseralen Gestalten, welche die Geometrie zu betrachten pflegt, hat sie, wie die Namen Oktaëder, Hexaëder, Dodekaëder u. a. beweisen, die Nomenclatur auf die Zahl der Flächen gegründet, während sie für die einaxigen Gestalten (z. B. Pyramiden, Prismen) andre, mehr willkürliche Verhältnisse zu Grunde legte. Wir werden diesem Sprachgebrauche um so eher folgen können, da die Natur selbst die vielaxigen Gestalten durch ihre Regelmässigkeit so wesentlich vor den übrigen ausgezeichnet hat, dass mit allem Rechte für beiderlei Gestalten ein verschiedenes Princip der Nomenclatur geltend gemacht werden kann.

Die vielaxigen oder tesseralen Gestalten entlehnen im Allgemeinen ihren Namen von der Zahl ihrer Flächen; wo dieses Verhältniss allein nicht mehr hinreichend unterscheidet, da wird eine nähere Determination von der Figur der Flächen hinzugefügt. Eine tesserale Gestalt von n Flächen heisst daher allgemein ein n-Flächner; z. B. Vierflächner, Achtflächner u. s. w., wofür wir uns jedoch, der Allgemeinheit ihres Gebrauches wegen, noch lieber der griechischen Namen Tetraëder, Oktaëder u. s. w. bedienen werden. Weil sich aber die Flächen mancher tesseralen Gestalten auf eine sehr bestimmte Weise in Flächensysteme gruppiren, so lässt sich für diese der allgemeine Name weit bezeichnender bilden, wenn man die ganze Zahl der Flächen in ihre beiden Factoren, die Zahl der Flächensysteme, und die Zahl der einzelen Flächen eines jeden Systemes zerfällt. Zeigt z. B. eine $n$flächige Gestalt a Flächensysteme, deren jedes b Flächen zählt, so ist $n = a . b$, und der Name b- mal- a-Flächner weit bezeichnender und bestimmter als der Name n-Flächner.

§. 56.

Benennung der einaxigen Gestalten.

Die einaxigen Gestalten entlehnen im Allgemeinen ihren Namen nicht von der Zahl ihrer Flächen, sondern von der Figur derselben oder von andern Gestaltverhältnissen. Es giebt aber überhaupt folgende verschiedene Arten von einaxigen Gestalten:

1) Pyramiden (eigentlich Dipyramiden, weil jede Pyramide der Krystallographie zwei in ihren Grundflächen verbundene Pyramiden der Geometrie darstellt), sind von sechs und mehr Dreiecken umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten in einer Ebene liegen; sie sind theils einfache, theils zusammengesetzte Gestalten.
2) Skalenoëder, sind von acht und mehr Dreiecken umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten nicht in einer Ebene liegen, sondern im Zickzack auf- und absteigen.
3) Sphenoide, sind doppelt-keilförmige, von vier gleichschenkligen oder ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Gestalten.
4) Rhomboëder, sind von sechs Rhomben umschlossene Gestalten.
5) Trapezoëder, sind von sechs und mehr gleichschenkligen Trapezoiden umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten im Zickzack auf- und ablaufen.
6) Prismen, sind Inbegriffe von gleichwerthigen Flächen, welche einer der Axen parallel laufen. Diejenige Axe, welcher die Flächen eines Prisma's parallel sind, wird auch die Axe desselben genannt, und nach Maassgabe der Lage dieser Axe giebt es sowohl verticale, als auch horizontale und geneigte Prismen.

Da nun Flächen, welche einer und derselben Linie parallel laufen, den Raum nicht allseitig umschliessen, so ergiebt sich, dass die Prismen keine geschlossene, sondern offene Gestalten von indefiniter Länge sind, und als solche nicht selbständig, sondern nur zugleich mit anderen, gegen ihre Axe geneigten Flächen erscheinen können *).

Alle diese Gestalten werden ferner nach dem Krystallsysteme, zu welchem sie gehören, nach der Figur ihrer basischen oder Querschnitte, zum Theil auch nach ihrer Stellung durch zweckmässige Beinamen unterschieden.

§. 57.

Bezeichnung; Forderungen.

Die nicht selten grosse Mannichfaltigkeit von gleichnamigen Gestalten einer und derselben Krystallreihe, die Nothwendigkeit einer scharfen Unterscheidung derselben, selbst bei einer an Gleichheit gränzenden Aehnlichkeit, und das Bedürfniss der genauen Berechnung einer jeden einzelen Gestalt machen neben der Nomenclatur eine krystallographische Bezeichnung zu einem unentbehrlichen Hülfsmittel der Wissenschaft.

Soll aber diese Bezeichnung allen an sie zu machenden Anforderungen entsprechen, so muss sie seyn:

1) Repräsentativ; das Zeichen ist der Repräsentant seines Gegenstandes, und soll also das Bild oder die Vorstellung desselben unmittelbar vergegenwärtigen; diess wird es um so schneller und sicherer leisten, je mehr es der Einbildungskraft die Construction der bezeichneten Gestalt erleichtert; was wiederum nur dadurch möglich wird, dass jedes Zeichen uns zunächst immer auf die Vorstellung einer möglichst einfachen Gestalt verweist.
2) Bestimmt; jedes Zeichen muss die Vorstellung einer Gestalt ausschliesslich und mit völliger Be-

---

*) Les bases d'un prisme ne sont autre chose que des termes que l'imagination ou le besoin met à des corps indéfinis. *Lacroix* Géometrie descriptive, p. 89.

stimmtheit vergegenwärtigen, und jede Gestalt nur durch ein Zeichen repräsentirt werden, weil man sonst Gefahr läuft, bei verschiedenen Zeichen dieselben Gestalten vorzustellen.

3) Calculativ; die Zeichen müssen die zur vollständigen Berechnung der Gestalten erforderlichen Elemente, und zwar wo möglich in derjenigen Form enthalten, in welcher sie unmittelbar für den Calcül benutzt werden können, ohne dass Zwischenrechnungen erforderlich wären.

4) Methodisch; die wesentlichen Verwandtschaften und Uebergänge der verschiedenen Gestalten einer und derselben Krystallreihe müssen auch in der Bezeichnung hervortreten; dieser Forderung kann nur entsprochen werden, wenn die Bezeichnung keine einfache, sondern eine zusammengesetzte ist.

5) Möglichst kurz; wiewohl die krystallographische Bezeichnung eine zusammengesetzte seyn muss, so wird sie doch nach möglichster Kürze zu streben, und jede unnöthige Ueberladung der Zeichen zu vermeiden haben.

§. 58.

Einfache und zusammengesetzte Bezeichnung.

Jede Bezeichnung ist entweder einfach oder zusammengesetzt. Eine einfache Bezeichnung giebt für jeden besonderen Gegenstand ein einfaches oder einzeles Zeichen, wird aber eben dadurch sehr schwerfällig und unbequem, sobald die Zahl der zu bezeichnenden Gegenstände etwas gross ist. Eine zusammengesetzte Bezeichnung giebt für jeden Gegenstand ein aus zweien oder mehren einzelen Zeichen zusammengesetztes Zeichen, und ist eigentlich nur auf solche Gegenstände anwendbar, zwischen welchen gewisse Verknüpfungen und Verwandtschaften Statt finden; wobei an sie die besondere Forderung zu machen ist, dass sie diese Verknüpfungen und Verwandtschaften möglichst vollständig ausdrücken muss. Man unterscheidet an ihr die Materie, als den Inbegriff der zur Bezeichnung erforderlichen einzelen Zeichen oder Elemente, und die Form, als die Weise der Verbindung dieser Elemente zu den zusammengesetzten Zeichen. Beide stehen gewissermaassen in einem reciproken Verhältnisse, inwiefern nämlich die grössere Einfachheit der einen eine grössere Zusammengesetztheit der anderen nothwendig macht.

§. 59.

Grund- und Hülfselemente der Bezeichnung.

Der Anforderung, die zwischen den Gegenständen bestehenden Verknüpfungen und ihr Gemeinsames wie ihr Verschiedenes in der Bezeichnung wiederzugeben, wird man am einfachsten Genüge leisten, indem man gewisse Elemente durchgängig in alle Zeichen eingehen lässt, und darauf durch andre Elemente die obwaltenden Verschiedenheiten ausdrückt. Jene gemeinschaftlichen Elemente heissen die Grundelemente, diese dagegen die Hülfselemente der Bezeichnung. Je mehr Grundelemente eingeführt werden, desto einfacher kann allerdings die Form der Zeichen werden, jedoch dürfte dadurch die Vorstellbarkeit des Gegenstandes nicht selten erschwert werden. Ueberhaupt gilt die allgemeine Regel, so wenig Elemente einzuführen, als es nur die Einfachheit der Form gestattet.

§. 60.

Krystallographische Bezeichnung.

Weil die verschiedenen Krystallsysteme als eben so viele abgeschlossene Inbegriffe von Gestalten zu betrachten sind, so dass zwischen den Gestalten verschiedener Systeme keine wesentlichen Beziehungen Statt finden, so wird auch die Bezeichnung zunächst nur in Bezug auf die einzelen Systeme gebildet werden müssen. Weil dagegen innerhalb der einzelen Systeme und Krystallreihen wegen der gegenseitigen Ableitbarkeit der Gestalten der innigste Zusammenhang Statt findet, so wird auch dieser Zusammenhang in der Bezeichnung hervortreten, und diese selbst eine zusammengesetzte seyn müssen (§. 57.). Da nun alle Gestalten einer Krystallreihe aus einer beliebig gewählten Grundgestalt abgeleitet werden können, und diese den geometrischen Grundcharakter des Systemes, wie er sich in allen Gestalten derselben Krystallreihe durchgängig ausgeprägt finden muss, am einfachsten und unverhülltesten darstellt, so ist es am zweckmässigsten, der Grundgestalt ein beliebiges einzeles Symbol zu geben, und dieses als den Repräsentanten des in allen Gestalten mehr oder weniger verhüllt wiederkehrenden Verhältnisses zum Grundelemente der Bezeichnung zu wählen.

§. 61.

Fortsetzung.

Man bezeichne also die gewählte Grundgestalt mit dem Anfangsbuchstaben ihres Namens, z. B. mit P, wenn sie eine Pyramide ist. Gesetzt nun, das Verhältniss der Parameter ihrer Flächen sey $= a : b : c$, und jenes der Flächen irgend einer andern Gestalt $= a' : b' : c'$, so wird sich zuvörderst dieses Verhältniss den Bedingungen der Ableitung gemäss in ein andres verwandeln müssen, in welchem e i n e der Grössen des ersteren Verhältnisses, z. B. c, wieder erscheint, während die beiden andern als Multipla oder Submultipla von a und b nach rationalen Zahlen ausgedrückt sind, so dass z. B.

$$a' : b' : c' = ma : nb : c$$

Da es nun in der Krystallographie einzig und allein auf die Lage der Flächen, nicht auf die absolute Grösse der Gestalten ankommt, so ist es ganz gleichgültig, wenn wir statt des Verhältnisses $a' : b' : c'$ das Verhältniss $ma : nb : c$ als das den Flächen der zu bezeichnenden Gestalt eigenthümliche einführen. Nun war das Zeichen der Grundgestalt für die Parameter $a : b : c = \text{P}$, also dürfte das Zeichen irgend einer andern Gestalt für die Parameter $ma : nb : c$ am zweckmässigsten $= m\text{P}n$ zu schreiben seyn, indem man die Ableitungscoëfficienten der Parameter a und b vor und hinter das Symbol der Grundgestalt setzt.

§. 62.

Fortsetzung

Auf die hier vorgetragene Methode werden wir die Bezeichnung der Gestalten sämmtlicher Krystallsysteme gründen, da sie sich vollkommen ausreichend gezeigt hat, und im Gebrauche manche Vortheile gewährt. Das Grundelement der Bezeichnung ist daher für jede Krystallreihe das Zeichen der Grundgestalt; die Hülfselemente sind die gewöhnlichen Ziffern. Wo die Stellung, oder, wie in den zusammengesetzten und hemiëdrischen Gestalten, die oberen und unteren, rechten und linken Theilgestalten oder Hälften zu unterscheiden sind, da geschieht es durch Vorsetzung der Zeichen + und —, der Buchstaben r und l u. dgl. Die hemiëdrischen oder tetartoëdrischen Gestalten erhalten in der Regel das Zeichen ihrer Muttergestalt mit untergeschriebener 2 oder 4; so wird z. B. das Zeichen einer hemiëdrischen oder tetartoëdrischen Gestalt von $m\text{P}n$ allgemein $= \frac{m\text{P}n}{2}$ oder $= \frac{m\text{P}n}{4}$. Die Theilgestalten der zusammengesetzten Gestalten könnten auch durch oben beigefügte Accente von einander unterschieden werden. Wo es endlich nöthig wird, die hinteren und vorderen Flächen einer Gestalt zu unterscheiden, da kann man für jene den kleinen lateinischen Buchstaben gebrauchen, während für diese der grosse beibehalten wird. Doch scheint es in allen den Fällen, da eine Unterscheidung der einzelen Flächen gefordert wird, am zweckmässigsten, die einzelen Flächen unmittelbar durch ihre Gleichungen zu bezeichnen, oder, was ziemlich dasselbe ist, die Bezeichnungsart von Weiss zu gebrauchen.

Sechstes Capitel.

Von den Combinationen.

§. 63.

Combinationen; Symmetrie derselben.

Eine krystallographische Combination ist ein Inbegriff zweier oder mehrer Gestalten oder Theilgestalten einer und derselben Krystallreihe, welche um einen gemeinschaftlichen Mittelpunct unter solchen Verhältnissen verbunden sind, dass die Flächen oder Flächensysteme der einen symmetrisch zwischen den Flächen oder Flächensystemen der andern erscheinen. Da nun die Flächen der einzelen Gestalten entweder Kanten oder Ecke zwischen sich bilden, so ist klar, dass in einer Combination die Flächen der einen Gestalt an der Stelle gewisser Ecke oder Kanten der anderen Gestalt oder Gestalten gerade so erscheinen müssen, als wären sie Schnittflächen, durch welche diese Begränzungselemente abgestumpft, zugeschärft, oder zugespitzt worden*); und weil die

---

*) Ich setze die Bekanntschaft mit der Bedeutung dieser Ausdrücke der Werner'schen Krystallographie voraus, welche bei zweckmässigem Gebrauche gar sehr zur Veranschaulichung der Combina-

Flächen der combinirten Gestalten gegenseitig eine symmetrische Vertheilung und Lage beobachten, so lässt sich erwarten, dass die Flächen einer und derselben Gestalt oder Theilgestalt nur immer an den Stellen gleichwerthiger Begränzungselemente erscheinen werden, weil nur diese in gleichmässiger Lage und symmetrischer Vertheilung an den Gestalten auftreten (§. 31.).

§. 64.

Gesetz, Zähligkeit und Charakter der Combinationen.

Diese Symmetrie ist nur eine Folge des allgemeinen Gesetzes der Combinationen, dass die combinirten Gestalten jederzeit Glieder einer und derselben Krystallreihe, und in derjenigen Stellung mit einander verbunden sind, in welcher sie durch die Ableitung erhalten werden.

Uebrigens werden die Combinationen nach der Zahl der in ihnen enthaltenen Gestalten als zwei-, drei-, vier-.....*n*zählige, und nach dem Charakter derselben als holoëdrische und hemiëdrische Combinationen unterschieden, so dass einer Combination das Prädicat hemiëdrisch zukommt, wenn sie auch nur eine hemiëdrische Gestalt enthält, wie viele holoëdrische Gestalten noch ausserdem in ihr auftreten mögen.

Die Kanten und Ecke, in welchen die Flächen zweier oder mehrer Gestalten zum Durchschnitte kommen, heissen Combinationskanten und Combinationsecke. In den einaxigen Systemen ist eine Combinationskante heteropolar, wenn ihre Flächen zu gleichnamigen Gestalthälften, oder zu einem und

---

tionen dienen, und ein höchst wichtiges Hülfsmittel der Combinationslehre sind. Schon Romé de l'Isle bediente sich des Ausdruckes der Abstumpfungen mit grossem Vortheile und widerlegte die pedantischen Einwürfe, welche man gegen ihren Gebrauch machte.

demselben Pole, **amphipolar**, wenn ihre Flächen zu ungleichnamigen Gestalthälften, oder zu beiden Polen der Hauptaxe gehören.

§. 65.

Vorherrschende und untergeordnete Gestalten, Entwicklung und Bezeichnung einer Combination.

Die Gestalten einer Combination haben nach Maassgabe der relativen Grösse oder Ausdehnung ihrer Flächen einen grösseren oder geringeren Antheil an der allgemeinen Physiognomie oder dem Totalhabitus der Combination. Diejenigen Gestalten, welche die allgemeinsten Umrisse einer Combination ausschliessend bestimmen, nennt man **vorherrschende**, diejenigen dagegen, welche keinen oder doch nur sehr unbedeutenden Antheil an der Bildung der Totalform nehmen, **untergordnete** Gestalten. In vielen Fällen wird die Bestimmung vorherrschender Gestalten sehr schwankend, in andern fast unmöglich.

Eine Gestalt bestimmen, heisst, ihren Namen und das Verhältniss ihrer Abmessungen sowohl als ihrer Stellung zu der gewählten Grundgestalt, oder, was dasselbe ist, ihr krystallographisches Zeichen angeben. Die Bestimmung der verschiedenen in einer Combination enthaltenen Gestalten nennt man die **Entwicklung** der Combination. Das Zeichen einer entwickelten Combination ist der Inbegriff der Zeichen aller in ihr enthaltenen Gestalten, welche, durch Interpunctionen abgesondert, so nach einander geschrieben werden, dass die Zeichen der vorherrschenden Gestalten den Zeichen der untergeordneten vorangehen.

§. 66.

Allgemeine Entwicklung der Combinationen.

Die Entwicklung der Combinationen bildet eine der wichtigsten Aufgaben der Krystallographie, und lässt sich in die **allgemeine** und **besondre** Entwicklung theilen.

Die Aufgabe der allgemeinen Entwicklung ist gelöst, sobald folgende Bestimmungen ausgemittelt sind:

1) Das **Krystallsystem** der gegebenen Combination; diese Bestimmung ergiebt sich unmittelbar aus dem geometrischen Grundcharakter der in der Combination auftretenden Gestalten.

2) Die **Zähligkeit** derselben, d. h. die Bestimmung der Anzahl der in ihr enthaltenen Gestalten oder Theilgestalten. Da alle zu einer und derselben Gestalt oder Theilgestalt gehörigen Flächen gleichwerthige seyn müssen (§. 46), und diese Forderung durch das Auftreten derselben in Combinationen vermöge des diese letzteren beherrschenden Symmetriegesetzes keine Einschränkung erleiden kann, so wird die Anzahl der in einer Combination enthaltenen Gestalten oder Theilgestalten unmittelbar durch die Beobachtung gegeben seyn, wie vielerlei ungleichwerthige Flächen in derselben auftreten, indem jederzeit der Satz gilt, dass eine Combination genau so vielerlei Gestalten oder Theilgestalten enthält, wie vielerlei verschiedenwerthige Flächen in ihr erscheinen.

3) Die **Grundgestalt**, auf welche die sämmtlichen Gestalten der Combination bezogen werden sollen; für diese Bestimmung kann die Krystallographie nur die Regel aufstellen, dass von den Gestalten, welche nach §. 52. möglicherweise zur Grundgestalt gewählt werden können, jedenfalls diejenige das Vorrecht habe, welche die leichteste Uebersicht und die einfachste Entwicklung und Bezeichnung der Combination gestattet.

4) Der **Charakter** der Combination in Bezug auf Holoëdrie und Hemiëdrie; diese Bestimmung setzt die Kenntniss der näheren Verhältnisse voraus,

welche zwischen den Gestalten eines jeden Systemes Statt finden können.

5) **Der allgemeine und besondre Name** aller in der Combination enthaltenen Gestalten; diese Bestimmung ist leicht, sobald man die Verhältnisse der verschiedenen Gestalten eines jeden Krystallsystemes in Bezug auf die Flächenzahl und Flächenstellung ausgemittelt hat.

§. 67.

Besondre Entwicklung der Combinationen.

Die besondre Entwicklung hat es nur mit der einzigen Aufgabe zu thun, die Abmessungen der einzelen Gestalten in Bezug auf die gewählte Grundgestalt, oder, ihre vollständig bestimmten krystallographischen Zeichen aufzusuchen. Die ihr zu Gebote stehenden Hülfsmittel sind besonders folgende:

1) Die allgemeinen Resultate der Ableitung.
2) Die aus diesen Resultaten und den Axenwerthen der Gestalten abzuleitenden allgemeinen Regeln für die Erscheinungsweise der Combination je zweier Gestalten eines Krystallsystemes, oder die allgemeine Theorie seiner binären Combinationen.
3) Die allgemeine Combinationsgleichung für den Fall, da die Flächen einer unbekannten Gestalt in die Zone bekannter Flächen fallen (vergl. unten §. 68).
4) Messungen, entweder der, den unbekannten Gestalten eigenthümlichen, Kanten, oder auch der Combinationskanten, welche sie mit bereits bekannten Gestalten hervorbringen, und Berechnung der Ableitungscoëfficienten aus den gemessenen Winkeln.

§. 68.

Häufig vorkommendes Combinationsverhältniss. Zonen.

Wiewohl die Gesetze der Combinationen überhaupt insofern keinen Gegenstand für die Darstellungen der Elementarlehre abgeben, inwiefern sie sich nach dem eigenthümlichen Charakter der verschiedenen Systeme mehr oder weniger modificiren, so lässt sich doch ein, sehr häufig vorkommender Fall hiervon ausnehmen, weil ihm, wenigstens für alle trimetrischen Systeme seine Regel in gröster Allgemeinheit vorgeschrieben werden kann. — Dieser Fall ist der, da zwischen den Flächen F und F' zweier bekannter Gestalten die Flächen F'' einer unbekannten Gestalt mit parallelen Combinationskanten auftreten, oder, da die Kante von F und F' durch F'' abgestumpft wird. Man sieht sogleich, dass dieses Combinationsverhältniss mit dem oben, in §. 20. betrachteten Verhältnisse dreier Flächen F, F' und F'' identisch ist, von welchen die eine, F'', der Durchschnittslinie der beiden andern, F und F', parallel läuft. Die daselbst gefundene Bedingungsgleichung findet daher unmittelbar ihre Anwendung auf gegenwärtigen Fall, und wird in der That der Schlüssel zur Beurtheilung aller mit Kantenparallelismus Statt findenden Combinationen. Nur haben wir dieselbe als eine Function der Ableitungscoëfficienten auszudrücken. Wenn die Parameter der Flächen der Grundgestalt

$$a : b : c$$

so können wir allgemein die Parameter

der Fläche F mit $ma : nb : rc$
- - F' - $m'a : n'b : r'c$
- - F'' - $m''a : n''b : r''c$

bezeichnen, indem wir es unentschieden lassen, welcher Parameter der Grundgestalt für jede der übrigen Gestalten unverändert geblieben. Substituirt man in der Gleichung von §. 20. statt a, b, c, a', b', c' und a'', b'', c'' die vorstehenden Grössen, so wird sie

$$m''n''(m'n - mn')rr' + r''m''(r'm - rm')nn' + n''r''(n'r - nr')mm' = 0$$

und in dieser Form von unmittelbarer Brauchbarkeit für die Combinationslehre, da die krystallographischen

Zeichen der Gestalten unmittelbar die Coëfficienten m, n, r, u. s. w. enthalten. Wir nennen daher diese Gleichung die allgemeine Combinationsgleichung der Krystallographie.

Man sagt von jeder Fläche F'', welche dem Durchschnitte der Flächen F und F' parallel ist, dass sie in der Zone der Flächen F und F' gelegen sey, oder in die Zone derselben gehöre, indem man unter einer Zone von Flächen überhaupt jeden Inbegriff von Flächen versteht, welche einer und derselben Linie parallel laufen. Es folgt hieraus, dass die Lehre von den Zonen einen sehr wichtigen Theil der krystallographischen Combinationslehre, und unsre Combinationsgleichung zugleich auch die allgemeine Gleichung der Zonenlehre bildet.

§. 69.

Gebrauch der Combinationsgleichung.

Die Combinationsgleichung ist ein unsrer krystallographischen Methode angemessener, und auf alle trimetrischen Systeme unmittelbar und durchgängig anwendbarer Ausdruck, mittels dessen für irgend eine unbekannte Gestalt, deren Flächen F'' zwischen den Flächen F und F' zweier bekannter Gestalten mit parallelen Combinationskanten erscheinen, jeder der drei Coëfficienten m'', n'' und r'' als Function der beiden übrigen und der sechs bekannten Coëfficienten von F und F' bestimmt ist. Da aber, vermöge der Ableitungsmethode, immer einer der Parameter n'' oder $r'' = 1$ gesetzt werden muss, so enthält unsre Combinationsgleichung jedenfalls nur zwei unbekannte Grössen. Bringen also die Flächen F'' noch ausserdem zwischen den Flächen f und f' zweier andrer bekannter Gestalten parallele Combinationskanten hervor, so erhält man eine zweite Gleichung für dieselben beiden unbekannten Grössen, durch welche sie natürlich vollkommen bestimmt werden. Folglich wird in allen Fällen, da die einzelen Flächen einer unbekannten Gestalt von zwei Paaren paralleler Kanten begränzt werden, und die diese Kanten bildenden Flächen bekannt sind; oder, in allen Fällen, da die unbekannten Flächen in zwei verschiedene Zonen bereits bekannter Flächen gehören, das Problem der krystallographischen Bestimmung ohne alle Messung und durch blosse Anwendung der Combinationsgleichung vollständig zu lösen seyn.

Nur ist begreiflich, dass nach Maassgabe der verschiedenen Lage der Flächen in diesem oder jenem Raumoctanten die Coëfficienten ihrer respectiven Parameter positiv oder negativ genommen werden müssen, während sie in der Combinationsgleichung durchgängig positiv angenommen wurden, weil solche in der Voraussetzung berechnet ist, dass alle drei Flächen F, F' und F'' in dem Octanten der drei positiven Halbaxen gelegen sind.

Zweites Hauptstück.

Systemlehre.

Erster Abschnitt.

Vom Tesseralsysteme.

Erstes Capitel.

Von den einzelen Gestalten des Tesseralsystemes.

§. 70.

Umfang und Name des Systemes.

Das Tesseralsystem, dessen geometrischer Grundcharakter durch Dreizahl, Rechtwinkligkeit und Gleichheit der Axen ausgesprochen ist, begreift alle trimetrischen, orthoëdrischen, vielaxigen Gestalten, und keine anderen.

Tesseralsystem nennen wir es, weil das Hexaëder oder der Würfel (*tessera*) eine seiner charakteristischen Gestalten ist, weshalb es bereits von Werner das Tessular- oder Tesselarsystem (von *tessella*) genannt wurde. Weiss nennt es das reguläre, gleichgliedrige, oder gleichaxige, auch das sphäroëdrische, Hausmann das isometrische System, welche Benennungen insgesammt von solchen Eigenschaften der Gestalten dieses Systemes entlehnt sind, die aus seinem geometrischen Grundcharakter mit Nothwendigkeit folgen:

§. 71.

Grundgestalt und Zwischenaxen.

Als Grundgestalt des Systemes wird nach §. 51. nur diejenige Gestalt gelten können, deren Flächen das Verhältniss der Parameter 1 : 1 : 1 haben. Man sieht leicht, dass es für dieses Verhältniss in jedem Raumoctanten nur eine Fläche geben kann, von denen eine jede wegen der Gleichheit ihrer Intersectionen (§. 16.) ein gleichseitiges Dreieck darstellen muss. Die Grundgestalt des Tesseralsystemes ist daher eine von acht gleichseitigen Dreiecken umschlossene Gestalt, welche, weil sie einzig in ihrer Art ist, den Namen Oktaëder schlechthin erhält (§. 55.).

Ausser den drei Hauptaxen sind in diesem Systeme noch zwei andre Arten von Linien zu bemerken, welche einestheils die mittleren zwischen je dreien, anderntheils die mittleren zwischen je zweien Hauptaxen sind, und deshalb den Namen der Zwischenaxen führen. Ihre Lage lässt sich am leichtesten in Bezug auf die Grundgestalt bestimmen; die einen verbinden nämlich die Mittelpuncte je zweier

Gegenflächen des Oktaëders, sind also zu vier vorhanden, und heissen trigonale Zwischenaxen; die anderen verbinden die Mittelpuncte je zweier Gegenkanten, sind also zu sechs vorhanden, und heissen rhombische Zwischenaxen.

Wir nennen die Ebenen durch je zwei Hauptaxen (oder die Coordinatebenen) normale, die Ebenen durch je eine Haupt- und eine trigonale Zwischenaxe diagonale Hauptschnitte.

§. 72.

Vorläufige Uebersicht der tesseralen Gestalten.

Die einzelen Gestalten des Tesseralsystemes benennt man zunächst nach der Zahl ihrer Flächen (§. 55.) und unterscheidet demgemäss:

1) das Tetraëder, oder den 4Flächner,
2) das Hexaëder, oder den 6Flächner,
3) das Oktaëder, oder den 8Flächner,
4) die Dodekaëder, oder die 12Flächner,
5) die Ikositetraëder, oder die 24Flächner,
6) die Tetrakontaoktaëder, oder die 48Flächner.

Die drei ersteren Gestalten sind die einzigen in ihrer Art, während es von den übrigen mehre Arten und Unterarten giebt. Da $24 = 3.8 = 4.6 = 2.12$, und $48 = 6.8$, so könnten uns gewisse Verhältnisse veranlassen, manche von 24 Flächen umschlossene Gestalten Dreimalachtflächner, Viermalsechsflächner, Zweimalzwölfflächner, und die von 48 Flächen umschlossenen Gestalten Sechsmalachtflächner zu nennen (§. 55.).

§. 73.

Das Tetraëder.

Syn. Einfache dreiseitige Pyramide. Reguläres Tetraëder. Vierflach, Bernhardi.

Das Tetraëder oder der Vierflächner (Fig. 33 und 34) ist eine von 4 gleichseitigen Dreiecken umschlossene Gestalt, und hat also 6 Kanten, 4 Ecke (§. 31.).

Die Kanten sind regelmässig (§. 33.) und gleich; die Ecke trigonal (§. 34.).

Die Hauptaxen, deren Mittelquerschnitte Quadrate, verbinden die Mittelpuncte je zweier gegenüberliegender Kanten; die trigonalen Zwischenaxen verbinden die Mittelpuncte der vier Flächen mit den gegenüberliegenden Eckpuncten; die rhombischen Zwischenaxen treten nicht hervor, da ihre Pole durch nichts bezeichnet sind.

Es giebt nur ein Tetraëder, dessen Kantenwinkel = 70° 31′ 44″.

§. 74.

Das Hexaëder.

Syn. Würfel.

Das Hexaëder oder der Sechsflächner (Fig. 32) ist eine von 6 Quadraten umschlossene Gestalt, und hat also 12 Kanten und 8 Ecke.

Die Kanten sind regelmässig und gleich; die Ecke trigonal.

Die Hauptaxen, deren Querschnitte Quadrate, verbinden die Mittelpuncte je zweier Gegenflächen; die trigonalen Zwischenaxen verbinden je zwei gegenüberliegende Eckpuncte; die rhombischen Zwischenaxen die Mittelpuncte je zweier Gegenkanten.

Es giebt nur ein Hexaëder, dessen Kantenwinkel = 90°.

§. 75.

Das Oktaëder.

Syn. Reguläre vierseitige Doppelpyramide. Reguläres Oktaëder. Achtflach, Bernhardi.

Das Oktaëder oder der Achtflächner (Fig. 21) ist eine von 8 gleichseitigen Dreiecken umschlossene Gestalt, und hat also 12 Kanten und 6 Ecke.

Die Kanten sind regelmässig und gleich; die Ecke tetragonal.

Die Hauptaxen, deren Querschnitte Quadrate, verbinden je zwei gegenüberliegende Eckpuncte; die trigonalen Zwischenaxen die Mittelpuncte je zweier Gegenflächen; die rhombischen Zwischenaxen die Mittelpuncte je zweier Gegenkanten.

Es giebt nur ein Oktaëder, dessen Kantenwinkel = 109° 28′ 16″.

§. 76.

Die Trigondodekaëder.

Syn. Pyramidentetraëder, Weiss. Trigonaldodekaëder, Mohs. Pyramidales Dodekaëder, Breithaupt. Dreimalvierflach, Bernhardi.

Die Dodekaëder oder Zwölfflächner sind viererlei Art nach Maassgabe der Figur ihrer Flächen, indem einige von Dreiecken, eines von Rhomben, andre von Deltoiden, und noch andre von Fünfecken umschlossen werden. Bezeichnen wir sie mit den ihnen entsprechenden Namen, so haben wir Trigon-, Rhomben-, Deltoid- und Pentagondodekaëder, welche wir nun der Reihe nach kennen lernen werden.

Die Trigondodekaëder (Fig. 35 und 36) sind von 12 gleichschenkligen Dreiecken umschlossene Gestalten, und haben also 18 Kanten und 8 Ecke.

Ihre Flächen gruppiren sich in 4 dreizählige oder in 6 zweizählige Flächensysteme; ihre Hauptform schwankt daher zwischen jenen des Tetraëders und Hexaëders, nähert sich jedoch gewöhnlich der ersteren Gestalt (daher Pyramidentetraëder), wie denn auch die Kantenlinien des eingeschriebenen Tetraëders unmittelbar hervortreten.

Die Kanten sind zweierlei: 6 regelmässige, längere, in den Kanten, und 12 symmetrische, kürzere, zu drei über den Flächen des eingeschriebenen Tetraëders; die ersteren heissen die charakteristischen Kanten.

Die Ecke sind zweierlei: 4 ditrigonale (oder hexagonale), in den Eckpuncten, und 4 trigonale, über den Flächen des eingeschriebenen Tetraëders.

Die Hauptaxen, deren Mittelquerschnitte Ditetragone, verbinden die Mittelpuncte je zweier regelmässiger Kanten; die trigonalen Zwischenaxen verbinden die trigonalen mit den ditrigonalen Eckpuncten; die rhombischen Zwischenaxen treten nicht hervor, da ihre Pole durch nichts bezeichnet sind.

Es giebt möglicherweise zahllose Varietäten dieser Gestalt.

§. 77.

Das Rhombendodekaëder.

Syn. Granatoëder, Weiss. Einkantiges Tetragonaldodekaëder, Mohs. Rautenzwölfflach, v. Raumer und Bernhardi. Granatdodekaëder, Werner. Reguläres Rhombendodekaëder, Hausmann.

Das Rhombendodekaëder (Fig. 23) ist eine von 12 Rhomben umschlossene Gestalt, und hat daher 24 Kanten und 14 Ecke.

Die Kanten sind insgesammt gleich und symmetrisch.

Die Ecke sind zweierlei: 6 tetragonale, in den Eckpuncten des eingeschr. Oktaëders, und 8 trigonale, in den Eckpuncten des eingeschr. Hexaëders.

Die Hauptaxen, deren Querschnitte theils Quadrate, theils gleichwinklige Achtecke, verbinden je zwei gegenüberliegende tetragonale Ecke; die trigonalen Zwischenaxen je zwei gegenüberliegende trigonale Ecke; und die rhombischen Zwischenaxen die Mittelpuncte je zweier Gegenseiten.

Es giebt nur ein Rhombendodekaëder, dessen Kanten = 120°.

§. 78.

Die Deltoiddodekaëder.

Syn. Trapezoiddodekaëder, Weiss. Zweikantiges Tetragonaldodekaëder, Mohs. Trapezoidales Dodekaëder, Breithaupt. Deltoidzwölfflach, Bernhardi.

Die Deltoiddodekaëder (Fig. 37 und 38) sind von 12 symmetrischen Trapezoiden oder Deltoiden (§. 32.) umschlossene Gestalten, und haben also 24 Kanten und 14 Ecke.

Ihre Flächen gruppiren sich in 4 dreizählige Flächensysteme, und ihre Hauptform schwankt zwischen jenen des Tetraëders und Rhombendodekaëders, nähert sich jedoch gewöhnlich der ersteren Gestalt.

Die Kanten sind zweierlei: 12 schärfere, paarweis über den Kanten, und 12 stumpfere, zu drei über den Flächen des eingeschriebenen Tetraëders; die ersteren heissen die charakteristischen Kanten.

Die Ecke sind dreierlei: 4 trigonale, spitzere, in den Eckpuncten, 4 dergleichen stumpfere, über den Flächen, und 6 rhombische, über den Kanten des eingeschriebenen Tetraëders.

Die Hauptaxen, deren Mittelquerschnitte Quadrate, verbinden je zwei rhombische Ecke; die trigonalen Zwischenaxen verbinden die stumpferen mit den spitzeren trigonalen Ecken; die rhombischen Zwischenaxen treten nicht hervor, da ihre Pole durch nichts bezeichnet sind.

Es giebt möglicherweise zahllose Varietäten dieser Gestalt.

§. 79.

Die Pentagondodekaëder.

Syn. Hexaëdrisches Pentagonaldodekaëder, Mohs. Domatisches Dodekaëder, Breithaupt. Kieszwölfflach, v. Raumer. Pyritoëder, Weiss. Pentagonaldodekaëder, Hausmann. Zweimalsechsflach, Bernhardi.

Die Pentagondodekaëder (Fig. 45 bis 50) sind von

12 symmetrischen Pentagonen (§. 32.) umschlossene Gestalten, und haben also 30 Kanten und 20 Ecke.

Ihre Flächen gruppiren sich gewöhnlich in 6 Flächenpaare, und ihre Hauptform schwankt zwischen jenen des Hexaëders und Rhombendodekaëders, nähert sich aber gewöhnlich der ersteren Gestalt.

Die Kanten sind zweierlei: 6 regelmässige, über den Flächen, und 24 unregelmässige, paarweis über den Kanten, oder zu drei in den Ecken des eingeschriebenen Hexaëders; jene heissen die charakteristischen Kanten.

Die Ecke sind zweierlei: 8 trigonale, in den Eckpuncten, und 12 unregelmässig-dreiflächige, über den Kanten des eingeschriebenen Hexaëders.

Die Hauptaxen, unter deren Querschnitten sich zwei Quadrate befinden, während die Mittelquerschnitte unregelmässige Sechsecke sind, verbinden die Mittelpuncte je zweier gegenüberliegender charakteristischer Kanten; die trigonalen Zwischenaxen verbinden je zwei gegenüberliegende trigonale Ecke; die rhombischen Zwischenaxen treten nicht hervor, weil ihre Pole durch nichts bezeichnet sind.

Es giebt möglicherweise zahllose Varietäten dieser Gestalt; sogar das regelmässige Pentagondodekaëder der Geometrie ist eine dieser Varietäten, kann jedoch in der Natur nicht vorkommen, weil es einen irrationalen Ableitungscoëfficienten voraussetzt.

§. 80.

Die Ikositetraëder.

Die 24Flächner oder Ikositetraëder überhaupt zerfallen nach der Figur ihrer Flächen in Trigon- und Trapez-Ikositetraëder, und von diesen wiederum die ersteren in die drei Unterarten von der Hauptform des Tetraëders, Hexaëders und Oktaëders, die anderen in die zwei Unterarten mit symmetrischen und gleichschenkligen Trapezoiden (§. 32), welche letztere die Hauptform des Pentagondodekaëders besitzen. Das eine Trapezikositetraëder ausgenommen, gruppiren sich also die Flächen aller übrigen Ikositetraëder in Flächensysteme, und gestatten somit die in §. 55. angegebene Methode der Zerfällung der ganzen Flächenzahl in ihre Factoren zur Vereinfachung der Nomenclatur. So erhalten wir für die dreierlei Trigonikositetraëder die Namen der Hexakistetraëder (6mal4Flächner), Tetrakishexaëder (4mal-6Flächner) und Triakisoktaëder (3mal8Flächner), und für die eine Art der Trapezikositetraëder den Namen der Dyakisdodekaëder (2mal12Flächner), so dass für die andre Gestalt dieser Art der Name Ikositetraëder allein hinreichend bezeichnend wird.

§. 81.

Die Hexakistetraëder oder Sechsmalvierflächner.

Syn. Gebrochene Pyramidentetraëder, Weiss. Tetraëdrisches Trigonalikositetraëder, Mohs. Skalenisches Ikositessaraëder, Breithaupt. Sechsmalvierflach, Bernhardi.

Die Hexakistetraëder (Fig. 39 und 40) sind von 24 ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Gestalten von der Hauptform des Tetraëders, und haben daher 36 Kanten, 14 Ecke und 4 sechszählige Flächensysteme.

Die Kanten sind symmetrisch und dreierlei: 12 schärfere, paarweis über den Kanten, 12 stumpfere, längere, und 12 stumpfere kürzere, zu je dreien über den Flächen des eingeschriebenen Tetraëders; die ersteren heissen die charakteristischen Kanten.

Die Ecke sind gleichfalls dreierlei: 4 ditrigonale (oder hexagonale) spitzere in den Eckpuncten, 4 dergleichen stumpfere über den Flächen, und 6 rhombische über den Kanten des eingeschriebenen Tetraëders.

Die Hauptaxen, deren Mittelquerschnitte Ditetragone, verbinden je zwei gegenüberliegende rhombische Ecke; die trigonalen Zwischenaxen verbinden die spitzeren mit den stumpferen sechsflächigen Ecken; die rhombischen Zwischenaxen treten nicht hervor, da ihre Pole durch nichts bezeichnet sind.

Es giebt möglicherweise zahllose Varietäten dieser Gestalt.

§. 82.

Die Tetrakishexaëder oder Viermalsechsflächner.

Syn. Pyramidenwürfel, Weiss, v. Raumer. Hexaëdrisches Trigonalikositetraëder, Mohs. Hexaëdrisch pyramidales Ikositessaraëder, Breithaupt. Viermalsechsflach, Bernhardi.

Die Tetrakishexaëder (Fig. 29 bis 31) sind von 24 gleichschenkligen Dreiecken umschlossene Gestalten von der Hauptform des Hexaëders, und haben also 36 Kanten und 14 Ecke.

Ihre Flächen gruppiren sich in 6 vierzählige, oder in 12 zweizählige Flächensysteme; ihre Hauptform schwankt daher eigentlich zwischen jenen des Hexaëders und Rhombendodekaëders, wird jedoch immer durch die erstere Gestalt repräsentirt, weil die Kantenlinien des eingeschriebenen Hexaëders unmittelbar hervortreten (daher Pyramidenwürfel).

Die Kanten sind zweierlei: 12 längere, regelmässige, in den Kantenlinien, und 24 kürzere, symmetrische, zu vier über den Flächen des eingeschriebenen Hexaëders.

Die Ecke sind gleichfalls zweierlei; 8 ditrigonale (oder hexagonale) in den Eckpuncten, und 6 tetragonale, über den Flächen des eingeschriebenen Hexaëders.

Die Hauptaxen, deren Mittelquerschnitte Ditetragone, verbinden je zwei gegenüberliegende tetragonale Eckpuncte; die trigonalen Zwischenaxen je zwei gegenüberliegende ditrigonale Ecke; die rhombischen Zwischenaxen die Mittelpuncte je zweier regelmässiger Gegenkanten.

Es giebt von dieser Gestalt möglicherweise zahllose Varietäten.

§. 83.

Die Triakisoktaëder oder Dreimalachtflächner.

Syn. Pyramidenoktaëder, Weiss. Oktaëdrisches Trigonalikositetraëder, Mohs. Oktaëdrisch pyramidales Ikositessaraëder, Breithaupt. Dreimalachtflach, Bernhardi. Pyramidenachtflach, v. Raumer.

Die Triakisoktaëder (Fig. 22) sind von 24 gleichschenkligen Dreiecken umschlossene Gestalten von der Hauptform des Oktaëders, und haben daher 36 Kanten und 14 Ecke.

Ihre Flächen gruppiren sich in 8 dreizählige oder in 12 zweizählige Flächensysteme; ihre Hauptform schwankt daher eigentlich zwischen jenen des Oktaëders und Rhombendodekaëders, wird jedoch immer durch die erstere Gestalt repräsentirt, weil die Kantenlinien des eingeschriebenen Oktaëders unmittelbar hervortreten (daher Pyramidenoktaëder).

Die Kanten sind zweierlei: 12 längere, regelmässige, in den Kanten, und 24 kürzere, symmetrische, zu drei über den Flächen des eingeschriebenen Oktaëders.

Die Ecke sind gleichfalls zweierlei: 6 ditetragonale, in den Ecken, und 8 trigonale über den Flächen des eingeschriebenen Oktaëders.

Die Hauptaxen, deren Mittelquerschnitte Quadrate, verbinden je zwei ditetragonale; die trigonalen Zwischenaxen je zwei trigonale Eckpuncte; und die rhombischen Zwischenaxen die Mittelpuncte je zweier regelmässiger Gegenkanten.

Es giebt möglicherweise zahllose Varietäten dieser Gestalt.

§. 84.

Die Ikositetraëder oder Vierundzwanzigflächner.

Syn. Leucitoëder und Leucitoide, Weiss. Zweikantige Tetragonalikositetraëder, Mohs. Trapezoidale Ikositessaraëder Breithaupt. Trapezoëder, Hausmann. Leucit, v. Raumer Deltoidvierundzwanzigflach, Bernhardi.

Die Ikositetraëder (Fig. 26 bis 28) sind von 24 symmetrischen Trapezoiden oder Deltoiden umschlossene Gestalten, und haben also 48 Kanten und 26 Ecke.

Ihre Flächen gruppiren sich theils in 8 dreizählige, theils in 6 vierzählige Flächensysteme; ihre Hauptform schwankt daher zwischen jenen des Oktaëders und Hexaëders, ohne jedoch in allen Fällen durch e i n e dieser Gestalten repräsentirt zu werden.

Die Kanten sind symmetrisch und zweierlei: 24 längere, paarweis über den Kanten, und 24 kürzere, zu drei über den Flächen des eingeschriebenen Oktaëders; oder auch, die ersteren zu vier über den Flächen, die andern paarweis über den Kanten des eingeschriebenen Hexaëders.

Die Ecke sind dreierlei: 6 tetragonale, in den Ecken, 8 trigonale, über den Flächen, und 12 rhombische, über den Kanten des eingeschriebenen Oktaëders.

Die Hauptaxen, deren Mittelquerschnitte Ditetragone, verbinden je zwei gegenüberliegende tetragonale; die beiderlei Zwischenaxen je zwei der mit ihnen gleichnamigen Ecke.

Es giebt möglicherweise zahllose Varietäten dieser Gestalt.

§. 85.

Die Dyakisdodekaëder oder Zweimalzwölfflächner.

Syn. Gebrochene Pentagondodekaëder, Weiss. Dreikantige Tetragonalikositetraëder, Mohs. Heterogonale Ikositessaraëder, Breithaupt. Kies-24flach, v. Raumer. Trapezoidvierundzwanzigflach, Bernhardi.

Die Dyakisdodekaëder (Fig. 41 bis 44) sind von

24 gleichschenkligen Trapezoiden oder auch dergleichen Trapezen umschlossene Gestalten von der Hauptform des Pentagondodekaëders, und haben also 48 Kanten und 26 Ecke.

Ihre Flächen gruppiren sich in 12 Flächenpaare, daher der dodekaëdrische Habitus; indess lassen sich auch dreizählige Flächensysteme annehmen, welche jedoch von minderer Bedeutung für die Symmetrieverhältnisse der Gestalt sind.

Die Kanten sind dreierlei: 12 symmetrische, kürzeste, paarweis über den charakteristischen Kanten, 12 dergleichen längste, über den Flächen, und 24 unregelmässige, mittlere, über den gleichnamigen Kanten des eingeschriebenen Pentagondodekaëders; die ersteren Kanten heissen die c h a r a k t e r i s t i s c h e n Kanten der Gestalt.

Die Ecke sind gleichfalls dreierlei: 6 rhombische, in den Eckpuncten, 8 trigonale, über den Flächen, und 12 unregelmässig vierflächige, über den Kanten des eingeschriebenen Oktaëders.

Die Hauptaxen, unter deren Querschnitten sich zwei Ditetragone befinden, während ihre Mittelquerschnitte unregelmässige Achtecke sind, verbinden je zwei gegenüberliegende rhombische Eckpuncte; die trigonalen Zwischenaxen je zwei der trigonalen Eckpuncte; die rhombischen Zwischenaxen treten nicht hervor, da ihre Pole durch nichts bezeichnet sind.

Es giebt möglicherweise zahllose Varietäten dieser Gestalt, welche sich nach der Figur ihrer Flächen in zwei Unterarten theilen. Diejenigen, deren Flächen Trapezoide sind, zeigen, ausser dem Parallelismus je zweier gegenüberliegender Kanten, keinen weiteren Kantenparallelismus (Fig. 41 und 42), wogegen diejenigen, deren Flächen Trapeze sind, in jedem Flächenpaare d r e i p a r a l l e l e K a n t e n besitzen (Fig. 43 und 44). Diese letzteren führen daher den Namen der parallelkantigen Dyakisdodekaëder. Sie stehen eigentlich in der Mitte zwischen zwei Gruppen, in welche sich die übrigen Dyakisdodekaëder rücksichtlich der besonderen Beschaffenheit ihrer trapezoidischen Flächen absondern, indem die der längsten Seite gegenüberliegende Seite mit derselben nach der kürzesten Seite hin entweder convergirt oder divergirt (Fig. 11 A und B). Demgemäss wären eigentlich drei Unterarten von Dyakisdodekaëdern zu unterscheiden, welche man, sobald die Convergenz oder Divergenz der längsten und gegenüberliegenden mittleren Kante immer nach derselben Richtung beurtheilt wird, mit den Namen der convergentkantigen, parallelkantigen und divergentkantigen Dyakisdodekaëder bezeichnen könnte. Diese letzteren sind bis jetzt noch nicht beobachtet worden.

§. 86.

Die Hexakisoktaëder oder Sechsmalachtflächner (Weiss).

Syn. Pyramidengranatoëder z. Th. Weiss. Tetrakontaoktaëder, Mohs. Achtundvierzigflächner, Weiss u. Breithaupt. Trigonalpolyëder, Hausmann. Pyramidenrautenzwölfflach, v. Raumer. Achtundvierzigflach, Bernhardi.

Die Hexakisoktaëder (Fig. 24 und 25) sind von 48 ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Gestalten, und haben also 72 Kanten und 26 Ecke.

Ihre Flächen gruppiren sich in 8 sechszählige, oder in 6 achtzählige, oder auch in 12 vierzählige Flächensysteme; ihre Hauptform ist daher bald oktaëdrisch, bald hexaëdrisch, bald rhomben-dodekaëdrisch; auch lassen sich zuweilen Gruppirungen der Flächen in Flächenpaare geltend machen, welches auf dreierlei verschiedene Weise möglich ist, und eine Aehnlichkeit der Hauptform mit dem Tetrakishexaëder, Triakisoktaëder oder Ikositetraëder voraussetzt.

Die Kanten sind symmetrisch und dreierlei: 24 mittlere, paarweis über den Kanten des eingeschriebenen Oktaëders; 24 kürzere, paarweis über den Kanten des eingeschriebenen Hexaëders, und 24 längere, die Eckpuncte beider eingeschriebenen Gestalten verbindende Kanten.

Die Ecke sind gleichfalls dreierlei: 6 ditetragonale, in den Eckpuncten, 8 ditrigonale (oder hexagonale), über den Flächen, und 12 rhombische, über den Kanten des eingeschriebenen Oktaëders.

Die Hauptaxen, deren Mittelquerschnitte Ditetragone, verbinden je zwei ditetragonale; die trigonalen Zwischenaxen je zwei ditrigonale, und die rhombischen Zwischenaxen je zwei rhombische Gegenecke.

Es giebt möglicherweise zahllose Varietäten dieser Gestalt; manche derselben sind durch das Symmetrieverhältniss ausgezeichnet, dass ihre längsten Kanten mit den Kanten des eingeschriebenen Rhombendodekaëders zusammenfallen, weshalb sie sich zu dieser Gestalt etwa so verhalten, wie die Tetrakishexaëder zum Hexaëder, und nicht unpassend als pyramidentragende Rhombendodekaëder beschreiben lassen. Sie sind es auch, auf welche sich der Name Pyramidengranatoëder bezieht.

§. 87.

Geneigtflächig-semitesserale Gestalten.

Die in den vorhergehenden §§. dargestellten 13 Arten von Gestalten sind es, welche bis jetzt im Gebiete des Tesseralsystemes beobachtet wurden, und folglich dieses Krystallsystem, so wie es in der Natur erscheint, vollständig repräsentiren. Zwar könnten ausser ihnen noch zwei andre, von unregelmässigen Fünfecken umschlossene Gestalten existiren, von welchen die eine ein 24Flächner, die andre ein 12Flächner seyn würde; weil diese aber bis jetzt in der Natur nicht nachgewiesen wurden, so können sie auch, wie interessant sie in theoretischer Hinsicht seyn mögen, an gegenwärtigem Orte nicht in Erwähnung kommen.

Vergleichen wir aber die 13 betrachteten Gestalten nach ihren Symmetrieverhältnissen, so entdecken wir zwischen ihnen einige sehr erhebliche Unterschiede, die uns unmittelbar auf das Verhältniss der Holoëdrie und Hemiëdrie verweisen, und auf eine weit wesentlichere Eintheilung derselben gelangen lassen, als die bisherige, nur vorläufig gebrauchte Eintheilung nach der Zahl der Flächen war.

Zuvörderst wissen wir aus §. 46., dass eine jede holoëdrische Gestalt parallelflächig seyn, oder für jede ihrer Flächen am entgegengesetzten Ende eine parallele Gegenfläche besitzen muss. Geht also einer Gestalt dieses Merkmal ab, so wird selbige ohne Weiteres für hemiëdrisch, und zwar für geneigtflächig-hemiëdrisch zu erklären seyn. Eine Prüfung der 13 Gestalten nach diesem Kriterio zeigt, dass jener Flächenparallelismus, als wesentliche Bedingung der Holoëdrie, folgenden Gestalten mangelt:

1) Dem Tetraëder,
2) den Trigondodekaëdern,
3) den Deltoiddodekaëdern,
4) den Hexakistetraëdern.

Diese Gestalten sind daher keine holoëdrischen, sondern hemiëdrische, und zwar geneigtflächig-hemiëdrische, oder, wie wir sie in diesem Systeme nennen, geneigtflächig-semitesserale Gestalten.

§. 88.

Parallelflächig-semitesserale Gestalten.

Ein andres Merkmal der Hemiëdrie lässt sich ebenfalls aus den Symmetrieverhältnissen des tesseralen Systemes ableiten. In jeder holoëdrischen Gestalt desselben muss nämlich um die Endpuncte der horizontalen Hauptaxen eine vollkommene Uebereınstimmung der Begränzungselemente rücksichtlich ihrer Zahl, Lage und Grösse Statt finden, so dass die Gestalt in beiderlei Normalstellung völlig dasselbe Bild gewährt. Fehlt also diese Uebereinstimmung in einem jener Verhältnisse, oder die Identität der Erscheinungsweise in beiden Normalstellungen, so wird die Gestalt gleichfalls für eine hemiëdrische gelten müssen. Wenden wir dieses Kriterium auf die noch rückständigen 9 Gestalten an, so finden wir, dass die Pentagondodekaëder und Dyakisdodekaëder ebenfalls, und zwar zu den parallelflächig-hemiëdrischen oder **parallelflächig-semitesseralen** Gestalten zu rechnen sind. Denn, denken wir beide Gestalten in der ersten, und bringen sie darauf, nach §. 42, in die zweite Normalstellung, indem wir sie durch 90° um ihre verticale Axe drehen, so werden dann z. B. dieselben Kanten horizontal vor uns liegen, welche vorher in einer Verticalebene lagen, und umgekehrt, so dass beide Gestalten in beiderlei Normalstellung ganz verschiedene Bilder gewähren. Dasselbe Kriterium bewährt sich übrigens auch für die geneigtflächig-semitesseralen Gestalten.

§. 89.

Uebersicht des Tesseralsystemes.

Nach diesen sehr wichtigen Verhältnissen der Holoëdrie und Hemiëdrie, mit welchen die Verhältnisse der Symmetrie im genauesten Zusammenhange stehen, erhalten wir daher folgende wesentliche Eintheilung der Gestalten des Tesseralsystemes:

A. Holoëdrische oder eigentlich tesserale Gestalten.

1) Das Hexaëder,
2) das Oktaëder,
3) das Rhombendodekaëder,
4) die Tetrakishexaëder,
5) die Triakisoktaëder,

6) die Ikositetraëder,
7) die Hexakisoktaëder.

B. Hemiëdrische oder semitesserale Gestalten.

a) Geneigtflächig-semitesserale G.

1) Das Tetraëder,
2) die Trigondodekaëder,
3) die Deltoiddodekaëder,
4) die Hexakistetraëder.

b) Parallelflächig-semitesserale G.

1) Die Pentagondodekaëder,
2) die Dyakisdodekaëder.

Man sieht zugleich aus dieser Uebersicht, dass alle diejenigen Gestalten, in welchen die rhombischen Zwischenaxen nicht hervortreten und gleichsam verschwunden sind, zu den semitesseralen Gestalten gehören, so dass das Vorhandenseyn dieser Axen gleichfalls als ein Kriterium der Holoëdrie in diesem Systeme betrachtet werden kann.

Zweites Capitel.

Von der Ableitung der Gestalten des Tesseralsystemes.

A. Ableitung der holoëdrischen Gestalten.

§. 90.

Grundgestalt.

Um den zwischen den verschiedenen Gestalten des Tesseralsystemes obwaltenden geometrischen Zusammenhang zu entdecken, müssen wir von einer derselben ausgehen, und die Verhältnisse aufsuchen, in welchèn die übrigen Gestalten zu ihr stehen, und die Ableitbarkeit derselben begründet ist. Da nun, nach §. 52., zu diesem Behufe jederzeit eine der geometrischen Grundgestalten gewählt werden muss, im Tesseralsysteme aber nur das Oktaëder auf diesen Namen Anspruch machen kann (§. 71), so wird uns auch das Oktaëder als der natürlichste Ausgangspunct der Ableitungen gelten müssen. Wir bezeichnen dasselbe mit O (§. 61.) und leiten aus ihm zuvörderst nur die übrigen holoëdrischen Gestalten durch zweckmässige Verlängerungen eines oder auch zweier seiner Parameter, also durch zweckmässige Substitution eines andern Verhältnisses, als jenes der durchgängigen Gleichheit ab. Für die hemiëdrischen Gestalten, welche als die Hälften gewisser holoëdrischer Gestalten betrachtet werden können (§. 47.), scheint es vortheilhafter, nicht die primitive Ableitung aus dem Oktaëder, sondern die secundäre Ableitung aus ihren respectiven Muttergestalten geltend zu machen.

§. 91.

Besondere Regel für die Ableitungen aus dem Oktaëder.

Wegen der Ableitungen der holoëdrischen Gestalten aus dem Oktaëder muss jedoch bemerkt werden, dass im Tesseralsysteme die zur Ableitung erforderliche Construction rings um die Grundgestalt vollführt werden muss. Denn da es in diesem Systeme drei absolut gleichwerthige Hauptaxen giebt, so wird die zur Ableitung erforderliche Construction, welche wir in Bezug auf die Endpuncte einer Axe angeben, für die beiden übrigen Axen ganz in gleicher Weise vorgenommen werden müssen, bevor die Construction, und somit die Ableitung selbst vollendet genannt werden, und die abzuleitende Gestalt wirklich zum Vorscheine kommen kann. Diess ist ein Umstand, welcher in den übrigen Systemen in solcher Allgemeinheit nicht wiederkehrt, und daher an gegenwärtigem Orte wohl berücksichtigt werden muss.

§. 92.

Ableitung des Hexaëders.

Man lege in jedes Oktaëdereck eine Ebene, welche den beiden, nicht zu diesem Eck gehörigen Hauptaxen parallel, und folglich gegen alle Flächen dieses Eckes gleich geneigt ist, so resultirt eine von drei, auf einander rechtwinkligen Gegenflächenpaaren umschlossene Gestalt, d. h. ein Hexaëder, dessen Flächen, wenn sie sich selbst parallel in den Körper des Oktaëders eindrängen, als regelmässige Abstumpfungsflächen seiner Ecke erscheinen würden. Da nun der geometrische Unterschied dieser Flächen von jenen des Oktaëders darin besteht, dass sie die beliebig verlängerten Axen in den Centraldistanzen 1, ∞ und ∞ schneiden, während die Parameter der Oktaëderflächen 1, 1 und 1 sind, so wird das Zeichen des Hexaëders $= \infty O \infty$ (§. 61.).

§. 93.

Ableitung des Rhombendodekaëders.

Man lege in jede Kante des Oktaëders eine Ebene, welche der nicht zu dieser Kante gehörigen Hauptaxe parallel, und folglich gegen beide Flächen derselben Kante gleich geneigt ist, so resultirt eine von 12 Rhomben umschlossene Gestalt, d. h. ein Rhombendodekaëder, dessen Flächen, wenn sie sich selbst parallel in den Körper des Oktaëders eindrängen, als regelmässige Abstumpfungsflächen seiner Kanten erscheinen würden. Da nun der geometrische Unterschied dieser Flächen von jenen des Oktaëders darin besteht, dass sie die beliebig verlängerten Axen desselben in den Centraldistanzen 1, 1 und ∞ schneiden, so wird das Zeichen des Rhombendodekaëders $= \infty O$.

§. 94.

Ableitung der Triakisoktaëder.

Man nehme in jeder unbestimmt verlängerten Halbaxe des Oktaëders die gleiche Länge $m > 1$, und lege darauf in jede Kante desselben zwei Ebenen, welche die nicht zu dieser Kante gehörige Hauptaxe in den Centraldistanzen m schneiden, so resultirt eine von 24 gleichschenkligen Dreiecken umschlossene Gestalt, in welcher die Kantenlinien des eingeschriebenen Oktaëders noch hervortreten, d. h. ein Triakisoktaëder, dessen Flächen, wenn sie sich selbst parallel in den Körper des Oktaëders eindrängen, regelmässige Zuschärfungen seiner Kanten hervorbringen würden. Da nun der geometrische Unterschied dieser Flächen von jenen des Oktaëders darin besteht, dass ihre Parameter 1, 1 und m sind, während jene des Oktaëders 1, 1 und 1 waren, so wird das Zeichen des Triakisoktaëders allgemein $= mO$.

Die holoëdrisch oder hemiëdrisch beobachteten Varietäten sind: $\frac{3}{2}O$, $2O$, und $3O$; auch kommen $\frac{6}{6}\frac{5}{4}O$, $\frac{5}{4}O$, $\frac{7}{4}O$, und $4O$ vor*).

§. 95.

Ableitung der Ikositetraëder.

Man nehme wiederum in jeder der unbestimmt verlängerten Halbaxen des Oktaëders die gleiche Länge $m > 1$, und lege darauf in jedes Oktaëdereck vier Flächen, von welchen jede einzele über eine Fläche dieses Eckes dergestalt fällt, dass sie die beiden andern zu derselben Fläche gehörigen Halbaxen

---

*) Die erstere Var. wurde am Alaun beobachtet; die drei andern Var. finden sich in ganz kleinen Flächen an einem Bleiglanzkrystall im Werner'schen Museo.

in den Centraldistanzen m schneidet, so resultirt eine von 24 symmetrischen Trapezoiden umschlossene Gestalt, d. h. ein Ikositetraëder, dessen Flächen, wenn sie sich selbst parallel in den Körper des Oktaëders eindrängen, vierflächige, auf die Flächen aufgesetzte Zuspitzungen seiner Ecke bilden würden. Da nun der geometrische Unterschied dieser Flächen von jenen des Oktaëders darin besteht, dass sie die Axen in den Centraldistanzen 1, m und m schneiden, so wird das Zeichen der Ikositetraëder allgemein $= mOm$.

Die holoëdrisch oder hemiëdrisch beobachteten Varietäten sind: $\frac{4}{3}O\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}O\frac{3}{2}$, 2O2, $\frac{8}{3}O\frac{8}{3}$, 3O3, 4O4, 6O6, 12O12, 40O40 (?)*).

§. 96.

Ableitung der Tetrakishexaëder.

Wiederum nehme man in jeder unbestimmt verlängerten Halbaxe des Oktaëders die Länge $n > 1$, und lege darauf in jedes Oktaëdereck vier Flächen, von welchen eine jede einzele über eine Kante dieses Eckes dergestalt fällt, dass sie die zu derselben Kante gehörige Halbaxe in der Centraldistanz n schneidet, während sie der nicht zu dieser Kante gehörigen Axe parallel ist (oder sie in der Entfernung ∞ schneidet), so resultirt eine von 24 gleichschenkligen Dreiecken umschlossene Gestalt, in welcher die Kantenlinien des eingeschriebenen Hexaëders noch hervortreten, d. h. ein Tetrakishexaëder, dessen Flächen, wenn sie sich selbst parallel in den Körper

---

*) Diese Varietät dürfte die Muttergestalt des, fast ganz hexaëderähnlichen, Trigondodekaëders seyn, welches Phillips am Würfelerz beobachtete; $\frac{8}{3}O\frac{8}{3}$ kommt zuweilen am Flussspathe von Hofsgrund, 12O12 ziemlich häufig, $\frac{4}{3}O\frac{4}{3}$ etwas seltner am Bleiglanze vor.

des Oktaëders eindrängen, vierflächige, auf die Kanten aufgesetzte Zuspitzungen seiner Ecke bilden würden. Da nun der geometrische Unterschied dieser Flächen von jenen des Oktaëders darin besteht, dass sie die Axen in den Centraldistanzen ∞, n und 1 schneiden, so wird das Zeichen der Tetrakishexaëder allgemein $= \infty On$.

Die holoëdrisch oder hemiëdrisch beobachteten Varietäten sind: $\infty O\frac{5}{4}$ *), $\infty O\frac{3}{2}$, $\infty O2$, $\infty O3$, ∞O7/[illegible], $\infty O4$.

§. 97.

Ableitung der Hexakisoktaëder.

Man nehme in jeder unbestimmt verlängerten Halbaxe des Oktaëders zwei verschiedene Längen m und n, so dass beide > 1 und jederzeit $m > n$, und lege darauf in jedes Oktaëdereck acht Ebenen, von welchen je zwei über eine Kante dieses Eckes dergestalt fallen, dass sie die zu derselben Kante gehörige Halbaxe in der kleineren Centraldistanz n, die nicht dazu gehörige Axe aber beiderseits in den grösseren Centraldistanzen m schneiden, so resultirt eine von 48 ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Gestalt, d. h. ein Hexakisoktaëder, dessen Flächen, wenn sie sich selbst parallel in den Körper des Oktaëders eindrängen, achtflächige Zuspitzungen seiner Ecke darstellen würden. Da nun der geometrische Unterschied dieser Flächen von jenen des Oktaëders darin besteht, dass sie die Axen in den Centraldistanzen m, n und 1 schneiden, so wird das Zeichen der Hexakisoktaëder allgemein $= mOn$.

Die holoëdrisch oder hemiëdrisch beobachteten

---

*) Nach Bernhardi's Vermuthung statt der von Wakkernagel angegebenen Var. $\infty O\frac{11}{9}$.

Varietäten sind: $\frac{15}{7}O\frac{15}{11}$ *), $3O\frac{3}{2}$, $\frac{11}{3}O\frac{11}{5}$, $4O2$, $5O\frac{5}{3}$, $7O\frac{7}{3}$, $8O4$ **), und $64O\frac{64}{63}$ ***).

§. 98.

Beweis für die Ableitung des Hexakisoktaëders.

Wir haben in den vorhergehenden §§. die Ableitung der tesseralen Gestalten so dargestellt, wie sie wohl einem Jeden verständlich seyn muss, konnten uns aber freilich dabei nicht auf die umständliche Beweisführung einlassen, dass in jedem Falle die abzuleitende Gestalt wirklich zum Vorscheine kommt, oder, dass sich durch ihre gegenseitigen Durchschnitte die Figur und Verbindung der construirten Flächen so bestimmt, wie es der Begriff der abzuleitenden Gestalt erfordert. Da indess diese (auch durch Construction sehr leicht zu führenden ****)) Beweise in den Resultaten des folgenden Capitels enthalten sind, welche sich unmittelbar auf die Ableitungen, und zwar zunächst auf die Ableitung des Hexakisoktaëders gründen, so scheint es nur nöthig, das Verfahren der Ableitung für diese eine Gestalt vollständig zu rechtfertigen, oder den Beweis zu führen, dass die nach der Regel des §. 97 abgeleitete Gestalt wirklich die Eigenschaften des Hexakisoktaëders besitzt und besitzen muss.

§. 99.

Fortsetzung.

Da nach §. 97. in jedes Oktaëdereck 8 Flächen gelegt wurden, so wird die abgeleitete Gestalt offen-

---

*) Von Phillips als Dyakisdodekaëder am semitesseralen Kobaltkies beobachtet; vielleicht ist es $2O\frac{4}{3}$.

**) Von Bernhardi am Bleiglanz beobachtet.

***) Nach Phillips am Topazolith.

****) Vergl. meinen Grundriss der Krystallographie, S. 89 u. f.

bar von $6 . 8 = 48$ Flächen umschlossen seyn müssen. Es ist also nur zu beweisen, dass dieselbe wirklich ein Hexakisoktaëder sey; d. h., dass sie für jeden Werth von m und n auch wirklich diejenigen Eigenschaften besitze, welche von jener Gestalt in §. 86. ausgesagt worden sind. Diess wird bewiesen seyn, sobald gezeigt werden kann:

1) dass sich je sechs über einer Oktaëderfläche fallende Flächen in einem Puncte, und zwar in einem Puncte der trigonalen Zwischenaxe desselben Octanten schneiden.

2) Dass sich je vier über einer Oktaëderkante fallende Flächen in einem Puncte, und zwar in einem Puncte der rhombischen Zwischenaxe dieser Kante schneiden.

3) Dass die Flächen der abgeleiteten Gestalt Dreiecke,

4) dass sie gleiche und ähnliche Dreiecke, und

5) dass sie jederzeit ungleichseitige Dreiecke sind.

Wir beziehen uns bei dieser Beweisführung zunächst auf den Octanten der positiven Halbaxen. Die Oktaëderfläche dieses Octanten hat die Gleichung

$$x + y + z = 1$$

Da nun die trigonale Zwischenaxe jedes Octanten die Normale aus dem Mittelpuncte auf die Oktaëderfläche desselben Octanten ist, so werden die Gleichungen der trigonalen Zwischenaxe des Octanten der positiven Halbaxen:

$$x - y = 0,\ z - x = 0,\ y - z = 0\ (§.\ 21.)$$

und da die rhombischen Zwischenaxen in den Ebenen je zweier Hauptaxen liegen, und gegen jede derselben gleich geneigt sind, so werden die Gleichungen der rhombischen Zwischenaxen des Octanten der positiven Halbaxen:

Zwischenaxe in (xy) $x-y=0,\ z=0$
- - - (zx) $z-x=0,\ y=0$
- - - (yz) $y-z=0,\ x=0$

Nach dieser Vorbereitung schreiten wir zum Beweise der obigen 5 Puncte.

1) Je sechs Flächen eines und desselben Octanten, und also auch die des Octanten der positiven Halbaxen müssen offenbar mit der trigonalen Zwischenaxe desselben Octanten zum Durchschnitte kommen; die Gleichungen dieser sechs Flächen sind:

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+z=1,\quad \frac{x}{m}+y+\frac{z}{n}=1$$

$$\frac{x}{n}+\frac{y}{m}+z=1,\quad \frac{x}{n}+y+\frac{z}{m}=1$$

$$x+\frac{y}{m}+\frac{z}{n}=1,\quad x+\frac{y}{n}+\frac{z}{m}=1$$

Da sich nun allgemein die Coordinaten p, p' und p'' des Durchschnittspunctes einer Fläche $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ mit der trigonalen Zwischenaxe bestimmen, wie folgt:

$$p=p'=p''=\frac{abc}{ab+ca+bc}$$

so erhält man für jede der durch vorstehende sechs Gleichungen bestimmten Flächen absolut dieselben Werthe

$$p=p'=p''=\frac{mn}{mn+m+n}$$

Folglich schneiden auch je sechs Flächen eines und desselben Octanten die zugehörige trigonale Zwischenaxe in e i n e m und d e m s e l b e n Puncte.

2) Eben so leicht ergiebt sich, dass je vier über einer Oktaëderkante gelegene Flächen die zu derselben Kante gehörige rhombische Zwischenaxe in e i n e m und d e m s e l b e n Puncte schneiden, dessen Coordinaten

$$q = q' = \frac{n}{n+1}$$

woraus zugleich folgt, dass die drei rhombischen Halbaxen eines jeden Octanten einander gleich sind.

3) Da in jeden oktaëdrischen Eckpunct 8 Flächen gelegt wurden, so kommt natürlich jede Fläche F mit ihren beiden Nebenflächen F' und F'' desselben achtzähligen Flächensystemes (Fig. 14), ausserdem aber nur noch mit einer, zu einem andern oktaëdrischen Eckpuncte gehörigen, Fläche zum Durchschnitte. Denn die beiden Puncte, in welchen sie selbst die trigonale und eine rhombische Zwischenaxe schneidet, gehören zugleich irgend einer andern Fläche F''' desselben Octanten, und jenen beiden Nebenflächen F' und F''. Folglich erleidet jede Fläche F überhaupt drei Durchschnitte, und wird daher ein Dreieck.

4) Bezeichnen wir die Kante, welche jede Fläche mit ihrer Nebenfläche desselben achtzähligen Flächensystemes und desselben Octanten bildet, mit A, die Kante mit der Nebenfläche des Nebenoctanten mit B, und die dritte Kante mit C, so wird jede Kante A durch den trigonalen und einen der oktaëdrischen Eckpuncte, jede Kante B durch einen der oktaëdrischen und einen der rhombischen, und jede Kante C durch den trigonalen und einen der rhombischen Eckpuncte begränzt. Nun sind aber die Coordinaten

a) des trigonalen Eckpunctes:

$$x = y = z = p$$

b) der drei oktaëdrischen Eckpuncte:

$$x = 1 \quad y = 0 \quad z = 0$$
$$x = 0 \quad y = 1 \quad z = 0$$
$$x = 0 \quad y = 0 \quad z = 1$$

c) der drei rhombischen Eckpuncte:

$$x = 0 \quad y = q \quad z = q$$
$$y = 0 \quad z = q \quad x = q$$
$$z = 0 \quad y = q \quad x = q$$

Sucht man mittels dieser Coordinaten nach dem Ausdrucke für die Distanzlinie zweier Puncte (§. 14.) die Länge der dreierlei Kanten, so findet man jedenfalls:

$$A = \sqrt{(p-1)^2 + 2p^2}$$
$$B = \sqrt{(q-1)^2 + q^2}$$
$$C = \sqrt{2(p-q)^2 + p^2}$$

welche von den drei unter b und c stehenden Systemen von Coordinaten man mit dem Systeme unter a oder auch mit einander combiniren mag; zum Beweise, dass die drei Kanten jeder Fläche den drei Kanten jeder andern Fläche gleich, und daher diese selbst durchgängig gleiche und ähnliche Dreiecke sind.

5) Dass aber diese Dreiecke stets ungleichseitig seyn müssen, lässt sich leicht so erweisen: man bezeichne die ebenen Winkel jeder Fläche analog den gegenüberliegenden Kanten, so ist nothwendig

jeder Winkel $a < 90°$
- - $b < 60°$
- - $c < 45°$

und daher auch jeder Winkel $b > 45$; die Dreiecke könnten daher nur gleichschenklig werden, wenn $a = b$ würde; dann wäre aber $a + b < 120°$, und folglich $c > 60°$, welches unmöglich; die Dreiecke sind daher jedenfalls ungleichseitig.

§. 100.

Folgerungen für die übrigen Gestalten.

1) Setzt man bei der im vorigen §. dargestellten Ableitung des Hexakisoktaëders $n = 1$, so fallen je zwei in einer kürzesten Kante zusammenstossende Flächen in eine Ebene, bilden ein gleichschenkliges Dreieck, und die Gestalt wird ein Triakisoktaëder $= m$O.

2) Für $m = \infty$ verschwinden dagegen die mittlern Kanten; je zwei in ihnen zusammenstossende Flächen fallen in eine Ebene, bilden ein gleichschenkliges Dreieck, und die Gestalt wird ein Tetrakishexaëder $= \infty O n$.

3) Für $n = m$ verschwinden die längsten Kanten, je zwei in ihnen zusammenstossende Flächen fallen in eine Ebene, bilden ein symmetrisches Trapezoid, und die Gestalt wird ein Ikositetraëder $= m O m$.

4) Setzt man $m = \infty$ und $n = 1$, so verschwinden die mittleren zugleich mit den kürzesten Kanten; je vier Flächen fallen in eine Ebene, bilden einen Rhombus, und die Gestalt wird das Rhombendodekaëder $= \infty O$.

5) Setzt man endlich $n = m = \infty$, so verschwinden die längsten zugleich mit den mittleren Kanten; je acht Flächen fallen in eine Ebene, bilden ein Quadrat, und die Gestalt wird das Hexaëder $= \infty O \infty$.

§. 101

Uebersicht der holoëdrischen Gestalten.

Und so wären denn sämmtliche holoëdrische Gestalten des Tesseralsystemes aus dem Oktaëder als ihrer gemeinschaftlichen Grundgestalt abgeleitet. Stellen wir die Resultate der vorigen §§. noch einmal zusammen, so erhalten wir folgende Uebersicht:

1) Oktaëder = Grundgestalt $= O$
2) Triakisoktaëder . . . . . $= m O$
3) Rhombendodekaëder . . . $= \infty O$
4) Hexakisoktaëder . . . . . $= m O n$
5) Ikositetraëder . . . . $= m O m$
6) Tetrakishexaëder . . . . $= \infty O n$
7) Hexaëder . . . . $= \infty O \infty$

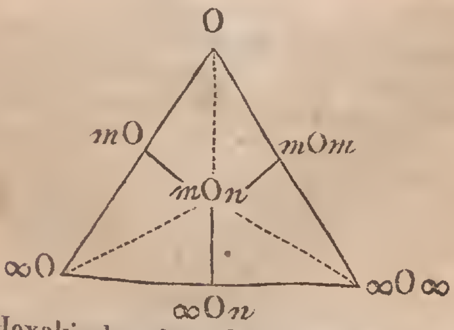
Wie sich aber diese Gestalten insgesammt unter dem allgemeinen Zeichen mOn darstellen lassen, so werden sie auch alle durch das Hexakisoktaëder repräsentirt, welches gleichsam die Bedingungen für alle übrigen Gestalten in sich vereinigt. Als der gemeinschaftliche Repräsentant derselben steht es daher billig in der Mitte der Reihe, welche einerseits mit dem Oktaëder beginnt, anderseits mit dem Hexaëder schliesst, da die Coëfficienten m und n in jenem die möglich kleinsten, in diesem die möglich grössten Werthe erreicht haben.

Uebrigens ist leicht zu beweisen, dass in diesen sieben Arten wirklich alle möglichen Arten von holoëdrischen Gestalten erschöpft sind, und dass weder die Geometrie, noch die *natura geometrizans* als Krystallbildnerin eine tesserale holoëdrische Gestalt darzustellen vermag, welche nicht der Art nach mit einer der sieben bekannten Gestalten des Tesseralsystemes übereinstimmte.

§. 102.

Schema des Tesseralsystemes.

Die Uebergänge und Verwandtschaften der sieben holoëdrischen Gestalten lassen sich auf eine sehr einleuchtende Weise aus folgendem triangulärem Schema erkennen;



Das Hexakisoktaëder, als der Repräsentant sämmtlicher Gestalten, nimmt den Mittelpunct des Schemas ein, in dessen drei Ecken diejenigen drei Gestalten stehen, welche einzig in ihrer Art, und dadurch, so wie durch ihre geringere Flächenzahl und die Einerleiheit ihrer Kanten ausgezeichnet sind. Jede Seite des Dreieckes repräsentirt von derjenigen 24flächigen Gestalt, deren Zeichen sie trägt, einen zahllosen Inbegriff, welchen man unter dem Schema einer Reihe vorstellen kann, deren beide Gränzglieder in den Eckpuncten jeder Dreieckseite stehen.

Diese Vorstellungsweise ist der Natur der Sache ganz angemessen; denn in der That wird das Triakisoktaëder mO um so ähnlicher dem Oktaëder oder Rhombendodekaëder, das Ikositetraëder mOm um so ähnlicher dem Oktaëder oder Hexaëder, das Tetrakishexaëder ∞On um so ähnlicher dem Rhombendodekaëder oder Hexaëder, je kleiner oder grösser der Werth von m oder n ist. — Aus dem Hexakisoktaëder finden unmittelbare Uebergänge in die drei 24flächigen Gestalten Statt, indem entweder beide Coëfficienten in das Verhältniss der Gleichheit treten, oder der grössere sein Maximum, oder der kleinere sein Minimum erreicht. Dagegen sind die Uebergänge aus mOn in O, ∞O und $\infty O \infty$ nicht so unmittelbar, indem für sie das gleichzeitige Eintreten zweier jener Bedingungen gefordert wird. Diess alles übersieht man auf einen Blick aus unserm Schema, und gewinnt zugleich die Ueberzeugung, dass dieselben Uebergänge zwischen den Gestalten selbst Statt finden, welche sich zwischen den Zeichen derselben nachweisen lassen.

B. Ableitung der hemiëdrischen Gestalten.

§. 103.

Welche Gestalten der Hemiëdrie fähig sind.

Prüfen wir die tesseralen Gestalten hinsichtlich ihrer Fähigkeit zur Hemiëdrie, so ergiebt sich Folgendes:

1) Unfähig der Hemiëdrie überhaupt sind:
   a) das Hexaëder, weil drei Ebenen den Raum nicht allseitig umschliessen.
   b) Das Rhombendodekaëder, weil je sechs seiner Flächen, man mag sie wählen wie man will, entweder den Raum nicht allseitig umschliessen, oder eine solche geschlossene Gestalt darstellen, in welcher der Grundcharakter des Tesseralsystemes nicht mehr vorhanden ist.

   Uebrigens lässt sich für die halbe Flächenzahl keiner von beiden Gestalten eine ringsum symmetrische Vertheilung auffinden, welche doch in den einfachen Gestalten die Bedingung aller Hemiëdrie ist (§. 49.).

2) Fähig der Hemiëdrie sind:
   a) nach einzelen Flächen; das Oktaëder, das Tetrakishexaëder und Hexakisoktaëder; jedoch scheint die nach einzelen Flächen aus mOn abzuleitende hemiëdrische Gestalt, welche einen von 24 unregelmässigen Fünfecken umschlossenen Körper darstellt, in der Natur nicht vorzukommen, und ist solche daher kein Gegenstand für unsre Betrachtungen.
   b) Nach Flächenpaaren; das Hexakisoktaëder.
   c) Nach dreizähligen Flächensystemen; das Triakisoktaëder und Ikositetraëder.
   d) Nach sechszähligen Flächensystemen; das Hexakisoktaëder.

Die Resultate der Hemiëdrie sind:

Geneigtflächige Gestalten, für das Oktaëder, Triakisoktaëder, Ikositetraëder und Hexakisoktaëder nach sechszähligen Flächensystemen.

Parallelflächige Gestalten, für das Tetrakishexaëder u. Hexakisoktaëder nach Flächenpaaren.

a) Geneigtflächig-semitesserale Gestalten.

§. 104.

Ableitung des Tetraëders.

Das Tetraëder ist die geneigtflächig-hemiëdrische Gestalt des Oktaëders nach einzelen Flächen, oder die hemiëdrische Gestalt des Oktaëders schlechthin *).

Da das Oktaëder acht Flächen hat, so wird seine hemiëdrische Gestalt von vier Flächen umschlossen seyn. Weil aber jede bleibende Fläche mit ihren drei Nachbarflächen zum Durchschnitte kommt, während ihre Nebenflächen verschwinden, so wird sie auch nach der Vergrösserung ein Dreieck bilden. Und weil die Neigungswinkel je zweier Nachbarflächen vor der Vergrösserung gleich waren, so werden auch säumtliche Kanten der hemiëdrischen Gestalt gleich gross seyn, woraus die durchgängige Gleichheit der Flächenwinkel, und daher auch die Gleichseitigkeit der neuen Dreiecke, als der Flächen der hemiëdrischen Gestalt, folgt. Die hemiëdrische Gestalt des Oktaëders ist also eine von vier gleichseitigen Dreiecken umschlossene Gestalt, d. h. das Tetraëder.

Uebrigens folgt aus §. 51, dass sich aus dem Oktaëder zwei vollkommen gleiche und ähnliche, und nur durch ihre Stellung verschiedene Tetraëder als hemiëdrische Gegenkörper ableiten lassen. Bezeichnen wir diese Verschiedenheit der Stellung, welche eigentlich keine andre, als die in §. 42 erwähnte der

*) Die Beweise für die Richtigkeit der Ableitungen dieser hemiëdrischen Gestalten sind für das Tetraëder, Deltoid- und Trigondodekaëder auf ähnliche Art gegeben wie im Grundrisse; für das Hexakistetraëder dagegen, als den allgemeinen Repräsentanten aller geneigtflächig-semitesseralen Gestalten glaubte ich den Beweis ausführlicher entwickeln zu müssen, und habe mich dabei der analytisch-geometrischen Methode bedient.

ersten und verwendeten Normalstellung ist, durch Vorsetzung der Zeichen + und —, so werden die Zeichen der beiden aus O abzuleitenden Tetraëder $+\frac{O}{2}$ und $-\frac{O}{2}$.

§. 105.

Ableitung der Deltoiddodekaëder.

Die Deltoiddodekaëder sind die geneigtflächig-hemiëdrischen Gestalten der Triakisoktaëder nach dreizähligen Flächensystemen, oder die hemiëdrischen Gestalten der Triakisoktaëder schlechthin.

Die Triakisoktaëder sind nicht nach einzelen Flächen, sondern nur nach dreizähligen Flächensystemen der Hemiëdrie fähig, weil nur so eine ringsum symmetrische Vertheilung der halben Flächenzahl möglich ist. Da nun jede einzele Fläche *F* eines bleibenden Flächensystemes v o r der Vergrösserung mit jeder der beiden nächsten Flächen zweier Nachbarsysteme einen Eckpunct gemein hatte, so wird sie n a c h der Vergrösserung mit jeder derselben eine Kante bilden, und folglich eine vierseitige Figur werden, indem sie sich über ihre ursprüngliche Grundlinie (die Oktaëderkante) hinaus in ein zweites Dreieck ausbreitet. Und da die Neigungswinkel beider Flächen gegen die Fläche *F* sowohl als gegen deren ursprüngliche Grundlinie v o r der Vergrösserung gleich waren, so werden nicht nur die neuen Kanten, sondern auch die an jener Grundlinie gelegenen Winkel des zweiten Dreiecks gleich gross, und daher dieses Dreieck selbst ein gleichschenkliges seyn. Die vierseitige Figur ist daher ein symmetrisches Trapezoid oder Deltoid (§. 32.), und da, was von e i n e r Fläche gilt, auf a l l e anwendbar ist, so wird die neue Gestalt eine von 12 Deltoiden umschlossene Gestalt, d. h. ein Deltoiddodekaëder seyn (§. 78.).

Die Zeichen je zweier aus mO abzuleitender Deltoiddodekaëder sind $+\frac{mO}{2}$ und $-\frac{mO}{2}$.

§. 106.

Ableitung der Trigondodekaëder.

Die Trigondodekaëder sind die geneigtflächig-hemiëdrischen Gestalten der Ikositetraëder nach dreizähligen Flächensystemen, oder die hemiëdrischen Gestalten der Ikositetraëder schlechthin.

Die Ikositetraëder sind eben so wenig als die Triakisoktaëder der Hemiëdrie nach einzelen Flächen fähig, indem nur die dreizähligen Flächensysteme eine ringsum symmetrische Vertheilung gestatten. Weil aber jede einzele Fläche mit der eines Nachbarflächensystemes vor der Vergrösserung einen Eckpunct gemein hatte, so wird sie mit derselben nach der Vergrösserung eine Kante bilden; und weil je zweier solcher Flächen Vergrösserung nur innerhalb des von den Hauptschnitten durch ihre kürzeren Kanten umschlossenen Raumes Statt findet, ihr gegenseitiger Neigungswinkel aber dem Neigungswinkel ihrer beiderseitigen symmetrischen Diagonalen gleich, und folglich die neue Kante den gleichschenkligen Diagonalen parallel ist, so wird jede der beiden Flächen nach der Vergrösserung ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Da nun, was von einer Fläche gilt, auf alle seine Anwendung findet, so folgt, dass die neue Gestalt eine von 12 gleichschenkligen Dreiecken umschlossene Gestalt, d. h. ein Trigondodekaëder ist (§. 76.).

Die Zeichen je zweier aus mOm abzuleitender Trigondodekaëder sind $+\frac{mOm}{2}$ und $-\frac{mOm}{2}$.

§. 107.

Ableitung der Hexakistetraëder.

Die Hexakistetraëder sind die geneigtflächig-hemiëdrischen Gestalten der Hexakisoktaëder nach sechszähligen Flächensystemen.

Da von den 8 sechszähligen Flächensystemen des Hexakisoktaëders die vier abwechselnden verschwinden, so wird die hemiëdrische Gestalt von 24 Flächen umschlossen seyn; dass sie aber wirklich die Eigenschaften besitzt, welche oben in §. 81. von dem Hexakistetraëder ausgesagt worden sind, diess wird erwiesen seyn, sobald gezeigt werden kann:

1) dass sich je sechs um ein verschwindendes Flächensystem gelegene Flächen in einem einzigen Puncte, und zwar in einem Puncte der zu demselben Flächensysteme gehörigen trigonalen Zwischenaxe schneiden.
2) dass die Flächen wiederum Dreiecke,
3) dass sie gleiche und ähnliche Dreiecke, und
4) dass sie jederzeit ungleichseitige Dreiecke sind.

Wir wollen annehmen, das im Octanten der positiven Halbaxen gelegene Flächensystem sey ein verschwindendes, so gelten für die zugehörige trigonale Zwischenaxe T dieselben Gleichungen wie oben in §. 99. nämlich:

$$x - y = 0,\quad z - x = 0,\quad y - z = 0$$

Die Gleichungen derjenigen sechs Flächen aus den drei Nebenoctanten, welche unmittelbar an diesem Octanten anliegen, sind aber:

$$x + \frac{y}{n} - \frac{z}{m} = 1,\qquad \frac{x}{n} + y - \frac{z}{m} = 1$$

$$-\frac{x}{m} + y + \frac{z}{n} = 1,\quad -\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$$

$$\frac{x}{n} - \frac{y}{m} + z = 1,\qquad x - \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1$$

Da nun allgemein die Coordinaten des Durchschnittspunctes irgend einer Fläche $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ mit jener trigonalen Zwischenaxe

$$r = r' = r'' = \frac{abc}{ab + ca + bc}$$

so erhält man für jede der durch vorstehende sechs Gleichungen bestimmten Flächen absolut dieselben Werthe

$$r = r' = r'' = \frac{mn}{mn + m - n}$$

Folglich schneiden sich je sechs um ein verschwindendes Flächensystem gelegene Flächen in einem Puncte der trigonalen Zwischenaxe dieses Systemes; und es entsteht daher über jedem verschwindenden Flächensysteme ein neues sechsflächiges Eck.

Je zwei der bisher betrachteten sechs Flächen bilden schon ursprünglich im Hexakisoktaëder eine kürzeste Kante C (Fig. 15); diese Kante wird sich also zugleich mit den sie bildenden Flächen zu C' verlängern, und durch den neuen sechsflächigen Eckpunct gehen. Eine jede Fläche hatte ferner ursprünglich mit der nächsten Fläche des Nachbaroctanten einen ditetragonalen Eckpunct gemein, wird also mit ihr nach der Vergrösserung eine neue Kante B' bilden, welche, wie beide zu ihr contribuirende Flächen, durch den neuen sechsflächigen Eckpunct gehen muss. Da nun beide diese, in einem und demselben Puncte zusammenlaufende, Kanten von der ursprünglichen und unverändert gebliebenen Kante A' unmittelbar geschnitten werden, so wird jede bleibende Fläche auch nach ihrer Vergrösserung überhaupt von 3 Kanten begränzt, und mithin ein Dreieck seyn.

Die Endpuncte der dreierlei Kanten von je sechs

Flächen, welche zur Darstellung eines neuen sechsflächigen Eckes contribuiren, sind folgende:

a) die drei oktaëdrischen Eckpuncte, deren Coordinaten:

$$x = 1,\ y = 0,\ z = 0$$
$$x = 0,\ y = 1,\ z = 0$$
$$x = 0,\ y = 0,\ z = 1$$

b) der neue sechsflächige Eckpunct im Octanten des verschwindenden Flächensystemes (oder der positiven Halbaxen), dessen Coordinaten:

$$x = y' = z'' = \frac{mn}{mn + m - n} = r$$

c) die drei ursprünglichen sechsflächigen Eckpuncte in den Nebenoctanten, deren Coordinaten:

$$x = -p,\ y = p,\ z = p$$
$$y = -p,\ z = p,\ x = p$$
$$z = -p,\ x = p,\ y = p$$

wenn, wie oben in §. 99. $p = \frac{mn}{mn + m + n}$.

Es werden nämlich begränzt:

die drei Kanten C' von dem Puncte sub b und je einem der drei Puncte sub c;

die drei Kanten B' von dem Puncte sub b und je einem der Puncte sub a;

die Kanten A' sind aber dieselben wie die Kanten A oben in §. 99.

Sucht man nun die Längen der Kanten B' und C' nach der bekannten Formel, so erhält man jedenfalls:

$$B' = \sqrt{(r-1)^2 + 2r^2}$$
$$C' = \sqrt{2(r-p)^2 + (r+p)^2}$$

welches der drei Systeme von Coordinaten sub a oder c man mit dem Systeme sub b combiniren mag. Folglich sind einerseits die Kantenlinien B', anderseits die Kantenlinien C' einander durchgängig gleich; die Gleichheit der Kantenlinien A' wurde aber schon oben (§. 99.) erwiesen. Da nun jede Fläche der hemiëdrischen Gestalt von A', B' und C' begränzt wird, so sind die 24 Flächen derselben gleiche und ähnliche Dreiecke.

Bezeichnen wir die ebenen Winkel dieser Dreiecke ihren Gegenseiten analog mit a', b' und c', so ist

jeder Winkel $a' < 60°$
- - - $b' < 60°$
folglich - - - $c' > 60°$

Gleichschenkligkeit der Dreiecke könnte also nur insofern eintreten, wiefern $a' = b'$ würde; dann müsste aber auch $A' = B'$, oder

$$\sqrt{(p-1)^2 + 2p^2} = \sqrt{(r-1)^2 + 2r^2}$$

seyn, welches unmöglich, da r immer $> p$. Die Dreiecke sind daher jedenfalls ungleichseitig.

Und so wäre denn bewiesen, dass die abgeleitete Gestalt wirklich eine von 24 gleichen und ähnlichen, ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Gestalt, d. h. ein Hexakistetraëder ist.

Die Zeichen je zweier aus mOn abzuleitenden Hexakistetraëder sind $+\frac{mOn}{2}$ und $-\frac{mOn}{2}$.

b) Parallelflächig-semitesserale Gestalten *).

§. 108.

Ableitung der Pentagondodekaëder.

Die Pentagondodekaëder sind die parallelflächig-hemiëdrischen Gestalten der Tetrakishexaëder nach einzelen Flächen, oder die hemiëdrischen Gestalten der Tetrakishexaëder schlechthin.

---

*) Auch im Gebiete dieser hemiëdrischen Gestalten habe ich nur für diejenige Gestalt, welche als der Repräsentant der ganzen Abtheilung zu betrachten, den analytisch-geometrischen Beweis der Ableitung gegeben.

Dass die Hemiëdrie nach einzelen Flächen am Tetrakishexaëder auf eine parallelflächige Gestalt führen muss, ist einleuchtend, weil jeder Fläche Gegenfläche die sechste in der Reihe der Nebenflächen und folglich eine geradzählige ist (§. 50.). Dass aber diese parallelflächige Gestalt wirklich ein Pentagondodekaëder werden muss, ergiebt sich daraus, weil jede bleibende Fläche überhaupt fünf Nachbarflächen hat, folglich nach der Vergrösserung fünf Durchschnitte erleidet, und ein Pentagon wird. Da nun jede bleibende Fläche gegen diejenigen vier Nachbarflächen, welche mit ihr einen hexaëdrischen Eckpunct gemein haben, gleich geneigt ist, so wird sie mit ihnen nach der Vergrösserung vier gleiche Kanten bilden, während die mit der fünften Fläche gebildete Kante eine ungleiche ist. Die abgeleitete Gestalt wird daher eine von 12 symmetrischen Pentagonen umschlossene Gestalt, d. h. ein Pentagondodekaëder.

Die Zeichen der beiden aus $\infty O n$ abzuleitenden Pentagondodekaëder werden $+\frac{\infty O n}{2}$ und $-\frac{\infty O n}{2}$.

§. 109.

Ableitung der Dyakisdodekaëder.

Die Dyakisdodekaëder sind die parallelflächig-hemiëdrischen Gestalten der Hexakisoktaëder, nach den an den mittleren Kanten gelegenen Flächenpaaren, oder die parallelflächig-hemiëdrischen Gestalten der Hexakisoktaëder schlechthin.

Weil das Gegenflächenpaar eines jeden so bestimmten Flächenpaares das sechste in der Reihe der Nebenpaare ist, so muss jedenfalls eine parallelflächig-hemiëdrische, von 12 Flächenpaaren umschlossene Gestalt zum Vorscheine kommen. Dass solche aber auch wirklich die oben in §. 85. angegebenen

Eigenschaften des Dyakisdodekaëders besitzt, lässt sich etwa folgendergestalt darthun.

1) Eine jede bleibende Fläche F in Fig. 16 kommt zum Durchschnitte:

   mit ihrer Nebenfläche F_{III} desselben Flächenpaares,
   mit einer Fläche F_{IV} des Nachbarpaares an demselben oktaëdrischen Eckpuncte,
   mit den beiden bleibenden Flächen F_I und F_{II} desselben Octanten.

   Jede Fläche F wird also begränzt: von der ursprünglichen und durch die Hemiëdrie nur verlängerten Kante B, von einer Kante A, als Resultat des Durchschnittes mit der Fläche aus dem Nachbaroctanten, und von zwei Kanten C als Durchschnitten mit den beiden bleibenden Flächen desselben Octanten.

   Folglich sind die Flächen der abgeleiteten Gestalt vierseitige Figuren.

2) Es fällt aber je eine Kante B mit je einer Kante A in die Ebene eines und desselben Hauptschnittes, wie diess unmittelbar aus den Gleichungen derselben folgt; es sind nämlich für die drei Flächen F, F_I und F_{II} des Octanten der positiven Halbaxen die Gleichungen:

der Kante A, $\frac{x}{m} + z = 1, \quad y = 0$

- - A_I, $x + \frac{y}{m} = 1, \quad z = 0$

- - A_{II}, $y + \frac{z}{m} = 1, \quad x = 0$

und die Gleichungen:

der Kante B, $\frac{y}{n} + z = 1, \quad x = 0$

- - B_I, $x + \frac{z}{n} = 1, \quad y = 0$

- - B_{II}, $y + \frac{x}{n} = 1, \quad z = 0$

Folglich fällt A mit B_I, A_I mit B_{II}, und A_{II} mit B in einen und denselben Hauptschnitt; das Wachsthum je dreier Flächen eines und desselben Octanten erfolgt daher nur innerhalb dieses Octanten, und je zwei der so eben genannten Kanten werden sich in einem Puncte (dem unregelmässigen Eckpuncte) schneiden, dessen Coordinaten sich bestimmen:

für A und B_I $x = r \quad z = s \quad y = 0$
für A_I und B_{II} $x = s \quad y = r \quad z = 0$
für A_{II} und B $y = s \quad z = r \quad x = 0$

wenn $r = \dfrac{m(n-1)}{mn-1}$ und $s = \dfrac{n(m-1)}{mn-1}$.

Nun wird jede Kante B begränzt: durch ihren oktaëdrischen Eckpunct und denjenigen unregelmässigen Eckpunct, welcher so eben als ihr Durchschnitt mit einer der Kanten A bestimmt wurde. Auf gleiche Weise wird jede Kante A begränzt durch ihren oktaëdrischen Eckpunkt und denjenigen der unregelmässigen Eckpuncte, welcher als ihr Durchschnitt mit einer der Kanten B bestimmt wurde. Sucht man hiernach für die Flächen F, F_I und F_{II} die Werthe ihrer respectiven Kanten A und B, so findet man:

$$A = A_I = A_{II} = \sqrt{r^2 + (s-1)^2}$$
$$B = B_I = B_{II} = \sqrt{s^2 + (r-1)^2}$$

Ferner wird jede der Kanten C begränzt einerseits von dem trigonalen Eckpuncte ihres Octanten, dessen Coordinaten p aus §. 99. bekannt sind; anderseits von einem der drei unregelmässigen Eckpuncte. Sucht man hiernach für dieselben drei Flächen F, F_I und F_{II} die Werthe ihrer Kanten C, so findet man:

$$C = C_I = C_{II} = \sqrt{(p-r)^2 + (p-s)^2 + p^2}$$

Nun wird aber jede Fläche von einer der Kanten A, einer der Kanten B, und zweien der Kanten C begränzt, also sind die vier Kanten einer Fläche in derselben Folge den vier Kanten jeder andern Fläche gleich, mithin diese Flächen selbst gleiche und ähnliche vierseitige Figuren, und zwar gleichschenklige vierseitige Figuren, da jede zwei der gleichen Seiten C hat.

3) Dass aber diese Figuren in jedem Falle Trapeze oder Trapezoide sind und seyn müssen, ergiebt sich daraus, weil s stets $> r$, und folglich:

$$A \text{ jederzeit } < B$$

Daher ist die hemiëdrische Gestalt jedenfalls eine von 24 gleichschenkligen Trapezoiden oder Trapezen umschlossene parallelflächige Gestalt, deren Flächen sich in 12 Flächenpaare gruppiren, d. h. ein Dyakisdodekaëder.

Die Zeichen der beiden aus mOn abzuleitenden Dyakisdodekaëder werden zum Unterschiede von den Zeichen der Hexakistetraëder in Klammern geschlossen, und daher geschrieben wie folgt:

$$+\left[\frac{mOn}{2}\right] \text{ und } -\left[\frac{mOn}{2}\right].$$

§. 110.

Uebersicht der semitesseralen Gestalten.

Wir haben nun auch die sämmtlichen semitesseralen Gestalten abgeleitet, und folglich die Lehre von der Ableitung für das Tesseralsystem vollendet. Um aber die Resultate der vorhergehenden §§. mit einem Blicke zu überschauen, dazu diene folgende Zusammenstellung der hemiëdrischen Gestalten nebst ihrer Zeichen:

a) Geneigtflächig-semitesserale Gestalten:

1) Tetraëder $= \pm \frac{O}{2}$

2) Deltoiddodekaëder $= \pm \frac{mO}{2}$

3) Trigondodekaëder $= \pm \frac{mOm}{2}$

4) Hexakistetraëder $= \pm \frac{mOn}{2}$

b) Parallelflächig-semitesserale Gestalten.

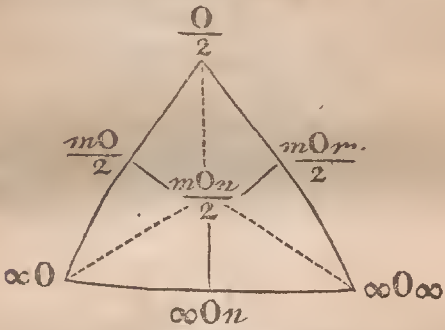
1) Pentagondodekaëder $= \pm \frac{\infty On}{2}$

2) Dyakisdodekaëder $= \pm \left[\frac{mOn}{2}\right]$.

§. 111.

Schema des geneigtflächig-hemiëdrischen Tesseralsystemes.

Auch für die semitesseralen Gestalten gilt das trianguläre Schema in §. 102, welches z. B. für die geneigtflächigen Gestalten folgende Form annimmt:

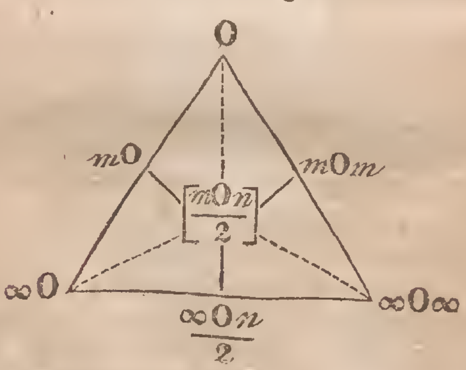


Die Uebergänge und Verwandtschaften der geneigtflächig-semitesseralen Gestalten unter einander und mit ∞O, ∞On und $\infty O\infty$ lassen sich in diesem Schema ganz so verfolgen wie oben, und führen zu Resultaten, welche namentlich für die eigentliche Bedeutung der drei holoëdrischen Gestalten in ihren Combinationen mit den hemiëdrischen von Wichtigkeit sind. Es wird nämlich das Hexakistetraëder um so ähnlicher einer der drei holoëdrischen, und mithin parallelflächigen Gestalten, je grösser einer oder auch beide Ableitungscoefficienten sind. Das Rhombendodekaëder ist die eine Gränzgestalt der Deltoiddodekaëder; das Hexaëder die eine Gränzgestalt der Trigondodekaëder, und das Tetrakishexaëder eine der Gränzgestalten des Hexakistetraëders. Die drei holoëdrischen Gestalten des Schemas sind daher als die Gränzgestalten gewisser hemiëdrischer Gestalten, und gewissermaassen selbst als solche hemiëdrische Gestalten zu betrachten, deren hemiëdrische und holoëdrische Erscheinungsweise identisch ist. Diese Deutung findet jedoch nur dann Statt, wenn sie an den Combinationen geneigtflächig-semitesseraler Gestalten wirklich Antheil nehmen, weil sie dann, wenn auch nicht *quoad phänomenon*, so doch *quoad noumenon* geneigtflächig-semitesserale Gestalten sind.

§. 112.

Schema des parallelflächig-hemiëdrischen Tesseralsystemes.

Eben so, wie für die geneigtflächigen, lässt sich auch für die parallelflächig-semitesseralen Gestalten folgendes trianguläre Schema geltend machen:



Aus diesem Schema folgen nicht nur die verschiedenen Uebergänge und Verwandtschaften des Dyakisdodekaëders und Pentagondodekaëders mit den übrigen Gestalten, sondern man ersieht auch aus diesen

Uebergängen, dass die fünf holoëdrischen Gestalten des Schemas nur als die Gränzgestalten der beiden hemiëdrischen zu betrachten, und als solche, mithin als parallelflächig-hemiëdrische Gestalten zu deuten sind, sobald sie an den Combinationen des Pentagondodekaëders und Dyakisdodekaëders wirklich Antheil nehmen.

Drittes Capitel.

Berechnung des Tesseralsystemes.

§. 113.

Allgemeine Bemerkung.

Bei der Berechnung der Gestalten des Tesseralsystemes kann man sich vorzüglich folgende Probleme stellen:

I. Die Grösse der Zwischenaxen,
II. Die Grösse der Flächennormale,
III. Die Grösse der Kantenlinien,
IV. Das Volumen,
V. Die Oberfläche,
VI. Die Flächenwinkel, und
VII. Die Kantenwinkel

der verschiedenen Gestalten zu finden.

Wie es nun bei allen analytischen Rechnungen Regel ist, jedes Problem in seiner grössten Allgemeinheit aufzufassen, so werden wir auch bei der Berechnung des Tesseralsystemes zunächst auf diejenige Gestalt Rücksicht zu nehmen haben, deren Verhältnisse die allgemeinsten sind, so dass sich ihr die übrigen Gestalten gleichsam nur wie besondere Fälle unterordnen. Diese Gestalt ist aber keine andere, als das Hexakisoktaëder, der Repräsentant des ganzen Systemes, mit dessen Eigenschaften eben so die Eigenschaften aller übrigen Gestalten, wie mit seinem Zeichen mOn die Zeichen derselben gegeben sind. Nur werden wir die dreierlei Erscheinungsweisen des Hexakisoktaëders, als holoëdrische, als geneigtflächig- und parallelflächig-hemiëdrische Gestalt, oder als Hexakisoktaëder, als Hexakistetraëder und Dyakisdodekaëder besonders ins Auge zu fassen, und dem Calcül zu unterwerfen haben; wie es denn in jeder seiner Erscheinungsweisen als der Repräsentant der gleichnamigen Gruppe von Gestalten zu betrachten ist.

1) *Berechnung der holoëdrischen Gestalten.*

§. 114.

Berechnung des Hexakisoktaëders mOn. Zwischenaxen.

Aufgabe. Die Grössen der Zwischenaxen im Hexakisoktaëder mOn zu bestimmen.

Die Gleichung einer in den Octanten der positiven Halbaxen fallenden Fläche F des Hexakisoktaëders ist

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$$

Diese Fläche kommt zum Durchschnitt mit der trigonalen Halbaxe desselben Octanten; aus der Combination der vorstehenden Gleichung von F mit den aus §. 99 bekannten Gleichungen dieser Zwischenaxe folgt für den Durchschnittspunct wie a. a. O.

$$x = y = z = \frac{mn}{mn + m + n}$$

und daher die Centraldistanz dieses Punctes, oder die gesuchte Länge T der trigonalen Halbaxe

$$T = \frac{mn\sqrt{3}}{mn + m + n}$$

Weil die rhombische Zwischenaxe z. B. des Hauptschnittes (yz) mit der gleichnamigen Intersection der

Fläche F zum Durchschnitte kommt, und die Gleichung dieser Intersection

$$\frac{y}{n} + z = 1$$

ist, so folgt aus der Combination dieser Gleichung und jener der Axe für den Durchschnittspunct:

$$y = z = \frac{n}{n+1}$$

und daher die Centraldistanz desselben oder die gesuchte Länge R der rhombischen Zwischenaxe

$$R = \frac{n\sqrt{2}}{n+1}$$

Da nun in der Grundgestalt $m = n = 1$, so wird für sie:

$$T = \sqrt{\tfrac{1}{3}} \qquad R = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

Nehmen wir diese Werthe als die Grundwerthe beider Halbaxen an, so können wir die ihnen in den übrigen Gestalten zukommenden Werthe als Multipla der Grundwerthe ausdrücken, und die entsprechenden Coefficienten t und r werden

$$t = \frac{3mn}{mn + m + n}$$

$$r = \frac{2n}{n+1}$$

§. 115.

Fortsetzung; Flächennormale.

Aufgabe. Die Richtung und Grösse der Normale aus dem Mittelpuncte auf eine Fläche F von mOn zu finden.

Es seyen die fingirten Gleichungen der Normale

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 0 \qquad \frac{z}{\gamma} + \frac{x}{\delta} = 0$$

so folgt aus der Bedingung ihrer Rechtwinkligkeit auf die Fläche F, deren Gleichung aus dem vorigen §. bekannt ist:

$$\alpha : \beta = n : -m$$
$$\gamma : \delta = m : -1$$

und sind daher die wirklichen Gleichungen

$$\frac{x}{n} - \frac{y}{m} = 0 \qquad \frac{z}{m} - x = 0$$

durch welche die Richtung der Normale gefunden ist.

Aus der Combination dieser Gleichungen mit jener von F folgt für die Coordinaten des Durchschnittspunctes

$$x = \frac{mn^2}{m^2n^2 + m^2 + n^2} = n\mathrm{P}$$
$$y = m\mathrm{P} \qquad z = mn\mathrm{P}$$

und daher die Centraldistanz dieses Punctes oder die gesuchte Grösse N der Normale

$$N = \frac{mn}{\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}}$$

§. 116.

Fortsetzung; Kantenlinien.

Aufgabe. Die Grösse der dreierlei Kantenlinien des Hexakisoktaëders mOn zu finden.

Die drei Eckpuncte einer Fläche von mOn sind folgende:

1) ein Pol der Hauptaxe, für welchen

$$x = 0 \quad y = 0 \quad z = 1$$

2) ein Pol der rhombischen Zwischenaxe, für welchen

$$x = 0 \quad y = z = \frac{n}{n+1}$$

3) ein Pol der trigonalen Zwischenaxe, für welchen

$$x = y = z = \frac{mn}{mn + m + n}$$

Die längste Kante A liegt zwischen dem ersten und dritten, die mittlere Kante B zwischen dem ersten und zweiten, die kürzeste Kante C zwischen dem zweiten und dritten dieser Puncte. Setzt man also in den allgemeinen Ausdruck für die Distanzlinie zweier Puncte (§. 14.) die Coordinaten der Endpuncte von A, B und C, so folgt

$$A = \frac{\sqrt{2m^2n^2 + (m+n)^2}}{mn + m + n}$$

$$B = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$$

$$C = \frac{n\sqrt{m^2(n+1)^2 + 2n^2}}{(mn+m+n)(n+1}$$

§. 117.

Fortsetzung; Volumen.

Aufgabe. Das Volumen V des Hexakisoktaëders mOn zu finden.

Das Hexakisoktaëder besteht aus 48 dreiseitigen Elementarpyramiden, deren jede eine seiner Flächen F zur Grundfläche und die Normale N zur Höhe hat. Wäre also das Volumen einer solchen Pyramide bekannt, so würde das 48Fache desselben das gesuchte Volumen von mOn seyn. Nun könnten wir allerdings aus den bereits gefundenen Seiten A, B und C jeder Fläche F den Inhalt $\triangle$ derselben, und mittels des gefundenen Inhaltes das Volumen der Elementarpyramide berechnen. Allein wir gelangen weit kürzer zu demselben Ziele, wenn wir die in den Hauptschnitt fallende Fläche der Elementarpyramide als ihre Grundfläche, und folglich eine der Coordinaten des Poles der trigonalen Zwischenaxe als ihre Höhe betrachten. Die zwei aus dem Mittelpuncte auslaufenden Seiten dieser Grundfläche sind 1 und $\frac{n\sqrt{2}}{n+1}$, der von ihnen eingeschlossene Winkel ist 45°, folglich der Inhalt der Grundfläche selbst

$$= \frac{n}{2(n+1)}$$

die Coordinate des Poles einer trigonalen Zwischenaxe, oder die Höhe der Pyramide ist aber

$$= \frac{mn}{mn + m + n}$$

folglich das Volumen v der Elementarpyramide

$$v = \frac{mn^2}{6\,(mn + m + n)\,(n + 1)}$$

und das Volumen V des Hexakisoktaëders

$$V = 48\,v = \frac{8\,mn}{(mn + m + n)\,(n + 1)}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit den oben gefundenen Coefficienten t und r, so sieht man, dass

$$V = \tfrac{4}{3}tr.$$

§. 118.

Fortsetzung; Oberfläche.

Aufgabe. Die Oberfläche S des Hexakisoktaëders mOn zu finden.

Aus dem Inhalte v der Elementarpyramide lässt sich nun leicht der Flächeninhalt $\triangle$ ihrer nach aussen gekehrten Fläche, d. h. einer Fläche des Hexakisoktaëders finden. Es ist nämlich

$$\tfrac{1}{3}\,N\triangle = v$$

und folglich

$$\triangle = \frac{3\,v}{N}$$

Substituirt man die Werthe von N und v, so findet sich

$$\triangle = \frac{n\sqrt{m^2(n^2 + 1) + n^2}}{2\,(mn + m + n)\,(n + 1)}$$

und daher $48\triangle$ oder die Oberfläche S des Hexakisoktaëders

$$S = \frac{24\,n\sqrt{m^2(n^2 + 1) + n^2}}{(mn + m + n)\,(n + 1)}$$

oder auch $S = \dfrac{4\,tr}{N}$

§. 119.

Fortsetzung; Flächenwinkel.

Aufgabe. Die Flächenwinkel des Hexakisoktaëders *mOn* zu finden.

Da im Allgemeinen der Sinus jedes Winkels eines Dreiecks dadurch gefunden wird, dass man den doppelten Flächeninhalt desselben mit den beiden Seiten dieses Winkels dividirt, so folgt, wenn die Winkel ihren respectiven Gegenseiten A, B und C analog mit a, b und c bezeichnet werden,

$$\sin a = \frac{2\triangle}{BC}$$

$$\sin b = \frac{2\triangle}{AC}$$

$$\sin c = \frac{2\triangle}{AB}$$

Substituirt man für A, B, C und $\triangle$ ihre bereits gefundenen Werthe, so erhält man zuvörderst die Sinus, und kann aus diesen, oder, noch kürzer, aus den Gleichungen der Kantenlinien A, B und C, nach der bekannten Formel für den Cosinus des Neigungswinkels zweier Linien im Raume, auf die Cosinus gelangen; so finden sich endlich für die Tangenten, als die im Gebrauche bequemsten Ausdrücke, folgende Werthe:

$$\tang a = \frac{(n+1)\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}}{n(n-1)}$$

$$\tang b = \frac{(mn+m+n)\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}}{n\,[n(m^2-m+1)+m(m+1)]}$$

$$\tang c = \frac{n\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}}{m(n^2+1)+n}$$

§. 120.

Fortsetzung; Kantenwinkel.

Aufgabe. Die Kantenwinkel des Hexakisoktaëders *mOn* zu finden.

Wir lassen den Kanten die bereits für sie gebrauchte Bezeichnung, und setzen wiederum die Gleichung der einen Fläche F

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$$

dann sind die Gleichungen der drei Flächen F', F'' und F''', welche mit der F die drei Kanten A, B und C bilden, folgende:

$$\text{für } F', \quad \frac{x}{n} + \frac{y}{m} + z = 1$$

$$\text{für } F'', \quad \frac{x}{-m} + \frac{y}{n} + z = 1$$

$$\text{für } F''', \quad \frac{x}{m} + y + \frac{z}{n} = 1$$

Setzt man nach einander die Parameter von F und F', F und F'', F und F''' in den aus §. 22. bekannten Ausdruck für den Cosinus des Neigungswinkels zweier Flächen, so folgt:

$$\cos A = -\frac{mn(mn+2)}{m^2(n^2+1)+n^2}$$

$$\cos B = -\frac{m^2(n^2+1)-n^2}{m^2(n^2+1)+n^2}$$

$$\cos C = -\frac{n(2m^2+n)}{m^2(n^2+1)+n^2}$$

Gleichheit zweier dieser Winkel kann möglicherweise nur für A und C Statt finden, weil für $A = B$, oder $B = C$ irrationale Werthe von m oder n eintreten müssten. Die dem Falle $A = C$ entsprechende Bedingungsgleichung für m und n ist

$$n = \frac{2m}{m+1}$$

weshalb von den bekannten Varietäten $\frac{15}{7}O\frac{15}{11}$, $3O\frac{3}{2}$ und $5O\frac{5}{3}$ die Kantenwinkel A und C gleich haben.

Nächst den Kantenwinkeln sind noch besonders diejenigen beiden Winkel wichtig, welche zwei einander gegenüberliegende Flächen eines und desselben ditetragonalen, so wie eines und desselben rhombischen Eckes bilden. Bezeichnen wir den ersteren Winkel mit T, den anderen mit U, so wird

$$cos\, T = -\frac{m^2(n^2-1)-n^2}{m^2(n^2+1)+n^2}$$

$$cos\, U = -\frac{(2m^2-n)n}{m^2(n^2+1)+n^2}$$

Für die halben Kantenwinkel finden sich folgende Werthe der Cosinus, wenn man der Kürze wegen die Grösse $\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}\,\sqrt{2}$ mit M bezeichnet:

$$cos\tfrac{1}{2}A = \frac{m-n}{M}$$

$$cos\tfrac{1}{2}B = \frac{n\sqrt{2}}{M}$$

$$cos\tfrac{1}{2}C = \frac{m(n-1)}{M}$$

woraus die Proportion

$$cos\tfrac{1}{2}A : cos\tfrac{1}{2}B : cos\tfrac{1}{2}C = m-n : n\sqrt{2} : m(n-1)$$

folgt. Endlich findet man

$$tang\tfrac{1}{2}A = \frac{\sqrt{(m+n)^2+2m^2n^2}}{m-n}$$

$$tang\tfrac{1}{2}B = \frac{m\sqrt{n^2+1}}{n}$$

$$tang\tfrac{1}{2}C = \frac{\sqrt{m^2(n+1)^2+2n^2}}{m(n-1)}$$

$$tang\tfrac{1}{2}T = \frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

$$tang\tfrac{1}{2}U = \frac{m(n+1)}{\sqrt{m^2(n-1)^2+2n^2}}$$

§. 121.

Berechnung der Ikositetraëder mOm.

Während die in den vorhergehenden §§. aufgefundenen Formeln für mOn zum Theil etwas verwickelt sind, so vereinfachen sie sich bedeutend für

I. 10

die übrigen Gestalten, in welchen für m und n die Gränzwerthe 1 oder ∞, oder auch das Verhältniss der Gleichheit eintreten.

Man setze zuvörderst in den für mOn berechneten Formeln $n = m$, so verwandeln sie sich in diejenigen Ausdrücke, welche für das Ikosaëder gelten; es werden nämlich:

I. Coëfficienten der Zwischenaxen:

$$t = \frac{3m}{m+2}, \quad r = \frac{2m}{m+1}$$

II. Flächennormale:

$$N = \frac{m}{\sqrt{m^2+2}}$$

III. Kantenlinien:

$$A = \frac{\sqrt{2}\sqrt{m^2+2}}{m+2};$$ diese Linie ist jetzt keine Kantenlinie mehr, wie der untenstehende Werth von $\cos A$ zeigt, sondern die symmetrische Diagonale der Deltoide; die gleichschenklige Diagonale wird $= \frac{m\sqrt{2}}{m+1}$, also = der rhombischen Zwischenaxe, und die symmetrische Diagonale ist $> = <$ als die gleichschenklige, je nachdem $m < = > \sqrt{2}$.

$$B = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m+1}$$

$$C = \frac{m\sqrt{m^2+2m+3}}{(m+2)(m+1)}$$

da B nothwendig immer $> C$, so folgt, dass die Kanten der tetragonalen Ecke immer die längeren sind.

IV. Volumen:

$$V = \frac{8m^2}{(m+2)(m+1)}$$

V. Oberfläche:

$$S = \frac{24m\sqrt{m^2+2}}{(m+2)(m+1)}$$

VI. Flächenwinkel:

$$tang\, a = \frac{(m+1)\sqrt{m^2+2}}{m-1}$$

$$tang\, b = \frac{m+2}{\sqrt{m^2+2}} \text{ und } tang\, 2b = -\frac{(m+2)\sqrt{m^2+2}}{2m+1}$$

$$tang\, c = \frac{m}{\sqrt{m^2+2}} \text{ und } tang\, 2c = m\sqrt{m^2+2}$$

Weil nämlich je zwei in einer längsten Kante zusammenstossende Flächen von mOn jetzt in eine Ebene fallen, so bilden auch $2b$ und $2c$, jene den stumpfen, diese den spitzen Winkel an der symmetrischen Diagonale. Die Winkel a und $2c$ sind natürlich immer $< 90°$; sie werden gleich, wenn $m = 1 + \sqrt{2}$, und überhaupt ist $a >=< 2c$, je nachdem $m <=> 1 + \sqrt{2}$.

VII. Kantenwinkel:

$cos\, A = -1$, die Kante A verschwindet also.

$$cos\, B = -\frac{m^2}{m^2+2};\quad tang\, \frac{B}{2} = \sqrt{m^2+1}$$

$$cos\, C = -\frac{2m+1}{m^2+2}$$

Wiederum wird $B = C$, wenn $m = 1 + \sqrt{2}$, und überhaupt ist Winkel $B >=<$ Winkel C, je nachdem $m >=< 1 + \sqrt{2}$.

§. 122.

Berechnung der Triakisoktaëder mO.

Man setze in den für mOn berechneten Formeln $n = 1$, so erhält man die analogen Ausdrücke für mO, wie folgt:

I. Coëfficienten der Zwischenaxen:

$$t = \frac{3m}{2m+1};\quad r = 1$$

II. Flächennormale:

$$N = \frac{m}{\sqrt{2m^2+1}}$$

III. Kantenlinien:

$$A = \frac{\sqrt{3m^2 + 2m + 1}}{2m + 1}$$

$$2B = \sqrt{2}$$

$C = \dfrac{\sqrt{2m^2 + 1}}{(2m + 1)\sqrt{2}}$; diese Linie ist jetzt keine Kantenlinie mehr, sondern nur die Höhenlinie der Flächen des Triakisoktaëders, wie diess auch aus dem untenstehenden Werthe von $\cos C$ folgt.

IV. Volumen:

$$V = \frac{4m}{2m + 1}$$

V. Oberfläche:

$$S = \frac{12\sqrt{2m^2 + 1}}{2m + 1}$$

VI. Flächenwinkel:

$\tang a = \infty$, also $a = 90°$.

$\tang b = \dfrac{2m + 1}{\sqrt{2m^2 + 1}}$ u. $\tang 2b = -\dfrac{(2m + 1)\sqrt{2m^2 + 1}}{m(m + 2)}$

$$\tang c = \frac{\sqrt{2m^2 + 1}}{2m + 1}$$

Weil nämlich je zwei in einer kürzesten Kante C zusammenstossende Flächen von mOn in eine Ebene fallen, so wird der stumpfe Scheitelwinkel der Flächen von mO durch zwei Winkel b gebildet.

VII. Kantenwinkel:

$$\cos A = -\frac{m(m + 2)}{2m^2 + 1}$$

$\cos B = -\dfrac{2m^2 - 1}{2m^2 + 1}$; $\tang \dfrac{B}{2} = m\sqrt{2}$

$\cos C = -1$, also verschwindet diese Kante. Uebrigens kann niemals $A = B$ werden, weil für diese Gleichheit der irrationale Werth $m =$

$1 + \sqrt{2}$ gefordert würde; wie denn überhaupt $A > = < B$, je nachdem $m < = > 1 + \sqrt{2}$ ist.

§. 123.

Berechnung der Tetrakishexaëder ∞On.

Setzt man in den Formeln für das Hexakisoktaëder $m = \infty$, so erhält man die zur Berechnung des Tetrakishexaëders dienlichen Ausdrücke wie folgt:

I. Coëfficienten der Zwischenaxen:

$$t = \frac{3n}{n+1};\quad r = \frac{2n}{n+1}$$

II. Flächennormale:

$$N = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

III. Kantenlinien:

$$A = \frac{\sqrt{2n^2+1}}{n+1}$$

$B = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$; diese Linie ist jetzt keine Kantenlinie, sondern die Höhenlinie der Flächen von ∞On.

$2C = \dfrac{2n}{n+1}$; da nämlich je zwei in einer mittleren Kante von mOn zusammenstossende Flächen in eine Ebene fallen, so bilden nun zwei der ehemals kürzesten Kanten die längere Kante von ∞On.

IV. Volumen:

$$V = \frac{8n^2}{(n+1)^2}$$

V. Oberfläche:

$$S = \frac{24n\sqrt{n^2+1}}{(n+1)^2}$$

VI. Flächenwinkel:

$tang\, a = \infty$, also $2a = 180°$

$$tang\, b = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$$

$$tang\, c = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \text{ und } tang\, 2c = 2n\sqrt{n^2+1}$$

es contribuiren, nämlich zwei ebene Winkel c zur Darstellung des stumpfen Winkels der Flächen von $\infty O n$.

VII. Kantenwinkel:

$$cos\, A = -\frac{n}{n^2+1}$$

$cos\, B = -1$, also verschwindet diese Kante.

$$cos\, C = -\frac{2n}{n^2+1};\ tang\, \frac{C}{2} = \frac{n+1}{n-1}$$

Aus diesen Werthen folgt, dass $A = C$, wenn $n = 2$, so dass $\infty O 2$ die einzige Varietät ist, in welcher beide Kanten gleichgross sind.

§. 124.

Berechnung des Rhombendodekaëders ∞O.

Die Ausdrücke für das Rhombendodekaëder finden sich aus jenen für das Tetrakishexaëder, indem man $n = 1$ setzt, wie folgt:

I. Coëfficienten der Zwischenaxen:

$$t = \tfrac{3}{2};\ r = 1$$

II. Flächennormale:

$$N = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

III. Kantenlinien:

$A = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$2B = \sqrt{2}$ und $2C = 1$; die beiden Kanten B und C sind nicht mehr vorhanden; die ihnen entsprechenden Kantenlinien bilden die halben Diagonalen der Flächen des Dodekaëders.

IV. Volumen:

$$V = 2$$

V. Oberfläche:

$$S = 6\sqrt{2} = \sqrt{72}$$

VI. Flächenwinkel:

$tang\, a = \infty$, also $a = 90°$

$tang\, b = \sqrt{2}$, und $tang\, 2b = -\sqrt{8}$

$tang\, c = \sqrt{\frac{1}{2}}$, und $tang\, 2c = \sqrt{8}$

Indem je vier Flächen eines rhombischen Eckes von mOn in eine Fläche fallen, bilden zwei Winkel c den spitzen, und zwei Winkel b den stumpfen Winkel der Flächen von ∞O

VII. Kantenwinkel:

$cos\, A = -\frac{1}{2}$, daher $A = 120°$ und $tang\, \frac{A}{2} = \sqrt{3}$;

$cos\, B = cos\, C = -1$; je vier um ein rhombisches Eck von mOn versammelte Flächen fallen also in eine einzige Ebene.

§. 125.

Berechnung des Oktaëders O.

Die Ausdrücke für O finden sich aus jenen für mOm oder mO, indem man $m = 1$ setzt, wie folgt:

I. Coëfficienten der Zwischenaxen:

$t = 1,\ r = 1$

II. Flächennormale:

$N = \sqrt{\frac{1}{3}}$

III. Kantenlinien:

$A = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $2B = \sqrt{2}$, $C = \sqrt{\frac{1}{6}}$; die Kantenlinien des Oktaëders sind nämlich $= 2B$; $A + C$ ist die Höhenlinie der Flächen.

IV. Volumen:

$V = \frac{4}{3}$

V. Oberfläche:

$S = \sqrt{48}$

VI. Flächenwinkel:

$tang\, a = \infty$; $tang\, b = \sqrt{3}$; diese beiden Winkel erscheinen nicht mehr unmittelbar; die Flächenwinkel sind $= 2c$, und $tang\, 2c = \sqrt{3}$, weil $tang\, c = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

VII. Kantenwinkel:

$\cos A = \cos C = -1$; also fallen je sechs Flächen eines ditrigonalen Eckes von mOn in eine Ebene.

$\cos B = -\frac{1}{3}$, also $B = 109° \, 28' \, 16''$, und $\tang \frac{B}{2} = \sqrt{2}$

§. 126.

Berechnung des Hexaëders $\infty O \infty$.

Die Ausdrücke für $\infty O \infty$ finden sich aus jenen für mOm oder ∞On, indem man m oder $n = \infty$ setzt, wie folgt:

I. Coëfficienten der Zwischenaxen:

$$t = 3, \quad r = 2$$

II. Flächennormale:

$$N = 1$$

III. Kantenlinien:

$2A = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$, die Flächendiagonalen
$2B = 2C = 2$ die Kantenlinien.

IV. Volumen:

$$V = 8$$

V. Oberfläche:

$$S = 24$$

VI. Flächenwinkel:

$\tang a = \infty$; $\tang b = \tang c = 1$; die Flächenwinkel sind $= 2b = 90°$, weil $\tang 2b = \infty$.

VII. Kantenwinkel:

$\cos A = \cos B = -1$; also fallen je acht Flächen eines ditetragonalen Eckes von mOn in eine Ebene.

$\cos C = 0$, also $C = 90°$, und $\tang \frac{C}{2} = 1$

§. 127.

Werthe von t und r in den wichtigsten der bekannten Gestalten.

Da die Kenntniss der Kantenwinkel und der Coëfficienten der Zwischenaxen *in praxi* von ganz besonderer Wichtigkeit ist, so schien es mir zweckmässig, in diesem und dem folgenden §. die berechneten Werthe derselben für die wichtigsten Varietäten der Gestalten in ihrer holoëdrischen Erscheinungsweise mitzutheilen *).

Coëfficienten der Zwischenaxen.

Gestalt.	t	r
O	1	1
$\frac{3}{2}$O	$\frac{9}{8}$	1
2O	$\frac{6}{5}$	1
3O	$\frac{9}{7}$	1
∞O	$\frac{3}{2}$	1
2O$\frac{4}{3}$?	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{7}$
$\frac{15}{7}$O$\frac{15}{11}$	$\frac{45}{33}$	$\frac{15}{13}$
3O$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$
$\frac{11}{3}$O$\frac{11}{5}$	$\frac{33}{19}$	$\frac{11}{8}$
4O2	$\frac{12}{7}$	$\frac{4}{3}$
5O$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$
7O$\frac{7}{3}$	$\frac{21}{11}$	$\frac{7}{5}$
8O4	$\frac{24}{11}$	$\frac{8}{5}$
$\frac{3}{2}$O$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{6}{5}$
2O2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$
$\frac{8}{3}$O$\frac{8}{3}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{16}{11}$
3O3	$\frac{9}{5}$	$\frac{3}{2}$
4O4	2	$\frac{8}{5}$
6O6	$\frac{9}{4}$	$\frac{12}{7}$
12O12	$\frac{18}{7}$	$\frac{24}{13}$
40O40	$\frac{20}{7}$	$\frac{80}{41}$
∞O$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{10}{9}$
∞O$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{6}{5}$
∞O2	2	$\frac{4}{3}$
∞O3	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$
∞O$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{14}{9}$
∞O4	$\frac{12}{5}$	$\frac{8}{5}$
∞O∞	3	2

*) Unter den Hexakisoktaëdern habe ich hypothetisch 2O$\frac{4}{3}$ mit aufgeführt, da es wohl möglich ist, dass die von Phillips am Kobaltkies beobachtete Varietät diese und nicht $\frac{15}{7}$O$\frac{15}{11}$ sey.

§. 128.

Kantenwinkel der wichtigsten Gestalten in ihrer holoëdrischen Erscheinungsweise *).

Gestalt.	$\cos A$	$\cos B$	$\cos C$	Winkel A	Winkel B	Winkel C
O	1	$\frac{1}{3}$	1	—	109°28′16″	—
$\frac{3}{2}O$	$\frac{21}{22}$	$\frac{14}{22}$	1	162°39′30″	129°31′19″	—
$2O$	$\frac{8}{9}$	$\frac{7}{9}$	1	152 44 2	141 3 27	—
$3O$	$\frac{15}{19}$	$\frac{17}{19}$	1	142 8 11	153 28 29	—
∞O	$\frac{1}{2}$	1	1	120° 0′ 0″	—	—
$2O\frac{4}{3}$?	$\frac{28}{29}$	$\frac{21}{29}$	$\frac{28}{29}$	164°54′35″	136°23′50″	164°54′35″
$\frac{15}{7}O\frac{5}{11}$	$\frac{379}{395}$	$\frac{297}{395}$	$\frac{379}{395}$	163 38 11	138 45 18	163 38 11
$3O\frac{3}{2}$	$\frac{13}{14}$	$\frac{12}{14}$	$\frac{13}{14}$	158 12 48	148 59 50	158 12 48
$\frac{11}{3}O\frac{11}{5}$	$\frac{151}{155}$	$\frac{137}{155}$	$\frac{119}{155}$	166 57 18	152 6 47	140 9 7
$4O2$	$\frac{20}{21}$	$\frac{19}{21}$	$\frac{17}{21}$	162 14 50	154 47 28	144 2 58
$5O\frac{5}{3}$	$\frac{31}{35}$	$\frac{33}{35}$	$\frac{31}{35}$	152 20 22	160 32 13	152 20 22
$7O\frac{7}{3}$	$\frac{55}{59}$	$\frac{57}{59}$	$\frac{43}{59}$	158 46 49	165 2 20	136 47 15
$8O4$	$\frac{68}{69}$	$\frac{67}{69}$	$\frac{33}{69}$	170 14 0	166 10 17	118 34 19
$\frac{3}{2}O\frac{3}{2}$	1	$\frac{9}{17}$	$\frac{16}{17}$	—	121°57′56″	160°15′ 0″
$2O2$	1	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	—	131 48 37	146 26 34
$\frac{8}{3}O\frac{8}{3}$	1	$\frac{64}{82}$	$\frac{57}{82}$	—	141 18 19	134 2 13
$3O3$	1	$\frac{9}{11}$	$\frac{7}{11}$	—	144 54 12	129 31 16
$4O4$	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{2}$	—	152 44 2	120 0 0
$6O6$	1	$\frac{36}{38}$	$\frac{13}{38}$	—	161 19 42	110 0 19
$12O12$	1	$\frac{144}{146}$	$\frac{25}{146}$	—	170 30 20	99 51 34
$40O40$	1	$\frac{1600}{1602}$	$\frac{81}{1602}$	—	177 8 13	92 53 53
$\infty O\frac{5}{4}$	$\frac{25}{41}$	1	$\frac{40}{41}$	127°34′19″	—	167°19′11″
$\infty O\frac{3}{2}$	$\frac{9}{13}$	1	$\frac{12}{13}$	133 48 47	—	157 22 48
$\infty O2$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{4}{5}$	143 7 48	—	143 7 48
$\infty O3$	$\frac{9}{10}$	1	$\frac{6}{10}$	154 9 29	—	126 52 12
$\infty O\frac{7}{2}$	$\frac{49}{53}$	1	$\frac{28}{53}$	157 35 50	—	121 53 27
$\infty O4$	$\frac{16}{17}$	1	$\frac{8}{17}$	160 15 0	—	118 4 21
$\infty O\infty$	1	1	0	—	—	90° 0′ 0″

§. 129.

Berechnung von mO, ∞On und $mO\frac{m}{m-1}$ in Bezug auf ihre eingeschriebenen Gestalten.

Das Triakisoktaëder mO lässt sich als ein pyra-

*) Da die Cosinus sämmtlich negativ sind, so ist zur Ersparung des Raumes das Zeichen — weggelassen worden.

midentragendes Oktaëder, das Tetrakishexaëder ∞On als ein pyramidentragendes Hexaëder, und jedes Hexakisoktaëder von der Form $mO\frac{m}{m-1}$ als ein pyramidentragendes Rhombendodekaëder betrachten. Es ist in mehrfacher Hinsicht der Mühe werth, die Verhältnisse dieser Gestalten zu ihren eingeschriebenen Gestalten kennen zu lernen, mit welchen sie in ihrem Totalhabitus so auffallend übereinstimmen. Besonders wichtig aber sind die drei Fragen nach der Höhe, nach der Grundkante und nach dem Volumen der einfachen Pyramiden, welche wir uns auf die Flächen der eingeschriebenen Gestalt aufgesetzt denken müssen, um den entsprechenden 24Flächner oder 48-Flächner zu erhalten. Wir wollen daher die Antworten auf diese Fragen für die drei erwähnten Gestalten aufsuchen.

1) Triakisoktaëder mO.

Die Höhe h der auf das eingeschriebene Oktaëder aufgesetzten einfachen Pyramiden ist offenbar die Differenz der halben trigonalen Zwischenaxen von mO und O, also

$$h = \frac{m-1}{(2m+1)\sqrt{3}}$$

Drückt man aber diese Höhe als Multiplum der trigonalen Zwischenaxe des Oktaëders aus, so wird der entsprechende Coëfficient

$$\sigma = \frac{m-1}{2m+1}$$

Da die Höhenlinien jeder Oktaëderfläche durch die trigonale Zwischenaxe in zwei Theile getheilt werden, von welchen der kleinere $= \sqrt{\frac{1}{6}}$ (§. 125, III.), so wird für den Kantenwinkel ε an der Grundfläche jeder aufgesetzten Pyramide

$$tang\,\varepsilon = \frac{(m-1)\sqrt{2}}{2m+1}$$

Das Volumen φ der Pyramide ist endlich das Product aus der Oktaëderfläche in den dritten Theil von h, folglich

$$\varphi = \frac{m-1}{6(2m+1)}$$

2) Das Tetrakishexaëder ∞On.

Die Höhe h der auf die Flächen des eingeschriebenen Hexaëders gesetzten einfachen Pyramiden ist die Differenz der halben Hauptaxen von ∞On und von dem demselben eingeschriebenen Hexaëder. Nun ist die halbe Hauptaxe von ∞On jedenfalls $= 1$; die halbe Hauptaxe des eingeschriebenen Hexaëders aber $= \frac{n}{n+1}$, also wird die gesuchte Höhe

$$h = \frac{1}{n+1}$$

Wollen wir daher aus dem Hexaëder die Gestalt ∞On ableiten, indem wir seine Hauptaxen vergrössern, so beträgt die nöthige Vergrösserung genau $\frac{1}{n}$ der Hexaëderaxen.

Hieraus folgt sogleich für den Kantenwinkel an der Grundfläche der Pyramide

$$tang\,\varepsilon = \frac{1}{n}$$

Das Volumen endlich ist das Product aus dem dritten Theile der Höhe in die Grundfläche, welche letztere die Oberfläche des eingeschriebenen Hexaëders ist; also wird

$$\varphi = \frac{4n^2}{3(n+1)^3}$$

3) Das Hexakisoktaëder $mO\frac{m}{m-1}$ oder $\frac{n}{n-1}On$.

Die Höhe h der auf jede Fläche des eingeschriebenen Rhombendodekaëders gesetzten einfachen Pyramide ist offenbar die Differenz der halben rhombischen Zwischenaxen beider Gestalten; also

$$h = \frac{n-1}{(n+1)\sqrt{2}}$$

und drückt man diese Höhe als Multiplum der Zwischenaxe von ∞O aus, so wird der entsprechende Coëfficient

$$\varrho = \frac{n-1}{n+1} \text{ oder } = \frac{1}{2m-1}$$

Da ferner das Perpendikel aus dem Mittelpuncte jeder Dodekaëderfläche auf eine der Seiten $= \sqrt{\frac{1}{6}}$, so wird die Tangente des Kantenwinkels ε an der Grundfläche der aufgesetzten Pyramide

$$tang\,\varepsilon = \frac{(n-1)\sqrt{3}}{n+1} \text{ oder } = \frac{\sqrt{3}}{2m-1}$$

Endlich ist das Volumen gleich dem Producte aus dem Flächeninhalt der Dodekaëderfläche in den dritten Theil von h, also

$$\varphi = \frac{n-1}{6(n+1)} = \frac{1}{6(2m-1)}$$

2) *Berechnung der geneigtflächig-hemiëdrischen Gestalten.*

§. 130.

Berechnung des Hexakistetraëders $\frac{mOn}{2}$; Zwischenaxen.

Das Hexakistetraëder, als der allgemeine Repräsentant aller geneigtflächig-semitesseralen Gestalten, ist allen Berechnungen derselben zu Grunde zu legen. Die Hauptaxen und rhombischen Zwischenaxen erleiden keine Veränderung; allein die trigonalen Zwischenaxen zerfallen in sämmtlichen geneigtflächig-semitesseralen Gestalten in zwei ungleichwerthige Hälften, indem die eine Halbaxe die ursprüngliche Grösse wie in der holoëdrischen Muttergestalt behauptet, während die andre einen grösseren, von der Vergrösserung der abwechselnden Flächensysteme abhängigen Werth erhält. Wir nennen jene die holoëdrische, diese die hemiëdrische trigonale Halbaxe.

Aufgabe. Die Grösse der hemiëdrischen trigonalen Halbaxe im Hexakistetraëder $\frac{mOn}{2}$ zu finden.

Man braucht zu dem Ende nur die Gleichung einer Fläche F' des Hexakistetraëders mit den Gleichungen der im Nebenoctanten gelegenen trigonalen Halbaxe zu combiniren. Es ist aber die Gleichung von F' wie oben

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$$

und es sind die Gleichungen der erwähnten Halbaxe

$$y - z = 0$$
$$x + z = 0$$
$$x + y = 0$$

Aus ihrer Combination resultiren die Coordinaten des Durchschnittspunctes, wie in §. 107.

$$x = y = z = \frac{mn}{mn + m - n}$$

und daher die gesuchte Grösse T' der hemiëdrischen Halbaxe

$$T' = \frac{mn\sqrt{3}}{mn + m - n}$$

Will man T', als Multiplum von $\sqrt{\tfrac{1}{3}}$, als der trigonalen Halbaxe des Oktaëders ausdrücken, so wird der Coëfficient τ der Vervielfachung

$$\tau = \frac{3mn}{mn + m - n}$$

§. 131.

Fortsetzung; Kantenlinien.

Aufgabe. Die Grösse der Kantenlinien des Hexakistetraëders zu finden.

Die längsten Kanten A des Hexakisoktaëders bilden in unveränderter Länge die kürzesten Kanten des Hexakistetraëders, während sich die kürzesten Kanten C der Muttergestalt zu den längsten Kanten der abgeleiteten Gestalt ausgedehnt, ihre mittleren Kanten B aber gänzlich verloren haben. Statt ihrer sind eine neue Art von mittleren Kanten zum Vorscheine gekommen, welche man auch füglich die **charakteristischen** Kanten dieser semitesseralen Gestalt nennen kann. Bezeichnen wir die kürzesten, mittleren und längsten Kanten des Hexakistetraëders mit A', B' und C', und combiniren wir für die beiden letzteren die Coordinaten ihrer respectiven Endpuncte nach der bekannten Formel für die Distanzlinie zweier Puncte, so folgt

$$A' = \frac{\sqrt{2m^2n^2 + (m+n)^2}}{mn + m + n} = A$$

$$B' = \frac{\sqrt{2m^2n^2 + (m-n)^2}}{mn + m - n}$$

$$C' = \frac{2mn\sqrt{m^2(n+1)^2 + 2n^2}}{(mn+m)^2 - n^2}$$

§. 132.

Fortsetzung; Volumen.

Aufgabe. Das Volumen V' des Hexakistetraëders zu finden.

Das Hexakistetraëder besteht aus 24 dreiseitigen Elementarpyramiden, deren jede eine der Flächen F' zur Grundfläche, und die Flächennormale N zur Höhe hat. Wir können uns aber auch dieselbe Pyramide aus zwei Theilpyramiden zusammengesetzt denken, wenn wir durch die zu ihr gehörige Hauptaxe die Ebene des Hauptschnittes legen. Betrachten wir dann den innerhalb der Elementarpyramide fallenden Theil des Hauptschnittes als die gemeinschaftliche Grundfläche beider Theilpyramiden, so ist die eine derselben identisch mit der bereits berechneten Elementarpyramide des Hexakisoktaëders mOn, die andre eine Pyramide, deren Grundfläche dieselbe, also $= \frac{n}{2(n+1)}$, deren Höhe aber eine der Coordinaten des Poles der **hemiëdrischen** trigonalen Halbaxe, also:

$$= \frac{mn}{mn + m - n}$$

ihr Inhalt wird daher:

$$= \frac{mn^2}{6(mn + m - n)(n + 1)}$$

und der Inhalt v' der ganzen Elementarpyramide:

$$v' = \frac{m^2 n^2}{3[m^2(n+1)^2 - n^2]}$$

Da nun das Volumen V' des ganzen Hexakistetraëders $= 24v'$, so folgt endlich:

$$V' = \frac{8m^2n^2}{m^2(n+1)^2 - n^2}$$

Drückt man V' als Function von t und τ oder auch als Function von V aus, so erhält man:

$$V' = \frac{8}{9}\, t\tau = \frac{m(n+1)}{m(n+1) - n}\, V$$

§. 133.

Fortsetzung; Oberfläche.

Aufgabe. Die Oberfläche S' des Hexakistetraëders zu finden.

Aus dem Volumen v' der Elementarpyramide lässt sich nun leicht der Flächeninhalt $\triangle'$ ihrer nach aussen gekehrten Fläche, d. h. einer Fläche des Hexakistetraëders finden. Denn es ist:

$$\tfrac{1}{3} N\triangle' = v'$$

und folglich

$$\triangle' = \frac{3v'}{N}$$

Durch Substitution der Werthe von N und v' wird

$$\triangle' = \frac{mn\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}}{m^2(n+1)^2-n^2}$$

und daher $24\triangle'$ oder die Oberfläche S' des ganzen Hexakistetraëders:

$$\begin{aligned} S' &= \frac{24\,mn\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}}{m^2(n+1)^2-n^2} \\ &= \frac{m(n+1)}{m(n+1)-n}\,S \\ &= \frac{8\,t\tau}{3\,N} \end{aligned}$$

§. 134.

Fortsetzung; Flächenwinkel.

Aufgabe. Die Flächenwinkel des Hexakistetraëders zu finden.

Da der eine Winkel b' noch aus der Muttergestalt rückständig ist, so haben wir nur die beiden Winkel a' und c', welche von den Seiten B', C' und A', B' eingeschlossen werden, zu berechnen; es ist aber wiederum

$$\sin a' = \frac{2\triangle'}{B'C'}$$

$$\sin c' = \frac{2\triangle'}{A'B'}$$

Man findet also die Sinus, und kann entweder aus diesen, oder aus den Gleichungen der Kantenlinien die Cosinus bestimmen, worauf denn endlich für die Tangenten, als die im Gebrauche bequemsten Functionen, folgende Werthe erhalten werden:

$$\tang a' = \frac{(mn+m-n)\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}}{n[n(m^2+m+1)+m(m-1)]}$$

$$\tang b' = \tang b$$

$$\tang c' = \frac{2\,mn\sqrt{m^2(n^2+1)+n}}{(m+n)(m-n)}$$

§. 135.

Fortsetzung; Kantenwinkel.

Aufgabe. Die Kantenwinkel des Hexakistetraëders zu finden.

Da die kürzesten und längsten Kanten A' und C des Hexakistetraëders bereits berechnet wurden, indem diese nur die verlängerte Kante C, jene die auch der Länge nach unveränderte Kante A des Hexakisoktaëders ist, so bleibt uns nur der Winkel der charakteristischen Kante B' zu berechnen übrig. Setzen wir die Gleichung der *einen*, zu dieser Kante contribuirenden Fläche F

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$$

so wird die Gleichung der andern Fläche F'

$$\frac{x}{-n} + \frac{y}{-m} + z = 1$$

und substituirt man die Parameter beider Flächen in den allgemeinen Ausdruck für den Cosinus, so folgt

$$\cos B' = -\frac{mn\,(mn-2)}{m^2\,(n^2+1)+n^2}$$

während $\cos A' = \cos A$

$\cos C' = \cos C$

Wenn $n = \dfrac{2m}{m-1}$, so wird $B' = C'$.

§. 136.

Berechnung der Trigondodekaëder.

Setzt man in den für das Hexakistetraëder berechneten Formeln $n = m$, so erhält man die zur Berechnung des Trigondodekaëders dienenden Ausdrücke, wie folgt:

I. Coëfficient der hemiëdrischen Zwischenaxe:

$$\tau = 3$$

II. Kantenlinien:

$A' = \frac{\sqrt{2}\sqrt{m^2+2}}{m+2} = A$ in §. 121; diese Linie ist jedoch keine Kantenlinie mehr, sondern nur die Höhenlinie der gleichschenkligen Dreiecke des Trigondodekaëders.

$2B' = 2\sqrt{2}$; es fallen nämlich je zwei Kanten B' in eine gerade Linie, und bilden die regelmässigen Kanten des Trigondodekaëders.

$C' = \frac{2\sqrt{m^2+2m+3}}{m+2}$

III. Volumen:

$$V' = \frac{8m}{m+2}$$

IV. Oberfläche:

$$S' = \frac{24\sqrt{m^2+2}}{m+2}$$

V. Flächenwinkel:

$tang\, a' = \frac{\sqrt{m^2+2}}{m+2}$

$tang\, b' = tang\, b$ in §. 121; der Scheitelwinkel der Flächen ist aber $= 2b'$, und daher seine Tangente, $tang\, 2b' = -\frac{(m+2)\sqrt{m^2+2}}{2m+1}$ wie a. a. O.

$tang\, c' = \infty$, also $c' = 90°$; natürlich, da je zwei Kanten B' in eine grade Linie fallen.

VI. Kantenwinkel:

$cos\, A' = cos\, A$ in §. 121. $= -1$, also $A' = 180°$.

$cos\, B' = -\frac{m^2-2}{m^2+2}$

$cos\, C' = -\frac{2m+1}{m^2+2} = cos\, C$ in §. 121.

Für $m = 3$ wird $B' = C'$.

§. 137.

Berechnung des Deltoiddodekaëders.

Setzt man in den für das Hexakistetraëder berechneten Formeln $n = 1$, so gelangt man auf die zur Berechnung des Deltoiddodekaëders dienlichen Ausdrücke wie folgt:

I. Coëfficient der hemiëdrischen Halbaxe:

$$\tau = \frac{3m}{2m - 1}$$

II. Kantenlinien:

$$A' = \frac{\sqrt{3m^2 + 2m + 1}}{2m + 1} = A \text{ in §. 122.}$$

$$B' = \frac{\sqrt{3m^2 - 2m + 1}}{2m - 1}$$

$$C' = \frac{2m\sqrt{4m^2 + 2}}{4m^2 - 1};$$ diese Linie ist jedoch keine Kantenlinie mehr, sondern die symmetrische Diagonale der Deltoide, indem je zwei in einer Kante C' zusammenstossende Flächen in eine Ebene fallen, wenn $\frac{mOn}{2}$ in $\frac{mO}{2}$ übergeht.

III. Volumen:

$$V' = \frac{8m^2}{4m^2 - 1}$$

IV. Oberfläche:

$$S' = \frac{24m\sqrt{2m^2 + 1}}{4m^2 - 1}$$

V. Flächenwinkel:

$$tang\, a' = \frac{2m - 1}{\sqrt{2m^2 + 1}} \text{ und } tang\, 2a' = \frac{(2m - 1)\sqrt{2m^2 + 1}}{m(2 - m)}$$

$$tang\, b' = \frac{2m + 1}{\sqrt{2m^2 + 1}} \text{ u. } tang\, 2b' = -\frac{(2m + 1)\sqrt{2m^2 + 1}}{m(2 + m)}$$

$$tang\, c' = \frac{2m\sqrt{2m^2 + 1}}{m^2 - 1}$$

Weil nämlich je zwei in der Kante C' zusammenstossende Flächen in eine Ebene fallen, so werden $2a'$ und $2b'$ die an der symmetrischen Diagonale liegenden ebenen Winkel; zugleich ersieht man aus dem Werthe von $tang\, 2a'$, dass $2a' >=< 90°$, je nachdem $m >=< 2$.

VI. Kantenwinkel:

$$\cos A' = -\frac{m(m+2)}{2m^2+1} = \cos A \text{ in §. 122.}$$

$$\cos B' = -\frac{m(m-2)}{2m^2+1}$$

$$\cos C' = -1, \text{ also } C' = 180°.$$

§. 138.

Berechnung des Tetraëders.

Setzt man in den Formeln für das Hexakistetraëder $m = n = 1$, oder in jenen für das Trigondodekaëder, oder das Deltoiddodekaëder $m = 1$, so erhält man die Formeln für das Tetraëder wie folgt:

I. Coëfficient der hemiëdrischen Halbaxe:

$$\tau = 3$$

II. Kantenlinien:

$A' = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$, $2B' = 2\sqrt{2}$, $C' = 2\sqrt{\tfrac{2}{3}}$; die Linien A' und C' sind jedoch keine Kantenlinien mehr, sondern ihre Summe $A' + C' = \sqrt{6}$ bildet die Höhenlinie der Tetraëderflächen, während $2B'$ die Kantenlinie des Tetraëders ist.

III. Volumen:

$$V' = \tfrac{8}{3}$$

IV. Oberfläche:

$$S' = 24\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

V. Flächenwinkel:

$tang\, 2a' = \sqrt{3}$, also $2a' = 60°$ der ebene Winkel der Tetraëderflächen; $tang\, b'$ ist gleichfalls $= \sqrt{3}$, weil aber sechs Winkel b' um denselben

Punct liegen, so fallen sie in e i n e Ebene; $tang\, c' = \infty$, also $c' = 90°$.

VI. Kantenwinkel:

$\cos A' = -1$, $\cos B' = \frac{1}{3}$, $\cos C' = -1$; die beiden Kanten A' und C' verschwinden, und die Kante B' ist $= 70° \; 31' \; 44''$.

§. 139.

Werthe von t und τ für die bekanntesten Gestalten in ihrer geneigtflächig-hemiëdrischen Erscheinungsweise.

Es folgen nun in diesem und dem nächsten §. die berechneten Werthe der Coëfficienten t und τ sowohl, als der Kantenwinkel der meisten bekannten Gestalten, sofern sie geneigtflächig-hemiëdrisch auftreten.

Coëfficienten der trigonalen Zwischenaxen.

Gestalt.	t	τ
O	1	3
$\frac{3}{2}$O	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{4}$
2O	$\frac{6}{5}$	2
3O	$\frac{9}{7}$	$\frac{9}{5}$
2O$\frac{4}{3}$?	$\frac{4}{3}$	$\frac{12}{5}$
$\frac{15}{7}$O$\frac{15}{11}$	$\frac{45}{33}$	$\frac{45}{19}$
3O$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
$\frac{11}{3}$O$\frac{11}{5}$	$\frac{33}{19}$	$\frac{33}{13}$
4O2	$\frac{12}{7}$	$\frac{12}{5}$
5O$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{7}$
7O$\frac{7}{3}$	$\frac{21}{11}$	$\frac{7}{3}$
8O4	$\frac{24}{11}$	$\frac{8}{3}$
$\frac{3}{2}$O$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{7}$	3
2O2	$\frac{3}{2}$	3
$\frac{8}{3}$O$\frac{8}{3}$	$\frac{12}{7}$	3
3O3	$\frac{9}{5}$	3
4O4	2	3
6O6	$\frac{9}{4}$	3
40O40	$\frac{20}{7}$	3

§. 140.

Kantenwinkel der bekannten Gestalten in ihrer geneigtflächig-hemiëdrischen Erscheinungsweise.

Gestalt.	$\cos A'$	$\cos B'$	$\cos C'$	Winkel A'	Winkel B'	Winkel C'
O	1	$+\frac{1}{3}$	1	—	70°31′44″	—
$\frac{3}{2}O$	$\frac{21}{22}$	$+\frac{3}{22}$	1	162°39′30″	82° 9′45″	—
$2O$	$\frac{8}{9}$	0	1	152 44 2	90 0 0	—
$3O$	$\frac{15}{19}$	$\frac{3}{19}$	1	142 8 11	99 5 5	—
$2O\frac{4}{3}$?	$\frac{28}{29}$	$\frac{4}{29}$	$\frac{28}{29}$	164°54′35″	97°55′41″	164°54′35″
$\frac{15}{7}O\frac{15}{11}$	$\frac{379}{395}$	$\frac{71}{395}$	$\frac{379}{395}$	163 38 11	100 21 18	163 38 11
$3O\frac{3}{2}$	$\frac{13}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{13}{14}$	158 12 48	110 55 29	158 12 48
$\frac{11}{3}O\frac{11}{5}$	$\frac{151}{155}$	$\frac{91}{155}$	$\frac{119}{155}$	166 57 18	125 57 5	140 9 7
$4O2$	$\frac{20}{21}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{17}{21}$	162 14 50	124 51 0	144 2 58
$5O\frac{5}{3}$	$\frac{31}{35}$	$\frac{19}{35}$	$\frac{31}{35}$	152 20 22	122 52 42	152 20 22
$7O\frac{7}{3}$	$\frac{55}{59}$	$\frac{43}{59}$	$\frac{43}{59}$	158 46 49	136 47 13	136 47 15
$8O4$	$\frac{68}{69}$	$\frac{60}{69}$	$\frac{33}{69}$	170 14 0	150 24 29	118 34 19
$\frac{3}{2}O\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{17}$	$\frac{16}{17}$	—	93°22′20″	160°15′ 0″
$2O2$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	—	109 28 16	146 26 34
$\frac{8}{3}O\frac{8}{3}$	1	$\frac{46}{82}$	$\frac{57}{82}$	—	124 7 24	134 2 13
$3O3$	1	$\frac{7}{11}$	$\frac{7}{11}$	—	129 31 16	129 31 16
$4O4$	1	[illegible]/9	$\frac{1}{2}$	—	141 3 27	120 0 0
$6O6$	1	$\frac{34}{38}$	$\frac{13}{38}$	—	153 28 29	110 0 19
$40O40$	1	$\frac{1598}{1602}$	$\frac{81}{1602}$	—	175 57 1	92 53 53

3) *Berechnung der parallelflächig-hemiëdrischen Gestalten.*

§. 141.

Berechnung des Dyakisdodekaëders; Coordinaten des unregelmässigen Eckpunctes.

Das Dyakisdodekaëder, als der allgemeine Repräsentant aller parallelflächig-semitesseralen Gestalten ist allen Berechnungen derselben zu Grunde zu legen. Die Zwischenaxen behaupten im Dyakisdodekaëder unverändert die Werthe, welche ihnen im Hexakisoktaëder zukommen; sie bilden daher keinen neuen Gegenstand der Berechnung. Allein eine andre Linie nimmt unsre Aufmerksamkeit in Anspruch, welche zwar wegen ihrer veränderlichen Lage nicht als eine Axe bezeichnet, aber auch eben so wenig übergangen werden kann, da ihre Kenntniss sowohl für die Combinationslehre als für die Zeichnung der parallelflächig-semitesseralen Gestalten von Wichtigkeit ist. Diese Linie ist der aus dem Mittelpuncte nach dem unregelmässigen Eckpuncte gezogene Halbmesser, dessen Endpunct die Lage jenes Eckpunctes bestimmt, und daher durch seine Coordinaten fixirt werden muss.

Aufgabe. Die Coordinaten der unregelmässigen Eckpuncte zu finden.

Da diese Puncte jederzeit in die Ebene eines Hauptschnittes fallen, so sind nur zwei Coordinaten zu berücksichtigen, welche sich leicht daraus finden lassen, dass jeder dergleichen Punct der Durchschnittspunct der kürzesten und längsten Kanten zweier Flächenpaare ist.

Da nun die Gleichungen der genannten Kanten

$$\frac{x}{m} + z = 1$$

$$x + \frac{z}{n} = 1$$

so erhalten wir für die gesuchten Coordinaten des unregelmässigen Eckpunctes wie in §. 109

$$x = \frac{m(n-1)}{mn-1}$$

$$z = \frac{n(m-1)}{mn-1}$$

§. 142.

Fortsetzung; Kantenlinien.

Aufgabe. Die Kantenlinien des Dyakisdodekaëders zu finden.

Da die Flächen der Dyakisdodekaëder gleichschenklige Trapezoide oder auch dergleichen Trapeze sind, so haben wir nur drei ihrer Seiten als die gesuchten Kantenlinien zu berechnen. Wir wollen sie als kürzeste, längste und mittlere Kanten unterscheiden, und mit den Buchstaben A'', B'' und C'' bezeichnen; dann sind die charakteristischen Kanten die mit A'' bezeichneten.

Die Kante A'' wird begränzt von einem rhombischen Eckpuncte, dessen Coordinaten

$$x = 0 \quad y = 0 \quad z = 1$$

und von einem unregelmässigen Eckpuncte, dessen Coordinaten

$$x = \frac{m(n-1)}{mn-1}, \; z = \frac{n(m-1)}{mn-1}, \; y = 0$$

Die Kante B'' wird begränzt von demselben unregelmässigem Eckpuncte und von einem rhombischen Eckpuncte, dessen Coordinaten

$$x = 1 \quad y = 0 \quad z = 0$$

Die Kante C'' endlich wird wiederum von demselben unregelmässigen und einem trigonalen Eckpuncte begränzt, dessen Coordinaten

$$x = y = z = \frac{mn}{mn + m + n}$$

Combinirt man die Coordinaten je zweier Puncte nach der bekannten Regel für die Distanzlinie derselben, so findet sich

$$A'' = \frac{(n-1)\sqrt{m^2+1}}{mn-1}$$

$$B'' = \frac{(m-1)\sqrt{n^2+1}}{mn-1}$$

$$C'' = \frac{\sqrt{(m^2n^2+m^2+n^2)^2 - m^2n^2(m+n+1)^2}}{(mn+m+n)(mn-1)}$$

§. 143.

Fortsetzung; Volumen.

Aufgabe. Das Volumen V'' des Dyakisdodekaëders zu finden.

Das Dyakisdodekaëder besteht aus 24 vierseitigen Elementarpyramiden, deren Grundflächen die Begränzungsflächen, und deren Höhe die Normale N der Gestalt. Wäre also der Flächeninhalt $\triangle''$ einer Fläche des Dyakisdodekaëders bekannt, so wäre zugleich das Volumen einer Elementarpyramide, und folglich das Volumen der ganzen Gestalt gefunden. Da aber der Flächeninhalt $\triangle''$ unbekannt ist, so müssen wir die Elementarpyramide auf andre Art zu bestimmen suchen. Man lege durch den Mittelpunct der Gestalt, so wie durch den rhombischen und trigonalen Eckpunct einer jeden Fläche eine schneidende Ebene, so wird die vierseitige Elementarpyramide in zwei dreiseitige Pyramiden zerlegt, deren Grundflächen in zwei Hauptschnitten liegen, während ihre Höhen die Coordinaten des trigonalen Eckpunctes sind. Es kommt daher nur noch auf die Berechnung jener zwei Grundflächen an. Beide haben eine halbe Hauptaxe $= 1$ zur gemeinschaftlichen Grundlinie, während ihre Höhen die oben gefundenen Coordinaten des unregelmässigen Eckpunctes sind. Die eine an der Kante A'' liegende Grundfläche wird daher

$$= \frac{m(n-1)}{2(mn-1)}$$

die andre, an der Kante B'' liegende Grundfläche

$$= \frac{n(m-1)}{2(mn-1)}$$

Multiplicirt man jede dieser Grundflächen mit $\frac{1}{3}$ der Coordinate des trigonalen Eckpunctes, und addirt darauf die gefundenen Producte, so folgt v'', oder das Volumen der Elementarpyramide

$$v'' = \frac{mn\,(2mn - m - n)}{6(mn-1)\,(mn + m + n)}$$

und V'', oder das Volumen des Dyakisdodekaëders selbst

$$V'' = 24v'' = \frac{4mn(2mn - m - n)}{(mn-1)\,(mn + m + n)}$$

§. 144

Fortsetzung; Oberfläche.

Aufgabe. Die Oberfläche S'' des Dyakisdodekaëders zu finden.

Aus dem Volumen v'' der Elementarpyramide und der bekannten Flächennormale N lässt sich nun leicht der Flächeninhalt $\triangle''$ ihrer vierseitigen Grundfläche, oder, was dasselbe ist, der Inhalt einer Fläche des Dyakisdodekaëders finden. Denn es ist

$$\tfrac{1}{3}N\triangle'' = v'',$$

also

$$\triangle'' = \frac{3v''}{N}$$

Substituirt man für N und v'' ihre Werthe, so wird

$$\triangle'' = \frac{(2mn - m - n)\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}}{2(mn-1)(mn+m+n)}$$

und

$$S'' = 24\triangle'' = \frac{12(2mn-m-n)\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}}{(mn-1)(mn+m+n)}.$$

§. 145.

Fortsetzung; Flächenwinkel.

Aufgabe. Die Flächenwinkel des Dyakisdodekaëders zu finden.

Wir wollen die vier Winkel bezeichnen wie folgt:

Winkel zwischen Seite B'' und $C'' = a''$
- - - - C'' und $C'' = b''$
- - - - C'' und $A'' = c''$
- - - - A'' und $B'' = d''$

Da nun die Flächen der Dyakisdodekaëder vierseitige Figuren sind, so würde die Berechnung der Winkel aus dem Inhalte und den Seiten etwas mühsam seyn. Für die beiden an den unregelmässigen Ecken liegenden Flächenwinkel a'' und c'' sind wir dieser Mühe überhoben, indem wir für sie die nach aussen gewendeten Grundflächen der oben berechneten beiden Theilpyramiden benutzen können. Dividiren wir nämlich das Volumen jeder dieser Theilpyramiden mit $\frac{1}{3}$ der Flächennormale, so erhalten wir die nach aussen gerichteten Grundflächen derselben, oder die beiden Dreiecke, in welche die Fläche des Dyakisdodekaëders durch die Diagonale aus dem rhombischen Eckpuncte getheilt wird. Nennen wir das an der längsten Kante B'' liegende Dreieck δ, und das andere δ', so wird

$$\delta = \frac{n(m-1)\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}}{2(mn-1)(mn+m+n)}$$

$$\delta' = \frac{m(n-1)\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}}{2(mn-1)(mn+m+n)}$$

und man findet

$$\sin a'' = \frac{2\,\delta}{A''C''}$$

$$\sin c'' = \frac{2\,\delta'}{B''C''}$$

Aus diesen Sinus, oder aus den Gleichungen der Kantenlinien A'', B'' und C'' kann man nun die Cosinus von a'' und c'' bestimmen, wodurch man denn endlich auf die Tangenten gelangt.

Für die beiden Winkel b'' und d'' aber kommt man kürzer zum Ziele, wenn man sie entweder unmittelbar, mit Hülfe der Formeln der sphärischen Trigonometrie aus den Kantenwinkeln, oder mittelst der Gleichungen der sie einschliessenden Seiten $C''C'$ und $A''B''$ nach der bekannten Formel für den Cosinus des Winkels zweier Linien im Raume bestimmt. Aus den, auf die eine oder die andre Art gefundenen Cosinus gelangt man auf die Sinus, und durch Combination beider auf die Tangenten. Die Resultate dieser, zum Theil etwas weitläufigen, aber durch zweckmässige Substitutionen sehr abzukürzenden Rechnungen sind endlich:

$$tang\, a'' = \frac{n(mn-1)\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}}{n^2(m^2-n)+m(m-n^2)}$$

$$tang\, b'' = -\frac{(mn+m+n)\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}}{mn(m+n+1)}$$

$$tang\, c'' = -\frac{m(mn-1)\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}}{m^2(m-n^2)+n(m^2-n)}$$

$$tang\, d'' = \sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}$$

§. 146.

Fortsetzung. Parallelkantige Dyakisdodekaëder.

Da sich gewisse Dyakisdodekaëder dadurch auszeichnen, dass die Kantenlinie B'' der gegenüber liegenden Kantenlinie C'' parallel läuft, weshalb auch für sie der Name der parallelkantigen Dyakisdodekaëder vorgeschlagen wurde (§. 85.), so ist in ihnen

$$c'' + d'' = 180°$$

also $\quad tang\, d'' = -\, tang\, c''$

oder $$\frac{m(mn-1)}{m^2(m-n^2)+n(m^2-n)} = 1$$

die Bedingungsgleichung für jenen Parallelismus; entwickeln wir dieselbe, so folgt:

$$(m^2+1)(m-n^2) = 0$$

oder $$m = n^2$$

als die Relation der Parameter, welche nothwendig Statt finden muss, wenn das Dyakisdodekaëder ein parallelkantiges, oder jede seiner Flächen ein Trapez seyn soll. Von den bekannten Varietäten besitzt daher nur $\left[\frac{4O2}{2}\right]$ diese Eigenschaft. Für die convergentkantigen Dyakisdodekaëder ist $m > n^2$, für die divergentkantigen dagegen $m < n^2$; jene nähern sich den Triakisoktaëdern, diese den Ikositetraëdern.

§. 147.

Fortsetzung; Kantenwinkel.

Aufgabe. Die Kantenwinkel des Dyakisdodekaëders zu finden.

Wir lassen den Kanten ihre obige Bezeichnung, so ist zuvörderst klar, dass $B'' = B$. Was nun die beiden andern Kanten betrifft, so sind, wenn die Gleichung der einen zu ihnen contribuirenden Fläche F:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$$

die Gleichungen der beiden Flächen F' und F'', welche mit F die Kanten C'' und A'' bilden,

$$x + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1$$

$$\frac{x}{m} - \frac{y}{n} + z = 1$$

Setzt man die Parameter der Flächen F und F', so wie der Flächen F und F'' in den allgemeinen Ausdruck für den Cosinus des Neigungswinkels zweier Flächen, so folgt:

$$\cos A'' = -\frac{m^2(n^2-1)+n^2}{m^2(n^2+1)+n^2}$$

$$\cos B'' = \cos B$$

$$\cos C'' = -\frac{mn(m+n+1)}{m^2(n^2+1)+n^2}$$

§. 148.

Berechnung der Pentagondodekaëder.

Setzt man in den für die Dyakisdodekaëder berechneten Formeln $m = \infty$, so erhält man die Formeln für die Pentagondodekaëder, wie folgt:

I. Coordinaten des unregelmässigen Eckpunctes:

$$x = \frac{n-1}{n}, \quad z = 1$$

II. Kantenlinien:

$$2A'' = \frac{2(n-1)}{n}$$

$B'' = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$, diese Linie ist jedoch keine Kantenlinie mehr, sondern nur die Höhenlinie der symmetrischen Pentagone.

$$C'' = \frac{\sqrt{n^4-n^2+1)}}{(n+1)n}$$

III. Volumen:

$$V'' = \frac{4(2n-1}{n+1}$$

IV. Oberfläche:

$$S'' = \frac{12(2n-1)\sqrt{n^2+1}}{(n+1)n}$$

V. Flächenwinkel:

$$tang\, a'' = \frac{n^2\sqrt{n^2+1}}{n^2+1} \text{ und } cos\, 2a'' = \frac{n^4-n^2-1}{n^4+n^2+1}$$

$$tang\, b'' = -\frac{(n+1)\sqrt{n^2+1}}{n} \text{ und } cos\, b'' = -\frac{n}{n^2+n+1}$$

$$tang\, c'' = -n\sqrt{n^2+1}$$

$tang\, d'' = \infty$, also $d'' = 90°$.

Weil nämlich je zwei in einer Kante B'' zusammenstossende Flächen in e i n e Ebene und je zwei Kanten A'' in e i n e Linie fallen, so verschwindet der ebene Winkel d'' und je zwei Winkel a'' vereinigen sich zu dem einzelen Winkel der symmetrischen Pentagone.

VI. Kantenwinkel:

$$cos\, A'' = -\frac{n^2-1}{n^2+1}$$

$cos\, B'' = -1$, also $B'' = 180°$

$$cos\, C'' = -\frac{n}{n^2+1}$$

Anmerkung. Für das regelmässige Pentagondodekaëder der Geometrie wird gefordert:

1) $2A'' = C''$
2) $\cos 2a'' = \cos b'' = \cos c''$
3) $\cos A'' = \cos C''$

Ist eine dieser Bedingungen erfüllt, so sind es auch die beiden andern; jede derselben führt aber auf den Ableitungscoëfficienten

$$n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Das regelmässige Pentagondodekaëder kann daher im Gebiete der Krystallformen nicht vorkommen. Weil aber der Näherungswerth von $n = 1{,}618\ldots$, so würde das Pentagondodekaëder $\frac{\infty O \frac{8}{5}}{2}$, und noch mehr $\frac{\infty O \frac{13}{8}}{2}$ oder $\frac{\infty O \frac{34}{21}}{2}$ dem regelmässigen Dodekaëder sehr nahe kommen, wie ihm denn von den bekannten Varietäten $\frac{\infty O \frac{3}{2}}{2}$ am nächsten steht.

§. 149.

Werthe von t, x und z für die bekanntesten Gestalten in ihrer parallelflächig-hemiëdrischen Erscheinungsweise.

Es folgen nun in diesem und dem nächsten §. die berechneten Werthe des Coëfficienten t und der Coordinaten x und z des unregelmässigen Eckpunctes, so wie der Kantenwinkel der bekanntesten Gestalten, sofern solche parallelflächig-hemiëdrisch auftreten.

Gestalt.	t	x	z
$2O\frac{4}{3}$?	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$
$\frac{15}{7}O\frac{15}{11}$	$\frac{45}{33}$	$\frac{15}{37}$	$\frac{30}{37}$
$3O\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{6}{7}$
$\frac{11}{3}O\frac{11}{5}$	$\frac{33}{19}$	$\frac{33}{53}$	$\frac{44}{53}$
$4O2$	$\frac{12}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{6}{7}$
$5O\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{10}{11}$
$7O\frac{7}{3}$	$\frac{21}{11}$	$\frac{13}{23}$	$\frac{21}{23}$
$8O4$	$\frac{24}{11}$	$\frac{23}{31}$	$\frac{28}{31}$
$\infty O\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{5}$	1
$\infty O\frac{3}{2}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{1}{3}$	1
$\infty O2$	2	$\frac{1}{2}$	1
$\infty O3$	$\frac{9}{4}$	$\frac{2}{3}$	1
$\infty O\frac{7}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{7}$	1
$\infty O4$	$\frac{13}{5}$	$\frac{3}{4}$	1

§. 150.

Kantenwinkel der bekannten Gestalten in ihrer parallelflächig-hemiëdrischen Erscheinungsweise.

Gestalt.	$\cos A''$	$\cos B''$	$\cos C''$	Winkel A''	Winkel B''	Winkel C''
$2O\frac{4}{3}$?	$\frac{11}{29}$	$\frac{21}{29}$	$\frac{16}{29}$	[illegible]°17′28″	136°23′50″	153°42′32″
$\frac{15}{7}O\frac{15}{11}$	$\frac{153}{395}$	$\frac{297}{395}$	$\frac{347}{395}$	112 47 21	138 45 18	151 27 35
$3O\frac{3}{2}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{12}{14}$	$\frac{11}{14}$	115 22 37	148 59 50	141 47 12
$\frac{11}{3}O\frac{11}{5}$	$\frac{105}{155}$	$\frac{137}{155}$	$\frac{103}{155}$	132 38 32	152 6 47	131 38 42
$4O2$	$\frac{13}{21}$	$\frac{19}{21}$	$\frac{14}{21}$	128 14 48	154 47 28	131 48 37
$5O\frac{5}{3}$	$\frac{17}{35}$	$\frac{33}{35}$	$\frac{23}{35}$	119 3 33	160 32 13	131 4 56
$7O\frac{7}{3}$	$\frac{41}{59}$	$\frac{57}{59}$	$\frac{31}{59}$	134 1 13	165 2 20	121 42 49
$8O4$	$\frac{61}{69}$	$\frac{67}{69}$	$\frac{26}{69}$	152 8 9	166 10 17	112 8 11
$\infty O\frac{5}{4}$	$\frac{9}{41}$	1	$\frac{20}{41}$	102°40′49″	—	119°11′47″
$\infty O\frac{3}{2}$	$\frac{5}{13}$	1	$\frac{6}{13}$	112 37 12	—	117 29 11
$\infty O2$	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	126 52 12	—	113 34 41
$\infty O3$	$\frac{8}{10}$	1	$\frac{3}{10}$	143 7 48	—	107 27 27
$\infty O\frac{7}{2}$	$\frac{45}{53}$	1	$\frac{14}{53}$	148 6 33	—	105 18 59
$\infty O4$	$\frac{15}{17}$	1	$\frac{4}{17}$	151 55 40	—	103 36 32

Viertes Capitel.

Von den Combinationen des Tesseralsystemes.

§. 151.

Allgemeine Entwicklung.

Die allgemeine Entwicklung der tesseralen Combinationen hat durchaus keine Schwierigkeiten, indem die verschiedenen dahin gehörigen Bestimmungen jedenfalls durch sehr einfache Hülfsmittel zu erhalten sind. Es bestimmt sich nämlich für jede Combination

1) die Zähligkeit, nach der Regel in §. 66,
2) die Grundgestalt, ein für alle Mal als das Oktaëder,
3) der Charakter, nach demselben einfachen Kriterium, welches uns schon bei der Erkennung der hemiëdrischen Gestalten diente, indem jede holoëdrische Combination in beiderlei Normalstellung absolut dasselbe Bild gewähren muss, während jede semitesserale Combination eine abweichende Lage und Verknüpfung gewisser ihrer Begränzungselemente erkennen lässt. Das Daseyn oder der Mangel der Gegenflächen für alle oder gewisse Flächen entscheidet endlich darüber, ob eine, bereits für semitesseral erkannte Combination geneigtflächig- oder parallelflächig-semitesseral sey.
4) Der allgemeine und besondre Name der Gestalten, theils nach der Zahl, theils nach der Stellung der gleichartigen Flächen. So werden z. B. 6 gleichartige Flächen immer das Hexaëder, 8 gleichartige Flächen immer das Oktaëder anzeigen, und 12 dergleichen Flächen in einer holoëdrischen Combination immer dem Rhomben-

dodekaëder angehören. Auch wird man nur die Combination in normale Stellung zu bringen haben, um sogleich aus der Lage oder Stellung der gleichartigen Flächen auf die Art von Gestalten schliessen zu können, welcher sie angehören müssen, weil sich ja die Gestalten überhaupt nur in derjenigen Stellung combiniren können, in welcher sie abgeleitet werden (§. 64.).

§. 152.

Besondre Entwicklung.

Die besondre Entwicklung der tesseralen Combinationen setzt eine genaue Bekanntschaft mit den möglichen Combinationsverhältnissen der tesseralen Gestalten voraus, und macht daher eine allgemeine Untersuchung dieser Verhältnisse nothwendig, welche wegen der so verschiedenen Erscheinungsweise der holoëdrischen und hemiëdrischen Gestalten in zwei Abtheilungen zerfällt. Dabei kann jedoch zunächst nur auf die binären Combinationen Rücksicht genommen werden, weil sich die allgemeine Theorie der drei- und mehrzähligen Combinationen in eine Unzahl von Problemen verlieren würde, ohne doch für die Anwendung besondre Vortheile zu gewähren; denn eine jede mehrzählige Combination lässt sich in binäre Combinationen zerfällen, und dann nach denselben Regeln entwickeln wie diese.

Um jedoch wenigstens die interessanteste und am häufigsten vorkommende Modalität der ternären Combinationen, da nämlich die Combinationskanten zweier Gestalten durch die Flächen einer dritten Gestalt abgestumpft werden, zugleich mit zu berücksichtigen, so wird in den unten folgenden §§., welche der besondern Darstellung der binären Combinationen gewidmet sind,, nach der jedesmaligen Angabe der Verhältnisse je zweier Gestalten, die Combinationsgleichung (§. 68) in derjenigen Form mitgetheilt werden, in welcher sie sich unmittelbar auf die Abstumpfungsflächen der Combinationskanten derselben beiden Gestalten bezieht.

Was endlich die Darstellung der binären Combinationen insbesondere betrifft, so ist es keinem Zweifel unterworfen, dass selbige an Verständlichkeit und praktischer Brauchbarkeit bedeutend gewinnt, wenn man jederzeit eine der Gestalten als die vorherrschende denkt *) und die von Werner erfundene repräsentative Beschreibungsmethode zu Hülfe nimmt, weshalb wir uns denn auch dieser beiden, die Einbildungskraft sehr unterstützenden, Hülfsmittel durchgängig bedienen werden.

A. Tesserale Combinationen.

§. 153.

Combination zweier Hexakisoktaëder.

Das Hexakisoktaëder mOn ist der allgemeine Repräsentant aller tesseraler Gestalten; wir werden also auch, um die Gesetze der binären tesseralen Combinationen in der grössten Allgemeinheit zu entwickeln, zuvörderst die Combinationsverhältnisse zweier Hexakisoktaëder mOn und $m'On'$ zu untersuchen haben. Wiewohl nun die Ableitung in allen Gestalten des Tesseralsystemes durchaus die gleiche und unveränderliche Länge der Hauptaxen voraussetzt, so scheint es doch, als würden wir bei der Betrachtung der Combinationsverhältnisse diese Voraussetzung aufheben müssen, da selbige allerdings eine dem Begriffe

---

*) Dass durch diese Annahme eine jede binäre Combination zweimal in Betrachtung kommt, kann kaum als eine Wiederholung angesehen werden, da eine und dieselbe Combination eine ganz andre Physiognomie erhält, je nachdem die eine oder die andre Gestalt die vorherrschende ist.

der Combination widerstreitende Forderung enthält. Weil indess zur Beurtheilung dieser Combinationsverhältnisse nur erfordert wird, die relative Lage der Flächen beider Gestalten zu kennen, so gewährt es grosse Erleichterung, diesen Flächen ursprünglich gewisse gemeinschaftliche Durchschnittspuncte anzuweisen, zu welchen sich denn die Pole der Hauptaxen am natürlichsten darbieten, als welche schon in der Ableitung als die gemeinschaftlichen Cardinalpuncte sämmtlicher Gestalten hervortraten.

Sind uns also zwei Hexakisoktaëder mOn und $m'On'$ gegeben, so wissen wir, dass solche, wie sie auch beschaffen seyn mögen, gleiche Länge und mithin coincidirende Pole der Hauptaxen haben. Da nun auch die rhombischen und trigonalen Eckpuncte für beide Gestalten in dieselben Linien fallen, so wird offenbar die Erscheinungsweise der Combination von der Grösse der beiderlei Zwischenaxen, oder, was dasselbe ist, von der Grösse der beiderlei Coëfficienten t und r abhängen. In der That ist auch die Theorie der binären Combinationen mit diesen beiden Coëfficienten vollständig gegeben, und unabhängig von allen andern Hülfsmitteln zu entwickeln.

§. 154.

Regelmässige Combinationsverhältnisse zweier Hexakisoktaëder.

Man sieht leicht, dass unter beständiger Voraussetzung der Coincidenz der Pole der Hauptaxen die Bedingungen für den Parallelismus der dreierlei Kanten beider Gestalten mOn und $m'On'$ folgende sind:

1) Parallelismus der längsten Kanten, wenn $t' = t$

2) Parallelismus der mittleren Kanten, wenn $r' = r$

3) Parallelismus der kürzesten Kanten, wenn $\frac{t'}{r'} = \frac{t}{r}$

Setzt man statt t, t', r und r' ihre Werthe, so erhält man die Bedingungen für dieselben Parallelismen unmittelbar durch die Ableitungscoëfficienten ausgedrückt; es ist nämlich:

1) $t' = t$ wenn $\frac{m'n'}{m'+n'} = \frac{mn}{m+n}$

2) $r' = r$ wenn $n' = n$

3) $\frac{t'}{r'} = \frac{t}{r}$ wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} = \frac{m(n+1)}{n}$

Die diesen Bedingungen entsprechenden Combinationsverhältnisse aber sind:

1) Für $t' = t$, Zuschärfung der längsten Kanten,
2) für $r' = r$, Zuschärfung der mittleren Kanten,
3) für $\frac{t'}{r'} = \frac{t}{r}$, Zuschärfung der kürzesten Kanten der einen Gestalt.

Welche Gestalt diese Zuschärfungen hervorbringt oder erleidet, das hängt im ersten und dritten Falle von der Grösse der Coëfficienten r und r', im zweiten Falle von der Grösse der Coëfficienten t und t' ab.

§. 155.

Unregelmässige Combinationsverhältnisse zweier Hexakisoktaëder.

Ausser diesen regelmässigen Combinationsverhältnissen zweier Hexakisoktaëder giebt es aber auch noch andre, welche wenigstens im Allgemeinen fixirt werden können, und sich dadurch von den bisher betrachteten unterscheiden, dass die Combinationskanten keiner der Kanten weder von mOn noch von $m'On'$ parallel laufen.

Wegen der allgemeinen Bestimmung der Lage der Combinationskante bedürfen wir für diese Verhältnisse eines unzweideutigen Sprachgebrauches. Wenn nämlich eine Fläche F' von $m'On'$, als untergeordneter, mit einer Fläche F von mOn, als vorherrschender Gestalt, zum Durchschnitte kommt, so ist die Lage der Combinationskante beider Flächen in Bezug auf die Kanten der vorherrschenden Gestalt zu bestimmen, wie folgt.

Die Combinationskante wird immer zwei Kanten der Fläche *F* schneiden, und dadurch eine gewisse Lage gegen die dritte, nicht unmittelbar geschnittene, Kante erhalten. Sie wird ihr nämlich entweder parallel oder nicht parallel seyn; im letzteren Falle kommt es auf die Richtung an, nach welcher sie mit derselben convergirt. Da nun jede Kante durch zwei verschiedene Eckpuncte begränzt wird, so wird die Combinationskante mit der nicht geschnittenen Kante von *F* entweder nach dem einen oder nach dem andern Eckpuncte hin convergiren, und durch die Nennnng dieses Eckpunctes ihrer Lage nach im Allgemeinen zu bestimmen seyn.

§. 156.

Allgemeine Uebersicht der Combinationen zweier Hexakisoktaëder.

Nach dieser vorläufigen Bestimmung können wir nun die Combinationsverhältnisse zweier Hexakisoktaëder *mOn* und *m'On'* in Folgendem zusammen fassen *):

---

*) Zur Abkürzung des Textes und zur Erleichterung der Uebersicht sind in den nächsten §§. folgende Abbreviaturen gebraucht worden:

dreifl. = dreiflächig
vierfl. = vierflächig
sechsfl. = sechsflächig
achtfl. = achtflächig
CV. = Combinationsverhältniss
CG. = Combinationsgleichung
CK = Combinationskante
Eckp. = Eckpunct
tetr. = tetragonal
trig. = trigonal
ditetr. = ditetragonal
ditrig. = ditrigonal
rhomb. = rhombisch
convgt. = convergent
Zusp. = Zuspitzung
Zusch. = Zuschärfung
Abst. = Abstumpfung
Zuspfl. = Zuspitzungsflächen
Zuschfl. = Zuschärfungsflächen
Abstfl. = Abstumpfungsflächen

Es bilden an mOn, als vorherrschender Gestalt, die Flächen von $m'On'$

I. **Zuschärfungen der Kanten**, und zwar:

1) der längsten K., wenn $t' = t$ und $r' > r$, folglich $\frac{t'}{r'} < \frac{t}{r}$; Fig. 51.

2) der mittleren K, wenn $r' = r$ und $t' > t$, folglich $\frac{t'}{r'} > \frac{t}{r}$; Fig. 52.

3) der kürzesten K., wenn $\frac{t'}{r'} = \frac{t}{r}$ und $r' < r$, folglich $t' < t$; Fig. 53.

II. **Achtfl. Zusp. der ditetr. Ecke**, wenn $r' > r$ und $t' > t$, und zwar sind die CK. mit den kürzesten Kanten

4) parallel, wenn $\frac{t'}{r'} = \frac{t}{r}$,

5) convgt. nach dem rhomb. Eckp., wenn $\frac{t'}{r'} > \frac{t}{r}$,

6) convgt. nach dem ditrig. Eckp., wenn $\frac{t'}{r'} < \frac{t}{r}$; Fig. 54.

III. **Sechsfl. Zusp. der ditrig. Ecke**, wenn $t' < t$, und $\frac{t'}{r'} < \frac{t}{r}$, und zwar sind die CK. mit den mittleren Kanten

7) parallel, wenn $r' = r$,

8) convgt. nach dem ditetr. Eckp., wenn $r' > r$,

9) convgt. nach dem rhomb. Eckp., wenn $r' < r$; Fig. 55.

IV. **Vierfl. Zusp. der rhomb. Ecke**, wenn $r' < r$ und $\frac{t'}{r'} > \frac{t}{r}$, und zwar sind die CK. mit den längsten Kanten

10) parallel, wenn $t' = t$; Fig. 56,

11) convgt. nach dem ditetr. Eckp, wenn $t' > t$,

12) convgt. nach dem ditrig. Eckp, wenn $t' < t$.

In diesen 12 Fällen, welche sich auf 6 reduciren, wenn man das Verhältniss des Vorherrschens der einen Gestalt nicht berücksichtigen will, sind alle, durch blosse Discussion der Werthe von t und r zu bestimmenden Combinationsverhältnisse erschöpft, welche zwischen zwei Hexakisoktaëdern Statt finden können. Da aber jede andre tesserale Gestalt als ein Hexakisoktaëder betrachtet werden kann, so begreift man leicht, dass auch für die binären Combinationen der übrigen tesseralen Gestalten die wichtigsten Regeln in vorstehenden 12 Fällen aufgefunden sind. Wie nun in dieser Hinsicht das Besondere aus dem Allgemeinen abzuleiten sey, das wird aus dem nächsten §. klar werden, in welchem wir beispielsweise die Combinationsverhältnisse des Hexakisoktaëders mit den übrigen 6 Arten von tesseralen Gestalten aus den gefundenen 12 Regeln bestimmen wollen. Dass übrigens viele andre eminente Combinationsverhältnisse hervorgehoben werden könnten, deren Bestimmung nicht zunächst und unmittelbar durch die Werthe von t und r gegeben ist, versteht sich von selbst; doch werden solche immer unter einen der 12 Fälle gehören, und nur als besondere Modalitäten desselben erscheinen, wie wir selbst mehrfach zu sehen Gelegenheit haben werden.

§. 157.

Allgemeine Discussion der Combinationen des Hexakisoktaëders mOn.

1) Mit $m'On'$; es bilden die Flächen eines zweiten Hexakisoktaëders $m'On'$ die im vorigen §. aufgeführten 12 Combinationsverhältnisse unter den dabei angeführten Bedingungen.
2) Mit $m'Om'$; da je zwei in den längsten Kanten von $m'On'$ zusammenstossende Flächen für $m'Om'$ in eine Fläche fallen, so müssen die Flächen dieser Gestalt jederzeit auf die längsten Kanten von

mOn aufgesetzt erscheinen; sie können daher auch nur entweder Abstumpfungen derselben, oder vierflächige Zuspitzungen der ditetragonalen, oder dreiflächige Zuspitzungen der ditrigonalen Ecke von mOn hervorbringen. Diess folgt aber auch unmittelbar aus den obigen Combinationsbedingungen; es ist nämlich für $m'Om'$ und mOn

$$r' \gtreqless r \quad \text{wenn} \quad m' \gtreqless n$$

$$t' \gtreqless t \quad - \quad \tfrac{1}{2}m' \gtreqless \frac{mn}{m+n}$$

$$\frac{t'}{r'} \gtreqless \frac{t}{r} \quad - \quad m'+1 \gtreqless \frac{m(n+1)}{n}$$

Da nun m jederzeit $> n$, so ist offenbar $\frac{m}{m+n}$ immer $> \frac{1}{2}$, und $\frac{m}{n}$ immer > 1, folglich

$$\frac{mn}{m+n} \text{ immer } > \tfrac{1}{2}n$$

$$\frac{m(n+1)}{n} \text{ immer } > n+1$$

Gesetzt nun, es sey $r' = r$, also $m' = n$, so ist auch $\frac{1}{2}m' = \frac{1}{2}n$, und $m'+1 = n+1$; also muss dann nothwendig $t' < t$ und $\frac{t'}{r'} < \frac{t}{r}$ seyn, mit unbedingtem Ausschluss andrer Fälle; dieselbe Bedingung gilt für $r' < r$ oder $m' < n$, während für $r' > r$ sowohl $t' \gtreqless t$, als $\frac{t'}{r'} \gtreqless \frac{t}{r}$ seyn kann. Hieraus folgt, dass $m'Om'$ an mOn von den obigen 12 Combinationsverhältnissen nur Nr. 1, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 hervorbringen kann.

3) Mit $m'O$; da je zwei in den kürzesten Kanten von $m'On'$ zusammenstossende Flächen für $m'O$ in eine Fläche fallen, so müssen die Flächen dieser Gestalt jederzeit auf die kürzesten Kanten von mOn aufgesetzt erscheinen; sie können daher auch nur

entweder Abstumpfungen dieser Kanten oder dreiflächige Zuspitzungen der ditrigonalen, oder Zuschärfungen der rhombischen Ecke von mOn hervorbringen. Dasselbe folgt aus den obigen Bedingungen; es ist nämlich für $m'O$ und mOn

r' jederzeit $< r$, weil $n' = 1$

es können daher auch nur die Combinationsverhältnisse Nr. 3, 9, 10, 11 und 12 Statt haben, wobei sich natürlich jede Zuschärfung in eine Abstumpfung, jede $n$flächige Zuspitzung in eine $\frac{1}{2}n$flächige verwandelt u. s. w.

Die beiden andern Bedingungen sind:

$$t' >=< t \text{ wenn } \frac{m'}{m'+1} >=< \frac{mn}{m+n}$$

$$\frac{t'}{r'} >=< \frac{t}{r} \text{ wenn } m' >=< \frac{m(n+1)}{2n}$$

4) Mit $\infty On'$; da je zwei in einer mittleren Kante von $m'On'$ zusammenstossende Flächen für $\infty On'$ in e i n e Fläche fallen, so müssen die Flächen dieser Gestalt jederzeit auf die mittleren Kanten von mOn aufgesetzt erscheinen; sie können daher auch nur entweder Abstumpfungen dieser Kanten, oder vierflächige Zuspitzungen der ditetragonalen, oder Zuschärfungen der rhombischen Ecke von mOn hervorbringen. Diess besagen auch die obigen Bedingungen; denn da für $\infty On'$ der Quotient $\frac{t'}{r'} = \infty$, so ist nothwendig

$$\frac{t'}{r'} \text{ immer } > \frac{t}{r}$$

weshalb denn möglicherweise nur die Combinationsverhältnisse Nr. 2, 5, 10 11, und 12 Statt finden können. Uebrigens ist für diese Combination

$$r' >=< r \text{ wenn } n' >=< n$$

$$t' >=< t \text{ wenn } n' >=< \frac{mn}{m+n}$$

5) Mit ∞O; wegen $r' < r$ gelten dieselben Schlüsse wie für $m'O$; da aber $m' = \infty$, so ist auch $\frac{t'}{r'}$ nothwendig $> \frac{t}{r}$, und es bleiben daher nur die Combinationsverhältnisse Nr. 10, 11 und 12 übrig. Die ihre Modalität bestimmende Bedingung ist:
$$t' >=< t, \text{ wenn } 1 >=< \frac{mn}{m+n}$$
6) Mit O; man setze in den Bedingungen für $m'O$ $m' = 1$, so folgt, dass nur das eine Combinationsverhältniss Nr. 9 übrig bleibt.
7) Mit $\infty O \infty$; man setze in den Bedingungen für $\infty On'$ $n' = 1$, so bleibt nur der Fall Nr. 5 als einzig möglicher übrig.

Nachdem wir solchergestalt erläutert haben, wie aus obigen 12 Regeln die Combinationsverhältnisse je zweier tesseraler Gestalten abzuleiten sind, gehen wir zur besondern Darstellung der binären Combinationen über.

§. 158.

Combinationen des Hexakisoktaëders.

Aus dem vorigen §. ergeben sich unmittelbar folgende Combinationsverhältnisse für mOn:
1) $m'On'$ bildet die in §. 156. aufgezählten 12 Combinationen unter den daselbst erwähnten Bedingungen.

CG. $m''n''(m'n - mn') + m''(m - m')nn' + n''(n' - n)mm' = 0$

2) $m'Om'$ bildet:

a) Abst. der längsten Kanten, wenn $m' = \frac{2mn}{m+n}$; Fig. 57.
b) Vierfl. Zusp. der ditetr. Ecke - - $>$ - - Fig. 58.
c) Dreifl. Zusp. der ditrig. Ecke - - $<$ - - Fig. 59.

Im Falle b sind die CK. mit den kürzesten Kanten α) parallel, ... wenn $m' + 1 = \frac{m(n+1)}{n}$

β) convgt. nach dem rhomb. Eckp. - - - - - - > - - -

γ) convgt. nach dem ditrig. Eckp. - - - - - - < - - -

Im Falle c sind die CK. mit den mittleren Kanten:

α) parallel, ... wenn $m' = n$

β) convgt. nach dem ditetr. Eckp. - - - > -

γ) convgt. nach dem rhomb. Eckp. - - - < - -

Ausserdem erscheinen die Zuspfl. als Rhomben

im Falle bγ, wenn $m' = m$; Fig. 58.

im Falle cγ, wenn $m' + 1 = \frac{n(m+1)}{m}$

welche beiden Modalitäten mittels der allgemeinen Combinationsgleichung zu bestimmen sind.

CG. $m''(m - m')n + n''(m' - n)m - m''n''(m - n) = 0$

3) $m'O$ bildet:

a) Abst. d. kürzesten Kanten, wenn $m' = \frac{m(n+1)}{2n}$; Fig. 60.

b) Zusch. der rhomb. Ecke - - - > - - Fig. 61.

c) Dreifl. Zusp. der ditrig. Ecke - - < - - Fig. 62.

Im Falle b sind die CK. mit den längsten Kanten:

α) parallel, ... wenn $\frac{m'}{m'+1} = \frac{mn}{m+n}$

β) convgt. nach dem ditetr. Eckp. - - - - > - -

γ) convgt. nach dem ditrig. Eckp. - - - - < - -

Ausserdem erscheinen im Falle c die Zuspfl. als Rhomben, wenn

$\frac{m'+1}{m'} = \frac{(m+1)n}{m}$

CG. $m''n''(m'n - m) + m''(m - m')n - n''(n - 1)mm' = 0$

4) $\infty On'$ bildet:

a) Abst. der mittleren Kanten, wenn $n' = n$; Fig. 63.

b) Vierfl. Zusp. der ditetr. Ecke - - - > - Fig. 64.

c) Zusch. der rhomb. Ecke . . - - - < - Fig. 65.

Im Falle c sind die CK. mit den längsten Kanten

α) parallel, ... wenn $n' = \frac{mn}{m+n}$

β) convgt. nach dem ditetr. Eckp. - - - > - -

γ) convgt. nach dem ditrig. Eckp. - - - < - -

Ausserdem erscheinen im Falle b die Zuspfl. als Rhomben, wenn

$$n' = \frac{mn}{m-n}.$$

CG. $m''(n''-n')n + n''(n'-n)m = 0$

5) ∞O bildet jederzeit Abst. der rhomb. Ecke, und zwar sind die CK. mit den längsten Kanten:

α) parallel, ... wenn $m + n = mn$; Fig. 66.
β) convgt. nach dem ditetr. Eckp. - - - - - $>$ - -
γ) convgt nach dem ditrig. Eckp. - - - - - $<$ - -

CG $m''(n''-1)n - n''(n-1)m = 0$

6) O bildet Abst. der ditrig. Ecke; erscheinen die Abstfl. als regelmässige Hexagone, so ist $n = \frac{2m}{m+1}$ (§. 120.) Fig. 67.

CG. $m''(m-1)n - n''(n-1)m - m''n''(m-n) = 0$

7) $\infty O \infty$ bildet Abst. der ditetr. Ecke. Fig. 68.

CG. $\frac{m''}{n''} = \frac{m}{n}$.

§. 159.

Combinationen des Ikositetraëders mOm.

1) Mit $m'On'$; die allgemeine Discussion der vorkommenden Fälle ist hier ganz ähnlich, wie oben für die Combination $mOn \,.\, m'Om'$; es ist nämlich

$$t' >=< t \quad \text{wenn} \quad \frac{m'n'}{m'+n'} >=< \tfrac{1}{2}m$$

$$r' >=< r \quad - \; - \quad n' >=< m$$

$$\frac{t'}{r'} >=< \frac{t}{r} \quad - \; - \quad \frac{m'(n'+1)}{n'} >=< m+1$$

Da nun m' immer $> n'$, so ist $\frac{m'}{m'+n'}$ immer $> \frac{1}{2}$ und $\frac{m'}{n'} > 1$, und folglich

$\frac{m'n'}{m'+n'}$ nothwendig immer $> \frac{1}{2} n'$

$\frac{m'(n'+1)}{n'}$ - - - - - $> n'+1$

Wenn daher $n' =$ oder $> m$, so kann offenbar nur $t' > t$ und $\frac{t'}{r'} > \frac{t}{r}$ Statt finden, während für $n' < m$ alle mögliche Verhältnisse eintreten können. Folglich sind überhaupt nur die CV. Nr. 2, 3, 5, 9, 10, 11 und 12 möglich, und es bildet $m'On'$ an mOm:

a) Achtfl. Zusp. der tetr. Ecke, wenn $n' > m$; Fig. 70.

b) Zusch. der längeren Kanten - - $n' = m$; Fig. 69.

c) Vierfl. Zusp. der rhomb. Ecke - - $n' < m$ und $\frac{t'}{r'} > \frac{t}{r}$; Fig. 71.

d) Zusch. der kürzeren Kanten - - - - - - - = - Fig. 72.

e) Sechsfl. Zusp. der trig. Ecke - - - - - - - < - Fig. 73.

Im Falle c sind die CK. mit den symmetrischen Diagonalen von mOm

α) parallel, ... wenn $\frac{m'n'}{m'+n'} = \frac{1}{2}m$

β) convgt. nach dem tetr. Eckp. - - - - - > - -

γ) convgt. nach dem trig. Eckp. - - - - - < - -

Ausserdem werden die CK. im Falle a den kürzeren Kanten von mOm parallel, wenn $\frac{n'(m'+1)}{m'} = m+1$, und im Falle cγ den längeren Kanten parallel, wenn $m' = m$.

CG. $m''n''(m'-n')+m''(m-m')n'+n''(n'-m)m' = 0$.

2) $m'Om'$ bildet vierfl. auf die Flächen aufgesetzte Zusp. der tetr., oder dreifl. dergleichen Zusp. der trig. Ecke, je nachdem $m' >$ oder $< m$. Fig. 74.

CG. $m'' = n''$.

3) $m'O$; seine Flächen sind immer auf die kürzeren Kanten von mOm aufgesetzt, und bilden:

a) Abst. derselben, ... wenn $m' = \frac{m+1}{2}$; Fig. 75.

b) Zusch. der rhomb. Ecke - - - $>$ - - Fig. 76.

c) Dreifl. Zusp. der trig. Ecke - - - $<$ - - Fig. 77.

Im Falle b sind die CK. mit den symmetrischen Diagonalen

α) parallel, ... wenn $m' = \frac{m}{2-m}$

β) convgt. nach dem tetr. Eckp. - - - $>$ - - -

γ) convgt. nach dem trig. Eckp. - - - $<$ - - -

Ausserdem werden die CK. im Falle bγ den längeren Kanten von mOm parallel, wenn $m' = m$.

CG. $m''n''(m'-1) + m''(m-m') - n''(m-1)m' = 0$

4) $\infty On'$; seine Flächen sind immer auf die längeren Kanten von mOm aufgesetzt, und bilden:

a) Abst. derselben . . . . wenn $n' = m$; Fig. 83.

b) Vierfl. Zusp. der tetr. Ecke - - - $>$ - Fig. 84.

c) Zusch. der rhomb Ecke . . - - - $<$ - Fig. 85.

Im Falle c sind die CK. mit den symmetrischen Diagonalen

α) parallel, ... wenn $n' = \frac{1}{2}m$

β) convgt. nach dem tetr. Eckp. - - - $>$ -

γ) convgt. nach dem trig. Eckp. - - - $<$ -

Ausserdem werden im Falle b die CK. den kürzeren Kanten von mOm parallel, wenn $n' = m + 1$; Fig. 84.

CG. $m''(n''-n') + n''(n'-m) = 0$

5) ∞O; seine CV. ergeben sich aus denen von $\infty On'$; da aber $n' = 1$, also immer $< m$, so bildet ∞O nur Abst. der rhomb. Ecke, und zwar sind die CK. mit den symmetrischen Diagonalen

α) parallel, ... wenn $m = 2$; Fig. 78.

β) convgt. nach dem trig. Eckp. - - - $>$ -

γ) convgt. nach dem tetr. Eckp. - - - $<$ -

CG. $m''(n''-1) - n''(m-1) = 0$

6) O bildet Abst. der trig. Ecke; Fig. 79 und 80. CG. $m''=n''$ und $m''<m$.

7) $\infty O \infty$ bildet Abst. der tetr. Ecke; Fig. 81 und 82. CG. $m''=n''$ und $m''>m$.

§: 160.

Combinationen des Triakisoktaëders mO.

1) Mit $m'On'$; weil $n=1$, so ist jederzeit $r'>r$, und die möglichen CV. sind daher Nr. 1, 4, 5, 6 und 8; daher bildet $m'On'$ an mO

a) Zusch. der kürzeren Kanten, wenn $\frac{m'n'}{m'+n'}=\frac{m}{m+1}$; Fig. 86.

b) Achtfl. Zusp. der ditetr. Ecke - - - - - $>$ - - - Fig. 87.

c) Sechsfl. Zusp. der trig. Ecke - - - - - $<$ - - - Fig. 88.

Im Falle b sind die CK. auf den längeren Kanten von mO

α) rechtwinklig, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'}=2m$

β) stumpfwinklig - - - - - $>$ - -

γ) spitzwinklig - - - - - $<$ - -

Ausserdem werden im Falle bβ die CK. den kürzeren Kanten von mO parallel, wenn $\frac{n'(m'+1)}{m'}=\frac{m+1}{m}$

CG. $m''(m-m')n'+n''(n'-1)mm'-m''n''(mn'-m')=0$.

2) Mit $m'Om'$; die Flächen dieser Gestalt sind immer auf die kürzeren Kanten aufgesetzt, und bilden:

a) Abst. derselben, ... wenn $m'=\frac{2m}{m+1}$; Fig. 89.

b) Vierfl. Zusp. der ditetr. Ecke - - - $>$ - - Fig. 90.

c) Dreifl. Zusp. der trig. Ecke - - - $<$ - - Fig. 91.

Im Falle b sind die CK. auf den längeren Kanten

α) rechtwinklig, wenn $m' = 2m - 1$
β) stumpfwinklig - - - $>$ - - -
γ) spitzwinklig - - - $<$ - - -

Ausserdem erscheinen im Falle $b\gamma$ die Zuspfl. als Rhomben, wenn $m' = m$; Fig. 90.

CG. $m''(m - m') + n''(m' - 1)m - m''n''(m - 1) = 0.$

3) $m'O$ bildet Zusch. der längeren Kanten, oder auf die Flächen gesetzte dreifl. Zusp. der trigonalen Ecke, je nachdem $m' >$ oder $< m$; Fig. 92.

CG. $n'' = 1$.

4) $\infty On'$; da nicht nur $r' > r$, sondern auch $t' > t$ und $\frac{t'}{r'} > \frac{t}{r}$, so bildet $\infty On'$ an mO jederzeit vierfl. auf die längeren Kanten gesetzte Zusp. der ditetr. Ecke, die CK. stumpfwinklig auf den längeren Kanten. Die CK. werden aber parallel den kürzeren Kanten, wenn $n' = \frac{m+1}{m}$, und die Zuspfl. erscheinen als Rhomben, wenn $n' = \frac{m}{m-1}$. Fig. 93.

CG. $m''(n'' - n') + n''(n' - 1)m = 0$

5) ∞O bildet Abst. der längeren Kanten. Fig. 94.

CG. $n'' = 1$ und $m'' > m$.

6) O bildet Abst. der trig. Ecke; Fig. 95.

CG. $n'' = 1$ und $m'' < m$.

7) $\infty O \infty$ bildet Abst. der ditetr. Ecke; Fig. 96.

CG. $\frac{m''}{n''} = m$.

§. 161.

Combinationen des Tetrakishexaëders ∞On.

1) Mit $m'On'$; da $\frac{t'}{r'}$ jederzeit $< \frac{t}{r}$, so können nur die CV. Nr. 1, 6, 7, 8 und 9 Statt finden.

Es bildet daher $m'On'$ an ∞On

a) Zusch. der kürzeren Kanten, wenn $\frac{m'n'}{m'+n'}=n$; Fig. 97.

b) Achtfl. Zusp. der tetr. Ecke - - - - - > - Fig 98.

c) Sechsfl. Zusp. der ditrig. Ecke - - - - - < - Fig. 99.

Im Falle c sind die CK. auf den längeren Kanten

α) rechtwinklig, wenn $n'=n$; Fig. 99.
β) spitzwinklig - - - > -
γ) stumpfwinklig - - - < -

Ausserdem werden im Falle cγ die CK. den kürzeren Kanten von ∞On parallel, wenn $\frac{m'n'}{m'-n'}=n$.

CG. $n''(n'-n)m'-m''(n''-n)n'=0$.

2) Mit $m'Om'$; die Flächen dieser Gestalt sind immer auf die kürzeren Kanten aufgesetzt und bilden:

a) Abst. derselben, ... wenn $m'=2n$; Fig. 100.
b) Vierfl. Zusp. der tetr. Ecke - - - > - - Fig. 101.
c) Dreifl. Zusp. der ditrig. Ecke - - - < - - Fig. 102.

Im Falle c sind die CK. auf den längeren Kanten:

α) rechtwinklig, wenn $m'=n$
β) spitzwinklig - - - > -
γ) stumpfwinklig - - - < -

Ausserdem erscheinen im Falle cγ die Zuspfl. als Rhomben, wenn $m'=n-1$; Fig. 102.

CG. $n''(m'-n)-m''(n''-n)=0$.

3) Mit $m'O$; da r' jedenfalls $< r$, und $\frac{t'}{r'}<\frac{t}{r}$, so kann nur der Fall Nr. 9 Statt finden; die Flächen sind immer auf die längeren Kanten gesetzt, und bilden dreifl. Zusp. der ditrig. Ecke; die CK. sind stumpfwinklig auf den längeren Kanten, und werden den kürzeren Kanten parallel, wenn $m'=\frac{n}{n-1}$

Fig. 103; die Zuspfl. erscheinen endlich als Rhomben, wenn $m' = \frac{1}{n-1}$

CG. $m''(n''-n) + n''(n-1)m' = 0.$

4) $\infty On'$ bildet Zusch. der längeren Kanten oder vierfl. auf die Flächen gesetzte Zusp. der tetr. Ecke, je nachdem $n' <$ oder $> n$; Fig. 104.

CG. $m'' = \infty.$

5) ∞O bildet Abst. der längeren Kanten; Fig 105.

CG. $m'' = \infty$ und $n'' < n.$

6) O bildet Abst. der ditrig. Ecke; erscheinen die Abstfl. als regelmässige Hexagone, so ist $n = 2$; Fig. 106.

CG. $m''(n''-n) + n''(n-1) = 0.$

7) $\infty O \infty$ bildet Abst. der tetr. Ecke; Fig. 107.

CG. $m'' = \infty$ und $n'' > n.$

§. 162.

Combinationen des Rhombendodekaëders ∞O.

1) Mit $m'On'$; da $r' > r$ und $\frac{t'}{r'} < \frac{t}{r}$, so können nur die CV. Nr. 1, 5 und 8 Statt finden, und es bildet daher $m'On'$ an ∞O:

a) Zusch. der Kanten, wenn $m'n' = m' + n'$; Fig. 108.

b) Achtfl. Zusp. der tetr. Ecke - - - - > - - - Fig. 109.

c) Sechsfl. Zusp. der trig. Ecke - - - - < - - - Fig. 110.

CG. $n''(n'-1)m' - m''(n''-1)n' = 0.$

2) $m'Om'$; seine Flächen sind immer auf die Kanten gesetzt, und bilden:

a) Abst. derselben, ... wenn $m' = 2$; Fig. 111.
b) Vierfl. Zusp. der tetr. Ecke - - - > - Fig. 112.
c) Dreifl. Zusp. der trig. Ecke - - - < - Fig. 113.
CG. $n''(m'-1) - m''(n''-1) = 0$.

3) $m'O$ bildet dreifl. auf die Flächen gesetzte Zusp. der trig. Ecke; Fig. 114.
CG. $n'' = 1$ und $m'' > m'$.

4) $\infty O n'$ bildet vierfl. auf die Flächen gesetzte Zusp. der tetr. Ecke; Fig. 115.
CG. $m'' = \infty$ und $n'' < n'$.

5) O bildet Abst. der trig. Ecke; Fig. 116.
CG. $n'' = 1$.

6) $\infty O \infty$ bildet Abst. der tetr. Ecke; Fig. 117.
CG. $m'' = \infty$.

§. 163.

Combinationen des Oktaëders O.

Es bilden an O

1) $m'On'$, achtfl. Zusp. der Ecke; sind je zwei auf einer und derselben Oktaëderfläche einander gegenüberliegende CK. parallel, so ist $n' = \frac{2m'}{m'+1}$; Fig. 118.
CG. $m''n''(m'-n') - m''(m'-1)n' + n''(n'-1)m' = 0$.

2) $m'Om'$, vierfl. auf die Flächen gesetzte Zusp. der Ecke; Fig. 119.
CG. $m'' = n''$.

3) $m'O$, Zusch. der Kanten; Fig. 120.
CG. $n'' = 1$, und $m'' < m'$.

4) $\infty On'$, vierfl. auf die Kanten gesetzte Zusp. der Ecke; sind je zwei, auf einer und derselben Oktaëderfläche einander gegenüberliegende CK. parallel, so ist $n = 2$; Fig. 121.
CG. $m''(n'' - n') + n''(n'-1) = 0$.

5) ∞O Abst. der Kanten; Fig. 122.
CG. $n'' = 1$.

6) $\infty O \infty$. Abst. der Ecke; Fig. 123 und 124.
CG. $m'' = n''$.

§. 164.

Combinationen des Hexaëders $\infty O \infty$.

Es bilden an $\infty O \infty$

1) $m'On'$, sechsfl. Zusp. der Ecke; Fig. 125.
CG. $\frac{m''}{n''} = \frac{m'}{n'}$.

2) $m'Om'$, dreifl. auf die Flächen gesetzte Zusp. der Ecke. Fig. 126.
CG. $m'' = n''$.

3) $m'O$, dreifl. auf die Kanten gesetzte Zusp. der Ecke; Fig. 127.
CG. $\frac{m''}{n''} = m'$.

4) $\infty On'$, Zusch. der Kanten; Fig. 128.
CG. $m'' = \infty$ und $n'' > n'$.

5) ∞O, Abst. der Kanten; Fig. 129.
CG. $m'' = \infty$.

6) O, Abst. der Ecke; Fig. 130 und 124.
CG. $m'' = n''$.

B. *Semitesserale Combinationen.*

a) Geneigtflächig - semitesserale Combinationen.

§. 165.

Allgemeine Bemerkung.

Die geneigtflächig-semitesseralen Combinationen sind diejenigen, in welchen die der geneigtflächigen Hemiëdrie fähigen Gestalten wirklich hemiëdrisch auftreten; in welchen also das Oktaëder als Tetraëder, das Triakisoktaëder als Deltoiddodekaëder, das Ikositetraëder als Trigondodekaëder, und das Hexakisoktaëder als Hexakistetraëder erscheint, während die übrigen drei Gestalten, nämlich das Hexaëder, Rhombendodekaëder und Tetrakishexaëder ihren holoëdrischen Charakter behaupten. Zur Auffindung der Combinationsverhältnisse werden wir auch hier die binären Combinationen je zweier dieser Gestalten, oder je einer derselben mit allen übrigen zu untersuchen haben, indem wir nach der Reihe eine jede als vorherrschend betrachten, und die Modificationen angeben, welche sie durch die Flächen der untergeordneten Gestalt erfährt. Aber wiederum werden wir, um methodisch zu verfahren, und die Aufgabe mit e i n e m Male in möglichster Allgemeinheit zu lösen, den Anfang mit der Combination zweier Hexakistetraëder $\frac{mOn}{2}$ und $\frac{m'On'}{2}$ machen müssen. Dabei sind jedoch, wie bei der Untersuchung der Combinationsverhältnisse hemiëdrischer Gestalten überhaupt, die zweierlei Stellungen, welche je zwei hemiëdrische Gestalten zu einander haben können, wohl zu berücksichtigen, und deshalb nicht nur die Combinationen von $\frac{mOn}{2}$ und $\frac{m'On'}{2}$, sondern auch jene von $\frac{mOn}{2}$ und $-\frac{m'On'}{2}$ zu untersuchen.

§. 166.

Combinationen zweier Hexakistetraëder.

Die Erscheinungsweise der Combinationen zweier Hexakistetraëder, von denen das eine als vorherrschend zu denken ist, wird unter Voraussetzung gleicher Hauptaxen offenbar von dem Grössenverhältnisse der holoëdrischen und hemiëdrischen trigonalen Halbaxen, oder von dem Verhältnisse der Coëfficienten t und τ, t' und τ' abhängen, wie folgt:

A. Beide Hexakistetraëder befinden sich in derselben Stellung.

Dann bilden an $\frac{mOn}{2}$ als vorherrschender Gestalt die Flächen von $\frac{m'On'}{2}$

I. Zuschärfungen der Kanten, und zwar

1) der kürzesten Kanten, wenn $t' = t$, $\tau' > \tau$, und folglich $\frac{t'}{\tau'} < \frac{t}{\tau}$; Fig. 131.

2) der mittleren Kanten, wenn $\tau' = \tau$, $t' > t$, und folglich $\frac{t'}{\tau'} > \frac{t}{\tau}$; Fig. 132.

3) der längsten Kanten, wenn $\frac{t'}{\tau'} = \frac{t}{\tau}$, $\tau' < \tau$, und folglich $t' < t$; Fig. 133.

II. Vierflächige Zuspitzungen der rhombischen Ecke, wenn $t' > t$ und $\tau' > \tau$, und zwar sind die CK. mit den längsten Kanten:

4) Parallel, wenn $\frac{t'}{\tau'} = \frac{t}{\tau}$.

5) Convgt. nach den spitzen ditrig. Ecken, wenn $\frac{t'}{\tau'} > \frac{t}{\tau}$; Fig. 134.

6) Convgt. nach den stumpfen ditr. Ecken, wenn $\frac{t'}{\tau'} < \frac{t}{\tau}$.

III. Sechsflächige Zuspitzungen der spitzen ditrigonalen Ecke, wenn $\tau' < \tau$ und $\frac{t'}{\tau'} > \frac{t}{\tau}$, und zwar sind die CK. mit den kürzesten Kanten:

7) Parallel, wenn $t' = t$.

8) Convgt. nach den rhomb. Ecken, wenn $t' > t$.

9) Convgt. nach den stumpfen ditr. Ecken, wenn $t' < t$; Fig. 135.

IV. Sechsfl. Zusp. der stumpfen ditr. Ecke, wenn $t' < t$ und $\frac{t'}{\tau'} < \frac{t}{\tau}$; und zwar sind die CK. mit den mittleren Kanten:

10) Parallel, wenn $\tau' = \tau$.
11) Convgt. nach den rhombischen Ecken, wenn $\tau' > \tau$.
12) Convgt. nach den spitzen ditr. Ecken, wenn $\tau' < \tau$; Fig. 136.

B. Das eine Hexakistetraëder befindet sich in verwendeter Stellung.

Bei dieser Stellung kann nur eine geringe Anzahl von Combinationsverhältnissen Statt finden. Weil nämlich die hemiëdrischen Halbaxen der einen Gestalt in die holoëdrischen Halbaxen der andern fallen, und *vice versa*, so sind die Verhältnisse von τ' und t, von t' und τ zu vergleichen, welche natürlich nicht so mannichfaltig seyn können, da immer $\tau > t$ und $\tau' > t'$ seyn muss. Diese einschränkenden Bedingungen gestatten überhaupt nur folgende Combinationen zwischen $\frac{mOn}{2}$ und $-\frac{m'On'}{2}$.

I. Sechsfl. Zusp. der spitzen ditrig. Ecke, wenn $t' < \tau$; und zwar sind die CK. mit den kürzesten Kanten von $\frac{mOn}{2}$:

13) Parallel, wenn $\tau' = t$;
14) Convgt. nach den rhomb. Ecken, wenn $\tau' > t$;
15) Convgt. nach den ditr. Ecken, wenn $\tau' < t$.

II. Zusch. der Kanten, und zwar nur

16) Zusch. der mittleren Kanten, wenn $t' = \tau$ und $\tau' > t$.

III. Zusp. der rhomb. Ecke, wenn $t' > \tau$; und zwar die CK. mit den längeren Kanten nur

17) Convgt. nach den spitzen ditr. Ecken, weil nothwendig $\tau' > t$.

§. 167.

Die Combinationsbedingungen als Functionen von m und n.

Die im vorhergehenden §. enthaltenen Combinationsbedingungen, welche die allgemeinen Relationen zwischen t, τ, t' und τ' ausdrücken, müssen jedoch als Functionen der Ableitungscoëfficienten ausgedrückt werden, damit man unmittelbar aus dem krystallographischen Zeichen zweier Gestalten die für sie möglichen Combinationsverhältnisse bestimmen kann. Setzt man für t, τ, t' und τ' ihre aus §. 114. und §. 130. bekannten Werthe, so erhält man:

$$t' >=< t, \text{ wenn } \frac{m'n'}{m'+n'} >=< \frac{mn}{m+n}$$

$$\tau' >=< \tau, \text{ wenn } \frac{m'n'}{m'-n'} >=< \frac{mn}{m-n}$$

$$\frac{t'}{\tau'} >=< \frac{t}{\tau}, \text{ wenn } \frac{m'(n'+1)}{n'} >=< \frac{m(n+1)}{n}$$

und für verwendete Stellung beider Gestalten:

$$t' >=< \tau, \text{ wenn } \frac{m'n'}{m'+n'} >=< \frac{mn}{m-n}$$

$$\tau' >=< t, \text{ wenn } \frac{m'n'}{m'-n'} >=< \frac{mn}{m+n}$$

Wir schreiten nun zur speciellen Darstellung der binären Combinationen.

§. 168.

Combinationen des Hexakistetraëders $\frac{mOn}{2}$.

1) Mit $\frac{m'On'}{2}$ und $-\frac{m'On'}{2}$; diese beiden Gestalten bringen die in §. 166. aufgezählten Combinations-

erscheinungen unter den daselbst angegebenen Bedingungen hervor.

CG. $m''n''(m'n+mn')-m''(m+m')nn'+n''(n'-n)mm'=0$*).

2) Mit $\frac{m'O}{2}$, und zwar

A. mit $+\frac{m'O}{2}$; da $n'=1$, so wird die Discussion der möglichen Fälle folgende:

Wenn $\tau' >=< \tau$, so ist $m' <=> \frac{mn}{n+m(n-1)}$

Wenn $t' >=< t$, so ist $m' >=< \frac{mn}{n-m(n-1)}$

Da nun nothwendig jederzeit

$$\frac{mn}{n+m(n-1)} < \frac{mn}{n-m(n-1)}$$

so muss für $\tau' =$ oder $> \tau$ nothwendig $t' < t$ seyn, während dagegen für $\tau' < \tau$ zwischen t' und t alle Verhältnisse Statt finden können. Hieraus folgt, dass nur die CV. Nr. 3, 7, 8, 9, 10, 11 und 12 möglich sind. Die Flächen von $\frac{m'O}{2}$ sind immer auf die längsten Kanten von $\frac{mOn}{2}$ gesetzt, und bilden:

---

*) Da bei paralleler Stellung beider Gestalten die Combinationsgleichungen unverändert so gelten, wie für die holoëdrischen Combinationen, so ist unter CG. die für verwendete Stellung gültige Combinationsgleichung zu verstehen. Uebrigens setzt die Form, in welcher die CG. hier mitgetheilt ist, voraus, dass die dritte Gestalt dieselbe Stellung habe wie die jedesmalige vorherrschende Gestalt. Sollte der entgegengesetzte Fall eintreten, so ist in allen Formeln m'' negativ einzuführen.

a) Abst, derselben, wenn $m' = \frac{m(n+1)}{2n}$; Fig 137.

b) Dreifl. Zusp. der sp. ditrig. Ecke - - - > - - - - Fig. 138.

c) Dreifl. Zusp. der st. ditrig. Ecke - - - < - - - - Fig. 139.

Im Falle b sind die CK. mit den kürzesten Kanten:

α) parallel, ... wenn $\frac{m'}{m'+1} = \frac{mn}{m+n}$

β) convgt. nach dem rhomb. Eckp. . . - - - - - - > - - -

γ) convgt. nach dem st. ditrig. Eckp. - - - - - - < - - -

Im Falle c sind die CK. mit den mittleren Kanten:

α) parallel, ... wenn $\frac{m'}{m'-1} = \frac{mn}{m-n}$

β) convgt. nach dem rhomb. Eckp. . . - - - - - - > - - -

γ) convgt. nach dem sp. ditrig. Eckp. - - - - - - < - - -

Ausserdem erscheinen die Zuspfl. als Rhomben

im Falle bγ, wenn $m' = \frac{m}{n - m(n-1)}$

im Falle cβ, wenn $m' = \frac{m}{n + m(n-1)}$

B. Mit $-\frac{m'O}{2}$; weil $\frac{mn}{m-n}$ immer > 1, und $\frac{m'}{m'+1}$ immer < 1, so folgt, dass jederzeit $t' < \tau$, und die möglichen CV. werden Nr. 13, 14 und 15. Daher bildet $-\frac{m'O}{2}$ an $\frac{mOn}{2}$ jederzeit Zusp. der sp. ditrig. Ecke, und zwar sind die CK. mit den kürzeren Kanten

α) parallel, ... wenn $m' = \frac{mn}{m(n-1)-n}$

β) convgt. nach den rhomb. Eckp. - - - < - - - -

γ) convgt. nach den st. ditrig. Eckp. - - - > - - - -

Ausserdem erscheinen im Falle γ die Zuspfl. als Rhomben, wenn $m' = \frac{m}{m(n-1)-n}$.

CG. $m''n''(m'n+m) - m''(m+m')n - n''(n-1)mm' = 0.$

3) Mit $\frac{m'Om'}{2}$, und zwar

A. mit $+\frac{m'Om'}{2}$; da τ' immer $>\tau$, so werden Nr. 1, 4, 5, 6 und 11 die möglichen Fälle; die Flächen von $\frac{m'Om'}{2}$ sind immer auf die kürzesten Kanten von $\frac{mOn}{2}$ gesetzt, und bilden:

a) Abst. derselben, . . wenn $m'=\frac{2mn}{m+n}$; Fig. 140.
b) Zusch. der rhomb. Ecke - - - $>$ - - - Fig. 141.
c) Dreifl. Zusp. der st. ditrig. Ecke - - - $<$ - - - Fig. 142.

Im Falle b sind die CK. mit den längsten Kanten
α) parallel, ... wenn $m'=\frac{m(n+1)-n}{n}$
β) convgt. nach den sp. ditrig. E. - - - $>$ - - - - - -
γ) convgt. nach den st. ditrig. E. - - - $<$ - - - - - -

Ausserdem erscheinen im Falle c die Zuspfl. als Rhomben, wenn $m'=\frac{m(n-1)+n}{m}$.

B. Mit $-\frac{m'Om'}{2}$; da τ' immer $>t$, so können nur die CV. Nr. 14, 16 und 17 Statt haben; die Flächen von $-\frac{m'Om'}{2}$ sind immer auf die mittleren Kanten von $\frac{mOn}{2}$ aufgesetzt, und bilden:

a) Abst. derselben, . . wenn $m'=\frac{2mn}{m-n}$; Fig. 143.
b) Zusch. der rhomb. Ecke - - - $>$ - - - Fig. 144.
c) Dreifl. Zusp. der sp. ditrig. Ecke - - - $<$ - - - Fig. 145.

Im Falle c erscheinen die Zuspfl. als Rhomben, wenn $m'=\frac{m(n-1)-n}{m}$.

CG. $m''n''(m+n)-m''(m+m')n+n''(m'-n)m=0.$

4) Mit $\infty On'$; hier verschwindet der Unterschied der Stellung, und $\frac{t'}{\tau'}$ ist immer $> \frac{t}{\tau}$, weshalb denn auch nur die CV. Nr. 2, 5, 7, 8 und 9 Statt finden; nämlich

a) Zusch. der mittleren Kanten, . . wenn $n' = \frac{mn}{m-n}$
b) Vierfl. Zusp. der rhomb. Ecke - - - $>$ - - -
c) Sechsfl. Zusp. der sp. ditrig. Ecke, - - - $<$ - - -

Im Falle c sind die CK. mit den kürzesten Kanten:

α) parallel, ... wenn $n' = \frac{mn}{m+n}$
β) convgt. nach den rhomb. E. . . - - - $>$ - - -
γ) convgt. nach den st. ditrig. E. - - - $<$ - - -

5) Mit ∞O; $\frac{t'}{\tau'}$ ist immer $> \frac{t}{\tau}$; aber auch τ' immer $< \tau$, da $n' = 1$; also können nur die CV. Nr. 7, 8 und 9 Statt haben, und ∞O bildet stets dreifl. Zusp. der sp. ditrig. Ecke, die Zuspfl. auf die längsten Kanten aufgesetzt; und zwar sind die CK. mit den kürzesten Kanten:

α) parallel, ... : . . . . . . wenn $m + n = mn$; Fig. 146.
β) convgt. nach den rhomb. E. - - - - - $>$ - -
γ) convgt. nach den st. ditrig. E. - - - - - $<$ - -

6) $\infty O \infty$ bildet Abst. der rhomb. Ecke; Fig. 147.

7) $\frac{O}{2}$ bildet Abst. der st. ditrig. Ecke; erscheinen die Abstfl. als regelmässige Hexagone, so ist $n = \frac{2m}{m+1}$; Fig. 148. $-\frac{O}{2}$ bildet Abst. der sp. ditrig. Ecke; Fig. 149; erscheinen die Abstfl. als regelmässige Hexagone, so ist $n = \frac{2m}{m-1}$.

CG. $m''n''(m+n) - m''(m+1)n - n''(n-1)m = 0$.

§. 169.

Combinationen des Trigondodekaëders $\frac{mOm}{2}$.

1) Mit $\frac{m'On'}{2}$, und zwar:

A. mit $+\frac{m'On'}{2}$; weil τ' immer $<\tau$, so können nur die CV. Nr. 3, 7, 8, 9 und 12 Statt finden, also:

a) Zusch. der kürzeren Kanten, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'}=m+1$; Fig. 150.

b) Sechsfl. Zusp. der ditrig. E. - - - - - - - $>$ - - - Fig. 151.

c) Sechsfl. Zusp. der trig. E. - - - - - - - $<$ - - - Fig. 152.

Im Falle b sind die CK. auf den längeren Kanten:

α) rechtwinklig, wenn $\frac{m'n'}{m'+n'}=\frac{1}{2}m$; Fig. 151.

β) stumpfwinklig - - - - - - $>$ - -

γ) spitzwinklig - - - - - - $<$ - -

Ausserdem werden im Falle bβ die CK. den kürzeren Kanten parallel, wenn $\frac{m'(n'-1)+n'}{m'}=m$.

B) Mit $-\frac{m'On'}{2}$; weil t' immer $<\tau$, so können nur die CV. Nr. 13, 14 und 15 Statt haben; die Flächen des Hexakistetraëders bilden daher stets sechsfl. Zusp. der ditrig. Ecke, und zwar sind die CK. auf den längsten Kanten:

α) rechtwinklig, wenn $\frac{m'n'}{m'-n'}=\frac{1}{2}m$

β) stumpfwinklig - - - - - - $>$ - -

γ) spitzwinklig . . - - - - - - $<$ - -

Im Falle β werden die CK. den kürzeren Kanten parallel, wenn $\frac{m'(n'-1)-n'}{m'}=m$

CG. $m''n''(m'+n')-m''(m+m')n'+n''(n'-m)m'=0.$

2) Mit $\frac{m'O}{2}$, und zwar:

A. mit $+\frac{m'O}{2}$; da τ' immer $< \tau$, so sind nur die CV. Nr. 3, 7, 8, 9 und 12 möglich; die Flächen von $\frac{m'O}{2}$ sind immer auf die kürzeren Kanten gesetzt, und bilden:

a) Abst. derselben, . wenn $m' = \frac{m+1}{2}$; Fig. 153.

b) Dreifl. Zusp. der ditrig. Ecke - - - $>$ - - - Fig. 154.

c) Dreifl. Zusp. der trig. Ecke - - - $<$ - - - Fig. 155.

Im Falle b sind die CK. auf den längeren Kanten:

α) rechtwinklig, wenn $m' = \frac{m}{2-m}$

β) stumpfwinklig - - - $>$ - - -

γ) spitzwinklig - - - $<$ - - -

Ausserdem erscheinen die Zuspfl. im Falle bγ als Rhomben, wenn $m' = \frac{1}{2-m}$.

B. Mit $-\frac{m'O}{2}$; da t' immer $< \tau$, so können nur dreifl. Zusp. der ditrig. Ecke Statt finden, die Zuspfl. auf die kürzeren Kanten gesetzt, und zwar sind die CK. auf den längeren Kanten:

α) rechtwinklig, wenn $m' = \frac{m}{m-1}$

β) stumpfwinklig - - - $<$ - - -

γ) spitzwinklig - - - $>$ - - -

CG. $m''n''(m'+1) - m''(m+m') - n''(m-1)m' = 0$.

3) Mit $\frac{m'Om'}{2}$, und zwar:

A. mit $+\frac{m'Om'}{2}$; diese Gestalt, deren Flächen immer auf die Flächen gesetzt sind, bildet

a) Zusch. der längeren Kanten, wenn $m' > m$; Fig. 156.
b) Dreifl. Zusp. der trig. E. . . - - - $<$ -

B. mit $-\frac{m'Om'}{2}$; da $t' < \tau$, uud $\tau' > t$, so bildet diese Gestalt jederzeit dreiflächige, auf die längeren Kanten gesetzte Zusp. der ditrig. Ecke; Fig. 157; die Zuspfl. erscheinen als Rhomben, wenn $m' = m - 2$.

CG. $2m''n'' - m''(m + m') + n''(m' - m) = 0$

4) Mit $\infty On'$; da τ' immer $< \tau$, und $\frac{t'}{\tau'} > \frac{t}{\tau}$, so können nur die CV. Nr. 7, 8 und 9 Statt finden; $\infty On'$ bildet daher jederzeit sechsfl. Zusp. der ditrig. Ecke, und zwar sind die CK. auf den längeren Kanten:

α) rechtwinklig, wenn $n' = \frac{1}{2}m$
β) stumpfwinklig - - - $>$ - - Fig. 162.
γ) spitzwinklig - - - $<$ - -

Ausserdem werden im Falle β die CK. den kürzeren Kanten parallel, wenn $n' = m + 1$; Fig. 162.

5) Mit ∞O; diese Gestalt bildet immer dreifl. auf die kürzeren Kanten gesetzte Zusp. der ditrig. Ecke; und zwar sind die CK. auf den längeren Kanten:

α) rechtwinklig, wenn $m = 2$; Fig. 158.
β) stumpfwinklig - - - $<$ -
γ) spitzwinklig - - - $>$ -

6) $\infty O \infty$ bildet Abst. der längeren Kanten; Fig. 159.

7) $\frac{O}{2}$ bildet Abst. der trigonalen Ecke; Fig. 160.

$-\frac{O}{2}$ bildet Abst. der ditrig. Ecke; Fig. 161; erscheinen im letzteren Falle die Abstfl. als regelmässige Hexagone, so ist $m = 3$.

CG. $2m''n'' - m''(m + 1) - n''(m - 1) = 0$.

I.

§. 170.

Combinationen des Deltoiddodekaëders $\frac{mO}{2}$.

1) Mit $\frac{m'On'}{2}$, und zwar:

A. mit $+\frac{m'On'}{2}$; die Discussion der CV. ist dieselbe, wie oben in §. 168. Es wird nämlich

$$t' >=< t, \text{ wenn } m' >=< \frac{mn'}{n'+m(n'-1)}$$

$$\tau' >=< \tau, \text{ wenn } m' <=> \frac{mn'}{n'-m(n'-1)}$$

Da nun nothwendig immer

$$\frac{mn'}{n'-m(n'-1)} > \frac{mn'}{n'+m(n'-1)}$$

so folgt, dass für $\tau' =$ oder $< \tau$ jedenfalls $t' > t$ seyn muss, während für $\tau' > \tau$, $t' >=< t$ seyn kann. Daher sind nur die CV. Nr. 1, 2, 4, 5, 6, 8 und 11 möglich, und es bildet $\frac{m'On'}{2}$:

a) Sechsfl. Zusp. der sp. trig. Ecke, wenn $\frac{m'n'}{m'-n'} < \frac{m}{m-1}$; Fig. 163

b) Zusch. der längeren Kanten - - - - - - - $=$ - - - Fig 164

c) Vierfl. Zusp. der rhomb. Ecke, wenn $\frac{m'n'}{m'-n'} > \frac{m}{m-1}$ und $\frac{m'n'}{m'+n'} > \frac{m}{m+1}$; Fig. 165

d) Zusch. der kürzeren Kanten, wenn - - - - - - - - - - - $=$ - - - Fig. 166

e) Sechsfl. Zusp. der st. trig. Ecke, wenn - - - - - - - - - - - $<$ - - - Fig. 167

Im Falle c sind die CK. mit den symmetrischen Diagonalen:

α) parallel. . . . . wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} = 2m$

β) convgt. nach den sp. trig. E. - - - - - - - $>$ - -

γ) convgt. nach den st. trig. E. - - - - - - - $<$ - -

Ausserdem werden die CK. parallel den längeren Kanten im Falle $c\gamma$, wenn $\frac{m'}{n'-m'(n'-1)}=m$, parallel den kürzeren Kanten im Falle a, wenn $\frac{m'}{n'+m'(n'-1)}=m$.

B. Mit $-\frac{m'On'}{2}$; da τ' immer $>\tau$, so können nur die CV. Nr. 14, 16 und 17 Statt finden, nämlich:

a) Zusch. der längeren Kanten, wenn $\frac{m'n'}{m'+n'}=\frac{m}{m-1}$

b) Vierfl. Zusp. der rhomb. Ecke - - - - - $>$ - - -

c) Sechsfl. Zusp. der sp. trig. Ecke - - - - - $<$ - - -

Im Falle c werden die CK. den kürzeren Kanten parallel, wenn $\frac{m'}{m'(n'-1)-n'}=m$.

CG. $m''n''(mn'+m')-m''(m+m')n'+n''(n'-1)mm'=0$.

2) Mit $\frac{m'O}{2}$, und zwar:

A. mit $+\frac{m'O}{2}$; diese Gestalt bildet Zusp. der sp. oder der st. trig. Ecke, je nachdem $m'>$ oder $<m$; Fig. 168;

B. mit $-\frac{m'O}{2}$; bildet jederzeit flache, auf die Flächen gesetzte Zusp. der sp. trig. Ecke; Fig. 169.

CG. $n''=1$.

3) Mit $\frac{m'Om'}{2}$, und zwar:

A. mit $+\frac{m'Om'}{2}$; da τ' immer $>\tau$, so können nur die CV. Nr. 1, 4, 5, 6 und 11 Statt finden; die Flächen sind immer auf die kürzeren Kanten gesetzt und bilden:

a) Abst. derselben, . wenn $m' = \frac{2m}{m+1}$; Fig. 170.
b) Zusch. der rhomb. E. - - - $>$ - - - Fig. 171.
c) Dreifl. Zusp. der st. trig. E. - - - $<$ - - - Fig. 172.

Im Falle b sind die CK. mit den symmetrischen Diagonalen:

α) parallel, ... wenn $m' = 2m - 1$
β) convgt. nach den sp. trig. E. - - - $>$ - - - - -
γ) convgt. nach den st. trig. E. - - - $<$ - - - - -

Ausserdem werden im Falle bγ die CK. den längeren Kanten parallel, wenn $m' = \frac{2m-1}{m}$.

B. mit $-\frac{m'Om'}{2}$; diese Gestalt, deren Flächen immer auf die längeren Kanten gesetzt sind, bildet:

a) Abst. derselben, . . wenn $m' = \frac{2m}{m-1}$; Fig. 173
b) Zusch. der rhomb. Ecke - - - $>$ - - - Fig. 174.
c) Zusp. der sp. trig. Ecke - - - $<$ - - - Fig. 175.

CG. $m''n''(m+1) - m''(m'+m) + n''(m'-1)m = 0.$

4) Mit $\infty On'$; da t' immer $> t$, und $\frac{t'}{\tau'} > \frac{t}{\tau}$, so sind nur die CV. Nr. 2, 5 und 8 möglich, und es bilden die Flächen von $\infty On'$

a) Zusch. der längeren Kanten, wenn $n' = \frac{m}{m-1}$
b) Vierfl. Zusp. der rhomb. E. . - - - $>$ - - -
c) Sechsfl. Zusp. der sp. trig. E. - - - $<$ - - -

5) ∞O bildet Zusp. der sp. trig. Ecke, die Zuspfl. auf die Flächen gesetzt; Fig. 176.

6) $\infty O \infty$ bildet Abst. der rhombischen Ecke; Fig. 177.

7) $\frac{O}{2}$ bildet Abst. der st. trig. Ecke, und

$-\frac{O}{2}$ Abst. der sp. trig. Ecke; Fig. 178 und 179.
CG. $n'' = 1$.

§. 171.
Combinationen des Tetraëders $\frac{O}{2}$.

Es bilden an $\frac{O}{2}$ die Flächen

1) von $\frac{m'On'}{2}$ spitze, von $-\frac{mOn}{2}$ stumpfe sechsfl. Zusp. der Ecke; sind von den auf einer und derselben Tetraëderfläche liegenden CK. je zwei gegenüberliegende parallel, so ist im ersten Falle $n = \frac{2m}{m+1}$, im zweiten Falle $n = \frac{2m}{m-1}$; Fig. 180.
CG. $m''n''(m'+n') - m''(m'+1)n' + n''(n'-1)m' = 0$.

2) von $\frac{m'O}{2}$ spitze, von $-\frac{m'O}{2}$ stumpfe, dreifl. auf die Flächen gesetzte Zusp. der Ecke; Fig. 181 u. 182.
CG. $n'' = 1$.

3) von $\frac{m'Om'}{2}$ Zuschärfungen der Kanten; Fig. 183.
von $-\frac{m'Om'}{2}$ stumpfe, dreifl. auf die Kanten gesetzte Zusp. der Ecke; Fig. 184.
CG. $2m''n'' - m''(m'+1) + n''(m'-1) = 0$.

4) von $-\frac{O}{2}$ Abst. der Ecke; Fig. 185.
CG. $n'' = 1$.

5) von $\infty On'$, sechsfl. Zusp. der Ecke; sind von den auf einer und derselben Tetraëderfläche gelegenen CK. je zwei gegenüberliegende parallel, so ist $n = 2$.

6) von ∞O, stumpfe, dreifl. auf die Flächen gesetzte

Zusp. der Ecke, so dass jede Zuspfl. normal auf derjenigen Tetraëderkante ist, mit welcher sie nicht unmittelbar zum Durchschnitte kommt; Fig. 186.

7) von $\infty O \infty$, Abst. der Kanten; Fig. 187.

§. 172.

Combinationen des Tetrakishexaëders ∞On.

1) Mit $\frac{m'On'}{2}$; diese Gestalt bildet:

a) Zusch. der an den abwechselnden ditrig. Ecken liegenden kürzeren Kanten, wenn $\frac{m'n'}{m'+n'} = n$.

b) Vierfl. Zusp. der tetr. Ecke, je zwei Zuspfl. auf zwei gegenüberliegende Kanten gesetzt, wenn $\frac{m'n'}{m'+n'} > n$.

c) Sechsfl. Zusp. der abwechselnden ditrig. Ecke, wenn $\frac{m'n'}{m'+n'} < n$.

2) $\frac{m'Om'}{2}$ bildet:

a) Abst. der an den abwechselnden ditrig. Ecken liegenden kürzeren Kanten, wenn $m' = 2n$.

b) Zusch. der tetr. Ecke, die Zuschfl. auf die gegenüberliegenden Kanten gesetzt, wenn $m' > 2n$.

c) Dreifl. Zusp. der abwechselnden ditrig. Ecke, die Zuspfl. auf die kürzeren Kanten gesetzt, wenn $m' < 2n$.

3) $\frac{m'O}{2}$ bildet dreifl. Zusp. der abwechselnden ditrig. Ecke, die Zuspfl. auf die längeren Kanten gesetzt.

4) $\frac{O}{2}$ bildet Abst. der abwechselnden ditrig. Ecke; erscheinen die Abstfl. als regelmässige Hexagone, so ist $n = 2$.

§. 173.

Combinationen des Rhombendodekaëders und Hexaëders.

Es bildet am Rhombendodekaëder ∞O

1) $\frac{m'On'}{2}$

a) Zusch. der in den abwechselnden trigonalen Ecken liegenden Kanten, wenn $m'n' = m' + n'$; Fig. 188.

b) Vierfl. Zusp. der tetr. Ecke, je zwei Zuspfl. auf zwei gegenüberliegende Kanten gesetzt, wenn $m'n' > m' + n'$.

c) Sechsfl. Zusp. der abwechselnden trig. Ecke, wenn $m'n' < m' + n'$.

2) $\frac{m'Om'}{2}$

a) Abst. der Kanten der abwechselnden trigonalen Ecke, wenn $m = 2$; Fig. 189.

b) Zusch. der tetr. Ecke, die Zuschfl. auf die gegenüberliegenden Kanten gesetzt, wenn $m > 2$; Fig. 190.

c) Dreifl. Zusp. der abwechselnden trig. Ecke, wenn $m < 2$.

3) $\frac{m'O}{2}$ dreifl. auf die Flächen gesetzte Zusp. der abwechselnden trig. Ecke.

4) $\frac{O}{2}$, Abst. der abwechselnden trig. Ecke.

Es bildet am Hexaëder $\infty O \infty$:

1) $\frac{m'On'}{2}$, sechsfl. Zusp. der abwechselnden Ecke.

2) $\frac{m'Om'}{2}$, dreifl. auf die Flächen gesetzte Zusp. der abwechselnden Ecke.

3) $\frac{m'O}{2}$, dreifl. auf die Kanten gesetzte Zusp. der abwechselnden Ecke.

4) $\frac{O}{2}$, Abst. der abwechselnden Ecke.

b) Parallelflächig-semitesserale Combinationen.

§. 174.

Bedingungen für die regelmässigen Combinationen.

Bei der Untersuchung der parallelflächig-semitesseralen Combinationen haben wir zunächst die Combinationen zweier Dyakisdodekaëder $\left[\frac{mOn}{2}\right]$ und $\left[\frac{m'On'}{2}\right]$ zu berücksichtigen, jedoch wegen der eigenthümlichen Beschaffenheit dieser Gestalten einen etwas andern Weg einzuschlagen, als bisher. Zu den durch eine gewisse Regelmässigkeit ausgezeichneten Combinationen werden nämlich nicht nur die vier, da die CK. einer der Seiten, sondern auch die beiden zu rechnen seyn, da sie einer der Diagonalen der Flächen der vorherrschenden Gestalt $\left[\frac{mOn}{2}\right]$ parallel laufen. Wir haben daher folgende sechs regelmässige CV. auszuheben: die CK. sind parallel

1) der längsten Kante B'' (Fig. 17 a),
2) der kürzesten Kante A'',
3) der unregelmässigen Kante an B'',
4) der unregelmässigen Kante an A'',
5) der gleichschenkligen Diagonale,
6) der ungleichschenkligen Diagonale.

Die Bedingungen für diese CV. sind theils unmittelbar, theils mittels der Combinationsgleichung leicht aufzufinden; es werden nämlich

A. bei gleicher Stellung beider Gestalten, die CK. parallel

1) der längsten Kante B'', wenn $n' = n$;

2) der kürzesten Kante A'', wenn $m' = m$;
3) der unregelmässigen Kante an B'', welche wir wie oben mit C'' bezeichnen wollen, wenn
$m'(m^2 - n)n - n'(mn - 1)mn - m'n'(m - n^2)m = 0$;
4) der unregelmässigen Kante an A'', welche wir zum Unterschiede von der vorigen mit C''_1 bezeichnen, wenn
$m'(mn - 1)mn + n'(m - n^2)m - m'n'(m^2 - n)n = 0$;
5) der gleichschenkligen Diagonale; für diesen Fall sucht man aus den bekannten Coordinaten der Endpuncte der Diagonale die Gleichung derselben, und erhält dann als Bedingungsgleichung für jede mit ihr parallele Fläche:

$$m'n'(m - n) - m'(m - 1)n + n'(n - 1)m = 0$$

oder auch $$\frac{m'(n' - 1)}{n'(m' - 1)} = \frac{m(n - 1)}{n(m - 1)}$$

6) der ungleichschenkligen Diagonale, wenn

$$\frac{m'n'}{m' + n'} = \frac{mn}{m + n}.$$

B. Bei verwendeter Stellung der zweiten Gestalt, die CK. parallel *)
1) der längsten Kante B'', wenn $m' = n$;
2) der kürzesten Kante A'', wenn $n' = m$;
3) der unregelmässigen Kante C'', wenn
$n'(m^2 - n)n - m'(mn - 1)mn - m'n'(m - n^2)m = 0$;
4) der unregelmässigen Kante C''_1, wenn
$m'(m - n^2)m + n'(mn - 1)mn - m'n'(m^2 - n)n = 0$;
5) der gleichschenkligen Diagonale; dieser Fall ist unmöglich, weil er voraussetzt, dass $n' = 1$ und $m' = 1$;
6) der ungleichschenkligen Diagonale, wenn

$$\frac{m'n'}{m' + n'} = \frac{mn}{m + n}.$$

---

*) Man erhält diese Bedingungen aus den vorigen, wenn man in denselben die Buchstaben m' und n' vertauscht.

Da die aus den Bedingungsgleichungen für den Parallelismus der CK. mit den unregelmässigen Kanten folgenden Werthe von m' und n' eine wichtige Rolle in den nächstfolgenden §§. spielen, so wollen wir zur Abkürzung diese Werthe mit den Buchstaben P, Q, R und S bezeichnen, wie folgt:

A. Bei gleicher Stellung beider Gestalten sind nämlich die CK. parallel

der Kante C'''_1, wenn $m' = \dfrac{n'(m-n^2)m}{n'(m^2-n)n-(mn-1)mn} =$

und $n' = \dfrac{m'(mn-1)mn}{m'(m^2-n)n-(m-n^2)m} =$

der Kante C''', wenn $m' = \dfrac{n'(mn-1)mn}{(m^2-n)n-n'(m-n^2)m} =$

und $n' = \dfrac{m'(m^2-n)n}{(mn-1)mn+m'(m-n^2)m} =$

B. Bei verwendeter Stellung dagegen sind die CK. parallel

der Kante C'''_1, wenn $m' = \dfrac{n'(mn-1)mn}{n'(m^2-n)n-(m-n^2)m} =$

und $n' = \dfrac{m'(m-n^2)m}{m'(m^2-n)n-(mn-1)mn} =$

Endlich wollen wir den Werth von n', welcher für den Parallelismus der CK. mit der gleichsch. Diagonale gefordert wird, mit T bezeichnen, also:

$$n' = \frac{m'(m-1)n}{m'(m-n)+m(n-1)} = T.$$

§. 175.

Erscheinungsweise der Combinationen zweier Dyakisdodekaëder.

Die Erscheinungsweise der Combinationen zweier Dyakisdodekaëder D und D', von welchen das erstere als vorherrschende, das letztere als untergeordnete Gestalt auftritt, ist im Allgemeinen folgender fünf wesentlich verschiedener Modificationen fähig:

I. Zuschärfungen der symmetrischen Kanten.
II. Abstumpfungen der unregelmässigen Kanten.
III. Vierflächiger Zuspitzungen der rhombischen Ecke.
IV. Dreiflächiger Zuspitzungen der trigonalen Ecke.
V. Zuschärfungen der unregelmässigen Ecke.

Die erste Modification begreift zwei Fälle unter sich, indem die Zuschärfung entweder die längsten oder die kürzesten Kanten trifft.

Für die zweite Modification ist wohl zu unterscheiden, ob die Abstumpfungsflächen ihrer Aufsetzung nach die an der längsten, oder die an der kürzesten Kante liegende unregelmässige Kante abstumpfen. Es sey nämlich die Fläche *abcd* in Fig. 18 eine der Flächen von D, so wird eine Fläche wie $a'bcd'$ die an der kürzesten Kante anliegende unregelmässige Kante C''_1, dagegen eine Fläche wie $abc'd'$ die an der längsten Kante anliegende Kante C'' abstumpfen, und man überzeugt sich leicht von der wesentlichen Verschiedenheit beider Fälle, obgleich sie für die Erscheinungsweise der Combination das gemeinschaftliche Resultat liefern, dass die unregelmässigen Kanten von D durch die Flächen von D' abgestumpft werden. Die Verschiedenheit ist in der Lage oder Richtung der Abstumpfungsflächen begründet, und lässt sich dadurch ausdrücken, dass man diese Flächen entweder als auf die kürzesten, oder als auf die längsten Kanten aufgesetzt bezeichnet; eine Bezeichnungsweise, der wir uns auch ferner bedienen werden.

Für die dritte Modification lässt sich keine wesentliche Verschiedenheit geltend machen.

Die vierte Modification lässt hinsichtlich der Aufsetzung der Flächen eine ähnliche Verschiedenheit zu wie die zweite Modification; doch tritt hier zwischen die beiden zu unterscheidenden Fälle ein dritter, eminenter, und gleichsam neutraler Fall ein. Die Zuspitzungsflächen erscheinen nämlich im Allgemeinen allerdings auf die Flächen aufgesetzt, aber ihre Aufsetzungsart ist doch sehr verschieden, je nachdem sie gegen beide unregelmässige Kanten gleich, oder gegen eine derselben mehr als gegen die andere geneigt sind. Fig. 19 stellt die beiden letzteren Fälle dar, und man sieht, dass die Combinationskanten, welche im Falle der gleichmässigen Aufsetzung mit den gleichschenkligen Diagonalen der Flächen von *D* parallel sind, in den letzteren beiden Fällen mit denselben nach der Richtung des einen oder andern unregelmässigen Eckpunctes convergiren müssen. Wir wollen die drei Fälle dadurch unterscheiden, dass wir die Zuspitzungsflächen auf die Flächen an einer der unregelmässigen Kanten (der C''_1 oder C'') als schief aufgesetzt, oder als gerade aufgesetzt bezeichnen.

Die fünfte Modification endlich gestattet wiederum in Bezug auf die Aufsetzung (Lage und Richtung) der Zuschärfungsflächen zwei wesentliche Verschiedenheiten. Es sey nämlich *abcd* in Fig. 20 eine Fläche der vorherrschenden Gestalt *D*, so wird sowohl eine Fläche wie $a'b'c'd'$, als auch eine Fläche wie $a''b''c''d''$ mit der zugehörigen Fläche ihres Paares eine Zuschärfung des unregelmässigen Eckes bilden. Im ersten Falle aber sind die Flächen auf die kürzeste und die anliegende mittlere Kante C''_1, im zweiten Falle auf die längste und die anliegende Kante C'' gesetzt, und es scheint, dass diese Ausdrücke den obwaltenden Unterschied mit hinlänglicher Bestimmtheit darstellen.

§. 176.

Allgemeine Uebersicht der Combinationsverhältnisse zweier Dyakisdodekaëder.

Nachdem wir nicht nur die Bedingungen für die sechs regelmässigen Lagen der Combinationskanten, sondern auch die wesentlich verschiedene Erscheinungsweise der Combinationen zweier Dyakisdodekaëder D und D' überhaupt kennen gelernt, so haben wir die Bedingungen für das Eintreten des einen oder andern Combinationsverhältnisses als Functionen der Ableitungscoëfficienten aufzusuchen. Die Resultate dieser Untersuchung sind folgende:

A. Die Gestalten befinden sich in gleicher Stellung; dann bildet D' an D:

I. Zuschärfungen der symmetrischen Kanten; und zwar:

1) Zusch. der längsten Kanten, wenn $n' = n$; und $m' > m$; Fig. 191.

2) Zusch. der kürzesten Kanten, wenn $m' = m$, und $n' > n$; Fig. 192.

II. Abstumpfungen der unregelmässigen Kanten; und zwar die Abstfl. aufgesetzt:

3) auf die längsten Kanten, wenn $m' < m$ und $n' = S$; Fig. 194.

4) auf die kürzesten Kanten, wenn $m' < m$ und $n' = R$ *); Fig. 193.

III. Vierfl. Zusp. der rhomb. Ecke,

5) jedenfalls, wenn $m' > m$ und $n' > n$; dabei können die regelmässigen CV. eintreten, dass die CK. parallel:

a) der gleichsch. Diagonale, wenn $n' = T$; Fig. 195.

b) der mittleren Kante C'', wenn $n' = S$

c) der mittleren Kante C''_1, wenn $n' = R$

welcher letztere Fall nur möglich ist, so lange $m < n^2$.

IV. Dreifl. Zusp. der trig. Ecke; setzt voraus, dass $m' < m$, und zwar sind die Zuspfl. auf die Flächen:

6) gerade aufgesetzt, wenn $n' = T$; Fig. 197,

7) einseitig schief an die Kante C'', gesetzt, wenn $n' > T$,

*) Also auch $n' > n$, unbedingt, so lange $m > n^2$.

8) einseitig schief an die Kante C'' gesetzt, wenn $n' < T$.

Im Falle Nr. 7 sind die CK. mit den längsten Kanten parallel, wenn $n' = n$; Fig. 196.

V. Zusch. der unregelmässigen Ecke; und zwar die Zuschfl.

9) auf die kürzeste und anliegende mittlere Kante gesetzt, wenn $n' > n$ und $m' < m$, aber $> P$; Fig. 198.

10) auf die längste und anliegende mittlere Kante gesetzt, wenn $n' < n$ und $m' > Q$; Fig. 199—201.

Im Falle Nr. 9 sind die CK. den ungleichsch. Diagonalen parallel, wenn $\frac{m'n'}{m'+n'} = \frac{mn}{m+n}$; im Falle Nr. 10 aber werden die CK. mit den kürzesten Kanten parallel, wenn $m' = m$; Fig. 199.

B. Die Gestalten befinden sich zu einander in verwendeter Stellung; dann bildet D' an D:

I. Zuschärfungen der symmetrischen Kanten, jedoch möglicherweise nur:

11) der kürzesten Kanten, wenn $n' = m$; und folglich $m' > n$; Fig. 192.

II. Abstumpfungen der unregelmässigen Kanten: diess setzt voraus, dass $n' < m$; und zwar sind die Abstfl. jederzeit:

12) auf die kürzesten Kanten gesetzt *); daher $m' = P'$; ähnlich Fig. 193.

---

*) Der zweite Fall ist unmöglich; er setzte nämlich voraus, dass $m' = \frac{n'(m^2-n)n}{n'(m-n^2)m + mn(mn-1)} = Q'$; da nun aber jederzeit $m' > n'$, wenn anders die verwendete Stellung Bedeutung haben soll, so wird $Q' > n'$, und $\frac{Q'}{n'} > 1$, oder $m^2n - n^2 > n'(m-n^2)m + m^2n^2 - mn$ die Bedingung für die Möglichkeit des zweiten Falles; folglich noch vielmehr $(m^2n - n^2)n > n'(m-n^2)m + m^2n^2 - mn$, woraus sich ergiebt $n' < \frac{n}{m}$, welches unmöglich.

III. Vierflächige Zuspitzungen der rhombischen Ecke,
13) jedenfalls, wenn $n' > m$, und folglich $m' > n$; ähnlich Fig. 195, doch können die CK. den gleichsch. Diagonalen niemals parallel werden.

IV. Dreiflächige Zuspitzungen der trigonalen Ecke, setzt voraus, dass $n' < m$ und $m' < P'$, daher
14) jedenfalls die Zuspfl. einseitig schief an die Kante C''_1 gesetzt *).

V. Zuschärfungen der unregelmässigen Ecke, und zwar die Zuschfl. jedenfalls:
15) auf die kürzeste und anliegende mittlere Kante gesetzt; $n' < m$ und $m' > P'$, daher auch $> n$.

§. 177.

Combinationen des Dyakisdodekaëders $\left[\frac{mOn}{2}\right]$.

1) Mit $\pm\left[\frac{m'On'}{2}\right]$; diese Gestalt bringt die im vorigen §. aufgezählten CV. unter den daselbst angegebenen Bedingungen hervor.

2) Mit $\frac{\infty On'}{2}$, und zwar:

A. mit $+\frac{\infty On'}{2}$; da m' immer $> m$, so können nur die CV. Nr. 1, 5 und 10 Statt finden: die Flächen sind jedenfalls auf die längsten Kanten aufgesetzt, und bilden:
a) Abst. derselben, ... wenn $n' = n$; Fig. 202.
b) Zusch. der rhomb. Ecke - - - $>$ - Fig. 203.
c) Abst. der unregelm. Ecke - - - $<$ - Fig. 204.
Im Falle b werden die CK. parallel:

*) Die Unmöglichkeit der übrigen Fälle lässt sich durch ähnliche Vergleichungen der erforderlichen Bedingungen darthun, wie solches in der vorhergehenden Anmerkung geschehen.

α) der gleichsch. Diagonale, wenn $n' = \frac{(m-1)n}{m-n}$; Fig. 203.

β) der Kante C'', wenn $n' = \frac{(m^2-n)n}{(m-n^2)m}$

Im Falle c werden die CK. parallel:

α) der Kante C''_1, wenn $n' = \frac{(mn-1)m}{m^2-n}$

β) der ungleichsch. Diagonale, wenn $n' = \frac{mn}{m+n}$; Fig. 204.

B. mit $-\frac{\infty O n'}{2}$; da $m' = \infty$, so können nur die CV. Nr. 11, 13 und 15 Statt finden; die Flächen sind jedenfalls auf die kürzesten Kanten gesetzt, und bilden;

a) Abst. derselben . . . . . wenn $n' = m$; Fig. 205.
b) Zusch. der rhomb. Ecke - - - $>$ - Fig. 206.
c) Abst. der unregelm. Ecke - - - $<$ - Fig. 207.

3) Mit $m'Om'$; da $n' = m'$, so können nur die CV. Nr. 2, 4, 5, 7 und 9 Statt finden, und es bildet daher $m'Om'$:

a) Vierfl. Zusp. der rhomb. Ecke, wenn $m' > m$
b) Zusch. der kürzesten Kanten - - $m' = m$
c) Zusch. der unregelm. Ecke, die Zuschfl. auf die kürzeste und anliegende mittlere Kante gesetzt . . . . - - $m' < m$ und $> U$
d) Abst. der unregelm. Kanten, die Abstfl. auf die kürzesten Kanten gesetzt . . - - - - - - - $= U$
e) Dreifl Zusp. der trig. Ecke, die Zuspfl. auf die Flächen einseitig schief an die Kante C''_1 gesetzt . . . . - - - - - - - $< U$

wobei $U = \frac{(mn-1)mn + (m-n^2)m}{(m^2-n)n}$.

Im Falle e sind die CK. mit den längsten Kanten

α) parallel, ... wenn $m' = n$; ähnlich Fig. 196.
β) convgt. nach der kürzesten Kante, ... - - - $>$ -
γ) convgt. nach der Kante C'' - - - $<$ -

Im Falle c werden die CK. den ungleichsch. Diagonalen parallel, wenn $m' = \frac{2mn}{m+n}$; dagegen können sie im Falle a niemals weder den gleichsch. Diagonalen, noch der Kante C'' parallel werden.

4) Mit $m'O$; da $n' < n$, so sind nur die CV. Nr. 3, 8 und 10 möglich; die Flächen sind immer von der längsten Kante her einseitig schief auf die unregelmässigen Kanten gesetzt, und bilden:

a) Abst. derselben, wenn $m' = V$; ähnlich Fig. 194.
b) Zusch. der unregelm. Ecke, . . - - - $>$ - - -
c) Dreifl. Zusp. der trig. Ecke, . . - - - $<$ - - -

wobei $V = \frac{(mn-1)mn}{(m^2-n)n-(m-n^2)m}$

Im Falle b sind die CK. mit den kürzesten Kanten

α) parallel, ... wenn $m' = m$; Fig. 199.
β) convgt. nach dem rhomb. Eckp. - - - $<$ -
γ) convgt. nach dem trig. Eckp. - - - $>$ -

5) Mit ∞O; diese Gestalt bildet in jedem Falle Abst. der unregelm. Ecke, und zwar sind die CK. mit der ungleichsch. Diagonale:

α) parallel, ... wenn $m + n = mn$; Fig. 208.
β) convgt. nach dem rhomb. Eckp. - - - - - $<$ - -
γ) convgt. nach dem trig. Eckp. - - - - - $>$ - -

6) O bildet jedenfalls Abst. der trig. Ecke, die CK. parallel den gleichsch. Diagonalen; Fig. 209.

7) $\infty O \infty$ bildet Abst. der rhomb. Ecke; Fig. 210, 211 und 212. Sind die CK. den Kanten C'' parallel,

so ist das Dyakisdodekaëder ein parallelkantiges; und dringen dann die Flächen von $\infty O \infty$ so weit ein, dass die kürzesten Kanten des Dyakisdodekaëders gänzlich verschwinden, so erscheinen auch die Flächen dieser Gestalt als Rhomben, und die ganze Combination als eine von 30 Rhomben umschlossene Gestalt, deren Flächen jedoch zweierlei Werth haben; Fig. 212; das eigentliche Triakontaëder des Mineralreiches. Die Flächen aller nicht parallelkantigen Dyakisdodekaëder dagegen erscheinen jederzeit als gleichschenklige Trapezoide; Fig. 211; das uneigentlich so genannte Triakontaëder des Mineralreiches.

§. 178.

Combinationen des Pentagondodekaëders $\frac{\infty O n}{2}$.

1) Mit $\left[\frac{m'On'}{2}\right]$, und zwar:

A. beide Gestalten in gleicher Stellung; da $m' < m$, so können nur die CV. Nr. 3, 4, 6, 7, 8, 9 und 10 Statt finden, also bildet das Dyakisdodekaëder:

a) Abst. der unregelmässigen Kanten, und zwar die Abstfl.

α) auf die regelm. Kanten gesetzt*), wenn $n' > n$, und $m' = \frac{n'}{(n'-n)n} = p$; ähnlich Fig. 217.

β) auf die Höhenlinien gesetzt, wenn $n' < n$, und $m' \gtrless \frac{n'n^2}{n-n'} = q$.

---

*) Es ist kaum nöthig, zu bemerken, dass die regelmässigen Kanten der Pentagondodekaëder den kürzesten Kantenpaaren, und die Höhenlinien ihrer Flächen den längsten Kanten der Dyakisdodekaëder entsprechen, so wie, dass der Ausdruck ungleichschenklige Diagonale nur beibehalten worden ist, um keinen neuen Terminus einzuführen.

b) Zusch. der unregelm. Ecke, und zwar die Zuschfl.
α) auf die regelmässige und anliegende unregelmässige Kante gesetzt, wenn $n' > n$ und $m' > p$; Fig. 214.
β) auf die Höhenlinie und anliegende unregelmässige Kante gesetzt, wenn $n' < n$ und $m' > q$; Fig. 216.

c) Dreifl. Zusp. der trigonalen Ecke, wenn $m' < p$ und $< q$; und zwar sind die Zuspfl. auf die Flächen:
α) gerade aufgesetzt, . . wenn $n' = \frac{m'n}{m' + n - 1}$; Fig. 215.
β) einseitig schief an die Kante C''_1, ... -- $n' >$ - - - - - - Fig. 213.
γ) einseitig schief an die Kante C'', ... -- $n' <$ - - - - - -

Im Falle cβ sind die CK. parallel den Höhenlinien der Pentagone, wenn $n' = n$; Fig. 213.

B. Beide Gestalten in verwendeter Stellung; da n' immer $< m$, so können nur die CV. Nr. 12, 14 und 15 Statt finden; daher bildet das Dyakisdodekaëder:

a) Abst. der unregelm. Kanten, die Abstfl. auf die regelmässigen Kanten gesetzt, wenn $m' = \frac{n'n^2}{n'n - 1} = r$; Fig. 217.

b) Zusch. der unregelm. Ecke, die Zuschfl. auf die regelm. und anliegende unregelm. Kante gesetzt, wenn $m' > r$; ähnlich Fig. 214.

c) Dreifl. Zusp. der trig. Ecke, die Zuspfl. auf die Flächen einseitig schief an die Kante C''_1 gesetzt, wenn $m' < r$.

Im Falle c sind die CK. den Höhenlinien der Pentagone parallel, wenn $m' = n$; ähnlich Fig. 213.

2) $+ \frac{\infty O n'}{2}$ bildet Zusch. der regelm. Kanten, Fig. 221, wenn $n' > n$; Abst. der unregelm. Ecke, die Abstfl. auf die Flächen gesetzt, wenn $n' < n$; Fig. 218.

$- \frac{\infty O n'}{2}$ bildet jedenfalls Abst. der unregelm. Ecke, die Abstfl. auf die regelm. Kanten gesetzt; sind die CK. parallel den ungleichsch. Diagonalen, so ist $n' = n$; Fig. 219.

3) Mit $m'Om'$; da $m' < m$, so sind nur die CV. Nr. 4, 7 und 9 möglich; es bildet daher $m'Om'$:

a) Abst. der unregelm. Kanten, die Abstfl. auf die regelm. Kanten gesetzt, wenn $m' = \frac{n^2+1}{n}$; ähnlich Fig. 217.

b) Zusch. der unregelm. Ecke, die Zuschfl. auf die regelm. und anliegende unregelm. Kanten gesetzt, wenn $m' > \frac{n^2+1}{n}$; ähnlich Fig. 214.

c) Zusp. der trig. Ecke, die Zuspfl. einseitig schief an die Kante C''_1 gesetzt, wenn $m' < \frac{n^2+1}{n}$.

Im Falle c. sind die CK. den Höhenlinien der Pentagone parallel, wenn $m' = n$.

4) Mit $m'O$; da $m' < m$, und $n' < n$, so sind nur die CV. Nr. 3, 8 und 10 möglich; die Flächen von $m'O$ sind immer von den Höhenlinien weg einseitig schief auf die unregelmässigen Kanten aufgesetzt, und bilden:

a) Abst. dieser Kanten, . . . wenn $m' = \frac{n^2}{n-1}$; ähnlich Fig. 217.

b) Dreifl. Zusp. der trig. Ecke, - - - $<$ - - -

c) Zusch. der unregelm. Ecke, - - - $>$ - - -

5) ∞O bildet stets Abst. der unregelm. Ecke; Fig. 220.

6) O bildet Abst. der trigonalen Ecke, d. CK. parallel den gleichsch. Diagonalen, Fig. 222; dringen

die Oktaëderflächen so weit ein, dass sie durch die unregelmässigen Eckpuncte gehen, so entsteht eine von 20 Dreiecken umschlossene Gestalt, deren Flächen jedoch zweierlei Werth haben; das Ikosaëder des Mineralreiches; Fig. 223.

7) $\infty O \infty$ bildet Abst. der regelmässigen Kanten; Fig. 224 und 225.

§. 179.

Combinationen des Ikositetraëders mOm.

1) Mit $\pm \left[\frac{m'On'}{2}\right]$; man kann die möglichen CV. sowohl aus §. 176, als auch aus §. 159 ableiten, wenn man nur auf diejenige Flächenhälfte von $m'On'$ Rücksicht nimmt, welche für seine parallelflächig-hemiëdrische Erscheinung gefordert wird. Wir ziehen die letztere Ableitung vor. Das Dyakisdodekaëder bildet daher an mOm:

a) Vierfl. Zusp. der tetr. E. je zwei Zuspfl. auf gegenüberliegende Kanten gesetzt, . . wenn $n' > m$

b) Zusch. je zweier gegenüberl. Kanten der tetr. Ecke, - - $n' = m$

c) Zusch. der rhomb. Ecke, die Zuschfl. auf die längsten Kanten einseitig schief aufgesetzt - - $n' < m$ und $\frac{m'(n'+1)}{n'} > m+1$

d) Abst. der kürzeren Kanten, die Abstfl. einseitig schief aufgesetzt - - - - - - - - - - - - $=$ - - -

e) Dreifl. Zusp. der trig. Ecke, die Zuspfl. einseitig schief aufgesetzt, wenn $n' < m$ und $\frac{m'(n'+1)}{n'} < m+1$

Im Falle c sind die CK. mit den symmetrischen Diagonalen der Deltoide;

α) parallel, ... wenn $\frac{m'n'}{m'+n'} = \frac{1}{2}m$

β) convgt. nach dem tetr. Eckp. - - - - - $>$ - -

γ) convgt. nach dem trig. Eckp. - - - - - $<$ - -

Ausserdem werden die CK. im Falle a den kürzeren Kanten von mOm parallel, wenn $\frac{n'(m'+1)}{m'} = m+1$, und im Falle cγ den längeren Kanten parallel, wenn $m' = m$.

2) Mit $\frac{\infty On'}{2}$; die Flächen des Pentagondodekaëders sind stets auf die längeren Kanten von mOm aufgesetzt, und bilden:

a) Abst. je zwei gegenüberl. Kanten der tetr. Ecke, ... wenn $n' = m$

b) Zusch. der tetr. Ecke, ... - - - $>$ -

c) Abst. der rhomb. Ecke, die Abstfl. einseitig schief aufgesetzt, ... - - - $<$ -

Im Falle c sind die CK. mit den symmetrischen Diagonalen:

α) parallel, ... wenn $n' = \frac{1}{2}m$

β) convgt. nach dem tetr. E. - - - $>$ - -

γ) convgt. nach dem trig. E. - - - $<$ - -

Ausserdem werden im Falle b die CK. den kürzeren Kanten parallel, wenn $n' = m+1$.

§. 180.

Combinationen des Triakisoktaëders mO.

1) Mit $\pm\left[\frac{m'On'}{2}\right]$; aus §. 160. ergeben sich folgende CV. als die möglichen; es bildet das Dyakisdodekaëder am Triakisoktaëder:

a) Abst. der kürzeren Kanten, die Abstfl. einseitig schief aufgesetzt, ... wenn $\frac{m'n'}{m'+n'} = \frac{m}{m+1}$

b) Vierfl. Zusp. der ditetr. Ecke, je zwei Zuspfl. auf die gegenüberl. längeren Kanten gesetzt, ... - - - - - $>$ - - -

c) Dreifl. Zusp. der trig. Ecke, die Zuspfl. auf die Kanten einseitig schief aufgesetzt, - - - - - $<$ - - -

Im Falle b sind die CK. auf den längeren Kanten von mO:

α) rechtwinklig, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} = 2m$

β) stumpfwinklig - - - - - - - $>$ - -

γ) spitzwinklig . - - - - - - - $<$ - -

Ausserdem werden im Falle bβ die CK. den kürzeren Kanten von mO parallel, wenn $\frac{n'(m'+1)}{m'} = \frac{m+1}{m}$, und im Falle b$\gamma$ den kürzesten Kanten von $\left[\frac{m'On'}{2}\right]$ parallel, wenn $m' = m$.

Mit $\frac{\infty On'}{2}$; da m' stets $> m$, so bildet das Pentagondodekaëder jedenfalls Zuschärfungen der ditetragonalen Ecke, je 2 Zuschfl. auf 2 gegenüberliegende längere Kanten gesetzt; die CK. werden den kürzeren Kanten parallel, wenn $n' = \frac{m+1}{m}$.

§. 181.

Combinationen des Rhombendodekaëders, Oktaëders und Hexaëders.

1) Es bildet an ∞O

a) $\left[\frac{m'On'}{2}\right]$:

α) Schiefe Abst. der Kanten, wenn $m'n' = m' + n'$; Fig. 208.

β) Vierfl. Zusp. der tetr. Ecke, je 2 Zuspfl. auf 2 gegenüberl. Flächen gesetzt, . - - - - > - - -

γ) Dreifl. Zusp. der trig. Ecke, die Zuspfl. auf die Flächen schief aufgesetzt, . - - - - < - - -

b) $\frac{\infty On}{2}$, Zusch. der tetr. Ecke, die Zuschfl. auf die Flächen gesetzt; Fig. 226.

2) Es bildet an O,

a) $\left[\frac{mOn}{2}\right]$, vierfl. Zusp. der Ecke, je zwei Zuspfl. auf zwei gegenüberliegende Kanten gesetzt; Fig. 229.

b) $\frac{\infty On}{2}$, Zusch. der Ecke, die Zuschfl. auf die Kanten gesetzt; Fig. 230 und 223.

3) Es bildet an $\infty O \infty$,

a) $\left[\frac{mOn}{2}\right]$, unregelmässig dreifl. Zusp. der Ecke, die Zuspfl. auf die Kanten oder Flächen einseitig schief aufgesetzt; Fig. 228.

b) $\frac{\infty On}{2}$, Abst. der Kanten, die Abstfl. einseitig schief aufgesetzt; Fig. 227.

§. 182.

Combinationsgleichungen für zwei Dyakisdodekaëder.

Um die Darstellung der parallelflächig-semitesseralen Combinationen nicht zu sehr mit Formeln zu überladen, sind die Combinationsgleichungen weggelassen worden, weil deren jedenfalls mehre in Rücksicht kommen. Da dies jedoch kein Grund zu ihrer gänzlichen Vernachlässigung seyn kann, so wird das

Wichtigste über sie hier nachträglich mitgetheilt. Es kommen bei den Combinationeu zweier Dyakisdodekaëder D und D', vermöge der eigenthümlichen Beschaffenheit dieser Gestalten, im Allgemeinen dreierlei Combinationskanten in Betrachtung. Denn, bei gleicher Stellung beider Gestalten kommt jede Fläche F' (Fig. 17.) der untergeordneten Gestalt D' zuvörderst mit der analog liegenden Fläche F der vorherrschenden Gestalt D zum Durchschnitte, und bildet so eine Combinationskante Π'', welche offenbar identisch mit der CK. zweier Hexakisoktaëder ist. Sie kann aber auch, und wird in den meisten Fällen noch ausserdem entweder mit der Fläche F_{I}, oder mit der Fläche F_{II} zum Durchschnitte kommen, und in jenem Falle eine CK. Π''_{I}, in diesem Falle eine CK. Π''_{II} bilden. — Dasselbe Verhältniss tritt bei verwendeter Stellung beider Gestalten ein.

Wollen wir nun einstweilen auf die krystallographische Lage der Flächen der dritten Gestalt D'', welche die Abstumpfungen der CK. hervorbringt, keine Rücksicht nehmen, so sind die diesen drei Fällen entsprechenden Formen der CG. folgende:

A. Bei gleicher Stellung von D und D':

I. CG. für die Kante Π''

$$m''n''(m'n-mn')+m''(m-m')nn'+n''(n'-n)mm'=0$$

II. CG. für die Kante Π''_{I}

$$m''n''(m'-nn')m-r''m''(mm'-n)n'+n''r''(mn'-1)m'n=0$$

III. CG. für die Kante Π''_{II}

$$m''n''(m'm-n')n-r''m''(m'n-1)mn'+n''r''(n'n-m)m'=0$$

B. Bei verwendeter Stellung von D und D' gelten dieselben Formeln mit Vertauschung der Buchstaben m' und n'.

Das dritte Dyakisdodekaëder D″ nun befindet sich zu dem vorherrschenden Dyakisdodekaëder D entweder in gleicher oder in verwendeter Stellung. Behalten wir zunächst den ersten Fall im Auge, so giebt es für die Lage der abstumpfenden Fläche F'' dreierlei Verschiedenheiten, nach Maassgabe welcher sich die krystallographische Bedeutung der Coëfficienten m'', n'' und r'' in vorstehenden Gleichungen sub II. und III. bestimmt; ist nämlich die Lage von F''

1) analog mit F, so wird $m''=m''$, $n''=n''$, $r''=1$
2) - - - F_{I}, - - - - n'', - - 1, - - m''
3) - - - F_{II}, - - - - 1, - - m'', - - n''

Nach Substitution dieser Werthe braucht man nur m'' und n'' zu vertauschen, um diejenigen Formen der Combinationsgleichungen zu erhalten, welche sich auf die verwendete Stellung von D'' beziehen. Die Anwendung aller dieser Formeln auf die Combinationen der Pentagondodekaëder und übrigen Gestalten ergiebt sich von selbst.

§. 183.

Vom Ikosaëder der Krystallographie.

Wie wenig das Pentagondodekaëder, eben so wenig kann auch das Ikosaëder der Geometrie in der Natur vorkommen, da seine Erscheinung einen irrationalen Ableitungscoëfficienten voraussetzt.

Es stellt nämlich nach §. 178 die Combination $\frac{\infty On}{2}.O$, wenn die Flächen von O durch die unregelmässigen Ecke von $\frac{\infty On}{2}$ gehen, einen von 12 gleichschenkligen und 8 gleichseitigen, also überhaupt von 20 Dreiecken umschlossenen Körper dar. Man könnte nun fragen, ob nicht für irgend ein Pentagondodekaëder die 12 gleichschenkligen Dreiecke ebenfalls gleichseitige werden könnten. Der Fall wird offenbar nur für diejenigen Pentagondodekaëder eintreten können, in deren Flächen die halbe Grundlinie zur ganzen Höhenlinie das Verhältniss von $1 : \sqrt{3}$ hat. Nun ist aber allgemein für die Flächen aller Pentagondodekaëder:

$$\text{die halbe Grundlinie } A'' = \frac{n-1}{n}$$

$$\text{die Höhenlinie } B'' = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$$

folglich die Bedingung

$$(n-1)\sqrt{3} = \sqrt{n^2+1}$$

woraus folgt:

$$n = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

Dieser irrationale Bedingungswerth von n verbürgt uns die Unmöglichkeit des Ikosaëders im Gebiete der Krystallformen. Weil aber 2,618 . . . der Näherungswerth von $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, so würde z. B. $\frac{\infty O\frac{8}{3}}{2}$ oder noch mehr $\frac{\infty O\frac{13}{5}}{2}$, mit O eine dem Ikosaëder sehr ähnliche Combination darstellen.

§. 184.

Vom Triakontaëder der Krystallographie.

Aber auch das Triakontaëder der Geometrie kann von der Natur nie als Krystallform producirt werden, wenn gleich Combinationen möglich sind, die ihm sehr nahe gleichen. Allerdings stellt die Combination eines jeden parallelkantigen Dyakisdodekaëders mit dem Hexaëder einen von 30 Rhomben umschlossenen Körper dar, sobald die Hexaëderflächen durch die unregelmässigen Eckpuncte des Dyakisdodekaëders gehen (§. 177); allein diese Rhomben sind, wiewohl gleichseitig, doch zweierlei verschiedenen Werthes. Sollen sie aber gleich und ähnlich werden, und wirklich das Triakontaëder bilden, so wird gefordert, dass z. B. der stumpfe Winkel der rhombischen Hexaëderflächen dem Winkel b'' der Dyakisdodekaëderflächen, oder, was dasselbe, dass dieser Winkel b'' dem Neigungswinkel β je zweier längsten Kantenlinien B'' und B'' des Dyakisdodekaëders gleich sey. Nun ist aber allgemein in allen parallelkantigen Dyakisdodekaëdern:

$$tang\, b'' = -\frac{\sqrt{m^2+m+1}}{m}$$

$$tang\, \beta = -\frac{2\sqrt{m}}{m-1}$$

Unterwirft man diese Werthe der Bedingung $b''=\beta$, so wird:

$$m^4 - m^3 - m + 1 = 4m^2$$

und nach Addition von $-2m^2$

$$(m^2-1)^2 = m(m+1)^2$$

oder $(m-1)^2 = m$

daher $m = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$

und folglich

$$n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Also wird nur das Dyakisdodekaëder $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 O \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ in seiner Combination mit dem Hexaëder das Triakontaëder darstellen können, und der irrationale Werth beider Ableitungscoëfficienten verbürgt uns wiederum die Unmöglichkeit des Triakontaëders im Gebiete der Krystallformen.

Zugleich folgt $tang\, \beta = -2$, und β oder $b'' = 116° 34'$ für die ebenen Winkel der Triakontaëderflächen.

Merkwürdig ist die Rolle, welche die Grösse $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = k$ in diesen idealen Gestalten und Combinationen des Tesseralsystemes spielt *); denn es giebt:

*) Auch mag hier noch erwähnt werden, dass k diejenige Zahl ist, deren zweite Potenz um 1 grösser ist, als sie selbst.

$\frac{\infty Ok}{2}$ das reguläre Pentagondodekaëder,

$\frac{\infty Ok^2}{2}$ mit O das reguläre Ikosaëder, und

$\frac{k^2 Ok}{2}$ mit $\infty O \infty$ das reguläre Triakontaëder.

Berechnung der Combinationskanten.

§. 185.

Cosinus der CK. zweier Hexakisoktaëder.

Nächst der Bestimmung der in einer Combination enthaltenen Gestalten bildet die Berechnung der Combinationskanten eine wichtige Aufgabe der Combinationslehre; eine Aufgabe, welehe um so weniger vernachlässigt werden darf, weil die Kenntniss des Cosinus der Combinationskante als einer Function der Ableitungscoëfficienten selbst für die Lösung der ersteren Aufgabe ganz unentbehrlich wird, sobald die Bestimmung der Gestalten von Messungen abhängig ist, und sich keine andern als Combinationskanten zu diesen Messungen geeignet finden; welcher Fall gar nicht selten einzutreten pflegt. Da die allgemeine Auflösung des Problemes, den Cosinus des Neigungswinkels irgend zweier Flächen zu finden, aus §. 22 bekannt ist, so läuft jede besondere Auflösung desselben Problemes auf eine blosse Substitution derjenigen Werthe der Parameter hinaus, welche statt der Buchstaben a, b, c, a', b' und c' für die Flächen beider Gestalten gegeben sind.

Demnach findet sich für die Combinationskante Π der Flächen zweier Hexakisoktaëder mOn und $m'On'$

$$\cos \Pi = -\frac{mm'(nn'+1)+nn'}{\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}\;\sqrt{m'^2(n'^2+1)+n'^2}}$$

Da nun je zwei Gestalten durch die Zeichen mOn und $m'On'$ repräsentirt werden, so wird aus vorstehendem Werthe von $\cos \Pi$ die Combinationskante je zweier Gestalten gefunden werden können. Der folgende §. enthält die tabellarische Uebersicht dieser Werthe für die holoëdrischen Gestalten.

§. 186.

Cosinus der CK. je zweier tesseraler Gestalten.

Um die nachstehenden Ausdrücke für die Cosinus der Combinationskanten übersichtlich in einer Tabelle zusammenfassen zu können, ist

$$\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2} = M$$

und $$\sqrt{m'^2(n'^2+1)+n'^2} = M'$$

gesetzt worden. Uebrigens versteht sich, dass alle Werthe negativ zu nehmen sind.

	$\infty O \infty$	∞O	O	$\infty O n'$	$m' O$	$m' O m'$	$m' O n'$
$m O n$	$\frac{mn}{M}$	$\frac{m(n+1n)}{M\sqrt{2}}$	$\frac{m(n+1)+n}{M\sqrt{3}}$	$\frac{m(nn'+1)}{M\sqrt{n'^2+1}}$	$\frac{mn'(n+1)+n}{M\sqrt{2m'^2+1}}$	$\frac{m(m'n+1)+n}{M\sqrt{m'^2+2}}$	$\frac{mm'(nn'+1)+nn'}{MM'}$
$m O m$	$\frac{m}{\sqrt{m^2+2}}$	$\frac{m+1}{\sqrt{2}\sqrt{m^2+2}}$	$\frac{m+2}{\sqrt{3}\sqrt{m^2+2}}$	$\frac{nn'+1}{\sqrt{n'^2+1}\sqrt{m^2+2}}$	$\frac{m'(m+1)+1}{\sqrt{2m'^2+1}\sqrt{m^2+2}}$	$\frac{mm'+2}{\sqrt{(m^2+2)(m'^2+2)}}$	
$m O$	$\frac{m}{\sqrt{2m^2+1}}$	$\frac{2m}{\sqrt{2}\sqrt{2m^2+1}}$	$\frac{2m+1}{\sqrt{3}\sqrt{2m^2+1}}$	$\frac{m(n'+1)}{\sqrt{n'^2+1}\sqrt{2m^2+1}}$	$\frac{2mm'+1}{\sqrt{(2m'^2+1)(2m^2+1)}}$		
$\infty O n$	$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$	$\frac{n+1}{\sqrt{2}\sqrt{n^2+1}}$	$\frac{n+1}{\sqrt{3}\sqrt{n^2+1}}$	$\frac{nn'+1}{\sqrt{(n^2+1)(n'^2+1)}}$			
O	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	—				
∞O	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	—					
$\infty O \infty$	—						

§. 187.

Cosinus der CK. je zweier geneigtflächig-semitesseraler Gestalten.

Für die Cosinus der Combinationskanten der geneigtflächig-semitesseralen Gestalten gelten bei gleicher Stellung dieselben Werthe wie für die respectiven Muttergestalten; bei verwendeter Stellung jedoch sind diese Cosinus besonders zu berechnen. Man findet allgemein für die Combinationskante II' zweier in verwendeter Stellung befindlicher Hexakistetraëder $\frac{mOn}{2}$ und $-\frac{m'On'}{2}$:

$$\cos II' = -\frac{mm'(nn'+1)-nn'}{\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}\,\sqrt{m'^2(n'^2+1)+n'^2}}$$

woraus sich denn folgende Tabelle ableiten lässt:

	$-\frac{O}{2}$	$-\frac{m'O}{2}$	$-\frac{m'Om'}{2}$	$-\frac{m'On'}{2}$
$\frac{mOn}{2}$	$\frac{m(n+1)-n}{M\sqrt{3}}$	$\frac{mm'(n+1)-n}{M\sqrt{2m'^2+1}}$	$\frac{m(m'n+1)-n}{M\sqrt{m'^2+2}}$	$\frac{mm'(nn'+1)-nn'}{MM'}$
$\frac{mOm}{2}$	$\frac{m}{\sqrt{3}\sqrt{m^2+2}}$	$\frac{m'(m+1)-1}{\sqrt{m^2+2}\sqrt{2m'^2+1}}$	$\frac{m'm}{\sqrt{m^2+2}\sqrt{m'^2+2}}$	
$\frac{mO}{2}$	$\frac{2m-1}{\sqrt{3}\sqrt{2m^2+1}}$	$\frac{2mm'-1}{\sqrt{2m^2+1}\sqrt{2m'^2+1}}$		
$\frac{O}{2}$	$\frac{1}{3}$			

Diese Werthe sind insgesammt negativ zu nehmen; auch haben M und M' dieselbe Bedeutung wie in §. 184.

§. 188.

Cosinus der CK. je zweier parallelflächig-semitesseralen Gestalten.

Was endlich die Combinationskanten der parallelflächig-semitesseralen Gestalten betrifft, so sind deren nach §. 182. drei verschiedene zu berücksichtigen. Es kann nämlich jede Fläche F der einen Gestalt (Fig. 17)

1) mit der analog liegenden Fläche F der andern Gestalt eine CK. Π'', und zugleich
2) mit der Fläche F_{I} eine CK. Π''_{I}, oder
3) mit der Fläche F_{II} eine CK. Π''_{II}

hervorbringen. Diese dreierlei CK. sind sowohl für gleiche als für verwendete Stellung zu berücksichtigen. Man findet:

A. für gleiche Stellung:

$$\cos \Pi'' = -\frac{mm'(nn'+1)+nn'}{MM'}$$

$$\cos \Pi''_{\text{I}} = -\frac{m'n(m+n')+mn'}{MM'}$$

$$\cos \Pi''_{\text{II}} = -\frac{mn'(m'+n)+m'n}{MM'}$$

B. für verwendete Stellung:

$$\cos \Pi'' = -\frac{m'n(mn'+1)+mn'}{MM'}$$

$$\cos \Pi''_{\text{I}} = -\frac{n'n(m'+m)+m'm}{MM'}$$

$$\cos \Pi''_{\text{II}} = -\frac{mm'(n'+n)+n'n}{MM'}$$

Die wichtigste von diesen CK. bleibt allerdings die Kante Π'', und will man sie daher allein berücksichtigen, so erhält man bei verwendeter Stellung beider Gestalten folgende Tabelle ihrer Cosinuswerthe:

	$-\frac{\infty On'}{2}$	$-\left[\frac{m'On'}{2}\right]$
$\left[\frac{mOn}{2}\right]$	$\frac{n(mn'+1)}{M\sqrt{n'^2+1}}$	$\frac{m'n(mn'+1)+mn'}{MM'}$
$\frac{\infty On}{2}$	$\frac{nn'}{\sqrt{n^2+1}\sqrt{n'^2+1}}$	

Bei gleicher Stellung beider Gestalten gelten für $\cos II''$ dieselben Werthe wie für die respectiven Muttergestalten.

Anwendung der Combinationslehre auf einige verwickeltere Combinationen.

§. 189.

Combination des Rothkupfererzes.

Nach Mohs und Phillips kommt am Rothkupfererze die Combination Fig. 231 vor. Diese Combination ist eine siebenzählige, holoëdrische, und enthält folgende Gestalten:

P, das Oktaëder O,
a, das Hexaëder $\infty O \infty$,
m, das Rhombendodekaëder ∞O,
b, ein Ikositetraëder mOm,
n, ein Triakisoktaëder mO,
c, ein Tetrakishexaëder $\infty On'$, und
e, ein Hexakisoktaëder mOn.

Da nun die Flächen b die Kanten des Rhombendodekaëders abstumpfen, so ist

$$b = 2O2 \text{ (§. 162, 2, a).}$$

Hierdurch bestimmt sich auch sogleich das Tetrakishexaëder, weil es die längeren Kanten von 2O2 abstumpft,

$$c = \infty O2 \text{ (§. 159, 4, a).}$$

Die Bestimmung des Triakisoktaëders ist von einer Messung abhängig; misst man z. B. die CK. mit

∞O, so findet man 160° 32′; subtrahirt man von diesem Winkel 90°, und vergleicht man den Rest mit der halben Oktaëderkante, so findet man

$$tang\ 70° 32' = 2.tang\ 54° 44'$$

woraus folgt, dass

$$n = 2O$$

Das Hexakisoktaëder e ist ebenfalls nur mittels einer Messung vollkommen zu bestimmen; weil es indess die Kanten von ∞O zuschärft, so ist es allgemein von der Form $mO\frac{m}{m-1}$ (§. 162, 1, a.); wären seine Flächen nur etwas vorherrschender, so dass sie mit den Oktaëderflächen zum Durchschnitte kämen, so würde sich ergeben, dass je zwei auf einer und derselben Oktaëderfläche einander gegenüberliegende CK. parallel sind, woraus folgen würde, dass $n = \frac{2m}{m+1}$ (§. 163, 1.). Beide Bedingungen vereint führen sogleich auf die Bestimmung:

$$e = 3O\tfrac{3}{2}$$

Weil jedoch unsre Figur das letztere Combinationsverhältniss nicht zeigt, so müssen wir auch zu einer Messung unsre Zuflucht nehmen. Messen wir z. B. die CK. mit ∞O, so finden wir 160° 54′; das Supplement dieses Winkels ist der Kantenwinkel ε an der Grundfläche der einfachen Pyramiden, welche auf den Flächen des Dodekaëders aufgesetzt sind (§. 129, 3). Nun ist allgemein

$$tang\ \varepsilon = \frac{(n-1)\sqrt{3}}{n+1}$$

$$\text{und daher}\quad n = \frac{\sqrt{3} + tang\ \varepsilon}{\sqrt{3} - tang\ \varepsilon}$$

In gegenwärtigem Falle aber, da $\varepsilon = 19° 6'$, ist

$$tang\ \varepsilon = \tfrac{1}{5}\sqrt{3}$$

$$\text{folglich}\quad n = \tfrac{3}{2}$$

$$\text{und}\quad e = 3O\tfrac{3}{2}$$

Die Combination ist daher vollständig entwickelt, und ihr krystallographisches Zeichen:

$$O.2O2.\infty O.\infty O\infty.2O.\infty O2.3O\tfrac{3}{2}.$$

§. 190.

Combination des Magneteisenerzes.

Nach Mohs findet sich am Magneteisenerz eine ähnliche Combination wie Fig. 232, in welcher jedoch, dem angegebenen krystallographischen Zeichen zufolge, die Flächen ε dieselbe Lage haben müssten wie die Flächen *e* in Fig. 231; Bernhardi hat diese Combination zwar übereinstimmend mit Mohs bezeichnet, aber dergestalt gezeichnet, dass die Flächen ε ungefähr so liegen wie in unsrer Figur, und unmöglich mit den Flächen *e* in Fig. 231 identisch seyn können. Da es uns nun hier nur um ein Beispiel zur Uebung in krystallographischen Entwicklungen, nicht um Bestimmung der Krystallreihe des Magneteisenerzes zu thun ist, die erwähnte Combination aber durch ihre Symmetrie höchst interessant wird, wenn wir uns an Bernhardi's Zeichnung, und nicht an seine und die Mohs'sche Bezeichnung halten, so sind auch die Flächen ε in unsere Figur so eingetragen worden, wie es ihre Verhältnisse zu den Flächen *m* in der Bernhardi'schen Zeichnung fordern.

Die Combination selbst ist eine fünfzählige, holoëdrische, und enthält folgende Gestalten:

P, das Oktaëder O,
m, das Rhombendodekaëder ∞O,
ε, ein Hexakisoktaëder $m\mathrm{O}n$,
e, ein Tetrakishexaëder $\infty\mathrm{O}n'$, und
β, ein Ikositetraëder $m'\mathrm{O}m'$.

Weil je zwei, auf einer und derselben Oktaëderfläche einander gegenüberliegende CK. von $P = \mathrm{O}$ und $\varepsilon = m\mathrm{O}n$ parallel sind, so ist für die letztere Gestalt

$$n = \frac{2m}{m+1} \text{ (§. 163, 1.)}$$

Weil aber dieselben Flächen ε die CK. zwischen O und $\infty On'$ abstumpfen, so findet auch offenbar für diese beiden Gestalten der nämliche Parallelismus je zweier auf einer Oktaëderfläche einander gegenüberliegender CK. Statt, woraus denn unmittelbar folgt, dass $n' = 2$, und daher

$$c = \infty O2 \text{ (§. 163, 4.)}$$

Die Flächen von $m'Om'$ fallen in die Zone gewisser Flächen von $\infty O2$ und ∞O, deren Parameter sich so bestimmen, dass, wenn z. B. für die Fläche von ∞O

$$m : n : r = 1 : \infty : 1$$

für die entsprechende Fläche von $\infty O2$

$$m' : n' : r' = \infty : 2 : 1$$

und für die abstumpfende Fläche von $m'Om'$

$$m'' : n'' : r'' = m' : m' : 1$$

wird; durch Substitution dieser Werthe in die allgemeine Combinationsgleichung (§. 68) folgt sogleich $m = 3$, und daher

$$\beta = 3O3$$

Nun stumpfen die Flächen des Hexakisoktaëders mOn die CK. zwischen ∞O und $3O3$ ab; setzt man also in der CG. von §. 162, Nr. 2 für m' den Werth 3, so wird solche

$$2n - m(n-1) = 0$$

und folglich $n = \dfrac{m}{m-2}$

Es war aber auch, vermöge der Verhältnisse von mOn zu dem Oktaëder,

$$n = \frac{2m}{m+1}$$

also wird $2m - 4 = m + 1$

oder $m = 5$, $n = \frac{5}{3}$, und $\varepsilon = 5O\frac{5}{3}$

Die Combination ist daher vollständig entwickelt, und ihr Zeichen:

$$O.\infty O.5O\tfrac{5}{3}.\infty O2.3O3.$$

§. 191.

Combination des Silber-Amalgames.

Diese in Fig. 233 dargestellte Combination (Haüy's *Var. sextiforme*) ist eine sechszählige, holoëdrische *), und enthält folgende Gestalten:

m, das Rhombendodekaëder ∞O,
b, das Ikositetraëder $2O2$ (§. 162, 2, a.),
e, ein Hexakisoktaëder $mO\frac{m}{m-1}$ (§. 162, 1.),
a, das Hexaëder $\infty O\infty$,
s, ein Tetrakishexaëder $\infty On'$, und
r, das Oktaëder O.

Von diesen Gestalten sind nur noch das Tetrakishexaëder und Hexakisoktaëder zu bestimmen.

Da nun die Flächen s vierflächige Zuspitzungen der tetragonalen Ecke von $2O2$ bilden, so folgt, dass

$$n' > 2 \text{ (§. 159, 4, b.)}$$

Wären die Flächen des Oktaëders nicht vorhanden, so würde man aus der Figur sehen, dass die CK. zwischen $\infty On'$ und $2O2$ den kürzeren Kanten von $2O2$ parallel sind, woraus denn sogleich folgen würde, dass

$$n' = 3 \text{ (§. 159, 4, zu Ende.)}$$

Weil aber die Flächen r dieses Verhältniss der

*) In Haüy's Zeichnung erscheinen die Flächen des 4.6Flächners mit sehr falscher Lage der CK. zu dem 48Flächner; weit unrichtiger aber ist die Zeichnung von Phillips, indem er die Flächen s mit parallelen CK. zwischen den Flächen b erscheinen lässt, wonach $s = \infty O2$ seyn müsste, während doch die von ihm angegebenen Winkel auf $\infty O3$ führen, welches auch die wahre Gestalt ist.

Beobachtung entziehen, so müssen wir zu einer Messung unsre Zuflucht nehmen; misst man z. B. die Kante $a : s$, so findet man 161° 34′; subtrahirt man 90°, und vergleicht den Rest mit dem halben Neigungswinkel zweier, an einem und demselben tetragonalen Eckpunct einander gegenüberliegender Flächen von ∞O, so ergiebt sich:

$$tang\ 71^\circ\ 34' = 3.tang\ 45$$

und daher:

$$s = \infty O3, \text{ wie vorher.}$$

Auch die Bestimmung des Hexakisoktaëders ist von einer Messung abhängig; sie kann ganz so, wie in §. 189 oder auch dadurch gewonnen werden, dass man die CK. zu $2O2$ misst; nach beiden Methoden erhält man das Resultat:

$$e = 3O\tfrac{3}{2}$$

Diese Combination ist daher vollständig entwickelt, und ihr Zeichen:

$$\infty O.2O2.3O\tfrac{3}{2}.\infty O\infty.\infty O3.O.$$

§. 192.

Combination des tetraëdrischen Kupferglanzes.

Die Combination, Fig. 234, ist eine siebenzählige, geneigtflächig-semitesserale, und enthält folgende Gestalten:

P, das Tetraëder $\frac{O}{2}$,

f, das Hexaëder $\infty O\infty$,

l, ein Trigondodekaëder $\frac{mOm}{2}$,

o, das Rhombendodekaëder ∞O (§. 164, 5.),

s, ein Tetrakishexaëder $\infty On'$ (§. 164, 4.),

r, ein Trigondodekaëder in verwendeter Stellung, $-\frac{m'Om'}{2}$,

n, ein Deltoiddodekaëder $\frac{m''O}{2}$.

Die noch unbekannten Gestalten l, s, r und n lassen sich alle ohne Messungen bestimmen.

Zuvörderst folgt aus dem Parallelismus je zweier auf derselben Fläche l liegender CK. zwischen l und o, dass dieselben CK. auf den längsten Kanten des Trigondodekaëders rechtwinklig sind, und dass also

$$l = \frac{2O2}{2} \text{ (§. 169, 5, } a.)$$

Weil aber die Flächen r die Kanten des Rhombendodekaëders abstumpfen, so folgt, dass

$$r = -\frac{2O2}{2} \text{ (§. 173, 2, a)}$$

und weil n die kürzeren Kanten von l abstumpft, so wird:

$$n = \frac{\frac{3}{2}O}{2} \text{ (§. 169, 2, a.)}$$

Endlich sind die CK. des Tetrakishexaëders und Trigondodekaëders l den kürzeren Kanten dieses letzteren parallel, und folglich

$$s = \infty O3 \text{ (§. 169, 4, zu Ende)}$$

Die Combination ist daher vollständig entwickelt, und ihr Zeichen wird:

$$\frac{2O2}{2}.\ \infty O\infty.\ \infty O.\ \frac{O}{2}.\ -\frac{2O2}{2}.\ \infty O3.\ \frac{\frac{3}{2}O}{2}.$$

§. 193.

Combination des hexaëdrischen Eisenkieses.

Diese Combination, Fig. 235, ist eine siebenzählige, parallelflächig-semitesserale, und, mit Ausnahme kleiner Flächen, welche die Combinationsecke zwischen e und f abstumpfen, die von Haüy bestimmte und gezeichnete *Var. parallélique* von Petorka in Peru. Sie enthält folgende Gestalten:

P, das Hexaëder $\infty O\infty$,

f, ein Dyakisdodekaëder $\left[\frac{mOn}{2}\right]$, *s*, ein zweites Dyakisdodekaëder $\left[\frac{m'On'}{2}\right]$,

e, ein Pentagondodekaëder $\frac{\infty On'}{2}$,

y, eines dergleichen $\frac{\infty On}{2}$,

d, das Oktaëder O, und

o, ein Ikositetraëder $m''Om''$.

Weiss man, dass $e = \frac{\infty O2}{2}$, wovon man sich durch eine Messung der CK. mit *P* leicht überzeugen kann, und kämen die Flächen *f* mit den Flächen *e* zum Durchschnitte, so wären alle noch unbekannte Gestalten unmittelbar zu bestimmen.

Weil zuvörderst *e* die längsten Kanten des Dyakisdodekaëders *s* abstumpft, so wird

$$s = \left[\frac{m'O2}{2}\right] \text{ (§. 177, 2, A.)}$$

Aus dem Parallelismus der CK. von *e* durch *s*, *o*, *f* bis *s* folgt aber, dass dieses Dyakisdodekaëder ein parallelkantiges ist, weshalb denn

$$s = \left[\frac{4O2}{2}\right]$$

Derselbe Parallelismus lehrt auch, dass

$$o = 2O2 \text{ (§. 177, 3, d.)}$$

Aus dem Parallelismus von *s* durch *f*, *o*, bis *s* folgt ferner, dass das Dyakisdodekaëder *f* die unregelmässigen Kanten von *s* abstumpft, und zwar lehrt die gegenseitige Lage der Flächen, dass die Abstumpfungsflächen auf die längsten Kanten von *s* gesetzt sind; daher gilt für *f*

$$m < 4 \text{ und } n = S \text{ (§. 176, II, 3.)}$$

Setzt man in der Formel *S* des §. 174 die unserm Falle entsprechenden Werthe: $m = 4$, $n = 2$, $m' = m$ und $n' = n$, so wird

$$n = \tfrac{1}{2}m$$

Wäre nun der Durchschnitt von e und f zu beobachten, so würde man sehen, dass solcher der CK. von f und d parallel ist, dass also die Flächen f die CK. zwischen $e = \infty O2$ und $d = O$ abstumpfen; daraus folgt aber die CG.

$$n = \frac{2m}{m+1}$$

und durch Vergleichung beider Werthe von n

$$m = 3 \text{ und } n = \tfrac{3}{2}$$

$$\text{also} \qquad f = \left[\frac{3O\frac{3}{2}}{2}\right]$$

und folglich auch

$$y = \frac{\infty O\frac{3}{2}}{2} \text{ (§. 177, 2, A, a.)}$$

Weil aber dieser Parallelismus der CK. nicht zu beobachten, so würden wir zu einer Messung schreiten müssen, und offenbar am kürzesten zum Ziele kommen, wenn wir die CK. von y und P messen, wodurch sich y und dann sogleich auch f bestimmt.

Die Combination wäre sonach vollständig entwickelt, und ihr Zeichen:

$$\infty O\infty \,.\, \left[\frac{3O\frac{3}{2}}{2}\right] \cdot \left[\frac{4O2}{2}\right] .\, \frac{\infty O2}{2} \,.\, \frac{\infty O\frac{3}{2}}{2} \,.\, O \,.\, 2O2.$$

§. 194.

Combination des dodekaëdrischen Kobaltkieses.

Diese nach Phillips in Fig. 236 dargestellte Combination ist deshalb merkwürdig, weil sie zwei neue Gestalten enthält; sie ist eine fünfzählige, parallelflächig-semitesserale, und zeigt im Allgemeinen folgende Gestalten:

c, ein Pentagondodekaëder $\frac{\infty On'}{2}$,

k, eines dergleichen $\frac{\infty On''}{2}$,

a, das Hexaëder $\infty O\infty$ (§. 178, 7.),

p, das Oktaëder (§. 178, 6.),

i, ein Dyakisdodekaëder $\left[\frac{mOn}{2}\right]$.

Phillips giebt für die Combinationskanten

$a:c$ den Winkel 153° 26′

$a:k$ - - - 166° 30′

$p:i$ - - - 163° 27′

Subtrahirt man von den ersteren beiden Winkeln 90°, und vergleicht ihre Tangenten mit $tang\,45°$, so erhält man die Bestimmungen

$$n' = 2$$

und $$n'' = 4{,}165$$

Da nun die Messungen von Phillips nicht immer auf grosse Genauigkeit Ansprüche machen, so lässt sich auch hier voraussetzen, dass ein Fehler von 30′ Statt finden dürfte; setzen wir demgemäss den gemessenen Winkel 166° 0′, so wird fast ganz genau

$$n'' = 4$$

und die beiden Pentagondodekaëder sind daher

$$c = \frac{\infty O2}{2} \text{ und } k = \frac{\infty O4}{2}$$

von welchen das letztere noch nicht beobachtet worden.

Weil die Flächen i die CK. zwischen $\frac{\infty O2}{2}$ und O abstumpfen, so folgt für das Dyakisdodekaëder i:

$$n = \frac{2m}{m+1}$$

Nun ist seine CK. mit O gegeben; aus §. 186 folgt aber für den Cosinus dieser Kante:

$$\cos \Pi = \frac{(m+1)n+m}{\sqrt{(m^2+1)n^2+m^2}}$$

oder, nach Substitution des Werthes von n:

$$\cos \Pi = \frac{(m+1)\sqrt{3}}{\sqrt{5m^2+2m+5}}$$

Bestimmt man hiernach m als Function von $\cos II$, so folgt:

$$m = \tfrac{15}{7}$$

und daher $\quad n = \tfrac{15}{11}$

welche Werthe die CK. zu 163° 28′ bestimmen. Beträgt der Messungsfehler einen halben Grad zu viel, so findet sich für 162° 59′

$$m = \tfrac{11}{5},\; n = \tfrac{11}{8}$$

beträgt er $\frac{5}{4}$° zu wenig, so wird für 164° 46′ *)

$$m = 2,\; n = \tfrac{4}{3}$$

welche letzteren Werthe sich ihrer Einfachheit wegen empfehlen.

Vertrauen wir der Messung von Phillips, so wird das Zeichen unsrer Combination:

$$\frac{\infty O 2}{2} . O . \infty O \infty . \frac{\infty O 4}{2} . \left[\frac{\frac{15}{7} O \frac{15}{11}}{2}\right].$$

§. 195.

Combination des Flussspathes.

Nicht als Beispiel zur Uebung, sondern als krystallographische Merkwürdigkeit, möge die von Phillips gezeichnete Combination des Flussspathes, Fig. 237, die Darstellungen des Tesseralsystemes beschliessen. Der Krystall, auf welchen sich die Zeichnung bezieht, ist von Devonshire, und enthält wirklich alle Gestalten, mit Ausnahme derjenigen, deren Flächen mit b_1, b_3, b_4 und c_3 bezeichnet sind, welche Phillips nur hinzufügte, um möglichst viele Gestalten des Flussspathes in einem Schema zu vereinigen. Wäre er vollkommen ausgebildet, so würde er von 338, und, zeigte er auch die im Bilde hinzugefügten Gestalten, von 434 Flächen umschlossen seyn. Die all-

*) Weit grösser wird der Fehler unter Bernhardi's Voraussetzung von $m = \frac{5}{2}$ und $n = \frac{10}{7}$, denn dann müsste der Winkel 160° 43′ betragen.

gemeine Entwicklung der Combination zeigt, dass folgende Gestalten zu ihr contribuiren:

a, das Hexaëder,
e, das Rhombendodekaëder,
P, das Oktaëder,
b, 1, 2, 3, 4, vier Ikositetraëder,
c, 1, 2, 3, drei Tetrakishexaëder,
d, 1, 2, 3, 4, 5, fünf Hexakisoktaëder.

Die von Phillips angegebenen Messungen lassen jedoch nur wenige dieser Gestalten mit einiger Sicherheit bestimmen.

Zweiter Abschnitt.

Vom Tetragonalsysteme.

Erstes Capitel.

Von den Axen und einzelen Gestalten des Tetragonalsystemes.

§. 196.

Grundcharakter, Zwischenaxen, Hauptschnitte.

Das Tetragonalsystem*) ist nach §. 43 der Inbegriff aller derjenigen Gestalten, deren geometrischer Grundcharakter durch Dreizahl, Rechtwinkligkeit und Gleichheit zweier Axen gegen eine ungleiche ausgesprochen ist. Der von Breithaupt vorgeschlagene Name bezieht sich auf die Mittelquerschnitte aller hierher gehöriger Gestalten, indem selbige entweder unmittelbar Quadrate (Tetragone) oder doch solche

*) Viergliedriges System nach Weiss; pyramidales System nach Mohs; monodimetrisches System nach Hausmann.

Figuren sind, in oder um welche sich Quadrate beschreiben lassen.

Ausser der *Hauptaxe* und den *beiden Nebenaxen* sind in diesem Systeme noch *zwei Zwischenaxen* zu berücksichtigen, welche in der Ebene der Basis mitten zwischen beiden Nebenaxen hinlaufen, und daher unter 45° gegen dieselben geneigt sind. Die Ebenen durch die Hauptaxe und je eine der Nebenaxen (oder die Coordinatebenen des Systemes) nennen wir die *normalen*, so wie die Ebenen durch die Hauptaxe und je eine der Zwischenaxen die *diagonalen Hauptschnitte*.

Als geometrische Grundgestalt (§. 52.) kann in diesem Systeme jede Gestalt gelten, deren Parameter das endliche Verhältniss $1 : 1 : a$ haben, und man sieht leicht, dass sich für jedes solches Verhältniss ein Inbegriff von 8 Flächen ergiebt, welche gleichschenklige Dreiecke sind, und eine Pyramide von quadratischer Basis darstellen.

§. 197.

Arten der tetragonalen Gestalten.

Die einfachen Gestalten des Tetragonalsystemes erhalten ihren allgemeinsten Namen nach der Figur ihrer Flächen oder nach gewissen Verhältnissen ihrer äusseren Umrisse, ihren Zunamen nach dem Namen des Systemes oder nach der Figur ihres Mittelquerschnittes. Im Allgemeinen giebt es folgende, ihrer Configuration nach wesentlich verschiedene Arten von Gestalten:

1) Tetragonale Pyramiden.
2) Ditetragonale Pyramiden.
3) Tetragonale Skalenoëder.
4) Tetragonale Trapezoëder.
5) Tetragonale Sphenoide.

Jede Art enthält einen zahllosen Inbegriff von

Varietäten, welche theils durch ihre Flächenstellung, theils durch das ihnen zu Grunde liegende Verhältniss der Parameter verschieden sind. Ausserdem giebt es noch **tetragonale** und **ditetragonale Prismen**, so wie das **basische Flächenpaar**, welche aber keine geschlossene, sondern offene Gestalten darstellen, von welchen die Ableitung lehrt, dass sie nur als die Gränzgestalten der tetragonalen und ditetragonalen Pyramiden anzusehen sind, weshalb sie nicht wohl neben diesen als besondre selbständige Gestalten aufgezählt werden können.

§. 198.

Tetragonale Pyramiden.

Syn. Viergliedriges Oktaëder; Weiss. Gleichschenklige vierseitige Pyramide; Mohs. Quadratoktaëder; Bernhardi, Weiss, Hausmann.

Die tetragonalen Pyramiden, Fig. 238 und 239, sind von 8 gleichschenkligen Dreiecken umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten in **einer** Ebene liegen; sie haben 12 Kanten, 6 Ecke.

Die Kanten sind zweierlei: 8 symmetrische Polkanten, und 4 regelmässige Mittelkanten.

Die Ecke sind gleichfalls zweierlei: 2 tetragonale Polecke, und 4 rhombische Mittelecke.

Die Querschnitte sind Quadrate, die normalen Hauptschnitte Rhomben.

Von diesen Gestalten giebt es folgende drei, ihrer Flächenstellung nach wesentlich verschiedene Unterarten:

a) **Tetragonale Pyramiden von normaler Flächenstellung**, oder t. P. der ersten Art; ihre Flächen sind rechtwinklig auf den diagonalen Hauptschnitten oder gleich geneigt gegen je zwei normale Hauptschnitte des Axensystemes.

b) **T. P. von diagonaler Flächenstellung**, oder t. P. der zweiten Art; ihre Flächen sind rechtwinklig auf den normalen Hauptschnitten oder gleich geneigt gegen je zwei diagonale Hauptschnitte.

c) T. P. von abnormer Flächenstellung, oder t. P. der dritten Art; ihre Flächen sind weder auf den diagonalen noch auf den normalen Hauptschnitten rechtwinklig, sondern haben eine mittlere Stellung zwischen den Flächen der beiden anderen Arten von Pyramiden.

In den ersteren bildet die Basis ein Quadrat (a . . a Fig. 255), dessen Seiten die Nebenaxen unter 45° schneiden; die Basis der zweiten ist das regelmässig umschriebene Quadrat (b . . b) für jenes, während die Basen der dritten unregelmässig umschriebene Quadrate (c . . c) um dasselbe darstellen.

§. 199.

Ditetragonale Pyramiden.

Syn. 4 und 4kantiges Dioktaëder; Weiss. Ungleichschenklige achtseitige Pyramide; Mohs. Doppelt achtseitige Pyramide; Hausmann.

Die ditetragonalen Pyramiden, Fig. 240 und 241, sind von 16 ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten in einer Ebene liegen; sie haben 24 Kanten und 10 Ecke.

Die Kanten sind symmetrisch und dreierlei: 8 kürzere, stumpfere, 8 längere, schärfere Polkanten und 8 Mittelkanten.

Die Ecke sind gleichfalls dreierlei: 2 ditetragonale Polecke, 4 stumpfere und 4 spitzere rhombische Mittelecke.

Die Querschnitte sind Ditetragone, die beiderlei Hauptschnitte Rhomben.

Diejenigen Polkanten und Mittelecke, welche in den normalen Hauptschnitten liegen, nennen wir normale, die in den diagonalen Hauptschnitten liegen, diagonale Polkanten und Mittelecke; in Bezug auf ihre Grösse findet kein durchgreifender Unterschied Statt, indem in einigen Pyramiden die normalen, in andern die diagonalen Polkanten die längeren und schärferen sind.

Die Flächen einer jeden ditetragonalen Pyramide gruppiren sich in 8, an den diagonalen Polkanten gelegene Flächenpaare.

§. 200.

Tetragonale Skalenoëder.

Die tetragonalen Skalenoëder, Fig. 242 und 243, sind von 8 Dreiecken umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten n i c h t in e i n e r Ebene liegen; sie haben 12 Kanten und 6 Ecke.

Die Kanten sind dreierlei: 4 symmetrische, längere, stumpfere, so wie 4 dergleichen kürzere, schärfere Polkanten, und 4 unregelmässige, im Zickzack auf- und ablaufende Mittelkanten.

Die Ecke sind zweierlei: 2 rhombische Polecke, und 4 unregelmässig vierflächige Mittelecke.

Die Querschnitte sind theils Rhomben, theils unregelmässige Achtecke, der Mittelquerschnitt aber ein Ditetragon; die normalen Hauptschnitte sind Rhomben, die diagonalen Hauptschnitte Deltoide.

Die Nebenaxen verbinden die Mittelpuncte je zweier gegenüberliegender Mittelecke.

Die Flächen dieser Gestalten gruppiren sich jederzeit in 4, an den längeren Polkanten gelegene Flächenpaare.

§. 201.

Tetragonale Trapezoëder.

Die tetragonalen Trapezoëder, Fig. 244, sind von 8 gleichschenkligen Trapezoiden umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten n i c h t in e i n e r Ebene liegen; sie haben 16 Kanten und 10 Ecke.

Die Kanten sind unregelmässig und dreierlei: 8 Polkanten, 4 kürzere, schärfere, und 4 längere, stumpfere, abwechselnd verbundene, im Zickzack auf- und ablaufende Mittelkanten.

Die Ecke sind zweierlei: 2 tetragonale Polecke, und 8 unregelmässig dreiflächige Mittelecke.

Die Nebenaxen verbinden die Mittelpuncte der abwechselnden Mittelkanten; wir nennen diese Mittelkanten die normalen, die zwischenliegenden die diagonalen Mittelkanten.

Die Querschnitte sind grösstentheils Quadrate; der Mittelquerschnitt aber ein Ditetragon; die Hauptschnitte sind Rhomben.

Von jeder dieser Gestalten giebt es zwei, in Bezug auf die Figur und Grösse ihrer Begränzungselemente vollkommen gleiche und ähnliche, allein in Bezug auf die Verknüpfung derselben wie ein rechtes und linkes Ding desselben Paares verschiedene Exemplare.

Wiewohl übrigens die Trapezoëder noch an keiner Species des Mineralreiches beobachtet worden *), so ist doch ihr Vorkommen nicht unwahrscheinlich, da die analogen Gestalten des Hexagonalsystemes am Quarze gar nicht selten sind.

§. 202.

Tetragonale Sphenoide.

Tetragonale Sphenoëder, Breithaupt.

Die tetragonalen Sphenoide, Fig. 245 und 246, sind von 4 gleichschenkligen Dreiecken umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten nicht in einer Ebene liegen; sie haben 6 Kanten und 4 Ecke.

Die Kanten sind zweierlei: 2 regelmässige, hori-

---

*) Breithaupt vermuthet das Vorkommen von Trapezoëdern am Anatas.

zontale Pol- oder Endkanten, und 4 unregelmässige, im Zickzack auf- und ablaufende Mittel- oder Seitenkanten.

Die Ecke sind nur einerlei, unregelmässig dreiflächig.

Die Pole der Hauptaxe fallen in die Mittelpuncte der regelmässigen Kanten; die Nebenaxen verbinden die Mittelpuncte je zweier gegenüberliegender Seitenkanten.

Die Querschnitte sind Rectangel, mit Ausnahme des Mittelquerschnittes, welcher ein Quadrat; die normalen Hauptschnitte sind Rhomben, die diagonalen Hauptschnitte gleichschenklige Dreiecke.

§. 203.

Holoëdrische und hemiëdrische Gestalten.

Welche von den bisher abgehandelten Gestalten als holoëdrische, und welche als hemiëdrische zu betrachten sind, darüber belehren uns die Symmetrieverhältnisse derselben. Nächst der allgemein für alle Krystallsysteme gültigen Bedingung des Flächenparallelismus (§. 47) ergeben sich nämlich aus dem geometrischen Grundcharakter dieses Systemes folgende Bedingungen der Holoëdrie:

1) dass jede holoëdrische Gestalt in der Normalstellung eine vollkommene Identität der Symmetrie nach rechts und links, und daher eine vollkommene Uebereinstimmung der rechten und linken Hälfte zeigen muss;
2) dass jede holoëdrische Gestalt in der ersten und verwendeten Normalstellung absolut dieselbe Lage und Verknüpfung ihrer verschiedenen Begränzungselemente, und folglich absolut dasselbe Bild zeigen muss.

Die Sphenoide, Skalenoëder und Trapezoëder erkennt man sogleich, theils an dem Mangel des Flächenparallelismus, theils nach dem zweiten Kriterio, für geneigtflächig-hemiëdrische Gestalten. Dass aber auch die tetragonalen Pyramiden von abnormer Flächenstellung, ihres Flächenparallelismus ungeachtet, hemiëdrische, und daher parallelflächig-hemiëdrische Gestalten sind, folgt aus dem ersten Kriterio.

So erhalten wir folgende vorläufige Uebersicht der Gestalten des Tetragonalsystemes nach den Verhältnissen der Holoëdrie und Hemiëdrie:

A. Holoëdrische Gestalten:

1) Tetragonale Pyramiden der ersten Art,
2) Tetragonale Pyramiden der zweiten Art,
3) Ditetragonale Pyramiden.

B. Hemiëdrische Gestalten:

a) Geneigtflächige;
4) Tetragonale Sphenoide,
5) Tetagonale Skalenoëder,
6) Tetragonale Trapezoëder.

b) Parallelflächige;
7) Tetragonale Pyramiden der dritten Art.

Zweites Capitel.

Von der Ableitung der Gestalten des Tetragonalsystemes.

A. Ableitung der holoëdrischen Gestalten.

§. 204.

Grundgestalt; Axenwerth derselben.

Die Derivationslehre wird auch hier, wie im Tesseralsysteme, ihre Aufgabe zuvörderst für die holoëdrischen Gestalten zu lösen, und dann erst den Zusammenhang anzugeben haben, welcher zwischen den verschiedenen hemiëdrischen Gestalten und ihren respectiven Muttergestalten Statt findet. Da nun sämmtliche Ableitungen aus einer der geometrischen Grundgestalten vorgenommen werden müssen, als solche aber nur die tetragonalen Pyramiden von normaler Flächenstellung zu betrachten sind, so wählen wir irgend eine beliebige dergleichen Pyramide von unbestimmten Dimensionen zur Grundgestalt, bezeichnen sie mit P, und das Verhältniss der halben Hauptaxe zur halben Nebenaxe mit $a:1$. Ob dieses Verhältniss rational oder irrational sey, darüber sind die Meinungen getheilt; Haüy, Weiss, Mohs u. a. drücken a als Quadratwurzel aus, während Breithaupt es wahrscheinlich zu machen gesucht hat, dass diese Zahl rational und jederzeit ein Multiplum des Coëfficienten $\frac{1}{720}$ sey, wobei entweder die Nebenaxe oder die Zwischenaxe zur Einheit angenommen wird. Wie dem aber auch sey, so ist die Beantwortung dieser Frage für die Selbständigkeit des Systemes ganz gleichgültig; denn die wesentliche Eigenthümlichkeit, mit welcher eine scharfe Gränze zwischen den Gestalten dieses Systemes nnd jenen des Tesseralsystemes gezogen ist, besteht in dem Gegensatze der einen Axe gegen die beiden andern; ein Gegensatz, welcher zwar durch die Ungleichheit der Axen bedingt, aber von dem numerischen Charakter dieser Ungleichheit völlig unabhängig ist. Die um eine einseitig vorherrschende Richtung viergliedrig geordnete Symmetrie, als Folge jenes Gegensatzes, ist es, was dem Grundtypus aller tetragonalen Gestalten ein so eigenthümliches Gepräge ertheilt, dass der Gedanke an einen Uebergang in tesserale Gestalten gar nicht aufkommen kann.

§. 205.

Ableitung aller tetragonalen Pyramiden der ersten Art.

Aus der Grundgestalt P lässt sich eine Reihe tetragonaler Pyramiden von derselben Basis und Flächenstellung ableiten.

Man multiplicire die Hauptaxe a mit einem rationalen Coëfficienten m, welcher theils > 1, theils < 1, und lege darauf in jede Mittelkante von P zwei Ebenen, von welchen die eine den oberen, die andere den unteren Endpunct der so verlängerten oder verkürzten Hauptaxe trifft, so resultirt für jeden Werth von m eine tetragonale Pyramide, welche theils spitzer, theils flacher als P seyn, jedenfalls aber dieselbe Basis und Flächenstellung haben wird. Da nun der geometrische Unterschied der Flächen jeder solchen Pyramide von jenen der Grundgestalt darin besteht, dass ihre Parameter $1 : 1 : ma$ sind, während jenen von P das Verhältniss $1 : 1 : a$ entspricht, so wird allgemein mP das Zeichen derselben. Und weil m einerseits < 1, anderseits > 1, die beiden Gränzen seiner möglichen Werthe aber 0 und ∞ sind, so lassen sich sämmtliche auf diese Art abgeleitete Pyramiden nach ihrer fortschreitenden Axenlänge in das Schema folgender Reihe vereinigen:

$$\begin{array}{ccc} & m<1 & & m>1 & \\ o\mathrm{P}\ldots\ldots & m\mathrm{P}\ldots\ldots & \mathrm{P}\ldots\ldots & m\mathrm{P}\ldots\ldots & \infty\mathrm{P} \end{array}$$

in welcher die Glieder linker Hand von P lauter flachere, die Glieder rechter Hand lauter spitzere Pyramiden als P bedeuten.

Wir nennen diese Reihe die Hauptreihe des Tetragonalsystemes, und erkennen ihre Glieder jederzeit daran, dass sie mit der Grundgestalt gleiche Flächenstellung haben. Denn die Gleichheit der Flächenstellung und der Basis, nicht aber ein mathematisches Gesetz des Fortschreitens der Axenlängen ist es, was diese Gestalten in eine einzige Reihe vereinigt, und die Copula dieser Reihe bildet. Die Gränzglieder derselben sind oP und ∞P; das erstere stellt eine tetragonale Pyramide von unendlich kleiner Axe, und von gleicher und ähnlicher Basis mit P, d. h. **diese Basis selbst**, das letztere eine tetragonale Pyramide von unendlich grosser Axe und demselben Querschnitte, d. h. ein **tetragonales Prisma** von indefiniter Länge dar. Beide können natürlich nicht selbständig, sondern nur in Combination mit einander oder mit andern Gestalten erscheinen. Uebrigens erweitern wir die Bedeutung des Zeichens oP dahin, dass es nicht blos die Basis selbst, sondern überhaupt jede Parallelfläche der Basis repräsentirt. Hiernach bedeutet $\infty P.oP$ ein, seiner Länge nach unbestimmtes, aber an beiden Enden durch basische Flächen terminirtes, tetragonales Prisma, von paralleler Flächenstellung mit P.

§. 206.

Ableitung der ditetragonalen, und der tetragonalen Pyramiden zweiter Art.

Aus jedem Gliede mP der Hauptreihe lässt sich eine Reihe ditetragonaler Pyramiden und eine tetragonale Pyramide von diagonaler Flächenstellung ableiten.

Man verlängere die Nebenaxen von mP nach irgend einem rationalen Coëfficienten n, der > 1, und verbinde die Eckpuncte der Basis mit den Endpuncten der verlängerten Nebenaxen durch gerade Linien, so bildet sich jedenfalls eine ditetragonale Figur aus. Legt man nun in jede Seite dieser Figur, als der Basis der neuen Gestalt, zwei Ebenen, von welchen die eine den oberen, die andre den unteren Pol der Pyramide mP trifft, so resultirt nothwendig eine von 16 ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Gestalt, deren Mittelkanten in **einer** Ebene liegen, d. h. eine ditetragonale Pyramide (§. 199), deren Zeichen mPn. Weil nun n alle möglichen rationalen Werthe von 1 bis ∞ annehmen kann, so erhalten wir aus jedem

Gliede mP der Hauptreihe einen zahllosen Inbegriff von ditetragonalen Pyramiden, welcher sich nach den fortschreitenden Werthen von n in das Schema folgender Reihe ordnen lässt:

$$mP\ldots\ldots\ldots mPn\ldots\ldots\ldots mP\infty$$

Für $n = 1$ verwandelt sich die ditetragonale Basis in die quadratische Basis der Grundgestalt; für $n = \infty$ dagegen in das um diese Basis regelmässig umschriebene Quadrat. Daher sind die Gränzglieder dieser Reihe einerseits die Pyramide mP, von welcher die Ableitung ausging; anderseits wiederum eine tetragonale Pyramide von gleicher Axe mit mP, aber von diagonaler Flächenstellung und doppelt so grosser Basis. Alle mittleren Glieder sind ditetragonale Pyramiden von verschiedenen Basen, nach Maassgabe der verschiedenen Werthe von n. Uebrigens ist es sowohl die Gleichheit der Hauptaxen, als auch die Identität der normalen Hauptschnitte, was die sämmtlichen so abgeleiteten Gestalten in eine Reihe vereinigt, und folglich die Copula dieser Reihe bildet.

Die bisher beobachteten Werthe von n sind gewöhnlich von sehr einfachem numerischen Ausdrucke. Regelmässige achtseitige Pyramiden können aber nicht vorkommen, da sie einen irrationalen Werth von n fordern.

§. 207.

Ditetragonale Prismen.

Wie aus jedem Gliede der Hauptreihe, so muss sich auch aus ∞P, oder dem tetragonalen Prisma eine Reihe von folgender Form ableiten lassen:

$$\infty P\ldots\ldots\ldots\infty Pn\ldots\ldots\ldots\infty P\infty$$

Sämmtliche Glieder dieser Reihe, mit Ausnahme der beiden äussersten, sind ditetragonale Prismen von verschiedenen Querschnitten, nach Maassgabe der verschiedenen Werthe von n, während einerseits das tetragonale Prisma ∞P, anderseits wiederum ein tetragonales Prisma von diagonaler Flächenstellung und doppelt so grossem Querschnitt als ∞P die Gränzglieder der Reihe bilden. Keines dieser Prismen kann selbständig erscheinen, indem die Möglichkeit ihrer Erscheinung eine beiderseitige Begränzung durch solche Gestalten voraussetzt, deren Flächen gegen die Hauptaxe geneigt sind. Das regelmässig achtseitige Prisma ist als einfache Gestalt eben so unmöglich, wie eine dergleichen Pyramide; zwar stellt die Combination $\infty P.\infty P\infty$. ein gleichwinkliges (und zufällig wohl auch gleichseitiges) achtseitiges Prisma dar; allein die Flächen dieses Prismas haben eine ganz andre Lage, als die Flächen desjenigen gleichwinklig achtseitigen Prismas, welches aus ∞P nach einem irrationalen Coëfficienten abgeleitet werden könnte.

§. 208.

Schema des Tetragonalsystemes.

Durch die Ableitungen der beiden vorhergehenden §§. ist die mögliche Mannichfaltigkeit tetragonaler Gestalten vollständig erschöpft, indem sich keine holoëdrische Gestalt angeben lässt, welche nicht auf die eine oder die andre Art aus einer gewählten Grundgestalt hergeleitet werden könnte. Verbinden wir die Reihen der ditetragonalen Pyramiden mit der Hauptreihe, so erhalten wir folgendes Schema des Tetragonalsystemes:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & m<1 & & & & m>1 & & & \\
oP & \cdots\cdots & mP & \cdots\cdots & P & \cdots\cdots & mP & \cdots\cdots & \infty P \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
oPn & \cdots\cdots & mPn & \cdots\cdots & Pn & \cdots\cdots & mPn & \cdots\cdots & \infty Pn \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
oP\infty & \cdots\cdots & mP\infty & \cdots\cdots & P\infty & \cdots\cdots & mP\infty & \cdots\cdots & \infty P\infty
\end{array}$$

Aus dem bisher Vorgetragenen ergeben sich für dieses Schema folgende Sätze:

1) Jede horizontale Reihe enthält lauter Gestalten von congruenten Mittelquerschnitten.
2) Die oberste horizontale Reihe, welche wir die **Hauptreihe** des Systemes nannten, begreift alle tetragonalen Pyramiden und das gleichnamige Prisma von normaler Flächenstellung und gleicher Basis mit P.
3) Die unterste horizontale Reihe begreift alle tetragonalen Pyramiden und das gleichnamige Prisma von diagonaler Flächenstellung und doppelt so grosser Basis als P. Wir nennen sie die **Nebenreihe** des Systemes.
4) Die mittleren horizontalen Reihen, deren so viele möglich sind, als es rationale Werthe von n giebt, begreifen lauter ditetragonale Pyramiden und Prismen, und zwar jede einzele Reihe lauter Gestalten von ähnlichen Querschnitten, da ein und derselbe Werth von n eine und dieselbe ditetragonale Basis giebt. Wir nennen sie die **Zwischenreihen** des Systemes.
5) Jede verticale Reihe begreift Gestalten von gleicher Axenlänge und congruenten normalen Hauptschnitten.

B. Ableitung der hemiëdrischen Gestalten.

§. 209.

Verschiedene Weise der Hemiëdrie an $m\mathrm{P}n$.

Aus den Verhältnissen der ditetragonalen Pyramiden zu den übrigen holoëdrischen Gestalten ersieht man, dass selbige die allgemeinsten Repräsentanten der tetragonalen Gestalten überhaupt sind, und dieselbe Rolle in diesem Systeme spielen wie die Hexakisoktaëder im Tesseralsysteme. Wie daher in dem

Zeichen mPn die Zeichen aller übrigen holoëdrischen Gestalten enthalten sind, so vereinigt auch die ditetragonale Pyramide in ihren Eigenschaften die Bedingungen für die Existenz aller übrigen Gestalten. Dieses Verhältniss ist zumal für die folgenden beiden Abschnitte von Wichtigkeit, indem die Berechnung sowohl als die Combinationslehre auf die ditetragonale Pyramide gegründet werden müssen. Aber auch bei der Ableitung der hemiëdrischen Gestalten ist es sehr vortheilhaft, zunächst von dieser allgemeinsten Gestalt auszugehen, weil man dann die für die übrigen Gestalten gültigen Resultate zugleich mit erhält.

Je vier, über einem und demselben Quadranten der Basis gelegene Flächen bilden gleichsam ein Glied der ditetragonalen Pyramide, welche demnach als ein viergliedriges Ganze zu betrachten ist. Wenn nun die Hemiëdrie überhaupt durch das Eintreten des Gegensatzes entweder von oben und unten, oder von rechts und links, oder auch durch das gleichzeitige Eintreten beider Gegensätze bedingt wird, so scheint es doch in der Natur begründet, dass sich diese Gegensätze jedenfalls nur innerhalb eines und desselben Gliedes, und niemals in Bezug auf solche Flächensysteme geltend machen, welche von Flächen verschiedener Glieder gebildet werden. In der Voraussetzung der Gültigkeit dieses Gesetzes, kann nun die Hemiëdrie an der ditetragonalen Pyramide nur in folgender dreierlei Weise verwirklicht werden:

a) durch den Gegensatz von oben und unten; es verschwinden die abwechselnden oberen und unteren Flächenpaare der einzelen Glieder; Fig. 247.

b) durch den Gegensatz von rechts und links; es verschwinden die rechten oder die linken Flächenpaare der einzelen Glieder; Fig. 248.

c) durch gleichzeitiges Eintreten beider Gegensätze;

es verschwindet in jedem Gliede die obere rechte mit der unteren linken, oder die obere linke mit der unteren rechten Fläche; Fig. 249.

Nach den Resultaten, welche diese verschiedenen Modalitäten der Hemiëdrie für die Erscheinung geben, wollen wir die erste die skalenoëdrische oder sphenoidische, die zweite die pyramidale, und die dritte die trapezoëdrische Hemiëdrie nennen.

a) *Skalenoëdrische oder sphenoidische Hemiëdrie.*

§. 210.

Ableitung der tetragonalen Skalenoëder.

Die tetragonalen Skalenoëder sind die geneigtflächig-hemiëdrischen Gestalten der ditetragonalen Pyramiden nach den an den abwechselnden diagonalen Polkanten gelegenen Flächenpaaren; oder: die durch den Gegensatz von oben und unten entstehenden hemiëdrischen Gestalten jener Pyramiden.

Da von den an den diagonalen Polkanten gelegenen Flächenpaaren die abwechselnden bleiben und verschwinden, so werden z. B. für ein oberes dergleichen Flächenpaar das gegenüberliegende obere, und die beiden zwischengelegenen unteren Flächenpaare zu vergrössern seyn. Für jede bleibende obere Fläche ist also ihre untere Nebenfläche eine verschwindende, und umgekehrt, und es folgt hieraus, dass die horizontalen Mittelkanten der Muttergestalt verschwinden, und irgend andre an deren Stelle treten müssen. Weil aber jede bleibende Fläche mit ihrer unteren, gleichfalls bleibenden Nachbarfläche ursprünglich einen normalen Mitteleckpunct gemein hatte, so wird sie mit ihr nach der Vergrösserung eine Kante bilden, welche nur diesen einzigen Punct mit der Ebene der Basis gemein hat, und daher nicht horizontal, sondern geneigt ist. Die Mittelkanten der neuen Gestalt liegen also nicht mehr in einer Ebene, gehen aber doch durch die vier normalen Eckpuncte, und müssen folglich im Zickzack auf- und ablaufen. — Es hat aber auch jede bleibende Fläche vor der Vergrösserung einen Punct, nämlich den Poleckpunct, mit einer Fläche des andern bleibenden Flächenpaares derselben Pyramidenhälfte gemein; sie wird daher, weil das zwischenliegende Flächenpaar verschwindet, mit derselben Fläche nach der Vergrösserung eine Polkante bilden. Da nun jede Fläche schon ursprünglich mit ihrer Nebenfläche desselben Paares eine (diagonale) Polkante bildete, so wird sie nach der Vergrösserung, ausser von dieser Kante, noch von einer neuen Mittelkante und von einer neuen Polkante, überhaupt also von drei Kanten begränzt, und folglich ein Dreieck seyn. Die hemiëdrische Gestalt ist daher eine von acht Dreiecken umschlossene Gestalt, deren Mittelkanten nicht in einer Ebene liegen, d. h. ein tetragonales Skalenoëder (§. 200).

Das Zeichen dieser Skalenoëder ist allgemein $\frac{mPn}{2}$; doch giebt jede ditetragonale Pyramide zwei gleiche und ähnliche in verwendeter Stellung befindliche, complementare Gegenkörper oder hemiëdrische Ebenbilder, welche durch Vorsetzung der Stellungszeichen + und — unterschieden werden.

§. 211.

Ableitung der tetragonalen Sphenoide.

Setzt man $n = 1$, so verwandelt sich die ditetragonale Pyramide in eine tetragonale Pyramide der Hauptreihe, deren einzele Flächen den Flächenpaaren jener entsprechen. Bringt man für sie dasselbe Gesetz der Hemiëdrie in Anwendung, so werden die abwechselnden Flächen der Pyramide mP verschwinden, während die vier übrigen zur Darstellung der hemiëdrischen Gestalt contribuiren; für jede bleibende Fläche verschwinden also die Nebenflächen und bleiben die Nachbarflächen. Da nun jede Fläche drei Nachbarflächen hat, und mit diesen zum Durchschnitte kommt, so wird die neue Gestalt von vier Dreiecken umschlossen seyn; und da für jede bleibende Fläche ihre in der entgegengesetzten Pyramidenhälfte gelegene Nebenfläche verschwindet, so verschwinden auch die ursprünglichen, horizontalen Mittelkanten der Muttergestalt. Nun hat aber jede bleibende Fläche mit ihren beiden Nachbarflächen der entgegengesetzten Pyramidenhälfte vor der Vergrösserung einen Mittelpunct gemein; sie wird also nach der Vergrösserung mit denselben zwei Mittelkanten bilden, welche die Ebene der Basis nur in einem Puncte schneiden, und folglich gegen dieselbe geneigt sind. Die Mittelkanten der neuen Gestalt müssen also im Zickzack auf- und ablaufen. Endlich folgt aus der gegenseitigen Lage jeder Fläche zu ihren Nachbarflächen, dass sie nach der Vergrösserung wiederum ein gleichschenkliges Dreieck darstellen muss. Die hemiëdrische Gestalt ist also eine von vier gleichschenkligen Dreiecken umschlossene Gestalt, deren Mittelkanten nicht in einer Ebene liegen, d. h. ein tetragonales Sphenoid (§. 202).

Die Zeichen der beiden, aus jeder Pyramide mP abzuleitenden Sphenoide sind $+\frac{mP}{2}$ und $-\frac{mP}{2}$.

§. 212.

Gränzgestalten der Skalenoëder.

Die tetragonalen Sphenoide sind eigentlich nichts anderes, als die Gränzgestalten der Skalenoëder für den Werth $n = 1$. Setzt man dagegen $n = \infty$, so verwandelt sich die ditetragonale Pyramide in eine tetragonale Pyramide der Nebenreihe, und wendet man auf diese dasselbe Gesetz der Hemiëdrie an, so gelangt man offenbar auf eine Gestalt, welche in der Erscheinung durch Nichts von mP∞ verschieden ist. Die tetragonalen Pyramiden der Nebenreihe erscheinen daher als Gränzgestalten der Skalenoëder eben sowohl mit ihren sämmtlichen acht Flächen, wie wenn sie holoëdrisch, als Gränzgestalten der ditetragonalen Pyramiden, auftreten. Das Paradoxon, welches in diesem Resultate zu liegen scheint, verschwindet jedoch, sobald man erwägt, dass jede Fläche dieser tetragonalen Pyramiden eigentlich aus zwei Flächen der ditetragonalen Pyramide hervorgegangen, und dass, streng genommen, nur eine Hälfte jeder Fläche in der hemiëdrischen Gestalt vorhanden ist, was freilich für die Erscheinung keinen Unterschied bedingt, weil ihre andre Hälfte in eine Ebene mit ihr selbst fällt. Daher kann es uns auch nicht befremden, wenn wir an tetragonalen Mineralspecies, welche der skalenoëdrischen Hemiëdrie unterworfen sind, wie z. B. am Kupferkiese, die tetragonalen Pyramiden der Nebenreihe, der Hemiëdrie ungeachtet, vollständig auftreten sehen. Im Gegentheile werden wir uns von der Nothwendigkeit dieser Erscheinungsweise überzeugen, sobald wir ihr Verhältniss zu den Skalenoëdern so aufgefasst haben, wie es sich durch unsre Ableitungsmethode von selbst bestimmt.

Auf ∞Pn, ∞P und ∞P∞ ist das Gesetz der skalenoëdrischen Hemiëdrie sofern ohne Einfluss, wiefern die Erscheinungsweise dieser Prismen durch selbiges keiner Aenderung unterworfen seyn kann. Doch ist zu erinnern, dass von ∞Pn die abwechselnden Flächenpaare, und von ∞P die abwechselnden einzelen Flächen eine verschiedene Bedeutung erhalten, indem die einen auf die obere, die anderen auf die untere Hälfte der Gestalt zu beziehen sind; ein Unterschied, welcher für die Combinationskanten wichtig ist, und sich sehr auffallend offenbaren würde, wenn eine Species, deren Gestalten der skalenoëdrischen Hemiëdrie unterworfen sind, zugleich unter dem Gesetze des Hemimorphismus stände *).

§. 213.

Eingeschriebene Sphenoide der Skalenoëder.

Die Mittelkanten jedes Skalenoëders $\frac{mPn}{2}$ haben genau dieselbe Lage, wie die Mittelkanten irgend eines Sphenoides, welches wir das eingeschriebene Sphenoid nennen wollen. Da nun in jedem Sphenoide der Abstand der Ecke von der Basis der halben Hauptaxe gleich ist, so würde man die Hauptaxe des eingeschriebenen Sphenoides von $\frac{mPn}{2}$ kennen, sobald der Abstand der Mittelecke von der Ebene des Mittelquerschnittes des Skalenoëders bekannt wäre; dieser Abstand aber ist wiederum nichts anderes, als die der Hauptaxe parallele Coordinate z des Mitteleckpunctes.

Da nun jeder Mitteleckpunct der Durchnittspunct einer oberen und einer unteren Polkante desselben diagonalen Hauptschnittes ist, so gelangt man sehr leicht zur Bestimmung seiner Coordinate x, durch Combination der Gleichungen dieser beiden Polkanten. Aus der Lage je zweier Flächen, welche zur Darstellung der erwähnten beiden Kanten contribuiren, ergeben sich für eine längere obere Polkante die Gleichungen:

$$y-z=0 \text{ und } \frac{x}{mu}+\frac{(n+1)y}{n}=1$$

*) Vergl. mein Lehrbuch der Mineralogie §. 125.

und für die entsprechende kürzere, untere Polkante die Gleichungen:

$$y - z = 0 \text{ und } -\frac{x}{ma} + \frac{(n-1)y}{n} = 1$$

woraus für die der Hauptaxe parallele Coordinate x ihres Durchschnittspunctes der absolute Werth

$$x = \frac{ma}{n}$$

folgt, welches die gesuchte Halbaxe des eingeschriebenen Sphenoides für das Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$. Das Zeichen dieses Sphenoides ist folglich $\frac{\frac{m}{n}P}{2}$.

§. 214.

Secundäre Ableitung der Skalenoëder aus den Sphenoiden.

Auf die im vorigen §. erörterte Eigenschaft der Skalenoëder lässt sich folgende secundäre Ableitung derselben aus den Sphenoiden gründen, welche insofern einigen Vorzug vor der primitiven Ableitung des §. 210 hat, wiefern sie die Vorstellung der wahren Physiognomie dieser Gestalten bedeutend erleichtert, weil sie selbige von der Vorstellung einer weit einfacheren Gestalt abhängig macht. Jedes Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$ wird nämlich aus seinem eingeschriebenen Sphenoide $\frac{\frac{m}{n}P}{2}$ (Fig. 251) abzuleiten seyn, indem man die Hauptaxe des letzteren nach einem Coëfficienten q verlängert, bis sie $= ma$, und darauf in jede Mittelkante des Sphenoides zwei Ebenen legt, von welchen die eine den oberen, die andere den unteren Endpunct der so verlängerten Hauptaxe trifft. Da nun

$$ma = \frac{qma}{n}$$

so sieht man, dass $q = n$ seyn muss. Bezeichnet man, zum Behufe dieser secundären Ableitung, jedes aus einer tetragonalen Pyramide mP abgeleitete Skalenoëder mit $\pm mS$, und schreibt man den zweiten Ableitungscoëfficienten, welcher sich auf die Verlängerung der Hauptaxe des eingeschriebenen Sphenoides bezieht, nach Art eines Exponenten oben rechter Hand vom Symbol S, so wird das secundäre Zeichen jedes Skalenoëders $\pm \frac{mPn}{2}$ die Form

$$\pm \frac{m}{n} S^n$$

erhalten. Uebrigens folgt aus den Gleichungen der beiden Polkanten, dass die kürzeren Polkanten jedes Skalenoëders $\frac{mPn}{2}$ dieselbe Lage haben wie die Polkanten der tetragonalen Pyramide

$$\frac{m(n-1)}{n} P\infty$$

und dass die längeren Polkanten dieselbe Lage haben wie jene der Pyramide

$$\frac{m(n+1)}{n} P\infty$$

Den kürzeren Polkanten sind daher die Flächen des Sphenoides

$$\mp \frac{m(n-1)}{2n} S$$

den längeren Polkanten die Flächen des Sphenoides

$$\pm \frac{m(n+1)}{2n} S$$

parallel, und es ist merkwürdig, dass zwischen den Axen a, a' und a'' der drei Sphenoide, welche solchergestalt durch jedes Skalenoëder indicirt sind, die Relation Statt findet:

$$a = a' + a''$$

in welcher Gleichung a'' die Axe des eingeschriebenen Sphenoides, a und a' die Axen der auf die längeren und kürzeren Polkanten bezüglichen Sphenoide bedeuten.

§. 215.

Schema des skalenoëdrisch erscheinenden Tetragonalsystemes.

Der secundären Ableitung und Bezeichnung zufolge lässt sich für das Tetragonalsystem in seiner skalenoëdrischen Hemiëdrie folgendes allgemeine Schema aufstellen.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & m<1 & & & & m>1 & & \\
oS & \cdots & \pm mS & \cdots & \pm S & \cdots & \pm mS & \cdots & \infty S \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
oS^n & \cdots & \pm mS^n & \cdots & \pm S^n & \cdots & \pm mS^n & \cdots & \infty S^n \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\multicolumn{9}{c}{\underbrace{oS^\infty \;\cdots\; mS^\infty \;\cdots\; S^\infty \;\cdots\; mS^\infty \;\cdots\; \infty S^\infty}_{\infty P\infty}} \\
\hline
oP\infty & \cdots & mP\infty & \cdots & P\infty & \cdots & mP\infty & \cdots & \infty P\infty
\end{array}
$$

Die oberste horizontale Reihe, welche auch hier als Hauptreihe gilt, enthält die sämmtlichen Sphenoide und das tetragonale Prisma von gleicher Flächenstellung.

Die unterste, durch einen Strich abgesonderte horizontale Reihe enthält die sämmtlichen tetragonalen Pyramiden von diagonaler Flächenstellung, so wie das gleichnamige Prisma; sie ist identisch mit der Nebenreihe in §. 208 und behält auch hier diesen Namen.

Die mittleren horizontalen Reihen, mit Ausnahme der eingeklammerten, enthalten die sämmtlichen Skalenoëder und ditetragonalen Prismen des Systemes, und zwar jede einzele dieser Reihen (in welcher derselbe Werth von n vorausgesetzt wird) nur solche Gestalten von ähnlichen Querschnitten, da die Figur dieser Querschnitte nur von n abhängt.

Die eingeklammerte Reihe enthält nur eine und dieselbe Gestalt, nämlich ein tetragonales Prisma von diagonaler Flächenstellung, welches daher identisch mit $\infty P \infty$ ist. Dieses Resultat folgt unmittelbar aus der Betrachtung der einzelen verticalen Reihen des Schemas. Jede dieser Reihen fängt mit einem Sphenoide an, aus welchem durch successiv zunehmende Vergrösserung der Hauptaxe immer spitzere und spitzere Skalenoëder abgeleitet werden Daher enthält zuvörderst jede verticale Reihe Gestalten mit gleichliegenden Mittelkanten. Wird nun der Coëfficient n, welcher die Vergrösserung der Hauptaxe des Sphenoides anzeigt, unendlich gross, so fallen nothwendig je zwei, in eine und dieselbe Mittelkante des Sphenoides zu legende Flächen in eine, der Hauptaxe desselben parallele Ebene, und das Skalenoëder verwandelt sich in ein tetragonales Prisma, aus welchem Gliede der Hauptreihe es auch abgeleitet seyn mag. Daher haben die sämmlichen verticalen Reihen des Schemas eine und dieselbe Gränzgestalt, $mS^{\infty} = \infty P \infty$.

Anmerkung. Wiewohl nicht abzuläugnen, dass diese secundäre Ableitung und Bezeichnung der sphenoidischen Abtheilung des Tetragonalsystemes weit repräsentativer ist, als die primitive, und wiewohl sie deshalb für das Bedürfniss der Mineralogie der letzteren unbedingt vorzuziehen wäre, so lässt sich doch auf der andern Seite nicht verkennen, dass durch sie der Zusammenhang verloren geht, welcher zwischen den Skalenoëdern und den Pyramiden der Nebenreihe Statt findet, und dass über die Ableitung der ditetragonalen Prismen aus ∞S einige Unklarheit zurückbleibt.

b) Pyramidale Hemiëdrie.

§. 216.

Ableitung der tetragonalen Pyramiden von abnormer Flächenstellung.

Die tetragonalen Pyramiden von abnormer Flächenstellung sind die hemiëdrischen Gestalten der ditetragonalen Pyramiden nach den an den abwechselnden Mittelkanten gelegenen Flächenpaaren; oder, die durch den Gegensatz von rechts und links entstehenden hemiëdrischen Gestalten jener Pyramiden.

Weil die Mittelkanten der ditetragonalen Pyramiden in der Ebene der Basis liegen, so werden sich, bei der Vergrösserung der an den abwechselnden vier Mittelkanten gelegenen Flächenpaare, zugleich diese Mittelkanten verlängern, ohne jedoch ihre ursprüngliche Lage in der Ebene der Basis aufzugeben. Und weil jede bleibende Fläche, ausser mit ihrer Nebenfläche der ungleichnamigen Pyramidenhälfte, noch mit zwei Nachbarflächen der gleichnamigen Pyramidenhälfte zum Durchschnitte kommt, so wird sie nach ihrer Vergrösserung wiederum ein Dreieck darstellen. Die neue Gestalt ist daher eine Pyramide (§. 56). — Da aber von den abwechselnden Mittelkanten der Muttergestalt je zwei gegenüberliegende parallel, je zwei benachbarte normal, und alle vom Mittelpuncte gleichweit entfernt sind, so wird die Basis der neuen Gestalt ein Quadrat, und diese selbst eine tetragonale Pyramide. — Da endlich die Mittelkanten der Muttergestalt niemals den Mittelkanten der tetragonalen Pyramiden von normaler oder diagonaler Flächenstellung parallel laufen, sondern jederzeit eine mittlere Richtung zwischen den Richtungen jener beiden behaupten, so werden auch diese hemiëdrischen tetragonalen Pyramiden weder normale noch diagonale, sondern irgend eine mittlere, oder abnorme Flächenstellung haben.

Weil es aber in jeder ditetragonalen Pyramide zwei Systeme von abwechselnden Mittelkanten giebt, so wird man auch aus jedem mPn zwei, an sich gleiche und ähnliche, und nur durch ihre Stellung verschiedene tetragonale Pyramiden erhalten. Um diesen Unterschied der Stellung zu fixiren, denken wir uns die Muttergestalt so gestellt, dass einer der diagonalen Hauptschnitte auf uns zuläuft. Dann liegt auf jeder Seite dieses Hauptschnittes eines der beiden Flächenpaare, welche zusammen **ein Glied** der Pyramide bilden (§. 209). Vergrössern wir das rechts gelegene Flächenpaar und die übrigen abwechselnden, so entsteht eine **rechts gewendete**, vergrössern wir das links gelegene Flächenpaar und die übrigen abwechselnden, so entsteht eine **links gewendete** Pyramide. Allein dieser Unterschied von rechts und links ist ganz relativ, indem er davon abhängt, **welcher Pol** der Hauptaxe als oberer oder als unterer Pol gedacht wird; vertauschen wir daher die Pole, oder kehren wir die Muttergestalt um, so vertauschen auch beide hemiëdrische Gestalten ihre Rollen, und die anfangs rechts gewendete erscheint nun links gewendet, und umgekehrt. Diese Zweideutigkeit wird dadurch sehr treffend ausgedrückt, dass man dem allgemeinen Zeichen $\frac{mPn}{2}$ der beiden hemiëdrischen Gegenkörper die Hülfselemente $\frac{r}{l}$ und $\frac{l}{r}$ vorsetzt.

§. 217.

Gränzgestalten der tetragonalen Pyramiden von abnormer Flächenstellung.

Für $m = \infty$ verwandelt sich die Pyramide in ein tetragonales Prisma von abnormer Flächenstellung, dessen Zeichen $\frac{r}{l}\frac{\infty Pn}{2}$ oder $\frac{l}{r}\frac{\infty Pn}{2}$.

Für $n = 1$ resultirt die, mit ihren sämmtlichen acht Flächen vollständig erscheinende, tetragonale Pyramide mP der Hauptreihe, und für $n = \infty$ die, ebenfalls mit allen ihren Flächen erscheinende, Pyramide $mP\infty$ der Nebenreihe; wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man die Flächen dieser Gestalten durch ihre Höhenlinien halbirt, je vier Flächenhälften nach §. 209 zu einem Gliede vereinigt denkt, und hierauf dasselbe Gesetz der Hemiëdrie in Anwendung bringt, welches im vorigen §. für die ditetragonalen Pyramiden geltend gemacht wurde.

Hieraus ergiebt sich also für die pyramidal-hemiëdrische Erscheinungsweise des Tetragonalsystemes die Regel, dass die Gestalten der Haupt- und Nebenreihe vollständig, die Gestalten der Zwischenreihen aber als tetragonale Pyramiden und Prismen von abnormer Flächenstellung auftreten; eine Regel, welche sich auch an den Krystallreihen des Kalkscheelates und Fergusonites vollkommen bestätigt findet.

c) *Trapezoëdrische Hemiëdrie.*

§. 218.

Ableitung der tetragonalen Trapezoëder.

Die tetragonalen Trapezoëder sind die geneigtflächig-hemiëdrischen Gestalten der ditetragonalen Pyramiden nach den abwechselnden einzelen Flächen; oder die durch die gleichzeitigen Gegensätze von oben und unten, von rechts und links entstehenden hemiëdrischen Gestalten jener Pyramiden.

Die Hemiëdrie nach einzelen Flächen kann in den ditetragonalen Pyramiden nur auf eine geneigtflächige Gestalt führen, weil jeder Fläche Gegenfläche in der Reihe der Nebenflächen die fünfte und folglich eine verschwindende ist, wenn jene vergrössert wird. Es hat aber jede Fläche drei Neben- und vier Nachbarflächen; wenn also jene verschwinden, und diese zugleich mit ihr selbst wachsen, so wird sie nach der Vergrösserung vier Durchschnitte erleiden, und folglich eine vierseitige Figur werden. Weil aber jede Fläche ursprüglich nur gegen die beiden Nachbarflächen derselben Pyramidenhälfte gleiche, gegen die beiden andern ungleiche Neigung hat, so werden auch die neuen Kanten dreierlei verschiedene Werthe haben, indem zwei gleiche Polkanten nebst zwei ungleichen Mittelkanten die einzelen Flächen begränzen, welche demnach als gleichschenklige Trapezoide erscheinen *). Da endlich für jede bleibende Fläche die untere Nebenfläche eine verschwindende ist, so werden die neuen Mittelkanten auch nicht in der Ebene der Basis liegen, vielmehr gegen dieselbe geneigt seyn, und im Zickzack auf- und absteigen. Folglich ist die hemiëdrische Gestalt eine von acht gleichschenkligen Trapezoiden umschlossene Gestalt, deren Mittelkanten n i c h t in e i n e r Ebene liegen, d. h. ein tetragonales Trapezoëder.

Jede ditetragonale Pyramide mPn giebt zwei Trapezoëder, welche in ihren einzelen Begränzungselementen vollkommen gleich und ähnlich, aber hinsichtlich der Verknüpfung derselben wie ein rechtes und linkes Ding desselben Paares unterschieden sind. Daher können auch beide Gegenkörper nur dann zur Congruenz gebracht werden, wenn man den einen umstülpt, d. h. die Innenfläche zur Aussenfläche macht, indem ihr Unterschied völlig derselbe ist wie

---

*) Die Resultate des nächsten Capitels enthalten zugleich die vollständigen Beweise für sämmtliche Regeln der Ableitung.

der eines rechten und linken Handschuhs. In der Bezeichnung wird dieser Unterschied durch Vorsetzung der Hülfselemente *r* und *l* hinlänglich ausgedrückt, weil das Rechts und Links hier keinesweges so relativ ist wie in den tetragonalen Pyramiden von abnormer Flächenstellung, vielmehr das rechts gedrehte Trapezoëder immer ein rechtes, das links gedrehte immer ein linkes bleibt, wie man auch die Gestalt aufrecht stellen mag. Daher sind denn die Zeichen der beiden aus $m\mathrm{P}n$ abzuleitenden Trapezoëder $r\frac{m\mathrm{P}n}{2}$ und $l\frac{m\mathrm{P}n}{2}$.

§. 219.

Gränzgestalten der tetragonalen Trapezoëder.

Für $m = \infty$ verwandelt sich das Trapezoëder in das ditetragonale Prisma $\infty\mathrm{P}n$, dessen abwechselnde Flächen jedoch auf die entgegengesetzten Hälften der Hauptaxe zu beziehen sind, so dass vier als obere und vier als untere Flächen gelten.

Für $n = 1$ resultirt die mit ihren sämmtlichen acht Flächen vollständig erscheinende Pyramide $m\mathrm{P}$, und eben so für $n = \infty$ die vollständig erscheinende Pyramide $m\mathrm{P}\infty$; wovon man sich leicht überzeugt, wenn man die Flächeu beider Pyramiden durch ihre Höhenlinien halbirt, und darauf dasselbe Gesetz der Hemiëdrie in Anwendung bringt, nach welchem die Trapezoëder abgeleitet wurden. — Hieraus folgt für die trapezoëdrische Erscheinungsweise des Tetragonalsystemes die Regel, dass die Gestalten der Haupt- und Nebenreihe vollständig, die ditetragonalen Pyramiden als Trapezoëder, die ditetragonalen Prismen dagegen wiederum vollständig erscheinen, indem diese letzteren nur dann als tetragonale Prismen von abnormer Flächenstellung auftreten würden, wenn die

Krystallreihe zugleich dem Hemimorphismus unterworfen wäre.

Drittes Capitel.

Von der Berechnung der Gestalten des Tetragonalsystemes.

§. 220.

Allgemeine Bemerkung.

Bei der Berechnung der verschiedenen Gestalten des Tetragonalsystemes haben wir die wesentlich verschiedene Erscheinungsweise derselben zu berücksichtigen, und demnach zuvörderst die holoëdrischen, und darauf die hemiëdrischen Gestalten in ihren drei Abtheilungen dem Calcul zu unterwerfen. Dabei versteht es sich von selbst, dass die Berechnung innerhalb einer jeden Abtheilung zunächst auf diejenige Gestalt gegründet werden muss, welche als der allgemeine Repräsentant derselben zu betrachten ist. Uebrigens setzen alle Berechnungen das Axenverhältniss einer Grundgestalt voraus, welches, wie auch der Charakter der Krystallreihe beschaffen seyn möge, jedenfalls durch $1 : a$ ausgedrückt wird (§. 204), indem 1 die halbe Nebenaxe, und a die halbe Hauptaxe von P bedeutet.

Nach diesen vorläufigen Bemerkungen schreiten wir zur Berechnung der einzelen Gestalten, indem wir uns für jede derselben die nämlichen sieben Aufgaben stellen, welche oben für die tesseralen Gestalten gelöst wurden.

A. Berechnung der holoëdrischen Gestalten.

§. 221.

Berechnung der ditetragonalen Pyramide mPn; Zwischenaxe.

Aufgabe. Die Grösse der Zwischenaxen der ditetragonalen Pyramide mPn zu finden.

Da in jeder ditetragonalen Pyramide mPn das Verhältniss der Parameter $= ma : n : 1$, so wird die Gleichung einer in den Octanten der positiven Halbaxen fallenden Fläche F:

$$\frac{x}{ma} + \frac{y}{n} + z = 1$$

Die Zwischenaxen bestimmen sich nun ganz so wie die rhombischen Zwischenaxen im Tesseralsysteme (§. 115); allgemein sind nämlich die Gleichungen der in den Octanten der positiven Halbaxen fallenden Zwischenaxe:

$$x = 0 \text{ und } y - z = 0$$

aus welchen sich, mittels Combination der Gleichung von F, die Coordinaten ihres Endpunctes oder des diagonalen Mitteleckpunctes bestimmen:

$$x = 0,\ y = z = \frac{n}{n+1}$$

und daher die Grösse der halben Zwischenaxe

$$R = \frac{n\sqrt{2}}{n+1}$$

Für $n = 1$ oder für die Pyramiden der Hauptreihe wird daher $R = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, und betrachtet man diesen Werth als den Grundwerth der Zwischenaxe, so wird für irgend ein mPn der erforderliche Coëfficient:

$$r = \frac{2n}{n+1} \text{ wie in §. 115.}$$

§. 222.

Fortsetzung; Flächennormale.

Aufgabe. Die Normale aus dem Mittelpuncte auf eine Fläche der ditetragonalen Pyramide mPn finden.

Die Gleichungen der Flächennormale N aus de Mittelpuncte lassen sich sehr leicht aus der Gleichu von F ableiten, wie in §. 116; man findet;

$$\frac{x}{n}-\frac{y}{ma}=0,\ \frac{z}{ma}-x=0,\ y-\frac{z}{n}=0$$

Combinirt man diese Gleichungen mit jener vo F, so finden sich die Coordinaten des Durchschnittspunctes von N und F, indem man $m^2a^2(n^2+1)+n$ $=M^2$ setzt:

$$x=man\frac{n}{M^2}$$

$$y=man\frac{ma}{M^2}$$

$$z=man\frac{man}{M^2}$$

und folglich die Länge der Flächennormale

$$N=\frac{man}{\sqrt{m^2a^2(n^2+1)+n^2}}=\frac{man}{M}$$

§. 223.

Fortsetzung; Kantenlinien.

Aufgabe. Die Kantenlinien der ditetragonalen Pyramide mPn zu finden.

Wir bezeichnen:

die normalen Polkanten mit X (Fig. 250.)
die diagonalen Polkanten mit Y
die Mittelkanten mit . . . . Z

Die Endpuncte dieser drei Kanten sind:

(1) der Poleckpunct, ... für welchen $x=ma, y=0,\quad z=0$;

(2) der normale Mitteleckpunct - - - $x=0,\ y=0,\quad z=1$;

(3) der diagonale Mitteleckpunct - - - $x=0,\ y=\frac{n}{n+1},\ z=\frac{n}{n+1}$

und zwar wird begränzt:

die Kante X von den Puncten (1) und (2)

- - - Y - - - - (1) und (3)

- - - Z - - - - (2) und (3)

Combinirt man daher die Coordinaten je zweier dieser Puncte nach der bekanten Regel für die Distanzlinie (§. 14), so findet man:

$$X = \sqrt{m^2a^2+1}$$

$$Y = \frac{\sqrt{m^2a^2(n+1)^2+2n^2}}{n+1}$$

$$Z = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$$

Für den Fall, da $X = Y$, oder da die Dreiecke der Pyramide gleichschenklig, mithin diese selbst eine regelmässig achtseitige Pyramide, folgt:

$$n = 1 + \sqrt{2}$$

welcher irrationale Werth die Unmöglichkeit der octogonalen Pyramiden darthut, während er zugleich lehrt, dass die Kante X länger oder kürzer als die Kante Y ist, je nachdem $n <$ oder $> 1 + \sqrt{2}$. Da 2,414.... der Näherungswerth von $1 + \sqrt{2}$, so werden z. B. Pyramiden wie $m\text{P}\frac{12}{5}$ oder $m\text{P}\frac{29}{12}$ den regelmässig achtseitigen Pyramiden sehr nahe kommen.

§. 224.

Fortsetzung; Volumen.

Aufgabe. Das Volumen V der ditetragonalen Pyramide $m\text{P}n$ zu finden.

Die Basis der Pyramide wird durch die Neben- und Zwischenaxen in acht gleiche und ähnliche Dreiecke getheilt, von denen ein jedes, wenn man die halbe Nebenaxe $= 1$ als Grundlinie betrachtet, eine der Coordinaten des diagonalen Mitteleckpunctes $= \frac{n}{n+1}$, zur Höhe hat. Der Flächeninhalt jedes solchen Dreieckes ist daher $= \frac{n}{2(n+1)}$ und der Flächeninhalt der Basis selbst $= \frac{4n}{n+1}$.

Da nun die Pyramide mPn aus zwei, in ihren Grundflächen verbundenen einfachen Pyramiden von der Höhe ma besteht, so wird das Volumen derselben:

$$V = \frac{8man}{3(n+1)},$$

und das Volumen einer jeden der 16 Elementarpyramiden, aus welchen man sich die ganze Pyramide zusammengesetzt denken kann:

$$v = \frac{man}{6(n+1)}$$

§. 225.

Fortsetzung; Oberfläche.

Aufgabe. Die Oberfläche S der ditetragonalen Pyramide mPn zu finden.

Weil das Volumen folgende Function der Oberfläche und Flächennormale:

$$V = \tfrac{1}{3}NS$$

so wird

$$S = \frac{3V}{N}$$

oder, nach Substitution der Werthe von V und N aus §. 224 und 222,

$$S = \frac{8\sqrt{m^2a^2(n^2+1)+n^2}}{n+1} = \frac{8M}{n+1}$$

und daher der Inhalt einer einzelen Pyramidenfläche

$$F = \frac{M}{2(n+1)}$$

§. 226.

Fortsetzung; Flächenwinkel.

Aufgabe. Die Flächenwinkel der ditetragonalen Pyramide mPn zu finden.

Wir bezeichnen die ebenen Winkel einer Fläche F, analog den ihnen gegenüberliegenden Kanten X, Y und Z, mit ξ, v und ζ (Fig. 250). Da nun der Sinus jedes Dreieckwinkels gleich dem doppelten Flächeninhalte, dividirt durch das Product der ihn einschliessenden Seiten, so wird:

$$sin\,\xi = \frac{2F}{YZ},\quad sin\,v = \frac{2F}{XZ},\quad sin\,\zeta = \frac{2F}{XY}$$

Substituirt man statt F, X, Y und Z ihre bekannten Werthe aus §. 223 und 225, und setzt man wie bisher zur Abkürzung $\sqrt{m^2a^2(n^2+1)+n^2} = M$, so folgt:

$$sin\,\xi = \frac{M(n+1)}{\sqrt{m^2a^2(n+1)^2+2n^2}\,\sqrt{n^2+1}}$$

$$sin\,v = \frac{M}{\sqrt{m^2a^2+1}\,\sqrt{n^2+1}}$$

$$sin\,\zeta = \frac{M}{\sqrt{m^2a^2(n+1)^2+2n^2}\,\sqrt{m^2a^2+1}}$$

Sucht man aus diesen Sinus, oder, noch besser, durch Combination der Gleichungen je zweier Kantenlinien nach §. 23, die Cosinus derselben Winkel, so erhält man endlich für die Tangenten, als die im Gebrauche bequemsten Functionen, die Werthe:

$$tang\,\xi = \frac{M(n+1}{n(n-1)}$$

$$tang\,v = M$$

$$tang\,\zeta = \frac{M}{m^2a^2(n+1)+n}$$

§. 227.

Fortsetzung; Kantenwinkel.

Aufgabe. Die Kantenwinkel der ditetragonalen Pyramide mPn zu finden.

Lassen wir den Kanten ihre obige Bezeichnung (§. 223), und setzen wir wiederum die Gleichung der einen Fläche F

$$\frac{x}{ma} + \frac{y}{n} + z = 1$$

so sind die Gleichungen der drei Flächen F', F'' und F''', welche mit F die Kanten X, Y und Z bilden, folgende:

$$\text{für } F' \dots \frac{x}{ma} - \frac{y}{n} + z = 1$$

$$\text{für } F'' \dots \frac{x}{ma} + y + \frac{z}{n} = 1$$

$$\text{für } F''' \dots - \frac{x}{ma} + \frac{y}{n} + z = 1$$

Combinirt man die Parameter der Gleichung F successiv mit den Parametern dieser drei Gleichungen nach der Regel für den Cosinus des Neigungswinkels in §. 22, so folgt:

$$\cos X = - \frac{m^2a^2(n^2-1)+n^2}{m^2a^2(n^2+1)+n^2}$$

$$\cos Y = - \frac{n(2m^2a^2+n)}{m^2a^2(n^2+1)+n^2}$$

$$\cos Z = - \frac{m^2a^2(n^2+1)-n^2}{m^2a^2(n^2+1)+n^2}$$

Die Cosinus der halben Winkel sind:

$$\cos \tfrac{1}{2}X = \frac{ma}{M}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}Y = \frac{ma(n-1)}{M\sqrt{2}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}Z = \frac{n}{M}$$

Aus diesen Werthen folgen die Proportionen:

$$\cos \tfrac{1}{2}X : \cos \tfrac{1}{2}Z = ma : n$$

$$\cos \tfrac{1}{2}Y : \cos \tfrac{1}{2}Z = ma(n-1) : n\sqrt{2}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}X : \cos \tfrac{1}{2}Y = \sqrt{2} : n-1$$

ferner ergiebt sich, dass:

$$X = Y, \text{ wenn } n = 1 + \sqrt{2} \text{ (wie in §. 223)}$$

$$X = Z, \text{ wenn } ma = n$$

$$Y = Z, \text{ wenn } ma = \frac{n\sqrt{2}}{n-1}$$

Der erste Fall ist also unmöglich, und die beiden andern Fälle können nur dann eintreten, wenn a einen rationalen Werth hat.

Auch erhält man leicht für die Tangenten:

$$tang\,\tfrac{1}{2}X = \frac{n\sqrt{m^2a^2+1}}{ma}$$

$$tang\,\tfrac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{m^2a^2(n+1)^2+2n^2}}{ma(n-1)}$$

$$tang\,\tfrac{1}{2}Z = \frac{ma\sqrt{n^2+1}}{n}$$

Nennt man T den Winkel, welchen zwei einander gegenüberliegende Flächen eines und desselben normalen Mitteleckes, und U den Winkel, welchen zwei dergleichen Flächen eines diagonalen Mitteleckes bilden, so wird:

$$\cos T = -\frac{m^2a^2(n^2-1)-n^2}{m^2a^2(n^2+1)+n^2}$$

$$\cos U = -\frac{n(2m^2a^2-n)}{m^2a^2(n^2+1)+n^2}$$

und

$$tang\,\tfrac{1}{2}T = \frac{man}{\sqrt{m^2a^2+n^2}}$$

$$tang\,\tfrac{1}{2}U = \frac{ma(n+1)}{\sqrt{m^2a^2(n-1)^2+2n^2}}$$

§. 228.

Fortsetzung; Kantenwinkel für Pyramiden von der Form mPm und $mP\frac{m}{m-1}$.

Da die ditetragonalen Pyramiden mPn sehr häufig von der Form sind, dass $n = m$, oder auch $n = \frac{m}{m-1}$, so ist es bequem, die zur Berechnung ihrer Kantenwinkel dienenden Ausdrücke als Functionen des Coëfficienten m zur Hand zu haben.

1) Für jede Pyramide mPm wird:

$$\cos X = -\frac{a^2(m^2-1)+1}{a^2(m^2+1)+1}$$

$$\cos Y = -\frac{2ma^2+1}{a^2(m^2+1)+1}$$

$$\cos Z = -\frac{a^2(m^2+1)-1}{a^2(m^2+1)+1}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}X : \cos\tfrac{1}{2}Z = a : 1$$

$$\cos\tfrac{1}{2}Y : \cos\tfrac{1}{2}Z = a(m-1) : \sqrt{2}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}X : \cos\tfrac{1}{2}Y = \sqrt{2} : m-1$$

auch findet sich:

$$\tang\tfrac{1}{2}X = \frac{\sqrt{m^2a^2+1}}{a}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{a^2(m+1)^2+2}}{a(m-1)}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}Z = a\sqrt{m^2+1}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}T = \frac{ma}{\sqrt{a^2+1}}$$

2) Für jede Pyramide $mP\frac{m}{m-1}$ wird:

$$\cos X = -\frac{a^2(2m-1)+1}{a^2(2m^2-2m+1)+1}$$

$$\cos Y = -\frac{2ma^2(m-1)+1}{a^2(2m^2-2m+1)+1}$$

$$\cos Z = -\frac{a^2(2m^2-2m+1)-1}{a^2(2m^2-2m+1)+1}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}X : \cos\tfrac{1}{2}Z = a(m-1) : 1$$

$$\cos\tfrac{1}{2}Y : \cos\tfrac{1}{2}Z = a : \sqrt{2}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}X : \cos\tfrac{1}{2}Y = (m-1)\sqrt{2} : 1$$

auch findet sich:

$$\tang\tfrac{1}{2}X = \frac{\sqrt{m^2a^2+1}}{a(m-1)}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{a^2(2m^2-2m+1)+2}}{a}$$

$$tang\tfrac{1}{2}Z = a\sqrt{2m^2 - 2m + 1}$$

$$tang\tfrac{1}{2}U = \frac{a(2m-1)}{\sqrt{a^2+2}}$$

§. 229.

Berechnung der ditetragonalen Prismen ∞Pn.

Setzt man in den Formeln der vorhergehenden §§. $m = \infty$, so erhält man die Ausdrücke für die ditetragonalen Prismen ∞Pn, wie folgt:

$$r = \frac{2n}{n+1}$$

$$N = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$cos\,X = -\frac{n^2-1}{n^2+1}$$

$$cos\,Y = -\frac{2n}{n^2+1}$$

$$cos\,Z = -\ 1$$

Für je zwei Prismen ∞Pn und $\infty Pn'$, in welchen die diagonalen Kanten des einen den normalen Kanten des andern gleich sind, und umgekehrt, und welche daher als inverse Gestalten bezeichnet werden können, gilt die Gleichung

$$\frac{n'^2-1}{n'^2+1} = \frac{2n}{n^2+1}$$

und folglich:

$$n' = \frac{n+1}{n-1} \quad \text{oder } n = \frac{n'+1}{n'-1}$$

Für $n = 1 + \sqrt{2}$ würde auch ∞Pn ein regelmässig achtseitiges Prisma werden, welchem jedoch keine Realität zugestanden werden kann. Das gleichwinklige (und möglicherweise auch gleichseitige), achtseitige Prisma, welches nicht selten vorkommt, ist, wie bereits oben bemerkt wurde, keinesweges die einfache Gestalt $\infty P1 + \sqrt{2}$, sondern die Combination $\infty P.\infty P\infty$.

§. 230.

Berechnung der tetragonalen Pyramiden mP.

Setzt man in den §§. 221 bis 227 $n = 1$, so erhält man die Ausdrücke für die tetragonalen Pyramiden von normaler Flächenstellung, wie folgt:

I. Coëfficient der Zwischenaxe:

$$r = 1$$

II. Flächennormale:

$$N = \frac{ma}{\sqrt{2m^2a^2 + 1}}$$

III. Kantenlinien:

$$X = \sqrt{m^2a^2 + 1}$$
$$Y = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{2m^2a^2 + 1}$$
$$2Z = \sqrt{2}$$

Die Linie Z in §. 223 ist nämlich die halbe, und daher $2Z$ die ganze Mittelkante von mP; die Kantenlinie Y verschwindet als solche, und Y bedeutet hier nur die Höhenlinie der gleichschenkligen Dreiecke von mP.

IV. Volumen:

$$V = \tfrac{4}{3}ma$$

V. Oberfläche:

$$S = 4\sqrt{2m^2a^2 + 1}$$

VI. Flächenwinkel:

$$tang\,\xi = \infty,\text{ also } \xi = 90°$$
$$tang\,v = \sqrt{2m^2a^2 + 1}$$
$$tang\,2\zeta = \frac{\sqrt{2m^2a^2 + 1}}{m^2a^2}$$

es ist nämlich ζ der halbe, und folglich 2ζ der ganze ebene Winkel am Poleck.

VII. Kantenwinkel:

$$cos\,X = -\frac{1}{2m^2a^2 + 1}$$
$$cos\,Y = -1,\text{ also } Y = 180°$$

$$\cos Z = -\frac{2m^2a^2 - 1}{2m^2a^2 + 1}$$

Hieraus folgt: $2\cos X + \cos Z = -1$; ferner findet sich:

$$\cos \tfrac{1}{2}X : \cos \tfrac{1}{2}Z = ma : 1$$

$$\tan g \tfrac{1}{2}X = \frac{\sqrt{m^2a^2 + 1}}{ma} = \cot \tfrac{1}{2}T$$

$$\tan g \tfrac{1}{2}Z = ma\sqrt{2}$$

§. 231.

Berechnung der tetragonalen Pyramiden $mP\infty$.

Setzt man in den §§. 221 bis 227 $n = \infty$, so erhält man die Ausdrücke für die tetragonalen Pyramiden von diagonaler Flächenstellung, wie folgt:

I. Coëfficient der Zwischenaxe:

$$r = 2$$

II. Flächennormale:

$$N = \frac{ma}{\sqrt{m^2a^2 + 1}}$$

III. Kantenlinien:

$$X = \sqrt{m^2a^2 + 1}$$

$$Y = \sqrt{m^2a^2 + 2}$$

$$2Z = 2$$

Die Kantenlinie Z in §. 223 ist nämlich die halbe, und daher $2Z$ die ganze Mittelkante von $mP\infty$; die Kantenlinie X verschwindet als solche, und bedeutet hier nur die Höhenlinie der gleichschenkligen Dreiecke von $mP\infty$.

IV. Volumen:

$$V = \tfrac{8}{3}ma$$

V. Oberfläche:

$$S = 8\sqrt{m^2a^2 + 1}$$

VI. Flächenwinkel:

$$\tan g \xi = \sqrt{m^2a^2 + 1}$$

$tang\, v = \infty$, also $v = 90°$; natürlich, da je zwei Kantenlinien Z in eine gerade Linie fallen.

$$tang\, 2\zeta = \frac{2\sqrt{m^2a^2+1}}{m^2a^2}$$

es ist nämlich ζ der halbe, und folglich 2ζ der ganze ebene Winkel am Poleck.

VII. Kantenwinkel:

$$\cos X = -1, \text{ also } X = 180°$$

$$\cos Y = -\frac{1}{m^2a^2+1}$$

$$\cos Z = -\frac{m^2a^2-1}{m^2a^2+1}$$

Hieraus folgt wieder: $2\cos Y + \cos Z = -1$; ferner findet man:

$$\cos\tfrac{1}{2}Y : \cos\tfrac{1}{2}Z = ma : \sqrt{2}$$

$$tang\,\tfrac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{m^2a^2+2}}{ma} = \cot\tfrac{1}{2}U$$

$$tang\,\tfrac{1}{2}Z = ma$$

§. 232.

Berechnung der Ableitungscoëfficienten aus den Kantenwinkeln.

Es sey in jeder ditetragonalen Pyramide mPn der halbe normale Winkel der Basis $= \nu$
- - diagonale - - - - $= \delta$

ferner der an der Basis liegende halbe Winkel
des normalen Hauptschnittes $= \nu'$
des diagonalen - - - $= \delta'$

so ist $tang\, \nu = n$, $tang\, \delta = \dfrac{n+1}{n-1}$

$$tang\, \nu' = ma, \quad tang\, \delta' = \frac{ma(n+1)}{n\sqrt{2}}$$

Jedenfalls werden zur Bestimmung einer ditetragonalen Pyramide zwei ihrer Winkel gefordert, so lange man kein Gesetz der gegenseitigen Abhängigkeit ihrer Ableitungscoëfficienten m und n kennt.

Wir wollen daher je zwei ihrer Kantenwinkel als gegeben betrachten, und daraus m und n berechnen.

1) X und Z sind gegeben; dann wird:

$$\cos\nu = \frac{\cos\frac{1}{2}X}{\sin\frac{1}{2}Z} \text{ und } n = \tang\nu$$

$$\cos\nu' = \frac{\cos\frac{1}{2}Z}{\sin\frac{1}{2}X} \text{ und } ma = \tang\nu'$$

2) Y und Z sind gegeben; dann wird:

$$\cos\delta = \frac{\cos\frac{1}{2}Y}{\sin\frac{1}{2}Z} \text{ und } n = \tang(\delta+45°)$$

$$\cos\delta' = \frac{\cos\frac{1}{2}Z}{\sin\frac{1}{2}Y} \text{ und } ma = \frac{n\sqrt{2}}{n+1}\tang\delta'$$

3) X und Y sind gegeben; dann wird:

$$n - 1 = \frac{\cos\frac{1}{2}Y\sqrt{2}}{\cos\frac{1}{2}X}$$

$$ma = \frac{n}{\sqrt{\tang^2\frac{1}{2}X - n^2}} \text{ oder auch} = \cot\varepsilon$$

wenn $\cos\varepsilon = \dfrac{\cos\frac{1}{2}Y\sqrt{2} + \cos\frac{1}{2}X}{\sin\frac{1}{2}X}$

§. 233.

Fortsetzung.

Wenn die Pyramide eine mPm, so ist es am vortheilhaftesten, entweder X, oder Z, oder T zu kennen; man findet dann, weil $a\cos\frac{1}{2}Z = \cos\frac{1}{2}X$

1) aus X.... $\cos\nu' = \dfrac{1}{a}\cot\frac{1}{2}X$, und $ma = \tang\nu'$

2) aus Z.... $\cos\nu = a\cot\frac{1}{2}Z$, und $m = \tang\nu$

3) aus T..... $m = \dfrac{1}{a}\tang\frac{1}{2}T\sqrt{a^2+1}$

oder kennt man den Werth des Winkels T in der Grundgestalt $= T'$, so ist, weil $\tang\frac{1}{2}T' = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ (§. 230)

$$m = \tang\frac{1}{2}T\cot\frac{1}{2}T'$$

Wenn dagegen die Pyramide eine $mP\frac{m}{m-1}$, so ist es am vortheilhaftesten, entweder Y, oder Z, oder auch U zu kennen; man findet dann, weil $a\cos\frac{1}{2}Z = \cos\frac{1}{2}Y\sqrt{2}$

1) aus $Y \ldots \cos\delta' = \frac{1}{a}\cot\frac{1}{2}Y\sqrt{2}$, u. $2m-1 = \frac{1}{a}\tang\delta'\sqrt{2}$

2) aus $Z \ldots \cos\delta = a\sqrt{\frac{1}{2}}\cot\frac{1}{2}Z$, u. $\frac{m}{m-1} = \tang(\delta + 45^\circ)$

3) aus $U \ldots 2m-1 = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+2}\,\tang\frac{1}{2}U$

oder kennt man den Winkel U' in der Pyramide $P\infty$, so ist, weil $\tang\frac{1}{2}U' = \frac{a}{\sqrt{a^2+2}}$ (§. 231)

$$2m - 1 = \tang\tfrac{1}{2}U\cot\tfrac{1}{2}U'$$

Für die tetragonale Pyramide mP folgt:

aus $X \ldots\ ma = \cot\varepsilon$, wenn $\cos\varepsilon = \cot\frac{1}{2}X$

aus $Z \ldots\ ma = \tang\frac{1}{2}Z\sqrt{\frac{1}{2}}$

Für die tetragonale Pyramide $mP\infty$ folgt:

aus $Y \ldots\ ma = \cot\varepsilon$, wenn $\cos\varepsilon = \cos\frac{1}{2}Y\sqrt{2}$

aus $Z \ldots\ ma = \tang\frac{1}{2}Z$

Endlich folgt für das ditetragonale Prisma ∞Pn

aus $X \ldots\ n = \tang\frac{1}{2}X$

aus $Y \ldots\ \frac{n+1}{n-1} = \tang\frac{1}{2}Y$

B. Berechnung der hemiëdrischen Gestalten.

a) *Berechnung der tetragonalen Skalenoëder.*

§. 234.

Vorbereitung.

Wir bezeichnen in jedem Skalenoëder $\pm\frac{mPn}{2}$ (Fig. 252):

die längeren Polkanten mit Y,
die kürzeren Polkanten mit X,
die Mittelkanten mit Z;

ferner die eine, im Octanten der positiven Halbaxen gelegene Fläche mit F, und diejenigen drei Flächen, welche mit ihr die Kanten Y, X und Z bilden, mit F', F'' und F'''; endlich die ebenen Winkel der Fläche F analog den ihnen gegenüberstehenden Kanten mit v, ξ und ζ.

Setzen wir nun, es sey die Gleichung

$$\text{für } F \ldots\ldots \frac{x}{ma} + \frac{y}{n} + z = 1$$

so werden die Gleichungen:

$$\text{für } F' \ldots\ldots \frac{x}{ma} + y + \frac{z}{n} = 1$$

$$\text{für } F'' \ldots\ldots \frac{x}{ma} - y - \frac{z}{n} = 1$$

$$\text{für } F''' \ldots - \frac{x}{ma} - \frac{y}{n} + z = 1$$

Ferner ergeben sich aus der successiven Combination der Gleichungen von F und F', F und F'', F und F''' die Gleichungen der Kantenlinien, wie folgt:

$$\text{für } Y \ldots\ldots \frac{x}{ma} + \frac{(n+1)y}{n} = 1, \text{ und } y - z = 0$$

$$\text{für } X \ldots\ldots \frac{x}{ma} - \frac{(n-1)y}{n} = 1, \text{ und } y + z = 0$$

$$\text{für } Z \ldots\ldots \frac{x}{ma} + \frac{y}{n} = 0, \text{ und } z = 1$$

Die Polkanten fallen also in die Ebenen der diagonalen Hauptschnitte, und die Mittelkanten sind den normalen Hauptschnitten parallel.

Endlich folgen durch successive Combination der Gleichungen von Y und X mit denen von Z die Coordinaten für die beiden Mitteleckpuncte, nämlich:
für den Mitteleckpunct an Y

$$x = -\frac{ma}{n}, \quad y = 1, \quad z = 1$$

für den Mitteleckpunct an X

$$x = \frac{ma}{n}, \quad y = -1, \quad z = 1$$

Die Axendistanz der Mitteleckpuncte ist daher in allen Skalenoëdern constant $= \sqrt{2}$.

§. 235.

Zwischenaxe, Flächennormale, Kantenlinien.

Nachdem im vorigen §. die Gleichungen und übrigen Elemente gefunden worden, auf welche die Berechnung der Skalenoëder zu gründen, können wir sogleich zur Auflösung unsrer sieben Probleme übergehen.

Was nun zuvörderst den Coëfficienten der Zwischenaxen und die Flächennormale betrifft, so ist einleuchtend, dass beide in den Skalenoëdern ihren ursprünglichen Werth behaupten, weshalb wiederum:

$$r = \frac{2n}{n+1}, \text{ (§. 221)}$$

$$N = \frac{man}{\sqrt{m^2a^2(n^2+1)+n^2}} = \frac{man}{M}, \text{ (§. 222).}$$

Das erste aufzulösende Problem ist daher die Berechnung der Kantenlinien. Es sind die drei Eckpuncte, welche diese Kantenlinien in der Fläche F begränzen:

(1) der Poleckpunct; . . . $x = ma, \; y = 0, \; z = 0$

(2) der untere Mitteleckp.; $x = -\frac{ma}{n}, \; y = 1, \; z = 1$

(3) der obere Mitteleckp.; $x = \frac{ma}{n}, \; y = -1, \; z = 1$

und zwar wird begränzt:

die Polkante Y, von den Puncten (1) und (2)
die Polkante X, - - - - (1) und (3)
die Mittelkante Z, - - - - (2) und (3)

Folglich bestimmt sich nach §. 14

$$Y = \frac{\sqrt{m^2a^2(n+1)^2+2n^2}}{n}$$

$$X = \frac{\sqrt{m^2a^2(n-1)^2+2n^2}}{n}$$

$$Z = \frac{2\sqrt{m^2a^2 + n^2}}{n}$$

§. 236.

Volumen und Oberfläche.

Jedes Skalenoëder wird durch die beiden diagonalen Hauptschnitte in vier unregelmässige Tetraëder oder dreiseitige Elementarpyramiden zerlegt. Betrachtet man nun für jede dieser Elementarpyramiden eine der beiden in jene Hauptschnitte fallenden Flächen als Grundfläche, so wird ihre Höhe = der Axendistanz des Mitteleckpunctes, $= \sqrt{2}$ (§. 234), jener Grundfläche Inhalt $= ma\sqrt{2}$, das Volumen der Elementarpyramide selbst:

$$v = \tfrac{2}{3}ma$$

und das Volumen des ganzen Skalenoëders

$$V = 4v = \tfrac{8}{3}ma$$

welcher Ausdruck deshalb merkwürdig ist, weil er die Unabhängigkeit des Volumens dieser Gestalten von dem Coëfficienten n darthut. Alle Skalenoëder haben daher gleiches Volumen, sobald sie gleiche Hauptaxen haben, und die Volumina verschiedener Skalenoëder einer und derselben Krystallreihe verhalten sich wie die respectiven Werthe des Ableitungscoëfficienten m.

Weil das Volumen auch eine Function der Oberfläche S, und der Flächennormale N, indem

$$V = \tfrac{1}{3}NS$$

so wird $$S = \frac{3V}{N}$$

oder $$S = \frac{8\sqrt{m^2a^2(n^2+1)+n^2}}{n} = \frac{8M}{n}$$

und daher der Flächeninhalt einer Fläche des Skalenoëders

$$F = \frac{M}{n}$$

§. 237.

Flächenwinkel.

Aus den in §. 234 stehenden Gleichungen der Kantenlinien findet man sehr leicht mittels der Formel von $\cos U$ in §. 23 die Cosinus der Winkel v, ξ und ζ. Die Sinus derselben Winkel bestimmen sich aber aus den bekannten Längen der Kantenlinien und dem Flächeninhalte von F

$$\sin v = \frac{2M}{nXZ},\ \sin\xi = \frac{2M}{nYZ},\ \sin\zeta = \frac{2M}{nXY}$$

Dividirt man die Sinus durch die Cosinus, so erhält man endlich für die Tangenten folgende Werthe:

$$\tang\xi = \frac{Mn}{m^2a^2(n+1)+n^2}$$

$$\tang v = \frac{Mn}{m^2a^2(n-1)-n^2}$$

$$\tang\zeta = \frac{2Mn}{m^2a^2(n^2-1)}$$

§. 238.

Kantenwinkel.

Die Kanten Y sind ihrem Winkelmaasse nach offenbar identisch mit den gleichnamigen Kanten der Muttergestalt, es bleibt uns daher nur noch die Berechnung der Kanten X und Z übrig.

Combinirt man zu dem Ende die Parameter der Gleichungen der Flächen F und F'', F und F''' nach der Regel für Cosinus W in §. 22, so folgt:

$$\cos X = \frac{n(2m^2a^2-n)}{m^2a^2(n^2+1)+n^2}$$

$$\cos Y = -\frac{n(2m^2a^2+n)}{m^2a^2(n^2+1)+n^2} = \cos Y \text{ in §. 227.}$$

$$\cos Z = -\frac{m^2a^2(n^2-1)-n^2}{m^2a^2(n^2+1)+n^2} = \cos T \text{ in §. 227.}$$

Aus den Werthen der Cosinus der halben Kantenwinkel

$$\cos \tfrac{1}{2}X = \frac{ma(n+1)}{M\sqrt{2}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}Y = \frac{ma(n-1)}{M\sqrt{2}}$$

folgt die Proportion:

$$\cos \tfrac{1}{2}X : \cos \tfrac{1}{2}Y = n+1 : n-1$$

und daher

$$n = \frac{\cos \frac{1}{2}X + \cos \frac{1}{2}Y}{\cos \frac{1}{2}X - \cos \frac{1}{2}Y}$$

auch findet sich:

$$\tang \tfrac{1}{2}X = \frac{\sqrt{m^2a^2(n-1)^2+2n^2}}{ma(n+1)}$$

$$\tang \tfrac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{m^2a^2(n+1)^2+2n^2}}{ma(n-1)}$$

§. 239.

Berechnung der tetragonalen Sphenoide.

Setzt man in den Formeln der vorhergehenden §§. den Coëfficienten $n = 1$, so erhält man die zur Berechnung der tetragonalen Sphenoide $\frac{mP}{2}$ dienenden Formeln, nämlich:

I. Zwischenaxe:

$$r = 1$$

II. Flächennormale:

$$N = \frac{ma}{\sqrt{2m^2a^2+1}}$$

III. Kantenlinien:

$$2X = \text{Polkante} = 2\sqrt{2}$$

$$Y = \sqrt{2}\sqrt{2m^2a^2+1} = \text{Höhenlinie der Flächen.}$$

$$Z = \text{Mittelkante} = 2\sqrt{m^2a^2+1}$$

IV. Volumen:

$$V = \tfrac{2}{3}ma$$

V. Oberfläche:

$$S = 8\sqrt{2m^2a^2+1}$$

VI. Flächenwinkel:

$$tang\, v = \sqrt{2m^2a^2+1} = cot\, \xi$$
$$tang\, \zeta = \infty, \text{ also } \zeta = 90°$$

VII. Kantenwinkel:

$$cos\, X = \frac{2m^2a^2-1}{2m^2a^2+1}$$

$cos\, Y = -1$, also verschwindet diese Kante.

$$cos\, Z = \frac{1}{2m^2a^2+1}$$

Setzt man $n = \infty$, so verwandeln sich die für die Skalenoëder berechneten Formeln in diejenigen, welche bereits oben in §. 231 für die tetragonalen Pyramiden der Nebenreihe aufgefunden wurden; zum vollständigen Beweise des in §. 212 erhaltenen Resultates, dass die Pyramiden der Nebenreihe in ihrer skalenoëdrischen Hemiëdrie mit allen acht Flächen erscheinen.

Für $m = \infty$ erhält man die Formeln der ditetragonalen Prismen.

A n m e r k u n g. Die sämmtlichen Resultate der Berechnung sind so ausgedrückt, dass sie sich auf die primitive Ableitung und Bezeichnung der Skalenoëder beziehen. Wünscht man dieselben Resultate in der Form zu haben, in welcher sie sich auf die secundäre Ableitung (§. 214) und folglich auf das Zeichen mS^n beziehen, so hat man in den §§. 234—238 statt m die Grösse mn zu setzen.

b) Berechnung der tetragonalen Trapezoëder.

§. 240.

Vorbereitung.

Wir bezeichnen in jedem Trapezoëder $r\frac{mPn}{2}$ oder $l\frac{mPn}{2}$ (Fig. 253):

die normalen Mittelkanten mit Z
die diagonalen Mittelkanten mit Z'
die Polkanten mit X

und unterscheiden für jede einzele Fläche die an Z' anliegende Polkante durch X'. Ferner bezeichnen wir die im Octanten der positiven Halbaxen gelegene Fläche mit F, und diejenigen vier Flächen, welche mit ihr die Kanten X, X', Z und Z' bilden, mit F', F'', F''' und F^{IV}; endlich bezeichnen wir die ebenen Winkel jedes Trapezoides wie folgt:

den Winkel zwischen X und X' mit ζ
- - - - - Z und Z' - ϱ
- - - - - X und Z - σ
- - - - - X' und Z' - ξ

Setzen wir nun, es sey die Gleichung

$$\text{für F} \ldots\ldots \frac{x}{ma}+\frac{y}{n}+z=1$$

so werden die Gleichungen der anderen Flächen folgende:

$$\text{für } F' \ldots\ldots \quad \frac{x}{ma}-y+\frac{z}{n}=1$$

$$\text{für } F'' \ldots\ldots \quad \frac{x}{ma}+y-\frac{z}{n}=1$$

$$\text{für } F''' \ldots\ldots -\frac{x}{ma}-\frac{y}{n}+z=1$$

$$\text{für } F^{IV} \ldots\ldots -\frac{x}{ma}+y+\frac{z}{n}=1$$

Die successive Combination der Gleichung von F mit denen der übrigen Flächen lässt auf folgende Gleichungen der vier Kantenlinien gelangen:

$$\text{für } X \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{(n-1)x}{ma}-\dfrac{(n^2+1)y}{n}=n-1 \\ \dfrac{y}{n-1}+\dfrac{z}{n+1}=0 \end{cases}$$

$$\text{für } X' \ldots\ldots \begin{cases} \frac{(n+1)x}{ma} + \frac{(n^2+1)y}{n} = n+1 \\ \frac{y}{n+1} - \frac{z}{n-1} = 0 \end{cases}$$

$$\text{für } Z \ldots\ldots \begin{cases} \frac{x}{ma} + \frac{y}{n} = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\text{für } Z' \ldots\ldots \begin{cases} -\frac{x}{ma(n-1)} + \frac{y}{n} = \frac{1}{n+1} \\ y + z = \frac{2n}{n+1} \end{cases}$$

Aus den zweiten Gleichungen für Z und Z' ergiebt sich, dass die normalen Mittelkanten den normalen Hauptschnitten, und die diagonalen Mittelkanten den diagonalen Hauptschnitten parallel laufen.

Endlich führt die Combination der Gleichungen von Z und Z' auf die Coordinaten des unteren, am Winkel ϱ gelegenen Mitteleckpunctes, und die Combination derselben Gleichungen mit jenen von F' und F'' auf die Coordinaten der an den Winkeln σ und ξ gelegenen Mitteleckpuncte der Fläche F; nämlich:

$$\text{für Eckp. an } \varrho \ldots\ldots x = -\frac{ma(n-1)}{n(n+1)},\ y = \frac{n-1}{n+1},\ z = 1$$

$$\text{- - - - } \sigma \ldots\ldots x = \frac{ma(n-1)}{n(n+1)},\ y = -\frac{n-1}{n+1},\ z = 1$$

$$\text{- - - - } \xi \ldots\ldots x = \frac{ma(n-1)}{n(n+1)},\ y = 1,\ z = \frac{n-1}{n+1}$$

§. 241.

Kantenlinien.

Weil die Zwischenaxen und Flächennormalen auch in den Trapezoëdern ihre obigen Werthe behaupten, so bietet sich uns wiederum als erstes Problem die Berechnung der Kantenlinien dar.

Die Begränzungspuncte dieser Linien sind:

(1) der Poleckpunct, $x = ma$, $y = 0$, $z = 0$;
(2) der Mitteleckpunct an σ,
(3) der Mitteleckpunct an ϱ,
(4) der Mitteleckpunct an ξ,

und zwar wird begränzt:

die Polkante X von den Puncten (1) und (2),
die Mittelkante Z, von den Puncten (2) und (3),
die Mittelkante Z' von den Puncten (3) und (4),

Folglich werden diese Kanten nach §. 14

$$X = \frac{\sqrt{n^2+1}\sqrt{m^2a^2(n^2+1)+2n^2}}{n(n+1)}$$

$$Z = \frac{2(n-1)\sqrt{m^2a^2+n^2}}{n(n+1)}$$

$$Z' = \frac{2\sqrt{m^2a^2(n-1)^2+2n^2}}{n(n+1)}$$

Die Frage, ob nicht für gewisse Trapezoëder beide Mittelkanten gleich, und folglich die Flächen symmetrische Trapezoide oder Deltoide werden können, ist mit Nein zu beantworten; denn aus der Gleichung $Z = Z'$ folgt $n = 1+\sqrt{2}$.

Es würden daher nur die regelmässig achtseitigen Pyramiden dergleichen Trapezoëder liefern, und aus der Unmöglichkeit jener folgt die Unmöglichkeit dieser.

§. 242.

Volumen.

Man lege durch die vier Kanten einer jeden Fläche F und durch den Mittelpunct der Gestalt schneidende Ebenen, so wird das Trapezoëder in acht vierseitige Elementarpyramiden getheilt.

Jede dieser Elementarpyramiden (Fig. 254) lässt sich ferner auf folgende Art in 4 dreiseitige Theilpyramiden zerfällen. Man verbinde in der Fläche F die Mittelpuncte der Kanten Z und Z' mit einander und mit dem Poleckpuncte durch gerade Linien, so

I. 20

repräsentiren diese drei Linien die Kantenlinien derselben Fläche in der Muttergestalt. Legt man wiederum durch sie und den Mittelpunct der Gestalt schneidende Ebenen, welche keine anderen als die des normalen, diagonalen und basischen Hauptschnittes sind, so wird die Elementarpyramide v offenbar in vier Theilpyramiden φ, φ', φ'' und φ''' zerlegt, und es ist:

$$v = \varphi + \varphi' + \varphi'' + \varphi'''$$

Von diesen Theilpyramiden ist bereits bekannt:

$$\text{Volumen } \varphi = v \text{ in §. 224} = \frac{man}{6(n+1)}$$

Für jede der übrigen drei Theilpyramiden erwähle man diejenige ihrer respectiven Flächen zur Grundfläche, welche in einen der Hauptschnitte fällt, oder, was dasselbe sagt, welche sie mit φ gemein hat. Diese Grundflächen sind leicht zu berechnen, und finden sich

$$\text{für } \varphi' = \tfrac{1}{2}ma$$

$$\text{für } \varphi'' = \frac{man}{(n+1)\sqrt{2}}$$

$$\text{für } \varphi''' = \frac{n}{2(n+1)} \text{ (§. 224.)}$$

Die Höhe der Pyramide φ' ist gleich der Coordinate y des Mitteleckpunctes σ, die Höhe der Pyramide φ''' gleich der Coordinate x des Punctes ϱ, beide Coordinaten positiv genommen; die Höhe der Pyramide φ'' aber findet sich durch eine sehr einfache Betrachtung $= \frac{\sqrt{2}}{n+1}$; wir erhalten also:

$$\text{Volumen } \varphi' = \frac{ma(n-1)}{6(n+1)}$$

$$\text{- - } \varphi'' = \frac{man}{3(n+1)^2}$$

$$\text{- - } \varphi''' = \frac{ma(n-1)}{6(n+1)^2}$$

folglich das Volumen der Elementarpyramide:

$$v = \varphi + \varphi' + \varphi'' + \varphi''' = \frac{ma(n^2+2n-1)}{3(n+1)^2}$$

und das Volumen des Trapezoëders:

$$V = 8v = \frac{8ma(n^2+2n-1)}{3(n+1)^2}$$

§. 243.

Oberfläche.

Weil das Volumen auch eine Function der Oberfläche S und der Flächennormale N, indem:

$$V = \tfrac{1}{3}NS$$

so wird auch:

$$S = \frac{3V}{N}$$

und daher für das Trapezoëder;

$$S = \frac{8(n^2+2n-1)M}{n(n+1)^2}$$

Auch findet man für die nach aussen gewendeten Flächen der drei Theilpyramiden φ', φ'' und φ'''

$$s' = \frac{(n-1)M}{2n(n+1)}$$

$$s'' = \frac{M}{(n+1)^2}$$

$$s''' = \frac{(n-1)M}{2n(n+1)^2}$$

§. 244.

Flächenwinkel.

Die Cosinus der Winkel ζ, ϱ, σ und ξ erhält man sehr leicht durch successive Substitution der Parameter der Gleichungen von X und X', Z und Z', X und Z, und X' und Z' statt der Buchstaben α, β, ε, ζ u. s. w. in der Formel *cos U* des §. 23. Den Sinus von ζ findet man darauf leicht aus dem Cosinus, die Sinus der andern Winkel aber noch kürzer aus den bekannten Flächenräumen s', s'' und s''', so wie den bekannten Linien X, Z und Z' nach den Formeln:

$$\sin\sigma = \frac{4s'}{XZ}, \quad \sin\xi = \frac{4s''}{XZ'}, \quad \sin\varrho = \frac{8s'''}{ZZ'}$$

So gelangt man endlich auf die Tangenten, als die im Gebrauche bequemsten Ausdrücke, wie folgt:

$$\tang\zeta = \frac{2nM}{m^2a^2(n^2+1)}$$

$$\tang\varrho = -\frac{nM}{m^2a^2(n-1)-n^2}$$

$$\tang\sigma = -\frac{n(n+1)M}{m^2a^2(n^2+1)-n^2(n-1)}$$

$$\tang\xi = -\frac{2n^2M}{m^2a^2(n^2+1)(n-1)-2n^2}$$

§. 245.

Kantenwinkel.

Aus den in §. 240 stehenden Gleichungen der Flächen F, F', F''' und F^{IV} lassen sich die Cosinus der Kantenwinkel unmittelbar finden, indem man in der Formel für $\cos W$ des §. 22 statt der Buchstaben a, b, c u. s. w. successiv die Parameter der Gleichungen von F und F', F und F''', F und F^{IV} substituirt. Man erhält auf diese Weise:

$$\cos X = -\frac{n^2}{m^2a^2(n^2+1)+n^2}$$

$$\cos Z = -\frac{m^2a^2(n^2-1)-n^2}{m^2a^2(n^2+1)+n^2}$$

$$\cos Z' = -\frac{n(2m^2a^2-n)}{m^2a^2(n^2+1)+n^2}$$

Eine Vergleichung dieser Werthe mit jenen, welche für die Kanten der Skalenoëder gefunden wurden, lehrt:

1) dass Z' das Supplement von X in §. 238.
2) dass $Z = Z$ in §. 238.

was eine nothwendige Folge aus den Regeln für die Ableitung beider Gestalten ist.

Anmerkung. Setzt man in den für die Trapezoëder gefundenen Formeln $n = 1$, so erhält man die in §. 230 stehenden Ausdrücke für die tetragonalen Pyramiden der Hauptreihe; und setzt man $n = \infty$, so erhält man die in §. 231 stehenden Ausdrücke für die tetragonalen Pyramiden der Nebenreihe. So finden also die in §. 219 aufgefundenen Resultate der Ableitung durch die Resultate der Berechnung ihre vollkommene Bestätigung.

c) *Berechnung der tetragonalen Pyramiden von abnormer Flächenstellung.*

§. 246.

Kantenlinien.

Da die Zwischenaxen und Flächennormalen unverändert bleiben, so schreiten wir sogleich zur Berechnung der Kantenlinien. Nun ist einleuchtend, dass die obere oder untere Hälfte eines jeden Trapezoëders dieselben Flächen enthält, welche die gleichnamige Hälfte einer tetragonalen Pyramide von abnormer Flächenstellung bilden. Denn, je nachdem für die abwechselnden oberen Flächen einer ditetragonalen Pyramide die gleichliegenden, oder die widersinnig liegenden abwechselnden unteren Flächen vergrössert werden, so entsteht ja eine tetragonale Pyramide von abnormer Flächenstellung, oder ein Trapezoëder. Die Polkanten der Trapezoëder $r\frac{mPn}{2}$ und $l\frac{mPn}{2}$ sind also, wie der Lage, so dem Winkelmaasse nach identisch mit den Polkanten der tetragonalen Pyramiden $\frac{r}{l}\frac{mPn}{2}$ und $\frac{l}{r}\frac{mPn}{2}$; allein ihre Länge bestimmt sich jetzt durch ihren Durchschnitt mit der basischen Fläche, deren Gleichung: $x=0$. Man setze also in den Gleichungen der Kanten X und X' des §. 240 die Coordinate $x=0$, so erhält man für ihre unteren Endpuncte die Coordinaten:

$$\text{für } X \ldots\ldots y=-\frac{n(n-1)}{n^2+1},\quad z=\frac{n(n+1)}{n^2+1}$$

$$\text{für } X' \ldots\ldots y=\frac{n(n+1)}{n^2+1},\quad z=\frac{n(n-1)}{n^2+1}$$

Diese beiden Puncte sind zugleich die Gränzpuncte einer Mittelkante Z der Pyramide; man findet daher nach der bekannten Regel:

$$X=\frac{\sqrt{m^2a^2(n^2+1)+2n^2}}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$Z=\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Für den Halbmesser des Mitteleckpunctes gilt die Gleichung:

$$\frac{y}{n+1}-\frac{z}{n-1}=0$$

und daher für den Winkel δ der scheinbaren Verdrehung dieser tetragonalen Pyramiden:

$$tang\,\delta=\frac{n-1}{n+1}$$

§. 247.

Volumen und Oberfläche.

Da die Seite der tetragonalen Basis $=Z$, so ist der Flächeninhalt derselben:

$$Z^2=\frac{4n^2}{n^2+1}$$

und da jede Pyramide aus zwei in dieser Basis zusammenstossenden einfachen Pyramiden von der Höhe ma besteht, so wird ihr Volumen:

$$V=\frac{8man^2}{3(n^2+1)}$$

und ihre Oberfläche:

$$S = \frac{3V}{N} = \frac{8n\sqrt{m^2a^2(n^2+1)+n^2}}{n^2+1}$$

§. 248.

Flächenwinkel und Kantenwinkel.

Die Flächenwinkel sind nur zweierlei, und davon der Polwinkel ζ identisch mit dem gleichnamigen Winkel der Trapezoëder; die Tangente des Lateralwinkels ξ findet sich aber leicht aus den bekannten Linien X und Z:

$$tang\,\xi = \frac{M}{n}$$

Was endlich die Kantenwinkel betrifft, so sind solche bereits gefunden; denn der Polkantenwinkel X ist identisch mit dem Winkel X der Trapezoëder in §. 245, und der Mittelkantenwinkel Z identisch mit dem Winkel Z der ditetragonalen Pyramiden in §. 227.

Anmerkung. Für $n = 1$ oder $n = \infty$ verwandeln sich die für diese Pyramiden berechneten Formeln in jene für mP oder mP∞; zum Beweise, dass mP und mP∞ als Gränzgestalten der tetragonalen Pyramiden von abnormer Flächenstellung mit ihren sämmtlichen 8 Flächen erscheinen, wie diess bereits die Ableitung lehrte (§. 217).

Viertes Capitel.

Von den Combinationen des Tetragonalsystemes.

A. Allgemeine Entwicklung.

§. 249.

Wahl der Grundgestalt.

Die Bestimmung der Zähligkeit einer jeden tetragonalen Combination ist ein sehr einfaches, und von der Kenntniss der Grundgestalt ganz unabhängiges Geschäft, bei welchem jederzeit die allgemeine Regel in §. 66 zur Richtschnur dient. Dagegen setzen alle übrigen Bestimmungen eine Grundgestalt, wenn auch nicht ihren Dimensionen, so doch ihrer Stellung nach als bekannt voraus, weshalb denn vor der weiteren Entwicklung irgend eine der in der Combination enthaltenen tetragonalen Pyramiden zur Grundgestalt erwählt werden muss. Wenn nun aber, wie es nicht selten der Fall, von diesen Pyramiden, als denjenigen Gestalten, welche nach §. 52 allein Ansprüche auf diese Erwählung haben, durchaus gar keine in der Combination enthalten ist, so giebt es nach Maassgabe der übrigen in ihr erscheinenden Gestalten nur die zwei Auswege, entweder die Grundgestalt zu erschliessen, oder sie ganz unbestimmt zu lassen. Sind nämlich die Verhältnisse der übrigen Gestalten von der Art, dass sie die nöthigen Elemente zur Bestimmung einer oder mehrer tetragonaler Pyramiden an die Hand geben (wie z. B. wenn eine ditetragonale Pyramide zugleich mit Prismen gegeben ist), so wird von den indicirten möglichen Grundgestalten diejenige zur wirklichen Grundgestalt gewählt, welche die leichteste Entwicklung der Combination und die einfachste Bezeichnung ihrer Gestalten darbietet. Begründen dagegen die Verhältnisse der übrigen Gestalten gar keinen Schluss auf irgend eine tetragonale Pyramide, so dass jede, nach §. 52 mögliche Grundgestalt der Entwicklung Genüge leisten würde (wie z. B. wenn blos Prismen mit dem basischen Flächenpaare gegeben sind), so lässt man die Grundgestalt einstweilen unbestimmt, und verbindet mit dem Zeichen P nicht mehr die Vorstellung einer bestimmten Pyramide *). Der erstere Fall kann

---

*) Als eine auch für die folgenden Krystallsysteme gültige Be-

selbst dann eintreten, wenn tetragonale Pyramiden vorhanden sind, weil entweder die Verhältnisse der übrigen Gestalten diese Pyramiden in die Nebenreihe verweisen, oder weil die Verhältnisse der ganzen Combination zu andern, bereits bekannten Combinationen derselben Krystallreihe irgend eine andre Pyramide als Grundgestalt fordern. Denn für die Combinationen einer und derselben Krystallreihe muss, wie mannichfaltig sie auch seyn mögen, immer eine und dieselbe Pyramide als Grundgestalt gelten, und daher die bereits für eine Combination dazu erwählte Pyramide auch in allen übrigen Combinationen consequent beibehalten werden.

§. 250.

Bestimmung des Charakters der Combination.

Nachdem die Grundgestalt einer Combination erwählt worden, lässt sich ihr Charakter aus ihren Symmetrieverhältnissen beurtheilen. Die viergliedrig symmetrische Ausbildung des Tetragonalsystemes fordert nämlich für alle holoëdrischen Combinationen:

1) in jeder Normalstellung eine vollkommen gleichförmige Vertheilung und Lage ihrer Begränzungselemente nach rechts und links, und nach oben und unten;
2) in der ersten und verwendeten Normalstellung eine vollkommene Identität ihrer Erscheinungsweise.

Eine Combination also, welche diesen beiden Forderungen nicht entspricht, und daher entweder in jeder einzelen Normalstellung eine einseitige Vertheil-

merkung mag hier erwähnt werden, dass die Krystallographie von den Spaltungsverhältnissen und andern physischen Eigenschaften der Krystalle, welche in der Mineralogie bei der Wahl der Grundgestalt berücksichtigt zu werden pflegen, gänzlich abstrahiren muss.

lung, eine nach rechts oder nach links gewendete Lage gewisser Flächen, oder auch in beiderlei Normalstellung eine verschiedene Verknüpfung ihrer Begränzungselemente wahrnehmen lässt, wird man als eine hemiëdrische Combination zu betrachten haben. Die Art der Hemiëdrie ist leicht auszumitteln, indem man zusieht, nach welchem Gesetze der Gegensatz des Bleibens und Verschwindens der Flächen eingetreten ist (§. 209). Uebrigens versteht sich von selbst, dass diese Entscheidungen in vielen Fällen unsicher bleiben müssen, weil für sie eine gewisse Beschaffenheit der Combinationen vorausgesetzt wird.

§. 251.

Orientirung der Combination.

Auch die allgemeine Orientirung der Combination, oder die Bestimmung der Stellen, welche ihren Gestalten in den verschiedenen Abtheilungen unsers in §. 208 aufgestellten Schemas zukommen, ist leicht zu erhalten, sobald die Grundgestalt erwählt worden. Der blosse Anblick der Combination lässt dann unmittelbar auf die Beantwortung der Fragen gelangen:

1) welche Gestalten der Hauptreihe,
2) welche der Nebenreihe, und
3) welche den Zwischenreihen

angehören. Ferner ergeben sich, gleichfalls aus unserm Schema, folgende Regeln:

a) Je zwei Gestalten $m\mathrm{P}n$ und $m'\mathrm{P}n'$, deren Flächen mit einander horizontale Combinationskanten bilden, gehören in eine und dieselbe horizontale Reihe des Schemas, oder haben $n = n'$.

b) Je zwei Gestalten $m\mathrm{P}n$ und $m'\mathrm{P}n'$, deren Flächen Combinationskanten bilden, welche nicht nur einander, sondern auch einem der normalen Hauptschnitte parallel laufen, gehören in eine und dieselbe verticale Reihe des Schemas, oder haben $m = m'$.

B. Besondre Entwicklung.

§. 252.

Vorbereitung.

Die besondere Entwicklung der tetragonalen Combinationen überhaupt setzt die Theorie der binären Combinationen, oder die genauere Kenntniss der mannichfaltigen Verhältnisse voraus, unter welchen die Combinationen je zweier tetragonaler Gestalten Statt finden können. Dabei ist jedoch die holoëdrische oder hemiëdrische Erscheinungsweise ganz besonders zu berücksichtigen, weshalb auch die Lehre von den binären Combinationen in zwei Abschnitte zerfällt. Innerhalb jedes dieser Abschnitte aber wird die Betrachtung zunächst auf diejenigen Gestalten gegründet werden müssen, welche als die allgemeinen Repräsentanten ihrer Gruppe zu betrachten sind. Wir werden nun im Folgenden die Verhältnisse und Regeln sämmtlicher binärer Combinationen durchgehen, dabei, wie im Tesseralsysteme, wegen der leichteren Vorstellbarkeit jederzeit eine der Gestalten als vorherrschende voraussetzen, und jeder holoëdrischen Combination die Combinationsgleichung (§. 68) in derjenigen Form hinzufügen, in welcher sie unmittelbar das Verhältniss der Ableitungscoëfficienten einer dritten Gestalt angiebt, deren Flächen die (jedenfalls heteropolare) Combinationskante der gegebenen Gestalten abstumpfen, oder in die Zone dieser Kante fallen.

a) Holoëdrische Combinationen.

§. 253.

Combination zweier ditetragonaler Pyramiden.

Da die ditetragonalen Pyramiden die Repräsentanten aller holoëdrischen Gestalten des Systemes sind, so haben wir zuvörderst die Combinationsverhältnisse zweier dergleichen Pyramiden mPn und $m'Pn'$ in Betrachtung zu ziehen. Denken wir beide Gestalten um einen gemeinschaftlichen Mittelpunct in paralleler Stellung, so werden, unter Voraussetzung der durch die Ableitung bestimmten Dimensionsverhältnisse, die Endpuncte ihrer Nebenaxen coincidiren, indem selbige gleichsam die Cardinalpuncte des Systemes bilden, welche ihre ursprüngliche Lage in allen abgeleiteten Gestalten unveränderlich behaupten. Dagegen bestimmt sich allgemein für die Hauptaxen h und h' beider Gestalten die Bedingung, dass

$$h' \gtreqless h, \text{ wenn } m' \gtreqless m$$

für die Zwischenaxen r und r' derselben die Bedingung, dass

$$r' \gtreqless r, \text{ wenn } n' \gtreqless n$$

und für die beiderseitigen Quotienten $\frac{h'}{r'} = q'$ und $\frac{h}{r} = q$, dass

$$q' \gtreqless q, \text{ wenn } \frac{m'(n'+1)}{n'} \gtreqless \frac{m(n+1)}{n}$$

Die Erscheinungsweise der Combination $mPn . m'Pn'$ hängt nun wesentlich davon ab, welche von den in diesen drei Bedingungen enthaltenen Verhältnisse für beide Gestalten Statt finden.

Es bildet nämlich $m'Pn'$ als untergeordnete Gestalt an mPn als vorherrschender Gestalt:

I. Zuschärfungen der Kanten, und zwar:

1) Zusch. d. norm. Polk., wenn $m' = m$ u. $n' > n$: Fig. 25
2) Zusch. d. diag. Polk., wenn $q' = q$ u. $n' < n$; ähnl. F. 25
3) Zusch. der Mittelk., wenn $n' = n$ und $m' > m$; Fig. 25

II. Achtflächige Zusp. der Polecke, wenn $m' < m$ und $q' < q$, und zwar sind die CK. mit den Mittelkanten

4) parallel, ... wenn $n'=n$; Fig. 258.
5) convgt. nach den norm. Mittelecken . . . . - - $n'>n$; Fig. 259.
6) convgt. nach den diag. Mittelecken . . . . - - $n'<n$; ähnl. Fig. 259.

III. Vierfl. Zusp. der normalen Mittelecke, wenn $m'>m$ und $n'>n$; und zwar sind die CK. mit den diag. Polkanten:

7) parallel, wenn $q'=q$; Fig. 260.
8) convgt. nach d. Polecken, wenn $q'<q$; Fig. 261.
9) convgt. nach d. Mittelecken, wenn $q'>q$; Fig. 262.

IV. Vierfl. Zusp. der diag Mittelecke, wenn $q'>q$ und $n'<n$; und zwar sind die CK. mit den norm. Polkanten:

10) parallel, wenn $m'=m$; ähnl. Fig. 260.
11) convgt. n. d. Polecken, wenn $m'<m$; ähnl. Fig. 261.
12) convgt. n. d. Mittelecken, wenn $m'>m$; ähnl. Fig. 262.

In diesen 12 Fällen ist die ganze Theorie der binären holoëdrischen Combinationen enthalten, wie aus den folgenden §§. hervorgeht, in welchen wir successiv die Combinationsverhältnisse der vorherrschenden Gestalten mPn, mP, mP∞, ∞Pn, ∞P, ∞P∞ und oP betrachten wollen.

§. 254.

Combinationen von mPn.

1) Mit m'Pn'; diese Gestalt bringt die im vorigen §. aufgezählten CV. unter den daselbst angeführten Bedingungen hervor.

CG. $m''n''(m'n-mn')+m''(m-m')nn'+n''(n'-n)mm'=0$

2) Mit m'P; da $n'=1$, so ist auch jedenfalls $n'<n$, und die möglichen CV. werden Nr. 2, 6, 10, 11 und 12; die Flächen von m'P sind immer auf die diagonalen Polk. von mPn gesetzt, und bilden:

a) Abst. derselben, . . wenn $m'=\frac{m(n+1)}{2n}$; Fig. 264

b) Vierfl. Zusp. der Polecke . . . . -- - $<$ - - - ; Fig. 263

c) Zusch. der diag. Mittelecke . . . . -- - $>$ - - - ; und zwar sind die CK. mit den normalen Polkanten:

α) parallel, wenn $m'=m$; Fig. 265.

β) convgt. nach den Mittelecken, wenn $m'>m$; Fig. 266.

γ) convgt. nach den Polecken, wenn $m'<m$; Fig. 267.

Im Falle b erscheinen die Zuspfl. als Rhomben, wenn $m'=$

CG. $m''n''(m'n-m)+m''(m-m')n-n''(n-1)mm'=0$

3) Mit m'P∞; da $n'=\infty$, so ist n' immer $>n$, und die möglichen CV. werden Nr. 1, 5, 7, 8 und 9; die Flächen von m'P∞ sind jedenfalls auf die normalen Polk. von mPn gesetzt, und bilden:

a) Abst. derselben, wenn $m'=m$; ähnl. Fig. 264.

b) Vierfl. Zusp. der Polecke, wenn $m'<m$; ähnl. Fig. 263

c) Zusch. der norm. Mittelecke, wenn $m'>m$; und zwar sind die CK. mit den diagonalen Polk.:

α) parallel, ... wenn $m'=\frac{m(n+1)}{n}$; ähnl. Fig. 265

β) convgt. n. d. Mittelecken, - - - $>$ - - - ähnl. Fig. 266

γ) convgt. n. d. Polecken, - - - $<$ - - - ähnl. Fig. 267

Im Falle b erscheinen die Zuspfl. als Rhomben, wenn $m'=\frac{m(n-1)}{n}$.

CG. $m''(m-m')n+n''(m'-m'')m=0$

4) Mit ∞Pn'; da $m'=\infty$, so ist $m'>m$ und q' also können nur die CV. Nr. 3, 9 und 12 Statt finden, und es bildet daher ∞Pn':

a) Abst. der Mittelkanten, wenn $n'=n$; Fig. 268.

b) Zusch. der norm. Mittelecke, ... -- - $>$ - Fig. 269.

c) Zusch. der diag. Mittelecke, ... -- - $<$ - ähnl. Fig. 269

CG. $m''(n''-n')n+n''(n'-n)m=0$

5) Mit ∞P; da ausser den *sub* 4 Statt findenden Bedingungen auch noch $n' < n$, so bildet ∞P jedenfalls Abst. der diag. Mittelecke; Fig. 270.

CG. $m''(n''-1)n - n''(n-1)m = 0$

6) Mit $\infty P \infty$; da ausser den *sub* 4 Statt findenden Bedingungen auch noch $n' > n$, so bildet $\infty P \infty$ jedenfalls Abst. der norm. Mittelecke; ähnl. Fig. 270.

CG. $\frac{m''}{n''} = \frac{m}{n}$.

7) Mit oP; diese Gestalt bildet jedenfalls Abst. der Polecke; Fig. 271.

CG. $n'' = n$, und $m'' < m$.

§. 255.

Combinationen von mP.

1) Mit $m'Pn'$; da $n = 1$, so wird n' stets $> n$, und die möglichen CV. sind Nr. 1, 5, 7, 8 und 9; die Flächen von $m'Pn'$ liegen immer paarweis an den Polkanten von mP und bilden:

a) Zusch. derselben, ... wenn $m' = m$; Fig. 272.

b) Achtfl. Zusp. der Polecke, - - - $<$ - Fig. 273.

c) Vierfl. Zusp. der Mittelecke, - - - $>$ - und zwar sind die CK. mit den Höhenlinien der Flächen von mP

α) parallel, ... wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} = 2m$; Fig. 274.

β) convgt. n. d. Polecken, . . - - - - - - $<$ - Fig. 275.

γ) convgt. n. d. Mittelkanten, - - - - - - - $>$ - Fig. 276.

Im Falle cγ werden die CK. den Polkanten von mP parallel, wenn $\frac{m'}{n'} = m$; Fig. 276.

CG. $m''n''(m' - mn') + m''(m - m')n' + n''(n' - 1)mm' = 0$.

2) Mit $m'P$; diese Gestalt, deren Flächen immer auf die Flächen von mP gesetzt sind, bildet:

a) Vierfl. Zusp. der Polecke, wenn $m' < m$; Fig. 277.
b) Zusch. der Mittelkanten, wenn $m' > m$; Fig. 278.

CG. $n'' = 1$.

3) Mit $m'P\infty$; die möglichen CV. sind Nr. 1, 5, 7, 8 und 9; die Flächen von $m'P\infty$ sind immer auf die Polkanten von mP gesetzt, und bilden:
a) Abst. derselben, wenn $m' = m$; Fig. 279.
b) Vierfl. Zusp. der Polecke, wenn $m' < m$; Fig. 280.
c) Zusch. der Mittelecke, wenn $m' > m$; und zwar sind die CK. mit den Höhenlinien der Flächen von mP:
α) parallel, wenn $m' = 2m$; Fig. 281.
β) convgt. nach den Polecken, wenn $m' < 2m$; Fig. 282.
γ) convgt. nach den Mittelkanten, wenn $m' > 2m$; Fig. 283.

CG. $m''(m - m') + n''(m' - m'')m = 0$.

4) Mit $\infty Pn'$; diese Gestalt bildet jedenfalls Zusch der Mittelecke, die Zuschfl. auf die Mittelkanten gesetzt; Fig 284.

CG. $m''(n'' - n') + n''(n' - 1)m = 0$.

5) ∞P bildet Abst. der Mittelkanten; Fig. 285.

6) $\infty P\infty$ bildet Abst. der Mittelecke; Fig. 286.

CG. $\dfrac{m''}{n''} = m$.

7) oP bildet Abst. der Polecke; Fig. 287.

§. 256.

Combinationen von $mP\infty$.

1) Mit $m'Pn'$; da $n = \infty$, so ist jederzeit $n' < n$, und die möglichen CV. sind Nr. 2, 6, 10, 11 und 12; daher bildet $m'Pn'$:
a) Zusch. der Polkanten, ... wenn $\dfrac{m'(n'+1)}{n'} = m$; ähnl. Fig. 272.
b) Achtfl. Zusp. der Polecke, - - - - - $<$ - - - Fig. 273.

c) Vierfl. Zusp. der Mittelecke, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} > m$; und zwar sind die CK. mit den Höhenlinien der Flächen von $m\text{P}\infty$:

α) parallel, wenn $m' = m$; ähnl. Fig. 274.

β) convgt. nach den Polecken, wenn $m' < m$; ähnl. Fig. 275.

γ) convgt. nach den Mittelkanten, wenn $m' > m$; ähnl. Fig. 276.

Im Falle cγ werden die CK. den Polkanten von $m\text{P}\infty$ parallel, wenn $\frac{m'(n'-1)}{n'} = m$.

CG. $m''(m-m')n' + n''(m''-m)m' = 0$.

2) Mit $m'\text{P}$; die möglichen CV. sind Nr. 2, 6, 10, 11 und 12; die Flächen von $m'\text{P}$ sind immer auf die Polkanten von $m\text{P}\infty$ gesetzt, und bilden:

a) Abst. derselben, wenn $m' = \frac{1}{2}m$; ähnl. Fig. 279.

b) Vierfl. Zusp. der Polecke, wenn $m' < \frac{1}{2}m$; ähnl. Fig. 280.

c) Zusch. der Mittelecke, wenn $m' > \frac{1}{2}m$; und zwar sind die CK. mit den Höhenlinien der Flächen von $m\text{P}\infty$:

α) parallel, wenn $m' = m$; ähnl. Fig. 281.

β) convgt. nach den Polecken, wenn $m' < m$; ähnl. Fig. 282.

γ) convgt. nach den Mittelkanten, wenn $m' > m$; ähnl. Fig. 283.

CG. $m''(m-m') + n''(m''-m)m' = 0$.

3) $m'\text{P}\infty$, dessen Flächen immer auf die Flächen von $m\text{P}\infty$ aufgesetzt sind, bildet:

a) Vierfl. Zusp. der Polecke, wenn $m' < m$; ähnl. Fig. 277.

b) Zusch. der Mittelkanten, wenn $m' > m$; ähnl. Fig. 278.

CG. $n'' = \infty$.

4) $\infty\text{P}n'$ bildet jederzeit Zusch. der Mittelecke, die Zuschfl. auf die Mittelkanten gesetzt; ähnl. Fig. 284.

CG. $n''(m''-m) - m''n' = 0$.

5) ∞P bildet Abst. der Mittelecke; ähnl. Fig. 286.

CG. $n''(m''-m) - m'' = 0$.

I.

6) $\infty P \infty$ bildet Abst. der Mittelkanten; ähnl. Fig. 285.

7) oP bildet Abst. der Polecke; ähnl. Fig. 287.

§. 257.

Combinationen von ∞Pn.

Es bildet an dem ditetragonalen Prisma ∞Pn:

1) $m'Pn'$ achtfl. Zusp. beider Enden; und zwar sind die CK.:
   - α) horizontal, wenn $n' = n$; Fig. 288.
   - β) von den diag. nach den norm. Seitenkanten abfallend, wenn $n' > n$; Fig. 289.
   - γ) von den norm. nach den diag. Seitenkanten abfallend, wenn $n' < n$; ähnl. Fig. 289.

CG. $m''(n - n'')n' + n''(n' - n)m' = 0$.

2) $m'P$ vierfl. Zusp. beider Enden, die Zuspfl. auf die diagonalen Seitenkanten gesetzt; Fig. 290.

CG. $m''(n - n'') - n''(n - 1)m' = 0$.

3) $m'P\infty$ vierfl. Zusp. beider Enden, die Zuspfl. auf die normalen Seitenkanten gesetzt; ähnl. Fig. 290.

CG. $m''(n - n'') + n''m' = 0$.

4) oP die gerad angesetzte Endfläche; Fig. 291.

CG. $n'' = n$.

5) $\infty Pn'$ Zuschärfungen der normalen oder der diagonalen Seitenkanten, je nachdem $n' >$ oder $< n$; Fig. 292.

6) ∞P Abstumpfungen der diagonalen, und

7) $\infty P \infty$ Abst. der normalen Seitenkanten; Fig. 293.

§. 258.

Combinationen von ∞P.

Es bilden an dem tetragonalen Prisma ∞P:

1) $m'Pn'$, achtfl. Zusp. beider Enden; Fig. 294.

CG. $n''(n' - 1)m' - m''(n'' - 1)\ n' = 0$

2) $m'P$, vierfl. auf die Flächen gesetzte Zusp. beider Enden; Fig. 295.
CG. $n''=1$.

3) $m'P\infty$, vierfl. auf die Kanten gesetzte Zusp. beider Enden; Fig. 296.
CG. $m'n''-m''(n''-1)=0$.

4) oP, die gerad angesetzte Endfläche; Fig. 297.

5) ∞Pn, Zuschärfungen der Seitenkanten; Fig. 298.

6) $\infty P\infty$, Abstumpfungen der Seitenkanten; Fig. 299.

§. 259.

Combinationen von $\infty P\infty$.

Es bilden an dem tetragonalen Prisma $\infty P\infty$:

1) $m'Pn'$, achtfl. Zusp. beider Enden; ähnl. Fig. 294.
CG. $\frac{m''}{n''}=\frac{m'}{n'}$.

2) $m'P$, vierfl. auf die Kanten gesetzte Zuspitzungen beider Enden; ähnl. Fig. 296.
CG. $m''=m'n''$.

3) $m'P\infty$, vierfl. auf die Flächen gesetzte Zusp. beider Enden; ähnl. Fig. 295.
CG. $n''=\infty$.

4) oP, die gerad angesetzte Endfläche; ähnl. Fig. 297.

5) ∞Pn, Zuschärfungen der Seitenkanten; ähnl. Fig. 298.

6) ∞P, Abstumpfungen der Seitenkanten; ähnl. Fig. 299.

§. 260

Combinationen von oP.

Es bilden mit oP als vorherrschender Gestalt:

1) $m'Pn'$, eine ditetragonale Tafel, mit zweireihig schief angesetzten Randflächen; Fig. 300.

2) m'P und m'P∞, eine tetragonale Tafel, mit zweireihig schief angesetzten Randflächen; Fig. 301.
3) ∞Pn eine ditetragonale Tafel, mit gerad angesetzten Randflächen; Fig. 302.
4) ∞P und ∞P∞, eine tetragonale Tafel, mit gerad angesetzten Randflächen; Fig. 303.

b) Hemiëdrische Combinationen.

1) Skalenoëdrische oder sphenoidische Combinationen.

§. 261.
Vorbereitung.

Die skalenoëdrischen, oder sphenoidischen Combinationen haben unter allen hemiëdrischen Combinationen des Tetragonalsystems insofern die grösste Wichtigkeit, wiefern die skalenoëdrische Hemiëdrie selbst die auffallendsten Abweichungen in der Erscheinungsweise der Gestalten zur Folge hat, und nicht nur die Glieder der Zwischenreihen, sondern auch jene der Hauptreihe in Anspruch nimmt. Deshalb bedarf eine etwas ausführlichere Betrachtung der sphenoidischen Combinationen wohl kaum einer Rechtfertigung; zumal, da die Krystallreihe einer sehr wichtigen Species des Mineralreiches, des tetragonalen Kupferkieses, durch sphenoidische Hemiëdrie ausgezeichnet ist, und sich ausserdem so viele merkwürdige Analogien zwischen den sphenoidischen Combinationen und den rhomboëdrischen Combinationen des Hexagonalsystemes darbieten, dass, bei der so häufigen und mannichfaltigen Verwirklichung dieser letzteren die Auffindung jener Analogien allein dem Interesse der Wissenschaft hinlänglich entsprechen würde.

Die Theorie dieser Combinationen beruht auf den Combinationsverhältnissen zweier Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$

und $\frac{m'Pn'}{2}$, von welchen das erstere als vorherrschende, das andere als untergeordnete Gestalt vorausgesetzt wird. Da nun die kürzeren Polkanten jedes Skalenoëders $\frac{mPn}{2}$ durch die Gleichungen:

$$\frac{x}{ma} + \frac{(n-1)y}{n} = 1 \quad \text{und} \quad y + z = 0$$

die längeren Polkanten durch die Gleichungen:

$$\frac{x}{ma} + \frac{(n+1)y}{n} = 1 \quad \text{und} \quad y - z = 0$$

und die Mittelkanten durch die Gleichungen:

$$\frac{x}{ma} + \frac{y}{n} = 0 \quad \text{und} \quad z = 1$$

bestimmt werden (§. 234), und für das Skalenoëder $\frac{m'Pn'}{2}$ genau dieselben Gleichungen gelten, sobald man nur m' und n' statt m und n schreibt, so lassen sich die Bedingungen für die mancherlei Combinationserscheinungen beider Gestalten aus den Parametern dieser Gleichungen mit Leichtigkeit ableiten. Nur ist auch hier, wie immer für hemiëdrische Combinationen, die Ambiguität der Stellung zu berücksichtigen, indem sich beide Gestalten entweder in derselben, oder in verwendeter Stellung combiniren können.

§. 262.

Combination zweier Skalenoëder.

Die Combinationsverhältnisse zweier Skalenoëder sind folgende:

A. Bei gleicher Stellung beider Gestalten bildet $\pm\frac{m'Pn'}{2}$ an $\pm\frac{mPn}{2}$:

I. Zuschärfungen der Kanten, und zwar:

1) Zusch. der längeren Polkanten, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} = \frac{m(n+1)}{n}$, und $n' < n$; Fig. 304.

2) Zusch. der kürzeren Polkanten, wenn $\frac{m'(n'-1)}{n'} = \frac{m(n-1)}{n}$, und $n' > n$; Fig. 305.

3) Zusch. der Mittelkanten, wenn $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}$, und $m' > m$, also auch $n' > n$; Fig. 306.

II. Vierfl. Zusp. der Polecke, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} < \frac{m(n+1)}{n}$ und $\frac{m'(n'-1)}{n'} < \frac{m(n-1)}{n}$, und zwar sind die CK.:

4) horizontal, wenn $n' = n$; Fig. 307,
5) den Mittelkanten zufallend, wenn $n' > n$; Fig. 308,
6) den längeren Polk. zufallend, wenn $n' < n$; Fig. 309.

Im letzteren Falle werden die CK. den Mittelkanten parallel, wenn $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}$; Fig. 310.

III. Zuschärfungen der Mittelecke, je zwei Zuschfl. auf die kürzeren Polkanten gesetzt, wenn $\frac{m'(n'-1)}{n'} > \frac{m(n-1)}{n}$ und $n' > n$; und zwar sind die CK. mit den längeren Polkanten:

7) parallel, . . wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} = \frac{m(n+1)}{n}$; Fig. 311.
8) convgt. nach den Polecken, - - - - - $<$ - - - Fig. 312.
9) convgt. nach den Mittelkanten, . . . - - - - - $>$ - - - Fig. 313.

IV. Zuschärfungen der Mittelecke, je zwei Zuschfl.

auf die längeren Polk. gesetzt, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} > \frac{m(n+1)}{n}$ und $\frac{m'}{n'} > \frac{m}{n}$; und zwar sind die CK.:

10) horizontal, wenn $n' = n$; Fig. 314.
11) den längeren Polk. zufallend, wenn $n' > n$; Fig. 316.
12) den Mittelk. zufallend, wenn $n' < n$; Fig. 315.

Im letzteren Falle werden die CK. den kürzeren Polk. parallel, wenn $\frac{m'(n'-1)}{n'} = \frac{m(n-1)}{n}$; Fig. 317.

B. Bei verwendeter Stellung beider Gestalten bildet $\mp\frac{m'Pn'}{2}$ an $\pm\frac{mPn}{2}$:

I. Zuschärfungen der Kanten, und zwar:

13) der kürzeren Polk., wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} = \frac{m(n-1)}{n}$; ähnl. Fig. 305.

II. Vierfl. Zusp. der Polecke, und zwar sind die CK. jederzeit:

14) den Mittelk. zufallend, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} < \frac{m(n-1)}{n}$; ähnl. Fig. 308.

III. Zusch. der Mittelecke, die Zuschfl. auf die Mittelk. und kürzeren Polk. gesetzt, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} > \frac{m(n-1)}{n}$; und zwar sind die CK. mit den längeren Polkanten:

15) parallel, wenn $\frac{m'(n'-1)}{n'} = \frac{m(n+1)}{n}$; ähnl. Fig. 311.
16) convgt. n. d. kürzeren Polk. - - - - - - $<$ - - - ähnl. Fig. 312.
17) convgt. n. d. Mittelkanten - - - - - - $>$ - - - ähnl. Fig. 313.

Nachdem wir so die allgemeinen Regeln für die Combinationen zweier Skalenoëder gefunden, können wir zur speciellen Uebersicht der binären sphenoidischen Combinationen übergehen.

§. 263.

Combinationen des Skalenoëders $\pm\frac{mPn}{2}$.

1) Mit $\pm\frac{m'Pn'}{2}$ oder $\mp\frac{m'Pn'}{2}$; diese Gestalt bringt die im vorigen §. aufgezählten Combinationserscheinungen unter den daselbst erwähnten Bedingungen hervor.

2) Mit $\frac{m'P}{2}$, und zwar:

A. mit $\pm\frac{m'P}{n}$; da $n'=1$, so ist $n'<n$, und die möglichen CV. werden Nr. 1, 6 und 12; die Flächen des Sphenoides sind immer auf die längeren Polkanten des Skalenoëders gesetzt, und bilden:

a) Abst. derselben, . . wenn $m'=\frac{m(n+1)}{2n}$; Fig. 318.

b) Abst. der Mittelecke, - - - $>$ - - - Fig. 322.

c) Zusch. der Polecke, - - - $<$ - - - und zwar sind die CK. mit den Mittelkanten des Skalenoëders:

α) parallel, ... wenn $m'=\frac{m}{n}$; Fig. 321.

β) convgt. nach den längeren Polk. - - - $>$ - Fig. 319.

γ) convgt. nach den kürzeren Polk. - - - $<$ - Fig. 320.

B. mit $\mp\frac{m'P}{2}$; die Flächen sind immer auf die kürzeren Polkanten gesetzt, und bilden:

a) Abst. derselben, . . wenn $m'=\frac{m(n-1)}{2n}$; Fig. 323.

b) Abst. der Mittelecke, - - - $>$ - - - Fig. 325a.

c) Zusch. der Polecke, - - - $<$ - - - Fig. 324.

3) Mit $m'P\infty$; da $n' = \infty$, so ist n' jedenfalls $> n$ und $\frac{m'}{n'} < \frac{m}{n}$; die möglichen CV. werden daher Nr. 2, 5, 7, 8 und 9, und es bildet $m'P\infty$:

a) Zusch. der kürzeren Polk, ... wenn $m' = \frac{m(n-1)}{n}$; ähnl. Fig. 305.

b) Vierfl. Zusp. der Polecke, die CK. den Mittelk. zufallend, ... - - - $<$ - - - ähnl. Fig. 308.

c) Zusch. der Mittelecke, die Zuschfl. auf die Mittelk. und kürz. Polk. gesetzt, ... - - - $>$ - - - und zwar sind die CK. mit den längeren Polk.:

α) parallel, ... wenn $m' = \frac{m(n+1)}{n}$; ähnl. Fig. 311.

β) convgt. n. d. kürz. Polk., - - - $<$ - - - ähnl. Fig. 312.

γ) convgt. n. d. Mittelk., - - - $>$ - - - ähnl. Fig. 313.

4) Mit $\infty Pn'$; da $m' = \infty$, so sind nur die CV. 10, 11 und 12 möglich, und es bildet daher $\infty Pn'$ jederzeit Zusch. der Mittelecke; und zwar sind die CK.:

α) horizontal, ... wenn $n' = n$;

β) den längeren Polk. zufallend, - - $n' > n$;

γ) den Mittelk. zufallend, ... - - $n' < n$;

5) ∞P bildet jedenfalls Abst. der Mittelecke, so dass die CK. den kürzeren Polk. parallel sind; Fig. 325b.

6) $\infty P\infty$ bildet Abst. der Mittelkanten; Fig. 326.

7) oP bildet Abst. der Polecke; Fig. 327.

§. 264.

Combinationen der Sphenoide $\pm\frac{mP}{2}$.

1) Mit $\frac{m'Pn'}{2}$, und zwar:

A. mit $\pm\frac{m'Pn'}{2}$; da $n=1$, so ist immer $n'>n$, und die möglichen CV. werden daher Nr. 3, 7, 8, 9 und 11; das Skalenoëder bildet folglich:

a) Zusch. der Mittelkanten, wenn $\frac{m'}{n'}=m$; Fig. 328.

b) Zusch. der Ecke, die Zuschfl. paarweis auf die Flächen gesetzt, wenn $\frac{m'}{n'}>m$; Fig. 332.

c) Zusch. der Ecke, die Zuschfl. auf die Pol- und Mittelkanten gesetzt, wenn $\frac{m'}{n'}<m$; und zwar sind je zwei auf einer und derselben Fläche des Sphenoides gelegene CK. mit einander;

α) parallel, ... wenn $\frac{m'(n'+1)}{2n'}=m$; Fig. 329.

β) convgt. nach der Polk., - - - - - $<$ - Fig. 330.

γ) divgt. nach der Polk., - - - - - $>$ - Fig. 331.

B. mit $\mp\frac{m'Pn'}{2}$; diese Gestalt bildet jedenfalls Zusch. der Ecke, die Zuschfl. auf die Pol- und Mittelkanten gesetzt, und zwar sind je zwei CK. auf einer und derselben Fläche des Sphenoides mit einander:

α) parallel, ... wenn $\frac{m'(n'-1)}{2n'}=m$;

β) convgt. nach der Polk. - - - - - $<$ -

γ) divgt. nach der Polk., - - - - - $>$ -

2) Mit $\frac{m'P}{2}$, und zwar:

A. mit $\pm\frac{m'P}{2}$; die Flächen dieser Gestalt sind immer auf die gleichnamigen Flächen aufgesetzt, bringen mit denselben horizontale CK. hervor, und bilden:

a) Zuschärfungen der Polk, wenn $m'<m$; Fig. 333.

b) Abstumpfungen der Ecke, wenn $m'>m$; Fig. 334;

die Abstfl. machen mit den Polkanten einen spitzen Winkel.

B. Mit $\mp\frac{m'P}{2}$; bildet jedenfalls Abst. der Ecke, so dass die Abstfl. einen stumpfen Winkel mit den Polkanten machen; Fig. 335; die geneigten CK. werden den Mittelkanten von $\frac{mP}{2}$ parallel, wenn $m'=m$; Fig. 336.

3) $m'P\infty$ bildet jederzeit Zusch. der Ecke, die Zuschfl. auf die Pol- und Mittelkanten gesetzt, und zwar sind je zwei auf einer Fläche von $\frac{mP}{2}$ liegende CK. mit einander:

α) parallel, ... wenn $m'=2m$; ähnl. Fig. 329.
β) convgt. nach der Polk., - - - $<$ - - ähnl. Fig. 330.
γ) divgt. nach der Polk, - - - $>$ - - ähnl. Fig. 331.

4) $\infty Pn'$ bildet Zusch. der Ecke, die Zuschfl. auf die Mittelkanten gesetzt, die Zuschärfungskanten vertical; Fig. 337.

5) ∞P bildet Abst. der Ecke, so dass jede Abstfl. auf den Polkanten rechtwinklig ist; Fig. 338.

6) $\infty P\infty$ bildet Abst. der Mittelkanten; Fig. 339.

7) oP bildet Abst. der Polkanten; Fig. 340.

§. 265 a.

Combinationen der tetragonalen Pyramiden $mP\infty$.

1) Mit $\pm\frac{m'Pn'}{2}$; da $n=\infty$, so ist $n'<n$, und die möglichen CV. werden daher Nr. 1, 5 und 12; das Skalenoëder bildet demnach:

a) Zusch. der abwechselnden Polkanten, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'}=m$; Fig. 341.

b) Vierfl. Zusp. der Polecke, die Zuspfl. paarweis auf die gegenüberliegenden Polkanten, und zwar oben und unten widersinnig aufgesetzt; wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} < m$; Fig. 342.

c) Zusch. der Mittelecke, die zuschärfenden Flächenpaare auf die abwechselnden Polkanten abwechselnd widersinnig aufgesetzt; wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} > m$; Fig. 343.

Im Falle c werden die CK. den Polk. von mP∞ parallel, wenn $\frac{m'(n'-1)}{n'} = m$.

2) Mit $\pm\frac{m'\mathrm{P}}{2}$; wiederum sind 1, 5 und 12 die möglichen Fälle, und das Sphenoid bildet daher:

a) Abst. der abwechselnden Polkanten, wenn $m' = \frac{1}{2}m$; Fig. 344.

b) Zusch. der Polecke, die Zuschfl. auf die abwechselnden Polk. und zwar oben und unten widersinnig aufgesetzt, wenn $m' < \frac{1}{2}m$; Fig. 345.

c) Abst. der Mittelecke, die Abstfl. auf die abwechselnden Polk. abwechselnd widersinnig aufgesetzt, wenn $m' > \frac{1}{2}m$; Fig. 346.

§. 265 b.

Combinationsgleichungen.

Zwei tetragonale Skalenoëder bilden theils heteropolare, theils amphipolare Combinationskanten, wobei noch die Ambiguität der Stellung beider Gestalten berücksichtigt werden muss. Die CG. für heteropolare Combinationskanten ist bei gleicher Stellung der Gestalten identisch mit der in §. 254 *sub* 1 stehenden CG. für zwei ditetragonale Pyramiden, ohne weiteren Unterschied, weil die dritte Gestalt nothwendig gleiche Stellung mit den beiden andern haben muss. Befinden sich aber diese letzteren in verwendeter Stellung, so ist zuvörderst n' negativ zu nehmen, und für die dritte Gestalt zu beachten, ob sich dieselbe in gleicher Stellung mit der ersten oder mit der zweiten befindet, in welchem letzteren Falle auch n'' negativ wird. Allgemein können wir also für die heteropolaren Combinationskanten zweier tetragonaler Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$ und $\frac{m'Pn'}{2}$ die CG.

$$\text{(I)} \ldots m''n''(m'n \mp mn') \pm m''(m - m')nn' - n''(n \mp n')mm' = 0$$

aufstellen, in welcher die oberen Zeichen für gleiche, die unteren für verwendete Stellung beider Gestalten gelten; hat die dritte Gestalt gleiche Stellung mit $\frac{mPn}{2}$, so gilt die CG., wie sie hier steht; hat sie dagegen gleiche Stellung mit $\frac{m'Pn'}{2}$, so ist n'' negativ zu nehmen.

Für die amphipolaren Combinationskanten haben wir in der CG. des §. 254 bei gleicher Stellung von $\frac{mPn}{2}$ und $\frac{m'Pn'}{2}$ m und n, bei verwendeter Stellung auch noch ausserdem n' negativ zu nehmen, und wird daher allgemein für die amphipolaren Combinationskanten zweier tetragonaler Skalenoëder die CG.

$$\text{(II)} \ldots m''n''(m'n \mp mn') \mp m''(m + m')nn' + n''(n \pm n')mm' = 0$$

in welcher die oberen Zeichen für gleiche, die unteren Zeichen für verwendete Stellung gelten.

Dabei sind jedoch für die dritte Gestalt nicht nur die Stellungsverhältnisse ihrer selbst, sondern auch die relative Lage der die CK. abstumpfenden Fläche zu den Flächen der andern Gestalten sorgfältig zu berücksichtigen, weil sich danach die positiven oder negativen Werthe von m'' und n'' bestimmen.

2) Pyramidal-hemiëdrische Combinationen.

§. 266.

Da der pyramidal-hemiëdrische Charakter der tetragonalen Combinationen sich nur in der Erscheinungsweise der ditetragonalen Pyramiden offenbaren kann, indem die Gestalten der Hauptreihe sowohl als der Nebenreihe ihre holoëdrische Erscheinungsweise beibehalten (§. 212), so ist die Theorie dieser Combinationen keine andre, als die, nur unbedeutend modificirte, Theorie derjenigen holoëdrischen Combinationen, in welchen Gestalten aus den Zwischenreihen auftreten. Denn in der That lässt sich das Vorhandenseyn dieser Art von Hemiëdrie weder bejahen, noch verneinen, so lange blos Pyramiden und Prismen der Haupt- und Nebenreihe beobachtet sind; und so würden wir z. B. das Daseyn dieser so charakteristischen Hemiëdrie am Scheelkalke noch heute ignoriren, wenn nicht in neuerer Zeit Varietäten beobachtet worden wären, an welchen ausser jenen Gestalten auch solche aus den Zwischenreihen vorkommen. Das l i n k s oder r e c h t s g e w e n d e t e, mit einem Worte, das e i n s e i t i g e, aber in Bezug auf oben und unten g l e i c h m ä s s i g e i n s e i t i g e Auftreten der Flächen aller mPn lässt eine solche Combination auf den ersten Anblick erkennen, und man darf nur die für die holoëdrischen Combinationen von mP und $mP\infty$ mit irgend einem $m'Pn'$ angegebenen Regeln so modificirt aussprechen, dass man von je vier zu einem Gliede der Pyramide $m'Pn'$ gehörigen Flächen die beiden links oder rechts gelegenen ausschliesst, um aus denselben Regeln die Erscheinungsweise der pyramidal-hemiëdrischen Combinationen abzuleiten.

3) Trapezoëdrische Combinationen.

§. 267.

Obgleich die hemiëdrischen Combinationen dieser Art bis jetzt in der Natur nicht nachgewiesen worden sind, so ist es doch nicht unwahrscheinlich, dass sie dereinst noch werden beobachtet werden. Man erkennt solche Combinationen, eben so leicht wie die pyramidal-hemiëdrischen, an dem einseitigen, links oder rechts gewendeten Auftreten der Flächen von mPn; nur ist diese Einseitigkeit in der oberen und unteren Hälfte der Combination nicht gleichmässig, sondern widersinnig, oder in entgegengesetzter Richtung ausgesprochen. Die weitere Entwicklung dieser Combinationen hat durchaus keine Schwierigkeit. Uebrigens lässt sich erwarten, dass diejenigen Substanzen, deren Krystallreihen dieser Hemiëdrie unterworfen sind, auch die Erscheinung der circularen Polarisation des Lichtes zeigen werden, welche mit der gleichnamigen Tetartoëdrie im Hexagonalsysteme gegeben ist *).

C. Berechnung der Combinationskanten.

§. 268.

Combinationskanten der holoëdrischen Gestalten.

Allgemein findet sich die Combinationskante Π, welche die Flächen zweier ditetragonaler Pyramiden mPn und $m'Pn'$ hervorbringen, durch

$$\cos \Pi = -\frac{mm'a^2(nn'+1)+nn'}{\sqrt{m^2a^2(n^2+1)+n^2}\,\sqrt{m'^2a^2(n'^2+1)+n'^2}}$$

Mittels dieser Formel lassen sich die Combinationskanten je zweier holoëdrischer Gestalten finden,

*) Vielleicht würde sich mittels optischer Versuche der Charakter der Krystallreihe des Skapolithes bestimmen lassen.

weil die Zeichen $m\mathrm{P}n$ und $m'\mathrm{P}n'$ in der That je zwei dieser Gestalten repräsentiren. Bestimmt man nämlich die Werthe von *cos II*, indem man statt $m'\mathrm{P}n'$ nach der Reihe die Gestalten $m'\mathrm{P}$, $m'\mathrm{P}\infty$, $\infty\mathrm{P}n'$, $\infty\mathrm{P}$, $\infty\mathrm{P}\infty$ und $o\mathrm{P}$ einführt, und setzt man wiederum in den so gefundenen Ausdrücken statt $m\mathrm{P}n$ successiv die Gestalten $m\mathrm{P}$, $m\mathrm{P}\infty$, $\infty\mathrm{P}n$, u s. w., so erhält man folgende tabellarische Uebersicht der Cosinus der Combinationskanten, in welcher natürlich alle Werthe negativ zu nehmen sind:

	oP	$\infty P \infty$	∞P	$\infty P n'$	$m' P \infty$	$m' P$	$m' P n'$
mPn	$\frac{n}{M}$	$\frac{mna}{M}$	$\frac{ma(n+1)}{M\sqrt{2}}$	$\frac{ma(nn'+1)}{M\sqrt{n'^2+1}}$	$\frac{(mm'a^2+1)n}{M\sqrt{m'^2a^2+1}}$	$\frac{mm'a^2(n+1)+n}{M\sqrt{2m'^2a^2+1}}$	$\frac{mm'a^2(nn'+1)+nn'}{MM'}$
mP	$\frac{1}{\sqrt{2m^2a^2+1}}$	$\frac{ma}{\sqrt{2m^2a^2+1}}$	$\frac{2ma}{\sqrt{2m^2a^2+1}\sqrt{2}}$	$\frac{ma(n'+1)}{\sqrt{2m^2a^2+1}\sqrt{n'^2+1}}$	$\frac{mm'a^2+1}{\sqrt{2m^2a^2+1}\sqrt{m'^2a^2+1}}$	$\frac{2mm'a^2+1}{\sqrt{2m^2a^2+1}\sqrt{2m'^2a^2+1}}$	
$mP\infty$	$\frac{1}{\sqrt{m^2a^2+1}}$	$\frac{ma}{\sqrt{m^2a^2+1}}$	$\frac{ma}{\sqrt{m^2a^2+1}\sqrt{2}}$	$\frac{mn'a}{\sqrt{m^2a^2+1}\sqrt{n'^2+1}}$	$\frac{mm'a^2+1}{\sqrt{m^2a^2+1}\sqrt{m'^2a^2+1}}$		
∞Pn	0	$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$	$\frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}\sqrt{2}}$	$\frac{nn'+1}{\sqrt{n^2+1}\sqrt{n'^2+1}}$			
∞P	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1				
$\infty P \infty$	0	1					
oP	1						

§. 269.

Combinationskanten der Skalenoëder.

Befinden sich beide Gestalten in gleicher Stellung, so sind ausser den, bereits im vorigen §. gefundenen, heteropolaren Combinationskanten, welche je zwei analog liegende Flächen bilden, noch die amphipolaren CK. zu berücksichtigen, welche jede Fläche der einen Gestalt mit einer Fläche eines zur entgegengesetzten Gestalthälfte gehörigen Flächenpaares der andern Gestalt hervorbringt. Nennen wir sie Π', so folgt allgemein aus der Formel $\cos W$ in §. 22, indem man

statt $a : b : c$ das Verhältniss $ma : n : 1$
- - $a' : b' : c'$ - - - - $-m'a : -n' : 1$,

schreibt, für je zwei Skalenoëder $\pm \frac{mPn}{2}$ und $\pm \frac{m'Pn'}{2}$

$$\cos \Pi' = -\frac{mm'a^2(nn'-1)-nn'}{MM'}$$

Befinden sich dagegen beide Gestalten in verwendeter Stellung, so sind zwei neue CK. zu berechnen, indem jede obere Fläche der einen Gestalt einerseits mit einer Fläche eines oberen, anderseits mit einer Fläche eines unteren Flächenpaares der zweiten Gestalt zum Durchschnitte kommt. Bezeichnen wir die erstere, heteropolare CK. mit Π_1, die andere, amphipolare CK. mit Π_1', so findet sich, indem man in der Formel $\cos W$ a. a. O. für die erste Kante:

statt $a : b : c$ das Verhältniss $ma : n : 1$
- - $a' : b' : c'$ - - - - $m'a : -n' : 1$

und für die zweite Kante:

statt $a : b : c$ das Verhältniss $-ma : -n : 1$
- - $a' : b' : c'$ - - - - $m'a : -n' : 1$

schreibt, für je zwei Skalenoëder $\pm \frac{mPn}{2}$ und $\mp \frac{m'Pn'}{2}$

$$\cos II_1 = -\frac{mm'a^2(nn'-1)+nn'}{MM'}$$

$$\cos II_1' = -\frac{mm'a^2(nn'+1)-nn'}{MM'}$$

Es ist in vorkommenden Fällen leicht, aus diesen Werthen die Cosinus der Combinationskanten je zweier Gestalten einer sphenoidischen Combination zu bestimmen, indem man nur statt m, n, m' und n' diejenigen Ableitungscoëfficienten zu substituiren braucht, welche den combinirten Gestalten zukommen.

D. Beispiele.

§. 270.

Combination des Anatases.

Sillem hat uns unter andern Combinationen des Anatases auch die in Fig. 347 abgebildete kennen gelehrt. Sie ist eine siebenzählige holoëdrische Combination, deren Gestalten, wenn wir P zur Grundgestalt wählen, sich auf folgende Weise in unser Schema ordnen; es gehören:

1) der Hauptreihe die Flächen o, r, P und x,

2) der Nebenreihe die Flächen v, t und q.

Für die Grundgestalt P ist $a = \sqrt{\frac{25}{8}}$, daher $\cos Z = \frac{21}{29}$, $\tan g \frac{1}{2} Z = \frac{5}{2}$, und $Z = 136° 24'$.
Da $P = $ P, so wird:

$o = o$P,

$x = \infty$P (§. 251, a),

$t = $ P∞ (§. 251, b; auch §. 255, 3. a).

Die Flächen q bilden Zuschärfungen der Mitteleecke von P, und zwar sind die CK. den Höhenlinien der Flächen von P parallel, folglich ist:

$$q = 2\text{P}\infty \text{ (§. 255, 3, } a)$$

Die Bestimmung der Pyramide r ist von einer Messung abhängig; misst man z. B. die CK. $r : o$, so findet man 153° 27′; das Supplement dieses Winkels, oder die halbe Mittelkante der Pyramide r ist daher $= 26° 33'$; vergleicht man die Tangente dieses Winkels mit der Tangente der halben Mittelkante von P, so findet man, dass diese genau 5mal so gross als jene, weshalb

$$r = \tfrac{1}{5}\mathrm{P}.$$
$$\text{und} \quad v = \tfrac{1}{5}\mathrm{P}\infty$$

Die Combination ist daher vollständig entwickelt, und ihr Zeichen wird:

$$\mathrm{P}.\infty\mathrm{P}.2\mathrm{P}\infty.\mathrm{P}\infty.\tfrac{1}{5}\mathrm{P}.\tfrac{1}{5}\mathrm{P}\infty.o\mathrm{P}.$$

§. 271.

Combination des Zinnerzes.

Phillips giebt das Bild einer idealen Combination des Zinnerzes, aus welcher die in Fig. 348 dargestellte neunzählige Combination gleichsam ein Auszug ist. Wählen wir die mit s bezeichneten Flächen zur Grundgestalt, so ordnen sich die übrigen Gestalten wie folgt: es gehören

1) der Hauptreihe, s, i und g,
2) der Nebenreihe, P, o und n,
3) Zwischenreihen, e, z und r.

Für die Grundgestalt ist $a = \sqrt{\frac{5}{11}}$, daher

$$\cos X = -\tfrac{11}{21}, \text{ und } X = 121° 35'$$
$$\cos Z = \tfrac{1}{21}, \text{ und } Z = 87° 16'$$

Da nun $s = \mathrm{P}$, so bestimmen sich sogleich:

$$g = \infty\mathrm{P}$$
$$P = \mathrm{P}\infty \text{ (§. 255, 3, a).}$$
$$n = \infty\mathrm{P}\infty$$

Was nun ferner zuerst die ditetragonale Pyramide z betrifft, so folgt aus ihren parallelen CK. zwischen P und g, dass sie die CK. dieser beiden Gestalten abstumpft, oder dass für sie

$$m = \frac{n}{n-1} \text{ (§. 256, 5, CG)}$$

Phillips giebt ihre beiden Polkanten:

$$X = 118° \ 10'$$
$$Y = 159° \ \ 5'$$

daraus folgt:

$$n = \tfrac{3}{2} \ (§. \ 232, \ 3.)$$

also: $m = 3$

und $z = 3P\tfrac{3}{2}$ *)

Die Gestalten z und r bilden horizontale CK., folglich ist:

$$r = \infty P\tfrac{3}{2}$$

Leichter gelangt man zur Bestimmung von z, wenn man sie von r abhängig macht; zu dem Ende misst man die CK. $n:r = 146° \ 19'$, und subtrahirt davon 90°, so ist der Rest $56° \ 19' = \tfrac{1}{2}X$ in ∞Pn, die zugehörige Tangente $= \tfrac{3}{2}$, und daher $r = \infty P\tfrac{3}{2}$, u. s. w.

Durch z werden die Pyramiden i und o unmittelbar bestimmt, nämlich:

$$i = \tfrac{5}{2}P \ (§. \ 254, \ 2, \ a.)$$
$$o = 5P\infty \ (§. \ 254, \ 3, \ a.)$$

Die einzige noch zu bestimmende Gestalt ist daher die Pyramide e; aus ihren Verhältnissen zur Grundgestalt folgt, dass sie eine Pn; die fernere Bestimmung ist jedoch von einer Messung abhängig. Phillips giebt die CK. $P:e = 169° \ 30'$; nach Abzug von 90° bleibt 79° 30′ für $\tfrac{1}{2}X'$ oder die halbe normale Polkante von e; da nun die halbe Polkante der Grundgestalt $= 60° \ 46'$, so folgt:

$$n = \frac{\tang 79° \ 30'}{\tang 60° \ 46'} = 3 \ (§. \ 227 \text{ und } 230)$$

und $e = P3$

Die Combination ist also vollständig entwickelt, und ihr Zeichen:

$$\infty P . \infty P\tfrac{3}{2} . \infty P\infty . 3P\tfrac{3}{2} . P . P\infty . 5P\infty . \tfrac{5}{2}P . P3.$$

*) Man findet auch aus Y allein nach §. 233 den Werth $2m - 1 = 5$, und daher $m = 3$.

§. 272.

Combination des Idokrases.

Die nach Mohs in Fig. 350 dargestellte Combination des Idokrases ist eine 14zählige, holoëdrische, deren Gestalten sich für *c* als Grundgestalt ordnen, wie folgt: es gehören:

1) der Hauptreihe, *P*, *c*, *b*, *r* und *d*;
2) der Nebenreihe, *o* und *M*;
3) Zwischenreihen, *a*, *z*, *s*, *x*, *e*, *f* und *h*.

Für die Grundgestalt wird $a = \sqrt{\frac{3}{7}}$, daher

$$\cos X = -\tfrac{3}{11}, \text{ und } X = 129° \; 31'$$
$$\cos Z = \tfrac{7}{11}, \text{ und } Z = 74° \; 10\tfrac{1}{2}'$$

Aus der Horizontalität der CK. folgt, dass einerseits die Gestalten *a* und *s*, anderseits die Gestalten *e*, *z* und *f* in eine und dieselbe horizontale, und aus dem Parallelismus der CK. von *r*, *e* und *x*, dass diese drei Gestalten in eine und dieselbe verticale Reihe des Schemas gehören.

Aus ihren Verhältnissen zur Grundgestalt bestimmen sich sogleich:

$$P = o\mathrm{P}$$
$$d = \infty\mathrm{P}$$
$$M = \infty\mathrm{P}\infty$$
$$o = \mathrm{P}\infty \text{ (§. 255, 3, a.)}$$

Eine approximative Messung giebt die

$$\text{CK. } b : d = 146\tfrac{1}{2}°$$
$$\text{CK. } M : f = 153\tfrac{1}{2}°$$

zieht man von beiden CK. 90° ab, so ist:

$$\text{halbe Mittelkante von } b = 56\tfrac{1}{2}°$$
$$\text{halbe Seitenkante von } f = 63\tfrac{1}{2}°$$

die Vergleichung der Tangente des ersteren Winkels mit der Tangente des gleichnamigen Winkels von P giebt:

$$b = 2\mathrm{P}$$

und die Tangente des letzteren Winkels unmittelbar:

$$f = \infty\mathrm{P}2$$

folglich müssen auch z und e von der Form mP2 seyn. Nun sind die drei ditetragonalen Pyramiden z, s und x von der Form

$$m\text{P}m \text{ (§. 255, 6, CG.)}$$

und die Pyramide e wegen ihrer Verhältnisse zu 2P und ∞P∞ von der Form $2m$Pm, folglich

$$z = 2\text{P}2$$
$$e = 4\text{P}2$$

Da aber x, e und r in eine und dieselbe verticale Reihe des Schemas gehören, so haben sie die erste Ableitungszahl gemein, folglich ist

$$x = 4\text{P}4$$
$$r = 4\text{P}$$

Weil ferner die CK. der ditetr. Pyramide a mit P den Höhenlinien der Flächen der letzteren Gestalt parallel laufen, so ist für a

$$m(n+1) = 2n \text{ (§. 255, 1, } \alpha.)$$

und weil a zugleich die CK. zwischen 2P2 und ∞P abstumpft, so ist auch

$$m(n-1) = n \text{ (§. 254, 3, CG.)}$$

folglich wird

$$a = \tfrac{3}{2}\text{P}3$$

und daher auch

$$s = 3\text{P}3$$

Die Bestimmung des ditetragonalen Prismas h endlich ist von einer Messung abhängig; misst man z. B. die CK. $M : h$, so findet man 161° 34′, und, nach Abzug von 90°, für die halbe normale Seitenkante des Prismas 71° 34′, deren Tangente = 3, weshalb

$$h = \infty\text{P}3$$

Somit ist die Combination vollständig entwickelt, und ihr Zeichen:

∞P∞.P.oP.∞P.2P.4P.2P2.4P2.P∞.$\tfrac{3}{2}$P3.∞P3.∞P2.3P3.
4P4.

§. 273.

Combination des Zirkones.

Diese in Fig. 349 dargestellte Combination ist eine achtzählige, holoëdrische, deren Gestalten sich für *P* als Grundgestalt ordnen, wie folgt: es gehören:

1) der Hauptreihe, *P*, *u* und *l*;
2) der Nebenreihe, *t* und *s*;
3) Zwischenreihen, *x*, *y* und *z*.

Für die Grundgestalt P ist sehr nahe $a = \sqrt{\frac{9}{22}}$, daher:

$$\cos X = -\tfrac{11}{20}, \text{ und } X = 123^\circ\ 22'$$
$$\cos Z = \tfrac{1}{10}, \text{ und } Z = 84^\circ\ 15\tfrac{1}{2}'$$

Aus ihren Verhältnissen zu P bestimmen sich unmittelbar:

$$l = \infty P$$
$$s = \infty P\infty$$
$$t = P\infty \text{ (§. 255, 3, a.)}$$

Zur Bestimmung von *u* wird eine Messung erfordert; misst man z. B. die CK. *u* : *l*, so findet man 159° 46′, daraus die halbe Mittelkante von $u = 69^\circ$ 46′, und daher

$$u = 3P$$

Die drei ditetragonalen Pyramiden *x*, *y* und *z* sind wegen ihrer Verhältnisse zu P und $\infty P\infty$ von der Form *mPm* (§. 255, 6, CG.). Nun erscheint an der Pyramide *x* die Pyramide 3P mit CK., welche den normalen Polkanten von *x* parallel sind, folglich gilt für *x*

$$m = 3 \text{ (§. 254, 2, } a.)$$

An der Pyramide *z* erscheinen die Flächen derselben Pyramide 3P als Abstfl. ihrer diagonalen Polkanten, folglich wird für *z*

$$\frac{m(n+1)}{2n} = \frac{m+1}{2} = 3 \text{ (§. 254, 2, a.)}$$

oder $m = 5$

Die Bestimmung der Pyramide y ist von einer Messung abhängig; misst man z. B. die CK. $y:s$, so findet man 155° 7′; nach Abzug von 90° bleibt

$$\tfrac{1}{2}T = 65° \; 7';$$

in der Grundgestalt aber ist

$$\tfrac{1}{2}T' = 90° - \tfrac{1}{2}X = 28° \; 19'$$

und daher, weil $m = tang \tfrac{1}{2}T \; cot \tfrac{1}{2}T'$ (§. 233)

$$m = 4$$

Die Combination ist also vollständig entwickelt, und ihr Zeichen:

$$\infty P\infty . P . 3P . P\infty . \infty P . 3P3 . 4P4 . 5P5.$$

§. 274.

Combinationen des tetragonalen Kupferkieses.

Fig. 352 stellt eine vierzählige, sphenoidische Combination des tetragonalen Kupferkieses vor, deren Entwicklung sehr leicht ist. Wählen wir das vorherrschende Sphenoid p zur Grundgestalt, so folgt, dass auch p' und m in die Hauptreihe, c dagegen in die Nebenreihe gehören. Aus Haidinger's Messungen ergiebt sich $a = \sqrt{\tfrac{33}{34}} = \sqrt{0{,}9706}$, daher in $\frac{P}{2}$

$$cos\, X = \tfrac{32}{100}, \text{ und } X = 71° \; 20'$$
$$cos\, Z = \tfrac{34}{100}, \text{ und } Z = 70° \; 7' \text{ (§. 239)}$$

Da die Flächen m vertical, so sind sie die eines Prismas, welches, weil es mit $\frac{P}{2}$ noch horizontale CK. hervorbringt, ∞P seyn muss. Die tetragonale Pyramide der Nebenreihe erscheint an der Grundgestalt so, dass je zwei auf einer Fläche der letzteren gelegene CK. parallel sind; folglich ist

$$c = 2P\infty \text{ (§. 264, 3, } a.)$$

Die Flächen p' gehören einem in verwendeter Stellung befindlichen Sphenoide, und stumpfen die abwechselnden Polkanten von $2P\infty$ ab; folglich wird

$$p' = -\frac{P}{2} \text{ (§. 265, 2, a.)}$$

Die Combination ist daher vollständig entwickelt, und ihr Zeichen : $\frac{P}{2}.\infty P.2P\infty. -\frac{P}{2}$, oder, in der Schreibart der secundären Bezeichnung des §. 215, $S.\infty S.2P\infty. - S$.

§. 275.

Fortsetzung.

Für die in Fig. 351 dargestellte, fünfzählige, sphenoidische Combination des tetragonalen Kupferkieses erkennt man sogleich das vorherrschende Sphenoid P als identisch mit dem gleichbezeichneten der vorigen Combination; es ist also $\frac{P}{2}$. Da nun die tetragonale Pyramide c an diesem Sphenoide so erscheint, dass je zwei auf einer Fläche desselben gelegene CK. parallel sind, so ist es wiederum $2P\infty$; auch folgt, wie im vorigen §., dass $p' = -\frac{P}{2}$. Bei der Kleinheit der Flächen m könnte man über ihre verticale Lage ungewiss bleiben, und in ihnen die Flächen eines sehr spitzen Sphenoides vermuthen; allein der Umstand, dass $2P\infty$ zwischen ihnen und $\frac{P}{2}$ mit parallelen CK. erscheint, beweist sogleich, dass

$$m = \infty P$$

Das von Phillips beobachtete Skalenoëder k gehört zu dem Sphenoide $\frac{P}{2}$, und würde also nach der secundären Bezeichnung als ein S^n zu bezeichnen seyn. Da nun die Mittelkanten des Sphenoides $= 70° \ 7'$, die Mittelkanten des Skalenoëders aber nach Phillips $= 149° \ 2'$, so findet sich

$$n = \frac{tang\, 74° \ 31'}{tang\, 35° \ \ 4'} = 5{,}14$$

wofür man um so sicherer 5 setzen kann, da Phillips die Mittelkanten des Sphenoides zu 71° 10′ angiebt. Das secundäre Zeichen des Skalenoëders wird also S^5, und folglich sein primitives Zeichen $\frac{5P5}{2}$; das Zeichen der ganzen Combination aber: $\frac{P}{2}.-\frac{P}{2}.\frac{5P5}{2}.2P\infty.\infty P$, oder auch: $S.-S.S^5.2P\infty.\infty S$.

§. 276.

Fortsetzung.

Die nach Haidinger in Fig. 353 dargestellte Combination ist eine zehnzählige, sphenoidische Combination des tetragonalen Kupferkieses, deren Gestalten, wenn wir das vorherrschende Sphenoid p als Grundgestalt betrachten, sich ordnen, wie folgt: es gehören

der Hauptreihe, a, d, e, p, p',
der Nebenreihe, g, b, h, c,
einer Zwischenreihe, f.

Zuvörderst ist klar, dass die horizontalen Flächen $a = oP$; ferner bestimmen sich:

$$c = \quad 2P\infty \text{ (§. 264, 3, } a.)$$

$$p' = -\frac{P}{2} \text{ (§. 265, 2, a.)}$$

$$b = \quad P\infty \text{ (§. 255, 3, a.)}$$

Die Bestimmung von h fordert eine Messung; misst man z. B. die CK. $b:h$, so findet man 168° 40′; nach Subtraction der halben Mittelkante von $P\infty$, welche = 44° 35′, bleibt das Supplement der halben Mittelkante von h = 124° 5′, folglich diese selbst = 55° 55′, deren Tangente genau = $\frac{3}{2}$ *tang* 44° 35′; also wird

$$h = \tfrac{3}{2}P\infty$$

Eben so bestimmt man mittels einer Messung der CK. $g:b$

$$g = \tfrac{2}{3}P\infty$$

doch wird diese Bestimmung unabhängig von jeder Messung, sobald man darauf Acht hat, dass die Flächen von $\frac{P}{2}$ mit parallelen CK. zwischen je einer oberen Fläche von g und einer unteren Fläche von c erscheinen; setzt man die Ableitungszahlen dieser Flächen in die allgemeine CG., so findet sich $g = \frac{2}{3}P\infty$ wie vorher.

Da nun die Flächen des Sphenoides e die abwechselnden Polkanten von $\frac{2}{3}P\infty$ abstumpfen, so ist:

$$e = -\frac{\frac{1}{3}P}{2} \text{ (§. 265, 2, a.)}$$

Die Bestimmung des Sphenoides d ist von einer Messung abhängig; misst man die CK. $d : a$, so findet sich 160° 48′; ihr Supplement ist die halbe Mittelkante der Muttergestalt von d, und 54° 20′ die halbe Mittelkante der holoëdrischen Grundgestalt; daraus folgt:

$$d = -\frac{\frac{1}{4}P}{2}$$

Endlich erfordert auch die Bestimmung des Skalenoëders $f = -\frac{mPn}{2}$ eine Messung, da man aus seinen Verhältnissen zu $\frac{2}{3}P\infty$ weiss, dass

$$m = \frac{2n}{3(n+1)} \text{ (§. 265, 1, a.)}$$

Nun ist die Neigung von $f : f$ über e, oder die stumpfere Polkante Y dieses Skalenoëders nach Haidinger = 155° 35′, der Winkel δ' aber (§. 232) in mPn = dem halben Mittelkantenwinkel von $\frac{1}{3}P$, also $\delta' = 24° 55'$; weil nun

$$\cos\tfrac{1}{2}Z = \cos\delta' \sin\tfrac{1}{2}Y$$

so wird in mPn $\frac{1}{2}Z = 27° 34'$,

$$\cos\delta = \frac{\cos\frac{1}{2}Y}{\sin\frac{1}{2}Z}$$

daher $\delta = 62° 50'$, und

$$n = \tang(\delta + 45°) = 3{,}11$$

wofür man auf jeden Fall 3 setzen muss; die ditetragonale Pyramide ist daher $\frac{1}{2}$P3, und das Skalenoëder

$$f = -\frac{\frac{1}{2}P3}{2} = -\tfrac{1}{6}S^3$$

seine Polkanten werden rückwärts berechnet 156° 13′ und 131° 22′.

Die Combination ist nun vollständig entwickelt, und ihr secundäres Zeichen: $S.-S.2P\infty.\frac{3}{2}P\infty.P\infty.\frac{3}{4}P\infty.-\frac{1}{4}S.-\frac{1}{6}S^3.-\frac{1}{3}S.oS.$

§. 277.

Combinationen des Scheelkalkes.

Die in Fig. 354 dargestellte Combination des Scheelkalkes giebt sich sogleich durch die, einseitig links oder rechts gewendete Lage gewisser Flächen als eine pyramidal-hemiëdrische Combination zu erkennen. Setzen wir die mit p bezeichnete Gestalt $=$ P, so wird n eine Pyramide der Nebenreihe, während sich g und a als pyramidal-hemiëdrische Gestalten der Zwischenreihen bestimmen, von welchen bei der willkürlich gewählten aufrechten Stellung jene als $\frac{l}{r}\frac{mPn}{2}$, diese als $\frac{r}{l}\frac{mPn}{2}$ erscheint.

Für die Grundgestalt ist nach Levy $a^2 = \frac{11}{10}$, daher $X = 108°\ 12'$, $Z = 112°\ 2'$. Da nun die CK. zwischen n und P den Höhenlinien der Flächen der letzteren Gestalt parallel laufen, so wird

$$n = 2P\infty \text{ (§. 255, 3, } a.)$$

und da die Flächen von g die CK. zwischen P und 2P∞ abstumpfen, so gilt für g die Gleichung

$$m + mn - 2n = 0 \text{ (§. 255, 3, CG.)}$$

Die weitere Bestimmung ist jedoch von einer Messung abhängig; misst man z. B. die CK. $g : n$, so findet man sehr nahe 163°; das Supplement dieses Winkels, zu der halben Polkante von 2P∞ (=50° 20′) addirt, giebt die halbe diagonale Polkante der ditetragonalen Pyramide g

$$\tfrac{1}{2}Y = 67°\ 20'$$

Setzt man nun in der Formel für $tang\,\frac{1}{2}Y$ des §. 227 statt m seinen Werth $\frac{2n}{n+1}$, so folgt:

$$tang\,\tfrac{1}{2}Y = \frac{n+1}{n-1}\sqrt{\tfrac{16}{11}}$$

$$\text{oder}\quad \frac{n+1}{n-1} = tang\,\tfrac{1}{2}Y\sqrt{\tfrac{11}{16}} = 1{,}986$$

wofür man 2 zu setzen hat; daher wird

$$n = 3 \text{ und } m = \tfrac{3}{2}$$

Zur Bestimmung der zweiten tetragonalen Pyramide von abnormer Flächenstellung dient zuvörderst der Parallelismus der CK. zwischen den drei Flächen g, n und a; setzt man nämlich die diesen drei Flächen entsprechenden Parameter in die allgemeine CG. des §. 68, so folgt für $a = m\text{P}n$ die Bedingungsgleichung

$$n = \frac{m}{m-2} \text{ oder } m = \frac{2n}{n-1};$$

ihre vollständige Bestimmung ist jedoch gleichfalls von einer Messung abhängig; misst man z. B. die CK. $a : P$, so findet man 151° 33′, und subtrahirt man hierauf das Supplement dieses Winkels von der halben Polkante der Pyramide 2P∞, so erhält man 21° 53′ als den Winkel $\frac{1}{2}X$ in §. 238, für welchen, wenn man statt n seinen obigen Werth einführt

$$tang\,\tfrac{1}{2}X = \frac{1}{m-1}\sqrt{\tfrac{16}{11}}$$

wird; daraus folgt:

$$m - 1 = cot\,\tfrac{1}{2}X\sqrt{\tfrac{16}{11}} = 3$$

und daher

$$a = 4\text{P}2$$

Dasselbe Resultat erhält man auch durch Messung der Mittelkante von a, welche 155° 56′ beträgt. Die Combination ist also vollständig entwickelt, und ihr Zeichen: $\text{P}.2\text{P}\infty.\frac{l}{r}\frac{\frac{3}{2}\text{P}3}{2}.\frac{r}{l}\frac{4\text{P}2}{2}.$

§. 278.

Fortsetzung.

Levy hat an einer Varietät des Schlackenwalder Scheelkalkes die Combination Fig. 355 beobachtet; da wir es also mit derselben Species zu thun haben wie im vorigen §., so müssen wir zuvörderst nachsehen, ob die daselbst angenommene Grundgestalt auch hier zu finden ist. Eine Messung der Mittelkante $p : p$ überzeugt uns sogleich von der Identität dieser Pyramide mit der Pyramide p in Fig. 354; folglich gilt sie uns als die Grundgestalt unsrer Combination. Aus der symmetrischen Lage der Flächen c zu je zwei Flächen b folgt, dass c, und aus den horizontalen CK. zwischen c und n, dass auch n eine Pyramide der Nebenreihe sey; wogegen die einseitige Ausbildung der Flächen a sogleich lehrt, dass sie einer tetragonalen Pyramide der dritten Art angehören müssen. Da nun die CK. von n und P den Höhenlinien der Flächen von P parallel sind, so folgt wieder

$$n = 2P\infty \text{ (§. 255.)}$$

Nun erscheint aber n ganz auf dieselbe Art zwischen p und a wie in Fig. 354; auch ist die Lage der CK. zwischen a und p ganz übereinstimmend mit der gleichnamigen CK. in der erwähnten Figur; diess und nöthigenfalls eine Messung überzeugt uns, dass

$$a = 4P2$$

Die Bestimmung der Pyramide b erfordert eine Messung; misst man z. B. die Neigung einer oberen zu einer unteren Fläche, so findet man 73° 8′; da nun die Tangente der Hälfte dieses Winkels genau halb so gross, als die Tangente der halben Mittelkante von P, so wird

$$b = \tfrac{1}{2}P$$

Dagegen ist nun die Pyramide c aus dem Parallelismus der CK. der Flächen c, b und n, oder daraus zu bestimmen, dass b die CK. zwischen einem linken c und rechten b abstumpft; setzt man nämlich in die allgemeine CG. des §. 68 die je dreien dieser Flächen entsprechenden Parameter, so erhält man

$$c = \tfrac{2}{3}P\infty$$

in vollkommener Uebereinstimmung mit den von Levy angegebenen Messungen.

Die Combination ist daher vollständig entwickelt, und ihr Zeichen: $\tfrac{1}{2}P.P.2P\infty.\tfrac{2}{3}P\infty.\frac{r}{l}\frac{4P2}{2}$.

Dritter Abschnitt.

Vom Hexagonalsysteme.

Erstes Capitel.

Von den Axen und einzelen Gestalten des Hexagonalsystemes.

§. 279.

Grundcharakter, Zwischenaxen, Hauptschnitte.

Das Hexagonalsystem*) ist nach §. 43 der Inbegriff aller möglichen Gestalten, deren geometrischer Grundcharakter durch vier Axen ausgesprochen ist, von welchen sich drei gleiche in einer Ebene unter 60° schneiden, während die vierte auf ihnen rechtwinklig ist. Der von Breithaupt vorgeschlagene Name bezieht sich auch hier auf die Mittelquerschnitte aller zu dem Systeme gehörigen Gestalten, indem selbige entweder reguläre Hexagone, oder doch solche

*) Rhomboëdrisches System nach Mohs, sechsgliedriges S. nach Weiss, monotrimetrisches S. nach Hausmann.

Figuren sind, in oder um welche dergleichen beschrieben werden können.

Ausser der Hauptaxe und den drei Nebenaxen sind in diesem Systeme noch drei Zwischenaxen zu berücksichtigen, welche in der Ebene der Basis mitten zwischen je zwei Nebenaxen hinlaufen, und daher unter 30° gegen selbige geneigt sind. Die Ebenen durch die Hauptaxe und je eine der Nebenaxen (oder die Coordinatebenen des Systemes) nennen wir auch hier, wie im tetragonalen Systeme, die normalen, die Ebenen durch die Hauptaxe und je eine der Zwischenaxen die diagonalen Hauptschnitte.

Als geometrische Grundgestalt kann in diesem Systeme jede Gestalt gelten, deren Parameter das endliche Verhältniss $1 : 1 : a$ haben. Wiewohl es nun unendlich viele dergleichen Verhältnisse geben kann, so sind doch für jedes derselben nur 12 Flächen möglich, welche sich gegenseitig zu gleichschenkligen Dreiecken begränzen, und zusammen eine Pyramide von hexagonaler Basis darstellen.

§. 280.

Subsidiarisches dreizähliges Axensystem.

Der so eigenthümliche Charakter dieses Systemes, kraft dessen seine sämmtlichen Gestalten um eine, die Symmetrie beherrschende Hauptaxe sechsgliedrig, oder auch drei- und dreigliedrig ausgebildet sind, macht die Annahme eines vierzähligen Axensystemes durchaus nothwendig, sobald es sich um die naturgemässe Auffassung und richtige Darstellung der einzelen Gestalten sowohl, als auch des zwischen ihnen bestehenden geometrischen Zusammenhanges handelt. Die Lehre von den einfachen Gestalten, von der Ableitung und Bezeichnung muss daher jedenfalls auf ein dergleichen Axensystem gegründet werden, weil für sie kein Grund vorhanden ist, die so augenscheinlich hervortretenden Symmetrieverhältnisse zu vernachlässigen, und gleichsam der Natur zum Trotz irgend ein anderes, in der Erscheinungsweise der Gestalten nicht indicirtes Axensystem einzuführen. In der Lehre von der Berechnung der Gestalten verhält es sich dagegen anders. Zwar werden ihre Resultate so dargestellt werden müssen, dass sie mit der Ableitung und Bezeichnung im Einklange sind, und folglich ein vierzähliges Axensystem voraussetzen; allein die Rechnungsoperationen selbst können, bei dem Gebrauche der analytisch-geometrischen Methode, mit jener Voraussetzung nicht bestehen, weil die vierte Axe ein für den Calcül ganz unbrauchbares Element ist, vor dessen Elimination an die Anwendung jener Methode nicht wohl gedacht werden kann. Die Calcüle selbst müssen daher auch im Gebiete dieses Systemes auf ein subsidiarisch gewähltes dreizähliges Axensystem gegründet werden, wenn sich gleich die Grössen, mit denen man rechnet, und die erhaltenen Resultate, als Functionen dieser Grössen, auf das ursprünglich gegebene vierzählige Axensystem beziehen.

§. 281.

Repräsentative und calculative Gleichungen der Flächen.

Da sich, wie bereits erwähnt worden, die krystallographische Bezeichnung auf ein vierzähliges Axensystem beziehen wird, die Gleichungen der verschiedenen Flächen einer jeden Gestalt aber unmittelbar aus ihrem krystallographischen Zeichen ableiten lassen müssen, so werden wir auch zunächst auf solche Gleichungen gelangen, welche zum Theil von der vierten Axe abhängig sind. Wir wollen diese, unmittelbar aus dem krystallographischen Zeichen folgenden, Gleichungen, weil sie die Lage der Flächen in Bezug auf das anschaulich gegebene Axensystem darstellen, die repräsentativen Gleichungen nennen. Ihre Auffindung geschieht sehr leicht in folgender Art.

Man bezeichne die Hauptaxe als Axe der x, die drei Nebenaxen als Axen der y, z und u, und allgemein die in diese Axen fallenden Parameter irgend gegebener Flächen mit m, n, r und s. Für jeden Sextanten der Basis heisse jeder unmittelbar anliegende ein Nebensextant, jeder nächtsfolgende ein Nachbarsextant, und der gegenüberliegende der Gegensextant. Was es hiernach bedeute, wenn man von zwei Flächen sagt, sie liegen in Neben-, Nachbar- oder Gegensextanten, ist von selbst einleuchtend. Geht man nun von irgend einem Sextanten aus, und bezeichnet die ihm zukommenden halben Nebenaxen als die Halbaxen der $+y$ und $+z$, so fallen in seine Nebensextanten:

die Halbaxen der $+z$ und $+u$
\- \- \- \- \- $+y$ \- $-u$

in seine Nachbarsextanten:

die Halbaxen der $+u$ und $-y$
\- \- \- \- \- $-u$ \- $-z$

und endlich in seine Gegensextanten:

die Halbaxen der $-y$ und $-z$.

Ist nun eine Fläche F gegeben, so kann man stets ihren Sextanten willkürlich als den ersten betrachten; sie schneidet daher die Axen der y und z in ihren positiven Hälften, und ihre Gleichung wird:

$$\pm\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{r}=1 \ldots\ldots (1)$$

Sind aber zwei Flächen F und F' gegeben, so können rücksichtlich ihrer Lage folgende drei Fälle Statt finden:

1) Beide Flächen liegen in einem und demselben Sextanten oder auch in Gegensextanten; setzt man dann die Gleichung der einen Fläche F wie

vorher, so werden die Gleichungen der zweiten Fläche F':

$$\pm \frac{x}{m'} + \frac{y}{n'} + \frac{z}{r'} = 1 \ldots\ldots (2)$$

oder $$\pm \frac{x}{m'} - \frac{y}{n'} - \frac{z}{r'} = 1 \ldots\ldots (3)$$

2) Die Flächen liegen in Nebensextanten; dann werden, für dieselbe Gleichung von F, die repräsentativen Gleichungen der zweiten Fläche F':

$$\pm \frac{x}{m'} + \frac{u}{s'} + \frac{z}{r'} = 1 \ldots\ldots (4)$$

oder $$\pm \frac{x}{m'} + \frac{y}{n'} - \frac{u}{s'} = 1 \ldots\ldots (5)$$

3) Die Flächen liegen in Nachbarsextanten; dann werden, unter Voraussetzung der obigen Gleichung von F, die repräsentativen Gleichungen von F':

$$\pm \frac{x}{m'} - \frac{y}{n'} + \frac{u}{s'} = 1 \ldots\ldots (6)$$

oder $$\pm \frac{x}{m'} - \frac{u}{s'} - \frac{z}{r'} = 1 \ldots\ldots (7)$$

§. 282.

Fortsetzung.

Für den krystallographischen Calcül kommt es nun darauf an, die letzten vier repräsentativen Gleichungen calculativ zu machen, d. h. die Coordinate u wegzuschaffen, und somit das durch die Erscheinungsweise der Gestalten nothwendig gebotene, und für die krystallographische Betrachtung und Ableitung unumgängliche vierzählige Axensystem auf ein dreizähliges zu reduciren, in welchem sich die Axen der y und z unter 60° schneiden, während die Axe der x auf ihnen rechtwinklig ist. Wir haben also jede Gleichung, in welcher das Glied $\frac{u}{s'}$ auftritt, in eine andere zu verwandeln, in welcher statt jenes Gliedes entweder $\frac{y}{p'}$ oder $\frac{z}{q'}$ erscheint. Diese Verwandlung ist sehr leicht, und giebt in jedem Falle für p' den Werth $\frac{s'r'}{s'-r'}$, für q' den Werth $\frac{s'n'}{s'-n'}$, weshalb sich denn die vier letzteren Gleichungen des vorigen §. in folgende verwandeln:

$$\text{Gl. (4)} \ldots \text{in} \pm \frac{x}{m'} + \frac{(s'-r')y}{s'r'} + \frac{z}{r'} = 1$$

$$\text{Gl. (5)} \ldots \text{in} \pm \frac{x}{m'} + \frac{y}{n'} + \frac{(s'-n')z}{s'n'} = 1$$

$$\text{Gl. (6)} \ldots \text{in} \pm \frac{x}{m'} - \frac{y}{n'} - \frac{(s'-n')z}{s'n'} = 1$$

$$\text{Gl. (7)} \ldots \text{in} \pm \frac{x}{m'} - \frac{(s'-r')y}{s'r'} - \frac{z}{r'} = 1$$

Wir wollen künftig die so transformirten Gleichungen der Flächen ihre calculativen Gleichungen nennen.

§. 283.

Einfache Gestalten des Systemes.

Die einfachen Gestalten des Hexagonalsystemes entlehnen ihren allgemeinen Namen von der Figur ihrer Flächen, oder von gewissen Verhältnissen ihrer Configuration überhaupt, ihren Zunamen von der Figur ihrer Mittelquerschnitte oder der Beschaffenheit ihrer Polecke. Im Allgemeinen giebt es folgende, ihrer Form nach wesentlich verschiedene Arten von Gestalten:

1) Trigonale Pyramiden,
2) Hexagonale Pyramiden,
3) Dihexagonale Pyramiden,
4) Rhomboëder,
5) Hexagonale Skalenoëder,
6) Trigonale Trapezoëder,
7) Hexagonale Trapezoëder.

Jede dieser Arten enthält einen zahllosen Inbegriff von Varietäten, welche entweder nur durch ihre Dimensionen, oder auch durch ihre Flächenstellung verschieden sind. Ausser diesen geschlossenen Gestalten erscheinen noch viererlei, nämlich trigonale und hexagonale, ditrigonale und dihexagonale Prismen, so wie das basische Flächenpaar, welche jedoch nur als die Gränzgestalten gewisser Pyramiden zu betrachten sind, und sowohl deshalb, als auch wegen ihrer indefiniten Ausdehnung nicht wohl als selbständige Gestalten aufgeführt werden können.

§. 284.

Trigonale Pyramiden.

Die trigonalen Pyramiden, Fig. 356, sind von 6 gleichschenkligen Dreiecken umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten in einer Ebene liegen; sie haben 9 Kanten und 5 Ecke.

Die Kanten sind zweierlei: 6 symmetrische Polkanten, und 3 regelmässige Mittelkanten.

Die Ecke sind gleichfalls zweierlei: 2 trigonale Polecke, und 3 rhombische Mittelecke.

Die Querschnitte sind gleichseitige Dreiecke.

In den bis jetzt beobachteten Varietäten dieser Gestalten verbinden die Nebenaxen die Eckpuncte der Basis mit den Mittelpuncten der gegenüberliegenden Mittelkanten.

§. 285.

Hexagonale Pyramiden.

Syn. Sechsgliedrige Doppelpyramiden, Dihexaëder, auch Quarzoide; Weiss. Gleichschenklige sechsseitige Pyramiden, auch Dirhomboëder; Mohs. Achteckige Dodekaëder z. Th. Bernhardi. Bipyramidaldodekaëder; Hausmann.

Die hexagonalen Pyramiden, Fig. 357 und 358, sind von 12 gleichschenkligen Dreiecken umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten in einer Ebene liegen; sie haben 18 Kanten und 8 Ecke.

Die Kanten sind zweierlei: 12 symmetrische Polkanten, und 6 regelmässige Mittelkanten.

Die Ecke sind gleichfalls zweierlei: 2 hexagonale Polecke, und 6 rhombische Mittelecke.

Die Querschnitte sind reguläre Hexagone.

Von diesen Pyramiden sind, wie im Tetragonalsysteme, folgende drei, durch ihre Flächenstellung und die Grösse ihrer Basen wesentlich verschiedene Unterarten zu unterscheiden:

1) Hexagonale Pyramiden von normaler Flächenstellung, oder h. P. der ersten Art; ihre Flächen sind rechtwinklig auf den diagonalen Hauptschnitten, oder gleich geneigt gegen je zwei normale Hauptschnitte des Axensystemes.

2) H. P. von diagonaler Flächenstellung, oder h. P. der zweiten Art; ihre Flächen sind rechtwinklig auf den normalen Hauptschnitten, oder gleich geneigt gegen je zwei diagonale Hauptschnitte.

3) H. P. von abnormer Flächenstellung, oder h P. der dritten Art; ihre Flächen sind weder auf den diagonalen, noch auf den normalen Hauptschnitten rechtwinklig, und haben also eine mittlere Stellung zwischen den Flächen der beiden ersten Arten.

In der ersten Art bildet die Basis ein Hexagon *a....a*, Fig. 367, dessen Seiten die Nebenaxen unter 60° schneiden; die Basis der zweiten Art ist das regelmässig umschriebene Hexagon *b....b* für jenes, während die Basen der dritten Art *c....c* unregelmässig umschriebene Hexagone darstellen.

§. 286.

Dihexagonale Pyramiden.

Syn. Sechs-und-Sechskantner, auch Didodekaëder oder 6-und-6-kantige Doppelpyramide; Weiss. Ungleichschenklige zwölfseitige Pyramide; Mohs. Doppelt zwölfseitige Pyramide; Hausmann.

Die dihexagonalen Pyramiden, Fig. 359 und 360, sind von 24 ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten in einer Ebene liegen; sie haben 36 Kanten und 14 Ecke.

Die Flächen gruppiren sich in 12 Flächenpaare.

Die Kanten sind insgesammt symmetrisch und dreierlei: 12 kürzere, stumpfere, 12 längere schärfere Polkanten, und 12 Mittelkanten.

Die Ecke sind gleichfalls dreierlei: 2 dihexagonale Polecke, 6 rhombische spitzere, und 6 dergleichen stumpfere Mittelecke.

Die Nebenaxen verbinden die 6 abwechselnden, die Zwischenaxen die übrigen 6 Mittelecke.

Die Querschnitte sind dihexagonal; die beiderlei Hauptschnitte Rhomben.

Diejenigen Polkanten und Mittelecke, welche in den normalen Hauptschnitten liegen, nennen wir die normalen, die andern die diagonalen Polkanten und Mittelecke; in einigen Pyramiden sind jene, in andern diese die stumpferen.

§. 2.

Rhomboëder.

Syn. Rhomboide der Franzosen. Rautenflach; von Raumer. Achteckige Hexaëder z. Th. Bernhardi.

Die Rhomboëder, Fig. 362 und 363, sind von 6 Rhomben umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten nicht in einer Ebene liegen, sondern im Ziekzack abwechselnd auf- und absteigen; sie haben 12 Kanten und 8 Ecke.

Die Kanten sind symmetrisch, und, wiewohl gleichlang, doch nach Lage und Winkelmaass zweierlei, nämlich 6 Polkanten, und 6 mit ihnen parallele Mittelkanten.

Die Ecke sind gleichfalls zweierlei: 2 trigonale Polecke, und 6 unregelmässig dreiflächige Mittelecke.

Die Querschnitte sind theils gleichseitige Dreiecke, theils gleichwinklige Sechsecke; der Mittelquerschnitt ein regelmässiges Hexagon.

Auch von den Rhomboëdern sind rücksichtlich ihrer Flächenstellung drei, wesentlich verschiedene Arten zu merken, indem sie theils normale, theils diagonale, theils abnorme Flächenstellung besitzen; die ersteren sind bei Weitem die häufigsten, die andern beiden Arten höchst selten.

Man theilt die Rhomboëder in stumpfe und spitze Rhomboëder; in jenen ist der Polkantenwinkel $> 90°$, in diesen $< 90°$; wird dieser Winkel $= 90°$, so werden die Flächen Quadrate, und das Rhomboëder ein Hexaëder, welches gleichsam als eine neutrale Gestalt zwischen den stumpfen und spitzen Rhomboëdern mitten inne steht, aber von diesem Systeme ausgeschlossen ist.

§. 288.

Hexagonale Skalenoëder.

Syn. Drei-und-Dreikantner; Weiss. Ungleichschenklige sechsseitige Pyramiden; Mohs. Bipyramoide; Hausmann. Kalkpyramiden; v. Raumer.

Die hexagonalen Skalenoëder, Fig. 364 und 365, sind von 12 ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten nicht in einer Ebene liegen, sondern im Zickzack abwechselnd auf- und absteigen; sie haben 18 Kanten und 8 Ecke.

Die Flächen gruppiren sich sehr auffallend in 6 Flächenpaare.

Die Kanten sind dreierlei: 6 symmetrische, längere, stumpfere, 6 dergleichen, kürzere, schärfere Polkanten, und 6 unregelmässige Mittelkanten.

Die Ecke sind zweierlei: 2 ditrigonale Polecke, und 6 unregelmässig vierflächige Mittelecke.

Die Nebenaxen verbinden die Mittelpuncte je zweier gegenüberliegender Mittelkanten; die Pole der Zwischenaxen sind durch nichts bezeichnet.

Die Querschnitte sind theils ditrigonal, theils unregelmässig zwölfseitig; der Mittelquerschnitt ist ein Dihexagon; die normalen Hauptschnitte sind Rhomben, die diagonalen Hauptschnitte Rhomboide.

§. 289.

Trigonale Trapezoëder.

Syn. Ditrigonale Trapezaëder; Breithaupt.

Die trigonalen Trapezoëder, Fig. 366, sind von 6 gleichschenkligen Trapezoiden umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten nicht in einer Ebene liegen, sondern im Zickzack abwechselnd auf- und absteigen; sie haben 12 Kanten und 8 Ecke.

Die Kanten sind unregelmässig und dreierlei: 6 Polkanten, 3 längere, stumpfere, und 3 kürzere, schärfere Mittelkanten.

Die Ecke sind zweierlei: 2 trigonale Polecke, und 6 unregelmässig dreiflächige Mittelecke.

Die Nebenaxen verbinden die Mittelpuncte je zweier gegenüberliegender Mittelkanten; die Pole der Zwischenaxen sind durch nichts bezeichnet.

Die Querschnitte sind theils trigonal, theils unregelmässig sechsseitig; der Mittelquerschnitt ein Ditrigon; die normalen Hauptschnitte symmetrische Trapezoide.

Von jeder dieser Gestalten giebt es zwei, in Bezug auf ihre einzelen Begränzungselemente vollkommen gleiche und ähnliche, allein rücksichtlich der Verknüpfung und Lage derselben wie ein rechtes und linkes Ding desselben Paares verschiedene Ebenbilder (vergl. §. 201).

§. 290.

Hexagonale Trapezoëder.

Syn. Dihexagonale Trapezaëder; Breithaupt.

Die hexagonalen Trapezoëder, Fig. 368, sind von 12 gleichschenkligen Trapezoiden umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten nicht in einer Ebene liegen, sondern im Zickzack abwechselnd auf- und absteigen; sie haben 24 Kanten und 14 Ecke.

Die Kanten sind unregelmässig und dreierlei: 12 Polkanten, 6 längere, stumpfere, und 6 kürzere, schärfere Mittelkanten.

Die Ecke sind zweierlei: 2 hexagonale Polecke, und 12 unregelmässig dreiflächige Mittelecke.

Die Nebenaxen verbinden je zwei gegenüberliegende der 6 abwechselnden Mittelkanten, die Zwischenaxen die übrigen 6 Mittelkanten.

Die Querschnitte sind theils hexagonal, theils unregelmässig zwölfseitig; der Mittelquerschnitt ein Dihexagon; die beiderlei Hauptschnitte Rhomben.

Wir nennen die an den Endpuncten der Nebenaxen gelegenen Mittelkanten die normalen, die andern die diagonalen Mittelkanten; in einigen Trapezoëdern sind jene, in andern diese die schärferen.

Uebrigens giebt es auch von jedem dieser Trapezoëder zwei, wie ein rechtes und linkes Ding desselben Paares unterschiedene Exemplare.

§. 291.

Holoëdrische und hemiëdrische Gestalten.

Eine Vergleichung der Symmetrieverhältnisse dieser Gestalten mit den Symmetrieverhältnissen des hexagonalen Axensystemes selbst lehrt uns, welche derselben als holoëdrische, und welche als hemiëdrische oder tetartoëdrische Gestalten zu betrachten sind. Nächst der für alle Krystallsysteme gemeinschaftlich gültigen Bedingung, dass jede holoëdrische Gestalt eine parallelflächige seyn muss (§. 47), ergeben sich aus der ursprünglichen Gleichwerthigkeit der drei Nebenaxen nach Grösse und Lage folgende zwei Kriterien der Holoëdrie:

Es müssen alle holoëdrischen Gestalten

1) um den Pol jeder Nebenaxe eine vollkommen gleichmässige Vertheilung und Verknüpfung ihrer Begränzungselemente nach rechts und links, nach oben und unten zeigen; daher auch
2) in der ersten und verwendeten Normalstellung (§. 42) absolut dasselbe Bild gewähren.

Aus dem Mangel des Flächenparallelismus folgt sogleich, dass die trigonalen Pyramiden, die trigonalen und hexagonalen Trapezoëder geneigtflächig-hemiëdrische, zum Theil wohl auch tetartoëdrische Gestalten sind.

Prüfen wir die übrigen Gestalten nach den so eben aufgestellten Kriterien, so ergiebt sich aus dem ersten Kriterio, dass die hexagonalen Pyramiden von abnormer Flächenstellung, und aus beiden Kriterien, dass die Skalenoëder und Rhomboëder gleichfalls hemiëdrische (diese letzteren zum Theil wohl auch tetartoëdrische) und zwar parallelflächig-hemiëdrische Gestalten sind. Folglich bleiben nur die hexagonalen Pyramiden der ersten und zweiten Art, so wie die dihexagonalen Pyramiden als holoëdrische Gestalten übrig, und wir erhalten folgende vorläufige Uebersicht der hexagonalen Gestalten nach den Verhältnissen der Holoëdrie und Hemiëdrie.

A. Holoëdrische Gestalten.

1) Hexagonale Pyramiden der ersten Art.
2) Hexagonale Pyramiden der zweiten Art.
3) Dihexagonale Pyramiden.

B. *Hemiëdrische (und tetartoëdrische) Gestalten.*

a) Geneigtflächige:

4) Trigonale Pyramiden.
5) Trigonale Trapezoëder.
6) Hexagonale Trapezoëder.

b) Parallelflächige:

7) Rhomboëder.
8) Skalenoëder.
9) Hexagonale Pyramiden der dritten Art.

Zweites Capitel.

Von der Ableitung der Gestalten des Hexagonalsystemes.

A. Ableitung der holoëdrischen Gestalten.

§. 292.

Grundgestalt.

In der holoëdrischen Abtheilung dieses Systemes kann nur irgend eine der hexagonalen Pyramiden von normaler Flächenstellung als Grundgestalt gelten, weil nur für sie das Verhältniss der Parameter insofern dem geometrischen Grundcharakter des Systemes entspricht, inwiefern die beiden in die Nebenaxen fallenden Parameter jeder Fläche gleich gross sind, während der dritte, in die Hauptaxe fallende Parameter grösser oder kleiner ist. Die wesentliche Bedingung liegt jedoch mehr in der Gleichheit jener beiden, als in der Ungleichheit dieses letzteren Parameters; denn allerdings kann eine hexagonale Pyramide existiren, in welcher die Hauptaxe den Nebenaxen gleich ist, ohne dass der Charakter des Systemes auch nur im Geringsten modificirt würde (§. 279). Wenn sich indess die Irrationalität der Grunddimensionen der verschiedenen Krystallreihen jedes einaxigen Krystallsystemes bestätigen sollte (§. 204), so ist es nicht wahrscheinlich, dass jene Pyramide wirklich vorkommen sollte, wie sehr sich ihr auch manche Pyramiden nähern mögen *). Für unsere gegenwärtigen Betrachtungen ist übrigens die Beantwortung dieser und ähnlicher Fragen ganz gleichgültig, indem wir allgemein irgend eine beliebige hexagonale Pyramide von normaler Flächenstellung der Ableitung zu Grunde legen, sie selbst mit P bezeichnen und das Verhältniss ihrer halben Hauptaxe zur halben Nebenaxe $= a:1$ setzen.

§. 293.

Ableitung aller hexagonalen Pyramiden der ersten Art.

Aus der Grundgestalt P lässt sich eine Reihe hexagonaler Pyramiden von gleicher Basis und Flächenstellung ableiten.

Bei unveränderten Nebenaxen multiplicire man die Hauptaxe von P mit einem rationalen Coëfficienten m, der theils $<$ theils > 1, und lege in jede Mittelkante von P zwei Ebenen, von welchen die eine den oberen, die andere den unteren Pol der so vergrösserten oder verkleinerten Hauptaxe trifft; so wird jedenfalls eine hexagonale Pyramide von gleicher Basis und Flächenstellung construirt, welche entweder flacher oder spitzer als P, je nachdem $m <$ oder > 1 ist. Ihr Zeichen wird daher allgemein $= m$P; und da m alle möglichen rationalen Werthe zwischen 0 und ∞, ja diese Gränzwerthe selbst annehmen kann, so erhalten wir durch diese Ableitung den vollständigen Inbegriff aller hexagonalen Pyramiden der ersten Art, welcher sich unter dem Schema folgender Reihe darstellen lässt:

$$\begin{array}{ccc} m<1 & & m>1 \\ o\mathrm{P} \ldots\ldots m\mathrm{P} \ldots\ldots & \mathrm{P} & \ldots\ldots m\mathrm{P} \ldots\ldots \infty\mathrm{P} \end{array}$$

*) Wie z. B. die Pyramide 2P des Berylls.

Diese Reihe, deren Glieder nur durch die Identität ihrer Basis und Flächenstellung, nicht aber durch irgend ein progressionales Verhältniss ihrer Axen verknüpft sind, nennen wir die Hauptreihe des Systemes; ihr mittelstes Glied ist die Grundgestalt P; die Glieder rechter Hand sind insgesammt spitzere, die Glieder linker Hand flachere Pyramiden als P. Die Gränze ist einerseits die Pyramide ∞P, mit unendlich grosser Axe, d. h. ein indefinites hexagonales Prisma von normaler Flächenstellung, anderseits die Pyramide oP mit unendlich kleiner Axe, d. h. die Basis der Grundgestalt, oder jede ihr parallele Fläche. Beide Gränzgestalten können natürlich nie allein, sondern nur in Combination entweder mit andern Gestalten oder auch mit einander auftreten, in welchem letzteren Falle sie ein hexagonales Prisma mit gerad angesetzten Endflächen darstellen.

§. 294.

Ableitung der dihexagonalen Pyramiden und der hexagonalen Pyramiden der zweiten Art.

Aus jedem Gliede mP der Hauptreihe lässt sich eine Reihe dihexagonaler Pyramiden und eine hexagonale Pyramide der zweiten Art ableiten.

Man verlängere die Nebenaxen von mP beiderseits nach einem Coëfficienten n, der rational und > 1, verbinde darauf die Eckpuncte der Basis mit den Endpuncten der so verlängerten Nebenaxen durch gerade Linien, so bilden diese Linien, nach Abzug der über ihre Durchschnitte hervorspringenden Theile, jedenfalls eine dihexagonale Figur. In jede Seite dieser Figur, als der Basis der abzuleitenden Gestalt, lege man hierauf zwei Ebenen, von welchen die eine den oberen, die andere den unteren Endpunct der Hauptaxe von mP trifft, so wird eine von 24 ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Gestalt, deren

Mittelkanten in einer Ebene liegen und ein Dihexagon bilden, d. h. eine dihexagonale Pyramide construirt, für welche allgemein das Zeichen $m\mathrm{P}n$ gilt.

Für $n = 2$ fallen je zwei Seiten der dihexagonalen Basis in eine gerade Linie, das Dihexagon verwandelt sich in das um die Basis von $m\mathrm{P}$ regelmässig umschriebene Hexagon, und daher die dihexagonale Pyramide selbst in eine hexagonale Pyramide von diagonaler Flächenstellung. Für $n > 2$ hingegen würden je zwei Seiten des Dihexagons nach aussen divergiren, und folglich einspringende Winkel veranlassen (§. 33). Da nun dergleichen Winkel an einfachen Gestalten nicht vorkommen können, so ist 2 das unüberschreitbare Maximum des Coëfficienten n, und wir erhalten demnach aus jedem Gliede $m\mathrm{P}$ der Hauptreihe einen Inbegriff von dihexagonalen Pyramiden, welcher sich unter dem Schema einer Reihe von der Form:

$$m\mathrm{P} \ldots\ldots\ldots\, m\mathrm{P}n \ldots\ldots\ldots\, m\mathrm{P}2$$

darstellen lässt, deren Gränzen einerseits die der Ableitung zu Grunde gelegte Pyramide $m\mathrm{P}$ aus der Hauptreihe, anderseits wiederum eine hexagonale Pyramide von gleicher Axe mit $m\mathrm{P}$, aber von diagonaler Flächenstellung und einer Basis, welche sich zu jener von $m\mathrm{P}$ verhält wie $4:3$. Alle Zwischenglieder, für welche $n > 1$ und < 2, sind dihexagonale Pyramiden von verschiedenen Basen für verschiedene Werthe von n. Die Copula jeder solchen Reihe endlich ist in der Gleichheit der Hauptaxen und der daraus folgenden Identität der normalen Hauptschnitte aller in ihr enthaltenen Gestalten gegeben.

Die bis jetzt beobachteten Werthe von n haben meist einen sehr einfachen numerischen Ausdruck. Uebrigens kann der Fall, dass die dihexagonale Basis gleichwinklig, und folglich die zu construirende Pyramide regelmässig zwölfseitig würde, in der Natur nicht vorkommen, indem für ihn ein irrationaler Werth von n gefordert wird.

§. 295.

Dihexagonale Prismen.

Da die Ableitung des vorigen §. auf jedes Glied der Hauptreihe ohne Unterschied anwendbar ist, so muss sich auch aus ∞P, oder dem hexagonalen Prisma eine Reihe von der Form

$$\infty P \ldots\ldots\ldots \infty Pn \ldots\ldots\ldots \infty P2$$

ableiten lassen. Die mittleren Glieder dieser Reihe sind dihexagonale Prismen von verschiedenen Querschnitten für verschiedene Werthe von n; die Gränzglieder einerseits das hexagonale Prisma der Hauptreihe, anderseits wiederum ein hexagonales Prisma von diagonaler Flächenstellung und einem Querschnitte, der sich zu jenem von ∞P verhält wie $4:3$. Das regelmässig zwölfseitige Prisma ist als einfache Gestalt gleichfalls unmöglich, indem für seine Erscheinung derselbe irrationale Werth von n gefordert wird wie für die Erscheinung von dergleichen Pyramiden. Die Combination $\infty P . \infty P2$ stellt zwar ein gleichwinkliges (und zufällig wohl auch gleichseitiges) zwölfseitiges Prisma dar; ihre Flächen haben aber eine von den Flächen jenes regelmässigen zwölfseitigen Prismas gänzlich abweichende Lage.

§. 296.

Schema des Hexagonalsystemes.

Durch die bisherigen Ableitungen ist der Inbegriff sämmtlicher holoëdrischer Gestalten des Hexagonalsystemes vollständig erschöpft, indem sich weder eine hexagonale, noch eine dihexagonale Pyramide angeben lässt, welche nicht auf die eine oder die andre Weise aus einer zweckmässig gewählten Grundgestalt abgeleitet werden könnte. Vereinigen wir also die Reihen der vorhergehenden §§. in ein einziges Schema, so erhalten wir folgende, eben so wohlgeordnete, als vollständige Uebersicht des Systemes:

	$m<1$		$m>1$	
oP	mP	P	mP	∞P
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
oPn	mPn	Pn	mPn	∞Pn
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$oP2$	$mP2$	$P2$	$mP2$	$\infty P2$

Für dieses Schema ergeben sich unmittelbar aus den Regeln der Ableitung folgende Sätze:

1) Jede horizontale Reihe enthält lauter Gestalten von congruenten Mittelquerschnitten.
2) Die oberste horizontale Reihe, als Hauptreihe des Systemes, begreift alle hexagonalen Pyramiden und das gleichnamige Prisma von normaler Flächenstellung und gleicher Basis mit P.
3) Die unterste horizontale Reihe begreift alle hexagonalen Pyramiden und das gleichnamige Prisma von diagonaler Flächenstellung, und einer Basis, welche sich zur Basis von P verhält wie 4 : 3 Wir nennen sie künftig die Nebenreihe des Systemes.
4) Alle mittleren horizontalen Reihen, deren es so viele geben kann, als es rationale Zahlen zwischen 1 und 2 giebt, begreifen lauter dihexagonale Pyramiden und Prismen, und zwar jede einzele Reihe nur solche Gestalten von ähnlichen Querschnitten, da ein und derselbe Werth von n eine und dieselbe dihexagonale Basis giebt. Wir nennen sie die Zwischenreihen des Systemes.
5) Jede verticale Reihe begreift Gestalten von gleicher Axenlänge und congruenten normalen Hauptschnitten.

B. Ableitung der hemiëdrischen Gestalten.

§. 297.

Verschiedene Arten der Hemiëdrie.

Es bedarf kaum einer Erwähnung, dass die dihexagonalen Pyramiden als die eigentlichen Repräsentanten des Hexagonalsystemes zu betrachten sind, indem sie die Bedingungen für die Möglichkeit aller übrigen Gestalten eben so in sich verschliessen, wie in ihrem Zeichen $mP'n$ die Zeichen der letzteren enthalten sind. Wollen wir also die Gesetze entdecken, nach welchen sich die Hemiëdrie in diesem Systeme geltend macht, wollen wir die Resultate kennen lernen, welche die Verwirklichung jener Gesetze für die Erscheinungsweise der verschiedenen Gestalten zur Folge hat, so werden wir auch hier, wie im Tetragonalsysteme, die Modalitäten der Hemiëdrie zuvörderst an jenen allgemeinen Repräsentanten des Systemes aufsuchen müssen. Nun scheinen folgende, bereits auf ähnliche Weise für das Tetragonalsystem in §. 209 ausgesprochenen Gesetze auch im Gebiete dieses Systemes die hemiëdrische Erscheinungsweise der Gestalten zu beherrschen:

1) dass sich die sechsgliedrige Symmetrie jeder dihexagonalen Pyramide jedenfalls nach den Sextanten der Basis bestimmt, weshalb je vier, über einem und demselben Sextanten gelegene Flächen ein Glied der Pyramide bilden, eine andere Gliederung aber (wie z. B. nach den Zwischenaxen) bedeutungslos ist;
2) dass sich für die so bestimmten Glieder der dihexagonalen Pyramide der Gegensatz entweder von oben und unten, oder von rechts und links, oder auch gleichzeitig beide Gegensätze geltend machen.

Wir erhalten daher wiederum dreierlei wesentlich verschiedene Modalitäten der Hemiëdrie, welche, da sie für die Erscheinung ganz ähnliche Resultate liefern wie im Tetragonalsysteme, durch dieselben Namen unterschieden werden mögen, nämlich:

a) Skalenoëdrische (oder rhomboëdrische) Hemiëdrie; es verschwinden die abwechselnden oberen und unteren Flächenpaare der einzelen Glieder; Fig. 369.

b) Pyramidale Hemiëdrie; es verschwinden die rechten oder die linken Flächenpaare der Glieder; Fig. 370.

c) Trapezoëdrische Hemiëdrie; es verschwindet in jedem Gliede die obere rechte mit der unteren linken, oder die obere linke mit der unteren rechten Fläche; Fig. 371.

a) Skalenoëdrische oder rhomboëdrische Hemiëdrie.

§. 298.

Ableitung der hexagonalen Skalenoëder.

Die hexagonalen Skalenoëder sind die parallelflächig-hemiëdrischen Gestalten der dihexagonalen Pyramiden nach den an den abwechselnden diagonalen Polkanten gelegenen Flächenpaaren; oder: die durch den Gegensatz von oben und unten entstehenden hemiëdrischen Gestalten jener Pyramiden.

Da die Hemiëdrie nach den abwechselnden Flächenpaaren erfolgt, und das Gegenflächenpaar eines jeden dergleichen Flächenpaares das vierte, mithin ein geradzähliges in der Reihe der Nebensysteme ist, so wird die hemiëdrische Gestalt eine parallelflächige, und der Inbegriff ihrer 12 Flächen in 6 Flächenpaare gruppirt seyn.

Jede einzele bleibende Fläche kommt zum Durchschnitte mit der nächstgelegenen Fläche eines oberen und mit der nächstgelegenen Fläche eines unteren Nachbarpaares; und da sie schon ursprünglich in der diagonalen Polkante mit ihrer Nebenfläche zum Durchschnitte kommt, so erleidet sie überhaupt drei Durchschnitte, und wird demnach wiederum ein Dreieck. Die Flächen der hemiëdrischen Gestalt sind daher Dreiecke. Dass aber diese Dreiecke durchgängig gleich und ähnlich sind, davon kann man sich leicht überzeugen, indem man für je zwei beliebige bleibende Flächen die Coordinaten ihrer resp. drei Eckpuncte, und aus diesen die Längen der sie begränzenden Kantenlinien bestimmt; man findet so für jede Fläche absolut dieselben drei Längen ihrer dreierlei Seiten. Diese Längen zeigen aber auch zugleich, dass die Dreiecke jedenfalls ungleichseitige seyn müssen, indem sie Functionen der Grössen $2n-1$, $n+1$ und $2-n$ sind, und folglich nie, weder alle drei, noch paarweis gleich werden können, so lange $n>1$ und <2 *).

Weil endlich für jedes bleibende Flächenpaar dasjenige Flächenpaar verschwindet, welches mit ihm ursprünglich zwei horizontale Mittelkanten bildete, so werden auch die Mittelkanten der hemiëdrischen Gestalt nicht mehr horizontal, folglich auch nicht in der Ebene der Basis, überhaupt gar nicht mehr in einer Ebene liegen können; vielmehr, da doch jede derselben die Ebene der Basis in einem Puncte schneidet, im Zickzack auf- und absteigen.

Die hemiëdrische Gestalt ist also eine parallelflächige, von 12 ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Gestalt, deren Mittelkanten nicht in einer Ebene liegen, d. h. ein hexagonales Skalenoëder. Die krystallographischen Zeichen je zweier, aus einer und derselben Pyramide mPn abzuleitenden Skalenoëder sind $+\frac{mPn}{2}$ und $-\frac{mPn}{2}$.

*) Diese Resultate sind an gegenwärtigem Orte nur historisch erwähnt worden, da das folgende Capitel ihre vollständige Begründung und Entwicklung enthält.

Setzt man $m = \infty$, so verwandelt sich die dihexagonale Pyramide in ein dergleichen Prisma, auf welches die skalenoëdrische Hemiëdrie insofern ohne Einfluss ist, inwiefern sie keine Veränderung in seiner Erscheinungsweise zur Folge hat. Das Prisma erscheint eben sowohl mit seinen sämmtlichen 12 Flächen, als wenn es holoëdrisch auftritt; man kann daher das Zeichen der Hemiëdrie füglich weglassen, und ∞Pn statt $\pm \frac{\infty Pn}{2}$ schreiben. Nur darf man nicht vergessen, dass die abwechselnden Flächenpaare dieses scheinbar holoëdrischen Prismas eine sehr verschiedene Bedeutung haben, indem drei zur oberen und drei zur unteren Hälfte der Gestalt gehören; ein Unterschied, der sich zwar in der Regel durch nichts zu erkennen giebt, der aber sehr auffallend wird, sobald eine, der skalenoëdrischen Hemiëdrie unterworfene Krystallreihe zugleich dem Hemimorphismus unterliegt (Vergl. §. 212)

§. 299.

Ableitung der Rhomboëder.

Setzt man $n = 1$, so wird $mPn = mP$, und die dihexagonale Pyramide verwandelt sich in eine hexagonale Pyramide der ersten Art, deren einzele Flächen den an den diagonalen Polkanten gelegenen Flächenpaaren von mPn entsprechen. Wendet man also auf sie dasselbe Gesetz der Hemiëdrie an, so werden die abwechselnden einzelen Flächen von mP zu vergrössern seyn; die so resultirende Gestalt ist jedenfalls ein Rhomboëder von normaler Flächenstellung, oder ein Rhomboëder der ersten Art, wie sich so beweisen lässt.

Weil mP 12 Flächen hat, so wird jede seiner hemiëdrischen Gestalten, für welche die abwechselnden (ungetheilten) Flächen in Anspruch genommen werden, von sechs Flächen umschlossen seyn.

Weil aber die Hemiëdrie nach einzelen Flächen

Statt findet, und jeder Fläche Gegenfläche die vierte, und mithin eine geradzählige in der Reihe der Nebenflächen ist, so wird die hemiëdrische Gestalt eine parallelflächige seyn.

Weil ferner, nach §. 49, für jede bleibende Fläche die Nebenflächen verschwinden, und die Nachbarflächen bleiben, von welchen letzteren für jede Fläche vier vorhanden sind, so erleidet jede bleibende Fläche vier Durchschnitte, wird also eine vierseitige Figur. Und da von den vier Nachbarflächen einer jeden einzelen Fläche je zwei gegenüberliegende einander parallel sind, so werden auch je zwei gegenüberliegende von jenen Durchschnitten einander parallel, und die vierseitige Figur ein Parallelogramm.

Setzt man endlich, die Gleichung einer der bleibenden Flächen F sey

$$\frac{x}{ma} + y + z = 1 \ldots\ldots (1)$$

so sind die repräsentativen Gleichungen ihrer beiden Nachbarflächen aus derselben Pyramidenhälfte:

$$\frac{x}{ma} - y + u = 1 \ldots\ldots, (2)$$

und $$\frac{x}{ma} - z - u = 1 \ldots\ldots (3)$$

die repräsentativen Gleichungen ihrer beiden Nachbarflächen aus der andern Pyramidenhälfte:

$$-\frac{x}{ma} + z + u = 1 \ldots\ldots (4)$$

$$-\frac{x}{ma} + y - u = 1 \ldots\ldots (5)$$

Nachdem die letzteren vier Gleichungen calculativ gemacht worden, gelangt man durch successive Combination von (1) mit (2) und (3) auf die Gleichungen der beiden neuen Polkanten der Fläche F; combinirt man darauf von diesen Gleichungen die eine mit (4), die andere mit (5), so erhält man die Coordinaten der, jene beiden Kantenlinien begränzenden Mitteleckpuncte, nämlich

$$x = \tfrac{1}{3}ma,\ y = -\tfrac{2}{3},\ z = \tfrac{4}{3}$$
$$\text{und } x = \tfrac{1}{3}ma,\ y = \tfrac{4}{3},\ z = -\tfrac{2}{3}$$

Da nun beide Linien vom Poleckpuncte auslaufen, für welchen:

$$x = ma,\ y = 0,\ z = 0$$

so erhält man für beide die gleiche Länge

$$X = \tfrac{2}{3}\sqrt{m^2a^2+3}$$

Die bereits für Parallelogramme erkannten Flächen haben daher zwei gleiche Nebenseiten, und sind folglich, mit Ausnahme eines einzigen Falles, jederzeit Rhomben.

Endlich folgt daraus, dass für jede bleibende Fläche von mP die Nebenfläche aus der entgegengesetzten Pyramidenhälfte eine verschwindende ist, dass die neuen Mittelkanten weder horizontal noch in einer Ebene liegen können, sondern vielmehr im Zickzack auf- und absteigen müssen.

Die hemiëdrische Gestalt wird also eine von 6 Rhomben umschlossene Gestalt, deren Mittelkanten nicht in einer Ebene liegen; d. h. ein Rhomboëder.

Die Zeichen je zweier, aus einer und derselben hexagonalen Pyramide mP abzuleitenden Rhomboëder sind $+\dfrac{mP}{2}$ und $-\dfrac{mP}{2}$.

Für $m = \infty$ verwandelt sich die hexagonale Pyramide in das hexagonale Prisma der ersten Art. Unterwirft man dieses derselben Hemiëdrie, so behält es zwar in der Erscheinung seine sechs Flächen vollständig, doch erhalten die abwechselnden derselben eine entgegengesetzte Bedeutung, indem drei zur oberen, und drei zur unteren Hälfte der Gestalt gehören; ein Unterschied, welcher auch in der Erscheinung sehr auffallend werden kann, wenn die rhomboëdrische Krystallreihe zugleich hemimorphisch ist.

§. 300.

Gränzgestalt der Skalenoëder.

Während die hexagonalen Pyramiden der Hauptreihe durch das Eintreten der skalenoëdrischen Hemiëdrie wesentlich verändert wurden, so scheinen die hexagonalen Pyramiden der Nebenreihe durch sie gar nicht afficirt zu werden. Macht man nämlich für die Pyramiden $mP2$ die in §. 297 erwähnte sechsgliedrige Eintheilung geltend, indem man jede ihrer Flächen durch die Höhenlinie in zwei Theile theilt, und bringt man darauf für sie dasselbe Gesetz der Hemiëdrie in Anwendung, so gelangt man zu dem Resultate, dass selbiges auf ihre Erscheinungsweise durchaus keinen Einfluss ausübt, indem sie mit ihren sämmtlichen 12 Flächen ganz unverändert so erscheinen, wie wenn sie holoëdrisch auftreten; ein Resultat, welches uns kaum überraschen kann, sobald wir das wahre Verhältniss dieser hexagonalen Pyramiden zu den dihexagonalen Pyramiden nicht aus den Augen verlieren, kraft dessen sie nur als die Gränzgestalten derselben zu beurtheilen sind. Hiernach darf es uns denn auch nicht befremden, wenn wir in den Combinationen rhomboëdrischer Krystallreihen (wie z. B. jener des Eisenglanzes, Korundes, Kalkspathes) die hexagonalen Pyramiden der Nebenreihe vollständig mit allen 12 Fläche nauftreten sehen, da es im Gegentheile unbegreiflich seyn würde, wenn sie auf irgend eine Weise nur mit der halben Flächenzahl erschienen. Wie die Pyramiden $mP2$, so erscheint auch das Prisma $\infty P2$ jederzeit vollständig, ohne dass seine abwechselnden Flächen einer verschiedenen Deutung unterworfen werden müssten, wie jene von ∞P; weshalb denn auch $\infty P2$ sogar in den hemimorphisch-rhomboëdrischen Krystallreihen des Turmalines und der Silberblende stets vollständig auftritt.

§. 301.

Kürzere Bezeichnung der Rhomboëder.

Weil die meisten der bis jetzt beobachteten hexagonalen Krystallreihen dem Gesetze der rhomboëdrischen Hemiëdrie unterworfen sind, und daher diese Erscheinungsweise als die vorherrschende des Hexagonalsystemes betrachtet werden muss, so ist es in mehrfacher Hinsicht, und ganz besonders für das Bedürfniss der Mineralogie, sehr vortheilhaft, neben der auf ihr ursprüngliches Verhältniss zu den hexagonalen Pyramiden gegründeten, Bezeichnung der Rhomboëder eine andere, etwas kürzere Bezeichnung zu gebrauchen. Diess wird um so nöthiger, da, wie wir sogleich sehen werden, auch die Bezeichnung der Skalenoëder von jener der Rhomboëder abhängig gemacht werden kann. Wir wollen zu dem Ende die beiden, aus irgend einer Pyramide mP abzuleitenden Rhomboëder mit $\pm mR$ bezeichnen, indem wir mit dem Buchstaben R, als dem Zeichen der rhomboëdrisch erscheinenden Grundgestalt, ein eignes Grundelement der Bezeichnung einführen. Hiernach erhält die Haupteihe des §. 293 in ihrer rhomboëdrischen Erscheinungsweise folgende Form:

$$\begin{array}{ccc} & m<1 & & m>1 & \\ oR\ldots\ldots & \pm mR\ldots\ldots & \pm R\ldots\ldots & \pm mR\ldots\ldots & \infty R \end{array}$$

Uebrigens braucht man bei dem Zeichen mR gar nicht mehr an die Pyramide mP zu denken; vielmehr soll es uns unmittelbar auf die Vorstellung desjenigen Rhomboëders führen, welches die symmetrisch vertheilte Hälfte aller möglichen isoparametrischen Flächen für das Verhältniss $ma : 1 : 1$ darstellt.

§. 302.

Eingeschriebene Rhomboëder der Skalenoëder.

Die Mittelkanten jedes hexagonalen Skalenoëders haben genau dieselbe Lage wie dio Mittelkanten irgend eines Rhomboëders der ersten Art.

Die charakteristischen Eigenschaften der Mittelkanten jedes Rhomboëders der ersten Art sind:

1) dass sie im Zickzack auf- und absteigen,
2) dass sie durch die Endpuncte der Nebenaxen laufen,
3) dass je zwei gegenüberliegende parallel sind,
4) dass sie in Parallelebenen der diagonalen Hauptschnitte fallen,
5) dass sie durchgängig gleich sind.

Dieselben Eigenschaften besitzen aber auch die Mittelkanten jedes Skalenoëders $\pm\frac{mPn}{2}$, wie sich aus Folgendem ergiebt.

1) Sie laufen im Zickzack auf und ab.
2) Je zwei Flächen der dihexagonalen Pyramide, welche nach ihrer Vergrösserung eine Mittelkante des Skalenoëders bilden, haben einen normalen Mitteleckpunct gemeinschaftlich, welcher zugleich der Endpunct einer Nebenaxe ist; folglich wird auch die neue Mittelkante die Nebenaxe in demselben Puncte schneiden.
3) Je zwei Flächenpaare, welche zur Darstellung zweier gegenüberliegender Mittelkanten contribuiren, sind Gegenflächenpaare, folglich die von ihnen gebildeten beiden Mittelkanten einander parallel.
4) Setzt man, die Gleichung einer Fläche des Skalenoëders sey

$$\frac{x}{ma}+\frac{y}{n}+z=1$$

so ist die repräsentative Gleichung derjenigen Fläche, welche mit ihr eine Mittelkante bildet:

$$-\frac{x}{ma}+\frac{u}{n}+z=1$$

und deren calculative Form:

$$-\frac{x}{ma}+\frac{(n-1)y}{n}+z=1$$

Daraus folgen für die Mittelkante selbst die Gleichungen:

$$\frac{x}{ma}+\frac{(2-n)y}{2n}=0, \text{ und } \frac{y}{2}+z=1$$

von welchen die letztere (zwischen y und z) die Gleichung einer Parallelebene des, auf der Axe der z rechtwinkligen, diagonalen Hauptschnittes ist. Folglich fallen die Mittelkanten der Skalenoëder in Parallelebenen der diagonalen Hauptschnitte.

5) Endlich haben auch die Mittelkanten jedes Skalenoëders gleiche Länge; sucht man nämlich die Coordinaten der Endpuncte für je zwei beliebige Mittelkanten, indem man die Gleichungen derselben mit den Gleichungen der sie begränzenden Flächen combinirt, und bestimmt man aus diesen Coordinaten die Länge beider Kanten, so erhält man jedenfalls absolut denselben Ausdruck.

§. 303.

Fortsetzung.

Wir nennen dasjenige Rhomboëder, dessen Mittelkanten mit denen eines gegebenen Skalenoëders zusammenfallen, das **eingeschriebene Rhomboëder** desselben. Da nun aus §. 299 bekannt ist, dass die Mittelkanten jedes Rhomboëders um den dritten Theil seiner halben Hauptaxe von der Ebene des Mittelquerschnittes entfernt sind, so wird das eingeschriebene Rhomboëder eines gegebenen Skalenoëders $\pm\frac{mPn}{2}$ bestimmt seyn, sobald man den Abstand der Mittelecke des Skalenoëders von der Ebene der Basis, oder die der Hauptaxe parallele Coordinate dieses Mitteleckes kennt; denn, ist diese Coordinate $= x$, so wird die halbe Hauptaxe des eingeschriebenen Rhomboëders $= 3x$.

Nun ist jeder Mitteleckpunct von $\frac{mPn}{2}$ der Durchschnittspunct einer oberen und einer unteren Polkante; es kommt daher zunächst auf die Bestimmung zweier dergleichen Polkanten an. Sind die Gleichungen der beiden Flächen des im ersten Sextanten gelegenen oberen Flächenpaares

$$\frac{x}{ma} + \frac{y}{n} + z = 1$$

$$\text{und } \frac{x}{ma} + y + \frac{z}{n} = 1$$

so werden die repräsentativen Gleichungen derjenigen beiden Flächen aus der andern Pyramidenhälfte, welche mit ihnen zum Durchschnitte kommen:

$$-\frac{x}{ma} + z + \frac{u}{n} = 1$$

$$\text{und } -\frac{x}{ma} + y - \frac{u}{n} = 1$$

und folglich die calculativen Gleichungen derselben beiden Flächen

$$-\frac{x}{ma} + \frac{(n-1)y}{n} + z = 1$$

$$\text{und } -\frac{x}{ma} + y + \frac{(n-1)z}{n} = 1$$

Aus der Combination der ersten beiden Gleichungen folgt für die eine Polkante:

$$\frac{x}{ma} + \frac{(n+1)z}{n} = 1, \text{ und } y - z = 0$$

aus der Combination der letzteren beiden Gleichungen für die zweite Polkante:

$$-\frac{x}{ma} + \frac{(2n-1)z}{n} = 1, \text{ und } y - z = 0$$

Aus der, beiden Kanten gemeinschaftlichen, Gleichung $y - z = 0$ folgt, dass beide in die Ebene eines und desselben diagonalen Hauptschnittes fallen und folglich mit einander zum Durchschnitte kommen müssen. Ihr Durchschnittspunct ist aber eben der gesuchte Mitteleckpunct, für welchen aus der Combination der Gleichungen zwischen x und z die Coordinaten

$$-x = \frac{ma(2-n)}{3n}$$

$$\text{und} \quad y = z = \tfrac{2}{3}$$

folgen. Da nun die Coordinate x zugleich die Basisdistanz des Mitteleckpunctes des eingeschriebenen Rhomboëders, so wird die halbe Hauptaxe desselben

$$3x = \frac{ma(2-n)}{n}$$

und folglich das Zeichen des Rhomboëders:

$$\frac{m(2-n)}{n}R$$

§. 304.

Secundäre Ableitung und Bezeichnung der Skalenoëder.

Auf die Eigenschaft der Skalenoëder, dass ihre Mittelkanten mit denen des eingeschriebenen Rhomboëders zusammenfallen, lässt sich folgende secundäre Ableitung und Bezeichnung derselben gründen, welche, zumal für das Bedürfniss der Mineralogie, der primitiven Ableitung des §. 298 vorzuziehen ist,

1) weil sie der Einbildungskraft die Vorstellung der wahren Physiognomie eines gegebenen Skalenoëders um Vieles erleichtert, indem sie selbige von der Vorstellung eines Rhomboëders und einer sehr einfachen Construction abhängig macht, während nach §. 298 die Vorstellung einer dihexagonalen Pyramide und ihrer hemiëdrischen Halbirung vorausgesetzt wird;

2) weil sie in den meisten Fällen auf weit einfachere numerische Werthe der Ableitungscoëfficienten gelangen lässt.

Es ist nämlich einleuchtend, dass das gegebene Skalenoëder $\pm \frac{mPn}{2}$ construirt werden wird, wenn man die Hauptaxe des eingeschriebenen Rhomboëders nach einem Coëfficienten q verlängert (Fig. 361), bis sie der Axe des Skalenoëders gleich geworden, und darauf in jede Mittelkante des Rhomboëders zwei Flächen legt, von welchen die eine den oberen, die andere den unteren Endpunct der so verlängerten Hauptaxe trifft. Nun war die halbe Hauptaxe des eingeschriebenen Rhomboëders

$$3x = \frac{ma(2-n)}{n}$$

also wird $ma = \frac{ma(2-n)q}{n}$

und der Verlängerungscoëfficient

$$q = \frac{n}{2-n}$$

Schreiben wir diesen Coëfficienten, zum Unterschiede von jenen, die sich auf die Nebenaxen beziehen, nach Art eines Exponenten oben rechter Hand vom Symbol der Grundgestalt, so wird

$$\pm \frac{m(2-n)}{n} R^{\frac{n}{2-n}}$$

das secundäre Zeichen desselben Skalenoëders, für welches das primitive Zeichen $\pm \frac{mPn}{2}$ gegeben war. Da in diesem Zeichen die secundären Ableitungscoëfficienten als Functionen der primitiven ausgedrückt sind, so lehrt es uns, aus dem gegebenen primitiven Zeichen das secundäre Zeichen zu finden. Ist uns dagegen das secundäre Zeichen gegeben, so wird es die Form $m'R^{n'}$ haben, und wir werden daraus die primitiven Ableitungscoëfficienten des entsprechenden Zeichens $\frac{mPn}{2}$ leicht auffinden können; es wird nämlich

$$n = \frac{2n'}{n'+1}$$
$$m = m'n'$$

und folglich $mnP\frac{2n}{n+1}$ das primitive Zeichen, welches dem secundären Zeichen mR^n entspricht.

§. 305.

Fortsetzung.

Aus jedem Rhomboëder $\pm mR$ der Reihe in §. 301 lässt sich ein Inbegriff von Skalenoëdern ableiten. Man verlängere die Hauptaxe des Rhomboëders nach einem Coëfficienten n, der rational und > 1, und lege hierauf in jede Mittelkante von $\pm\, mR$ zwei Ebenen, von denen die eine den oberen, die andere den unteren Endpunct der so verlängerten Hauptaxe trifft, so wird in jedem Falle ein Skalenoëder construirt. Da nun n aller möglichen Werthe zwischen 1 und ∞ fähig ist, so erhalten wir aus jedem Rhomboëder $\pm mR$ einen zahllosen Inbegriff von Gestalten, der sich unter dem Schema folgender Reihe darstellen lässt:

$$\pm mR \ldots\ldots\ldots \pm mR^n \ldots\ldots\ldots mR\infty$$

Das erste Glied dieser Reihe ist das Rhomboëder mR selbst; die folgenden Glieder sind lauter Skalenoëder mit coincidirenden Mittelkanten, welche immer spitzer werden, je grösser der Werth von n, und endlich für $n = \infty$ in ein hexagonales Prisma übergehen, dessen Flächen durch die Mittelkanten des Rhomboëders gehen, und folglich den diagonalen Hauptschnitten parallel sind (§. 302), woraus sich ergiebt, dass dieses Prisma von diagonaler Flächenstellung, und daher identisch mit dem Prisma $\infty P2$ ist. Aus welchem Rhomboëder man übrigens diese Ableitung vornehmen mag, so wird doch immer dasselbe hexagonale Prisma als Gränzgestalt $mR\infty$ resulti-ren. Dass aber die nämliche Ableitung auch auf ∞R anwendbar seyn müsse, und wie sie für diese Gestalt geltend zu machen, ist weniger einleuchtend. Weil jedoch jedes $mR\infty = \infty P2$, so ist auch $\infty R\infty = \infty P2$, und weil zwischen den beiden hexagonalen Prismen von normaler und diagonaler Flächenstellung nur dihexagonale Prismen liegen können, so kann ∞R^n nur ein dergleichen Prisma bedeuten, dessen Querschnitte dem Mittelquerschnitte aller mR^n gleich und ähnlich sind, da ein und derselbe Werth von n eine und dieselbe Figur der Basis bedingt.

§. 306.

Schema des skalenoëdrisch erscheinenden Hexagonalsystemes.

Die secundäre Ableitung der vorhergehenden §§. lässt uns zwar auf das hexagonale Prisma, aber nirgends auf die gleichnamigen Pyramiden von diagonaler Flächenstellung gelangen; wie sich auch schon daraus ergiebt, weil $\frac{2n}{n+1}$ niemals $= 2$ werden kann, was doch der Fall seyn müsste, wenn irgend ein mR^n eine dergleichen Pyramide darstellen sollte. Da nun aber diese Pyramiden, vermöge der primitiven Ableitung des §. 300, als die nothwendigen Gränzgestalten der Skalenoëder erkannt wurden, und ihr wirklich beobachtetes Vorkommen in rhomboëdrischen Krystallreihen die Richtigkeit dieses Resultates vollkommen bestätigt, so dürfen wir selbige keinesweges aus dem Inbegriffe der skalenoëdrischen Gestalten ausschliessen, wenn gleich ihr Zusammenhang mit denselben durch die secundäre Ableitung und Bezeichnung gänzlich verloren geht. Soll daher zum Behufe der leichteren Uebersicht ein tabellarisches Schema des Hexagonalsystemes in seiner skalenoëdrischen

Erscheinungsweise aufgestellt werden, so kann diess nur in der Art geschehen, dass man zuvörderst die Reihe der Rhomboëder aus §. 301 mit den Reihen der Skalenoëder aus §. 305 verbindet, und dann die Nebenreihe des Schemas aus §. 296 abgesondert darunter schreibt. Hiernach erhalten wir folgendes Schema:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & m<1 & & & & m>1 & & \\
oR & \ldots & \pm mR & \ldots & \pm R & \ldots & \pm mR & \ldots & \infty R \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
oR^n & \ldots & \pm mR^n & \ldots & \pm R^n & \ldots & \pm mR^n & \ldots & \infty R^n \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\multicolumn{9}{c}{\underbrace{oR^\infty \ldots\ldots mR^\infty \ldots\ldots R^\infty \ldots\ldots mR^\infty \ldots\ldots \infty R^\infty}_{\infty P2}} \\
\hline
oP2 & \ldots & mP2 & \ldots & P2 & \ldots & mP2 & \ldots & \infty P2
\end{array}
$$

Die oberste horizontale Reihe dieses Schemas, welche wir wiederum die **Hauptreihe** nennen, begreift alle Rhomboëder, und das hexagonale Prisma von normaler Flächenstellung.

Die unterste, abgesonderte horizontale Reihe, welche den Namen der **Nebenreihe** beibehält, begreift alle hexagonalen Pyramiden und das gleichnamige Prisma von diagonaler Flächenstellung.

Die mittleren horizontalen Reihen, mit Ausnahme der eingeklammerten, begreifen lauter Skalenoëder und dihexagonale Prismen, und zwar jede einzelne Reihe (für welche derselbe Werth von n gilt) nur solche Gestalten von gleichen und ähnlichen Mittelquerschnitten. Die eingeklammerte Reihe selbst enthält dagegen nur **eine und dieselbe** Gestalt, nämlich das hexagonale Prisma der zweiten Art, $=\infty P2$.

Jede verticale Reihe enthält, mit Ausnahme des Gliedes der Nebenreihe, Gestalten von gleichlaufenden Mittelkanten.

Das Rhomboëder und die hexagonale Pyramide jeder verticalen Reihe haben gleiche Hauptaxen.

§. 307.

Ueber die drei Rhomboëder jedes Skalenoëders.

Ausser dem eingeschriebenen Rhomboëder sind mit jedem hexagonalen Skalenoëder $\pm\frac{mPn}{2}$ noch zwei andere Rhomboëder gegeben, welche wir die Rhomboëder der Polkanten nennen wollen. Es haben nämlich die beiderlei Polkanten eines jeden Skalenoëders eine ganz ähnliche Lage wie die Polkanten irgend zweier, in verwendeter Stellung befindlicher Rhomboëder. Denn sie liegen sämmtlich in den diagonalen Hauptschnitten, jedoch so, dass die drei oberen Polkanten jeder Art in die abwechselnden, die drei unteren Polkanten in die zwischengelegenen Hauptschnitte fallen; auch haben die gleichnamigen Polkanten gleiche Neigung gegen die Hauptaxe. Dieselben beiden Bedingungen der Lage in den abwechselnden diagonalen Hauptschnitten, und der gleichen Neigung gegen die Hauptaxe finden aber im Allgemeinen für jedes Rhomboëder $\pm m'R$ Statt; folglich werden die beiderlei Polkanten eines jeden Skalenoëders $\pm\frac{mPn}{2}$ mit denen irgend zweier Rhomboëder, wo nicht coincidiren, so doch parallel laufen.

Die Gleichungen der in den ersten Sextanten fallenden Polkante jedes Rhomboëders $\pm m'R$ sind:

$$\pm\frac{x}{m'a}+z=1, \text{ und } y-z=0$$

Die Gleichungen der beiden, in denselben Sextanten fallenden Polkanten des Skalenoëders $\frac{mPn}{2}$ aber fanden sich oben:

$$\frac{x}{ma} + \frac{(n+1)z}{n} = 1, \text{ und } y - z = 0$$

$$-\frac{x}{ma} + \frac{(2n-1)z}{n} = 1, \text{ und } y - z = 0$$

Hieraus folgt für den Parallelismus der Polkanten des Rhomboëders

1) mit den kürzeren Polkanten:

$$m'a : 1 = ma(2n-1) : n$$

2) mit den längeren Polkanten:

$$m'a : 1 = ma(n+1) : n$$

Da sich nun das Rhomboëder der kürzeren Polkanten in gleicher, das Rhomboëder der längeren Polkanten aber in verwendeter Stellung mit dem Skalenoëder befindet, so werden die Zeichen dieser beiden Rhomboëder:

$$\text{Rh. der kürzeren Polk.} = \pm \frac{m(2n-1)}{n}R$$

$$\text{Rh. der längeren Polk.} = \mp \frac{m(n+1)}{n}R$$

Es war aber das eingeschriebene Rhomboëder, oder, wie man es auch nennen kann, das

$$\text{Rh. der Mittelkanten} = \pm \frac{m(2-n)}{n}R$$

Weil nun:

$$n + 1 = (2n-1) + (2-n)$$

so erhalten wir das Resultat, dass die Axe des Rhomboëders der längeren Polkanten = der Summe der Axen der beiden andern Rhomboëder; ein Resultat, welches sowohl an und für sich, als auch in Bezug auf die ähnliche Relation in §. 214 merkwürdig ist.

Wollen wir dieselben Rhomboëder in Bezug auf das secundäre Zeichen $m'R^{n'}$ ausdrücken, so haben wir nur in ihren vorstehenden Zeichen $m'n'$ statt m, und $\frac{2n'}{n'+1}$ statt n zu schreiben (§. 304); dann folgt, nach Unterdrückung der Accente, allgemein für das Skalenoëder $\pm mR^n$:

Rh. der Mittelkanten $= \pm mR$
Rh. der kürzeren Polk. $= \pm \frac{1}{2}m(3n-1)R$
Rh. der längeren Polk. $= \mp \frac{1}{2}m(3n+1)R$

b) Pyramidale Hemiëdrie.

§. 308.

Ableitung der hexagonalen Pyramiden der dritten Art.

Die hexagonalen Pyramiden von abnormer Flächenstellung sind die hemiëdrischen Gestalten der dihexagonalen Pyramiden nach den an den abwechselnden Mittelkanten gelegenen Flächenpaaren; oder, die durch den Gegensatz von rechts und links entstehenden hemiëdrischen Gestalten jener Pyramiden.

Weil jede bleibende Fläche, ausser mit ihrer bleibenden Nebenfläche aus der entgegengesetzten Pyramidenhälfte, nur noch mit zwei Nachbarflächen aus derselben Pyramidenhälfte zum Durchschnitte kommt, so wird sie nach ihrer Vergrösserung wiederum ein Dreieck darstellen. Und weil alle Mittelkanten der Muttergestalt in der Ebene der Basis liegen, so werden sich, bei der Vergrösserung der an den abwechselnden Mittelkanten gelegenen Flächenpaare, diese sechs Mittelkanten zwar mit verlängern, aber ihre Lage in einer Ebene beibehalten. Die neue Gestalt ist also nothwendig eine Pyramide (§. 55). Ihre Basis muss aber ein reguläres Hexagon seyn, weil die sämmtlichen Mittelkanten der Muttergestalt äquidistant vom Mittelpuncte, von den abwechselnden Mittelkanten aber je zwei gegenüberliegende parallel, und je zwei benachbarte unter 120° geneigt sind. Die hemiëdrische Gestalt ist daher eine hexagonale Pyramide. Weil endlich die Mittelkanten der Muttergestalt weder den Nebenaxen noch den Zwischenaxen parallel laufen, sondern jedenfalls eine mittlere Richtung haben, so kann die hemiëdrische Pyramide nur eine Pyramide von abnormer Flächenstellung, oder eine hexagonale Pyramide der dritten Art seyn.

Die beiden aus einer und derselben dihexagonalen Pyramide mPn abzuleitenden hexagonalen Pyramiden erhalten, ganz aus denselben Gründen, welche oben in §. 216 für die ähnlichen Ableitungen im Tetragonalsysteme angegeben worden, und daher für gegenwärtigen Fall nachzusehen sind, die Zeichen $\frac{r}{l}\frac{mPn}{2}$ und $\frac{l}{r}\frac{mPn}{2}$.

§. 309.

Gränzgestalten der hexagonalen Pyramiden der dritten Art.

Setzt man $m = \infty$, so verwandelt sich die hexagonale Pyramide in ein **hexagonales Prisma** von abnormer Flächenstellung, dessen Zeichen $\frac{r}{l}\frac{\infty Pn}{2}$ und $\frac{l}{r}\frac{\infty Pn}{2}$.

Für $n = 1$ erhält man die, mit ihren sämmtlichen zwölf Flächen **vollständig** erscheinende, hexagonale Pyramide mP, und auf gleiche Weise, für $n = 2$, die **vollständig** erscheinende Pyramide $mP2$. Man darf nur die Flächen der Pyramiden der Haupt- und Nebenreihe durch ihre Höhenlinien in zwei Theile theilen, und auf die, durch diese Flächentheilung gleichsam dihexagonal gewordenen, Pyramiden dasselbe Gesetz der Hemiëdrie anwenden, indem man entweder die linken oder die rechten Flächenpaare ihrer einzelen Glieder vergrössert, um sich von der Richtigkeit dieser Resultate zu überzeugen.

Es folgt also hieraus für die pyramidal-hemiëdrische Erscheinungsweise des Hexagonalsystemes die

Regel, dass die Gestalten der Haupt- und Nebenreihe vollständig, die Gestalten der Zwischenreihen dagegen als hexagonale Pyramiden und Prismen von abnormer Flächenstellung auftreten; eine Regel, welche in der Krystallreihe des Apatites ihre vollkommene Bestätigung findet.

c) *Trapezoëdrische Hemiëdrie.*

§. 310.

Ableitung der hexagonalen Trapezoëder.

Die hexagonalen Trapezoëder sind die hemiëdrischen Gestalten der dihexagonalen Pyramiden nach den abwechselnden einzelen Flächen; oder, die durch die gleichzeitigen Gegensätze von oben und unten, von rechts und links entstehenden hemiëdrischen Gestalten jener Pyramiden.

Die Hemiëdrie nach einzelen Flächen kann für die dihexagonalen Pyramiden nur eine geneigtflächige Gestalt geben, weil jeder Fläche Gegenfläche die siebente in der Reihe der Nebenflächen, und daher eine ungeradzählige ist (§. 50). Nun hat jede bleibende Fläche drei Neben- und vier Nachbarflächen; sie erleidet also, weil jene verschwinden, während diese mit ihr zugleich wachsen, nach der Vergrösserung vier Durchschnitte, und wird eine vierseitige Figur. Da sie aber nur gegen die beiden Nachbarflächen derselben Pyramidenhälfte gleiche, gegen die der entgegengesetzten Pyramidenhälfte ungleiche Neigung hat, so werden die vier, sie begränzenden Kanten dreierlei Werth haben, indem neben zwei gleichen Polkanten zwei ungleiche Mittelkanten entstehen. Diese letzteren können übrigens nicht mehr in der Basis liegen, sondern müssen vielmehr im Zickzack auf- und absteigen, weil für jede bleibende Fläche die Nebenfläche aus der entgegengesetzten Pyramidenhälfte verschwindet, und doch jede neue Mittelkante die

Ebene der Basis in einem Puncte schneidet. Aus allen diesem folgt, dass die hemiëdrische Gestalt eine von zwölf gleichschenkligen Trapezoiden umschlossene Gestalt, deren Mittelkanten nicht in einer Ebene liegen, oder, dass sie ein hexagonales Trapezoëder ist.

Die zwei, aus einer und derselben dihexagonalen Pyramide mPn abzuleitenden Trapezoëder werden, ganz aus denselben Gründen, welche oben in §. 218 bei der Ableitung der tetragonalen Trapezoëder angegeben wurden, und auch für gegenwärtigen Fall buchstäblich gelten, mit $r\frac{mPn}{2}$ und $l\frac{mPn}{2}$ bezeichnet.

§. 311.

Gränzgestalten der hexagonalen Trapezoëder.

Setzt man $m = \infty$, so verwandelt sich das hexagonale Trapezoëder in das dihexagonale Prisma ∞Pn, dessen abwechselnde Flächen jedoch eine verschiedene Bedeutung haben, indem sechs auf die obere, und sechs auf die untere Gestalthälfte zu beziehen sind; ein Unterschied, welcher sich im Falle des Hemimorphismus sehr auffallend zu erkennen geben würde, weil dann diese Gränzgestalt der Trapezoëder als hexagonales Prisma von abnormer Flächenstellung erscheinen müsste.

Für $n = 1$ verwandelt sich das Trapezoëder in die, mit allen 12 Flächen vollständig erscheinende, hexagonale Pyramide mP, und für $n = 2$ in die eben so vollständig erscheinende hexagonale Pyramide $mP2$. Von der Richtigkeit dieser Behauptungen überzeugt man sich leicht, wenn man die Flächen von mP sowohl als von $mP2$ durch ihre Höhenlinien halbirt, und dann auf die gleichsam dihexagonal gewordenen Gestalten, mit steter Berücksichtigung ihrer in §. 297 erläuterten Gliederung, dasselbe Gesetz der Hemiëdrie in Anwendung bringt.

Es folgt also hieraus für die trapezoëdrische Erscheinungsweise des Hexagonalsystemes die Regel, dass nur die dihexagonalen Pyramiden als Trapezoëder, alle übrigen Gestalten aber vollständig, mit ihren sämmtlichen Flächen, gerade so erscheinen, als ob sie holoëdrisch aufträten.

C. Ableitung der tetartoëdrischen Gestalten.

§. 312.

Verschiedene Arten der Tetartoëdrie.

Wie der Hemiëdrie, so scheint auch der Tetartoëdrie die in §. 297 erörterte Gliederung der dihexagonalen Pyramiden zu Grunde zu liegen, indem von je vier, zu einem Gliede gehörigen Flächen immer drei verschwinden, und eine zurückbleibt. Nach der verschiedenen Lage der bleibenden Flächen zu einander und zu den verschwindenden bestimmen sich die verschiedenen Resultate, welche die Tetartoëdrie für die Erscheinungsweise der hexagonalen Gestalten zur Folge hat; Resultate, welche sich freilich bedeutend vervielfältigen würden, sobald man das Verhältniss der Tetartoëdrie auch in der Weise geltend machen wollte, dass mit dem gänzlichen Verschwinden der abwechselnden Glieder die Vergrösserung je zweier Flächen der übrigen Glieder einträte. Weil jedoch tetartoëdrische Gestalten überhaupt bis jetzt nur an zwei hexagonalen Mineralspecies*) beobachtet wurden, und der Charakter der Tetartoëdrie bei blos einseitiger Ausbildung der Krystalle oder eintretender Zwillingsbildung sehr unsicher und vieldeutig wird, so lassen sich die verschiedenen Modificationen nicht zuverlässig angeben, nach welchen das Verhältniss in der Wirklichkeit Statt finden mag. Um daher unsre Betrachtungen übereinstimmend mit denen der

*) Am Quarze und Titaneisen.

Hemiëdrie, und frei von nutzloser Vervielfältigung zu erhalten, wollen wir die Tetartoëdrie jedenfalls für alle sechs Glieder der hexagonalen Gestalten geltend machen, ohne die abwechselnden zu überspringen.

Unter dieser Voraussetzung sind aber nur zwei Modalitäten der Tetartoëdrie möglich. Es wird nämlich für die abwechselnden Glieder jedenfalls der Gegensatz von oben und unten eintreten, indem in dreien derselben eine obere, in dreien eine untere Fläche die bleibende ist; dabei können jedoch die oberen mit den unteren Flächen in Bezug auf rechts und links entweder eine übereinstimmende, oder eine entgegengesetzte Lage haben. Diess giebt folgende zwei Arten der Tetartoëdrie, welche wir nach den Resultaten, welche sie für die Erscheinungsweise der dihexagonalen Pyramiden zur Folge haben, mit den Namen der rhomboëdrischen und trapezoëdrischen Tetartoëdrie bezeichnen wollen.

1) Rhomboëdrische T.; es wachsen in den abwechselnden Gliedern nach oben und unten entgegengesetzt, nach rechts und links übereinstimmend liegende Flächen; Fig. 372.
2) Trapezoëdrische T.; es wachsen in den abwechselnden Gliedern nach oben und unten sowohl, als nach rechts und links entgegengesetzt liegende Flächen; Fig. 373.

§. 313.

Verhältniss der Tetartoëdrie zur Hemiëdrie.

Da die Tetartoëdrie nur das symmetrisch vertheilte Viertel der Flächen der Muttergestalt in Anspruch nimmt, während die Hemiëdrie die symmetrisch vertheilte Hälfte derselben fordert, so werden wir die Resultate jener aus den Resultaten dieser ableiten können, indem wir die letzteren einer abermaligen hemiëdrischen Halbirung unterwerfen. Und so verhält es sich auch in der That. Vergleicht man nämlich die bleibenden sechs Flächen der rhomboëdrischen Tetartoëdrie mit den bleibenden zwölf Flächen der skalenoëdrischen oder pyramidalen Hemiëdrie, so ergiebt sich, dass jene genau dieselbe Lage haben, wie die abwechselnden einzelen Flächen von diesen. Folglich werden wir auch auf dasselbe Resultat gelangen müssen, wenn wir, statt die Regel dieser Tetartoëdrie unmittelbar auf die dihexagonale Pyramide anzuwenden, entweder die Skalenoëder oder die hexagonalen Pyramiden von abnormer Flächenstellung der Hemiëdrie nach den abwechselnden einzelen Flächen unterwerfen.

Vergleichen wir eben so die bleibenden sechs Flächen der trapezoëdrischen Tetartoëdrie mit den bleibenden zwölf Flächen der hexagonalen Skalenoëder oder Trapezoëder, so finden wir, dass jene genau dieselbe Lage haben, wie die Flächen der an den abwechselnden (normalen) Mittelkanten gelegenen Flächenpaare beider Gestalten. Folglich werden wir auf dasselbe Resultat gelangen, wir mögen nun die Regel dieser Tetartoëdrie unmittelbar für die dihexagonale Pyramide geltend machen, oder die Skalenoëder und hexagonalen Trapezoëder der Hemiëdrie nach den an den abwechselnden (normalen) Mittelkanten gelegenen Flächenpaaren unterwerfen.

a) *Rhomboëdrische Tetartoëdrie.*

§. 314.

Ableitung der Rhomboëder von abnormer Flächenstellung.

Die Rhomboëder von abnormer Flächenstellung sind die tetartoëdrischen Gestalten der dihexagonalen Pyramiden nach den, an den abwechselnden Mittelkanten gelegenen, abwechselnd oberen und unteren Flächen; oder, diejenigen tetartoëdrischen Gestalten jener Pyramiden, welche durch Vergrösserung der in den abwechselnden Gliedern nach oben und unten entgegengesetzt, nach rechts und links übereinstimmend liegenden Flächen entstehen.

Aus dieser ihrer Definition folgt unmittelbar, dass dieselben Rhomboëder zum Vorscheine kommen müssen, wenn man in den hexagonalen Pyramiden der dritten Art die abwechselnden einzelen Flächen zur Vergrösserung bringt. Da nun der in §. 299 gegebene Beweis für die Ableitung der Rhomboëder aus den hexagonalen Pyramiden eigentlich ganz unabhängig von der Stellung und Bedeutung dieser Pyramiden ist, so werden auch die hexagonalen Pyramiden von abnormer Flächenstellung nothwendig auf Rhomboëder gelangen lassen, sobald ihre abwechselnden einzelen Flächen wachsen, bis zum Verschwinden der übrigen. Nur werden diese Rhomboëder eben so von abnormer Flächenstellung seyn müssen, wie die aus mP abgeleiteten Rhomboëder normale Flächenstellung hatten.

Die Zeichen der vier, aus einer und derselben dihexagonalen Pyramide mPn abzuleitenden Rhomboëder von abnormer Flächenstellung sind: $\pm\frac{r}{l}\frac{mPn}{4}$ und $\pm\frac{l}{r}\frac{mPn}{4}$.

§. 315.

Gränzgestalten der Rhomboëder von abnormer Flächenstellung.

Für $m=\infty$ verwandeln sich die Rhomboëder von abnormer Flächenstellung in hexagonale Prismen, deren abwechselnde Flächen jedoch eine entgegengesetzte Bedeutung haben.

Für $n=1$ wird $mPn=mP$, und das Rhomboëder der dritten Art ein Rhomboëder der ersten Art, oder ein R. von normaler Flächenstellung, welches in der Erscheinung durch nichts von dem Rhomboëder $\pm \frac{mP}{2}$ oder $\pm mR$ verschieden ist, obwohl seine Flächen nur als die vergrösserten rechten oder linken Flächenhälften des letzteren gedeutet werden müssen.

Für $n = 2$ verwandeln sich die Rhomboëder der dritten, in Rhomboëder der zweiten Art, oder in Rhomboëder von diagonaler Flächenstellung, denen wir also hier zum ersten Male begegnen.

Die beiden hexagonalen Prismen ∞P und $\infty P2$ erscheinen tetartoëdrisch vollständig, doch behalten ihre abwechselnden Flächen eine entgegengesetzte Bedeutung.

Allgemein erhalten wir also für das Hexagonalsystem in seiner rhomboëdrischen Tetartoëdrie die Regel, dass die sämmtlichen Pyramiden als Rhomboëder, und die sämmtlichen Prismen als hexagonale Prismen auftreten, und dass jene Rhomboëder sowohl als diese Prismen normale, diagonale oder abnorme Flächenstellung haben, je nachdem sie aus der Hauptreihe, aus der Nebenreihe oder aus Zwischenreihen stammen.

b) *Trapezoëdrische Tetartoëdrie.*

§. 316.

Ableitung der trigonalen Trapezoëder.

Die trigonalen Trapezoëder sind die tetartoëdrischen Gestalten der dihexagonalen Pyramiden nach den an den abwechselnden normalen Mittelecken analog gelegenen Nachbarflächen; oder, diejenigen tetartoëdrischen Gestalten jener Pyramiden, welche durch Vergrösserung der in den abwechselnden Gliedern nach oben und unten sowohl, als nach rechts und links entgegengesetzt liegenden Flächen entstehen.

Jede bleibende Fläche kömmt mit vier andern bleibenden Flächen zum Durchschnitte, und wird also allgemein eine vierseitige Figur; da sie aber ursprünglich nur gegen die zwei Flächen derselben Pyramidenhälfte gleiche, gegen die beiden Flächen der entgegengesetzten Pyramidenhälfte ungleiche Neigung haben, so werden sich auch für sie neben zwei gleichen Polkanten zwei ungleiche Mittelkanten ausbilden; woraus sich folgern lässt, dass die Flächen der tetartoëdrischen Gestalt gleichschenklige Trapezoide werden müssen. Die neuen Mittelkanten können aber weder in der Ebene der Basis, noch überhaupt in einer Ebene liegen, da für jede bleibende Fläche diejenige verschwindet, welche mit ihr eine horizontale Kante bildete, die abwechselnden Mittelkanten aber noch durch die abwechselnden Endpuncte der Nebenaxen laufen. Die neue Gestalt ist daher eine von sechs gleichschenkligen Trapezoiden umschlossene Gestalt, deren Mittelkanten im Zickzack auf- und absteigen, d. h. ein trigonales Trapezoëder.

Die Zeichen von je vier, aus einer und derselben dihexagonalen Pyramide abzuleitenden trigonalen Trapezoëdern sind: $\pm\, r\frac{mPn}{4}$ und $\pm\, l\frac{mPn}{4}$.

§. 317.

Gränzgestalten der trigonalen Trapezoëder.

Für $m = \infty$ verwandeln sich die trigonalen Trapezoëder in **ditrigonale Prismen**, indem dieselbe Regel der Tetartoëdrie, auf ∞Pn angewendet, die Vergrösserung der an den abwechselnden normalen Seitenkanten gelegenen Flächenpaare fordert; doch haben die abwechselnden Flächen dieser Prismen eine entgegengesetzte Bedeutung.

Für $n = 1$ verwandeln sich die Trapezoëder in **Rhomboëder von normaler Flächenstellung**, welche sich ihrer Erscheinung nach durch nichts von den Rhomboëdern in §. 299 unterscheiden, wiewohl ihre oberen und unteren Flächen eine nach rechts und links verschiedene Bedeutung haben.

Für $n = 2$ verwandeln sich die Trapezoëder in trigonale Pyramiden von diagonaler Flächenstellung, deren obere und untere Flächen nach rechts und links verschieden sind, was jedoch auf die Erscheinung der Gestalt selbst ohne Einfluss bleibt. Dieser Zusammenhang der trigonalen Pyramiden mit den übrigen tetartoëdrischen Gestalten des Systemes wird durch ihr Vorkommen in der Wirklichkeit vollkommen bestätigt.

Das Prisma ∞P erscheint vollständig mit allen sechs, jedoch ihrer Bedeutung nach entgegengesetzten Flächen; das Prisma $\infty P2$ dagegen nur mit seinen abwechselnden Flächen, als trigonales Prisma von diagonaler Flächenstellung.

Allgemein erhalten wir also für das Hexagonalsystem in seiner trapezoëdrischen Tetartoëdrie die Regel, dass die Gestalten der Hauptreihe als Rhomboëder und hexagonales Prisma, die Gestalten der Nebenreihe als trigonale Pyramiden und trigonales Prisma, die Gestalten der Zwischenreihen endlich als trigonale Trapezoëder und ditrigonale Prismen auftreten.

Drittes Capitel.

Von der Berechnung der Gestalten des Hexagonalsystemes.

§. 318.

Vorbereitung.

Das dreizählige Axensystem, welches nach §. 280 allen, im Gebiete des Hexagonalsystemes vorzunehmenden Rechnungen subsidiarisch zu Grunde gelegt werden muss, ist eigentlich ein monoklinoëdrisches (§. 24); denn, nachdem die Axe der u eliminirt worden, bleiben nur noch die unter 60° geneigten Axen der y und z und die Axe der x, welche auf jenen beiden rechtwinklig ist. Der Unterschied besteht nur darin, dass im monoklinoëdrischen Systeme eine der schiefwinkligen Axen vertical zu stellen ist (§. 41), während in gegenwärtigem Systeme die Axe der x die Hauptaxe seyn und bleiben muss. Weil nun die sämmtlichen Calcüle im Gebiete eines monoklinoëdrischen Axensystemes davon ganz unabhängig sind, ob diese oder jene Axe die Rolle der Hauptaxe spielt, so können wir die in der Elementarlehre §. 24 u. f. gefundenen Formeln unmittelbar für die Berechnung des Hexagonalsystemes in Anspruch nehmen, wenn wir in denselben $\varrho = 60°$ setzen, die Buchstaben x und z, a und c vertauschen *), und endlich statt a, b und c die Grössen m, n und r schreiben.

Für irgend einen durch seine Coordinaten x, y und z gegebenen Punct wird also die Centraldistanz:

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + yz} \quad (§. 27)$$

und für irgend zwei, durch ihre Coordinaten gegebene Puncte die gegenseitige Distanzlinie,

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 + (y-y')(z-z')}$$

Für irgend eine Fläche, deren Gleichung

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{r} = 1$$

werden die Gleichungen der Normale aus dem Mittelpuncte, nach §. 28

$$\frac{x}{3nr} - \frac{y}{2m(2r-n)} = 0$$

---

*) Denn unter x haben wir die Coordinate, unter a den Parameter zu verstehen, welcher sich auf die Hauptaxe bezieht.

$$\frac{x}{3nr} - \frac{z}{2m(2n-r)} = 0$$

$$\frac{z}{2n-r} - \frac{y}{2r-n} = 0$$

und die Länge dieser Normale:

$$N = \frac{mnr\sqrt{3}}{\sqrt{4m^2(n^2-nr+r^2)+3n^2r^2}}$$

Der Cosinus des Neigungswinkels W zweier Flächen F und F', deren Gleichungen

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{r} = 1$$

$$\text{und} \quad \frac{x}{m'} + \frac{y}{n'} + \frac{z}{r'} = 1$$

findet sich nach §. 29

$$\cos W = -\frac{2mm'(2nn'+2rr'-n'r-nr')+3nrn'r'}{\sqrt{4m^2(n^2-nr+r^2)+3n^2r^2}\sqrt{4m'^2(n'^2-n'r'+r'^2)+3n'^2r'^2}}$$

Zur Auffindung des Cosinus des Neigungswinkels U zweier Linien L und L' haben wir zuvörderst in den für jene Linien allgemein zu Grunde gelegten Gleichungen des §. 30 die Coordinaten x und z zu vertauschen, so dass bei allen hierher gehörigen Rechnungen die gegebenen Gleichungen der Linien mit folgenden schematischen Gleichungen parallelisirt werden müssen:

$$\text{für } L \begin{cases} \frac{z}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 0 \\ \frac{x}{\gamma} + \frac{z}{\delta} = 0 \\ \frac{y}{\varepsilon} + \frac{x}{\zeta} = 0 \end{cases} \qquad \text{für } L' \begin{cases} \frac{z}{\alpha'} + \frac{y}{\beta'} = 0 \\ \frac{x}{\gamma'} + \frac{z}{\delta'} = 0 \\ \frac{y}{\varepsilon'} + \frac{x}{\zeta'} = 0 \end{cases}$$

Dann wird unmittelbar:

$$\cos U = -\frac{\alpha\alpha'\varepsilon\varepsilon'+\beta\beta'\varepsilon\varepsilon'+\beta\beta'\zeta\zeta'-\frac{1}{2}(\alpha\beta'+\alpha'\beta)\varepsilon\varepsilon'}{\sqrt{\alpha^2\varepsilon^2+\beta^2\varepsilon^2+\beta^2\zeta^2-\alpha\beta\varepsilon^2}\sqrt{\alpha'^2\varepsilon'^2+\beta'^2\varepsilon'^2+\beta'^2\zeta'^2-\alpha'\beta'\varepsilon'^2}}$$

oder auch:

$$\cos U = -\frac{\alpha\alpha'\delta\delta'+\beta\beta'\delta\delta'+\alpha\alpha'\gamma\gamma'-\frac{1}{2}(\alpha\beta'+\alpha'\beta)\delta\delta'}{\sqrt{\alpha^2\delta^2+\beta^2\delta^2+\alpha^2\gamma^2-\alpha\beta\delta^2}\sqrt{\alpha'^2\delta'^2+\beta'^2\delta'^2+\alpha'^2\gamma'^2-\alpha'\beta'\delta'^2}}$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir zur Berechnung der einzelen Gestalten übergehen; wobei wir, wiederum für die Grundgestalt, es mag nun solche als hexagonale Pyramide oder als Rhomboëder gedacht werden, jedenfalls das Verhältniss der halben Nebenaxe zur halben Hauptaxe $= 1 : a$ voraussetzen, und die Berechnung selbst, in der Abtheilung der holoëdrischen Gestalten sowohl, als in den verschiedenen Abtheilungen hemiëdrischer und tetartoëdrischer Gestalten, auf diejenige Gestalt gründen, welche als der Repräsentant ihrer Abtheilung zu betrachten ist (vergl. §. 220).

A. Berechnung der holoëdrischen Gestalten.

§. 319.

Berechnung der dihexagonalen Pyramide mPn; Zwischenaxen.

Aufgabe. Die Grösse der Zwischenaxen der dihexagonalen Pyramide mPn zu finden.

Für alle drei Zwischenaxen gilt zuvörderst gemeinschaftlich die Gleichung:

$$x = 0$$

Die zweiten Gleichungen finden sich aus ihrer Lage zu den Nebenaxen, wie folgt:

1) für die Zwischenaxe der Axen der y und z:

$$y - z = 0$$

2) für die Zwischenaxe der Axen der z und u:

$$2y + z = 0$$

3) für die Zwischenaxe der Axen der y und u:

$$2z + y = 0$$

Die Gleichung einer in den ersten Sextanten fallenden Fläche der dihexagonalen Pyramide mPn ist aber:

$$\frac{x}{ma} + \frac{y}{n} + z = 1$$

Die Coordinaten ihres Durchschnittspunctes mit der Zwischenaxe desselben Sextanten, oder des diagonalen Mitteleckpunctes werden daher:

$$x = 0, \text{ und } y = z = \frac{n}{n+1}$$

und folglich die Centraldistanz dieses Punctes, oder, was dasselbe, die Länge der halben Zwischenaxen:

$$D = \frac{n\sqrt{3}}{n+1}$$

Setzt man $n = 1$, so wird $D = \sqrt{\frac{3}{4}}$, und betrachtet man diesen Werth als den Grundwerth der Zwischenaxen, so wird der Coëfficient r, mit welchem dieser Grundwerth multiplicirt werden muss, um auf die Zwischenaxe irgend einer Gestalt mPn gelangen zu lassen:

$$r = \frac{2n}{n+1}$$

§. 320.

Fortsetzung; Flächennormale.

Aufgabe. Die Normale aus dem Mittelpuncte auf eine Fläche der dihexagonalen Pyramide mPn zu finden.

Vergleicht man die Gleichung

$$\frac{x}{ma} + \frac{y}{n} + z = 1$$

mit der Gleichung

$$\frac{x}{ma} + \frac{y}{n} + \frac{z}{r} = 1$$

so findet sich, unmittelbar aus ihrem für letztere Gleichung berechneten Werthe in §. 318, die Länge der Flächennormale:

$$N = \frac{man\sqrt{3}}{\sqrt{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2}}$$

oder, wenn wir die, auch in andern Formeln sehr häufig vorkommende Grösse

$$\sqrt{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2} = M$$

setzen,

$$N = \frac{man\sqrt{3}}{M}$$

§. 321.

Fortsetzung; Kantenlinien.

Aufgabe. Die Kantenlinien der dihexagonalen Pyramide mPn zu finden.

Die Kantenlinien einer dihexagonalen Pyramide mPn sind leicht aus den bekannten Coordinaten ihrer respectiven Endpuncte zu berechnen; diese Endpuncte sind nämlich für die Kanten der Fläche F:

(1) der Poleckpunct; $x = ma, y = 0, \quad z = 0$;

(2) der normale Mitteleckp.; $x = 0, y = 0, \quad z = 1$;

(3) der diagonale Mitteleckp.; $x = 0, y = \frac{n}{n+1}, z = \frac{n}{n+1}$;

und zwar wird begränzt:

die normale Polkante X von den Puncten (1) und (2)

die diagonale Polkante Y - - - - (1) und (3)

die Mittelkante . . . Z - - - - (2) und (3)

Nach der in §. 318 stehenden Formel für die Distanzlinie zweier Puncte erhält man sogleich folgende Längen dieser Kanten:

$$X = \sqrt{m^2a^2+1}$$

$$Y = \frac{\sqrt{m^2a^2(n+1)^2+3n^2}}{n+1}$$

$$Z = \frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n+1}$$

Für den Fall, da $X = Y$, oder, da die Dreiecke der dihexagonalen Pyramiden gleichschenklig, und folglich diese selbst regelmässig zwölfseitig würden, folgt:

$$n = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

Dieser irrationale Werth von n verbürgt uns nicht nur die Unmöglichkeit dodekagonaler Pyramiden im Gebiete der Krystallformen, sondern lehrt uns auch die Gränze kennen, diesseits und jenseits welcher die beiden Polkanten ihr Grössenverhältniss vertauschen. Es ist nämlich die normale Polkante länger oder kürzer als die diagonale Polkante, je nachdem $n <$ oder $> \frac{1+\sqrt{3}}{2}$; und, weil 1,366 ... der Näherungswerth dieses irrationalen Coëfficienten, so werden dihexagonale Pyramiden wie $mP\frac{4}{3}$, $mP\frac{7}{5}$ oder $mP\frac{11}{8}$ u. s. w. den regelmässig zwölfseitigen Pyramiden mehr oder weniger nahe kommen.

§. 322.

Fortsetzung; Volumen.

Aufgabe. Das Volumen V der dihexagonalen Pyramide mPn zu finden.

Die Basis der dihexagonalen Pyramide mPn wird durch die Neben- und Zwischenaxen in 12 gleiche und ähnliche Dreiecke getheilt, von welchen ein jedes die halbe Nebenaxe $= 1$ zur Grundlinie und das Product der Coordinate des diagonalen Mitteleckpunctes mit $\sin 60°$ zur Höhe hat. Der Flächeninhalt jedes solchen Dreieckes ist daher:

$$\frac{n\sqrt{3}}{4(n+1)}$$

und der Inhalt der Basis selbst:

$$\frac{3n\sqrt{3}}{n+1}$$

Da nun die dihexagonale Pyramide aus zwei, in ihren Grundflächen verbundenen einfachen Pyramiden von der Höhe ma besteht, so wird ihr Volumen:

$$V = \frac{2man\sqrt{3}}{n+1}$$

und das Volumen einer jeden von den 24 Elementarpyramiden, aus welchen man sich die ganze Pyramide zusammengesetzt denken kann:

$$v = \frac{man}{4(n+1)\sqrt{3}}$$

§. 323.

Fortsetzung; Oberfläche.

Aufgabe. Die Oberfläche S der dihexagonalen Pyramide mPn zu finden.

Das Volumen ist auch das Product der Oberfläche in den dritten Theil der Flächennormale, oder

$$V = \tfrac{1}{3}NS$$

folglich $$S = \frac{3V}{N}$$

Setzt man in diesen Ausdruck die Werthe von V und N, so wird:

$$S = \frac{6\sqrt{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2}}{n+1} = \frac{6M}{n+1}$$

und daher der Flächeninhalt jeder einzelen Pyramidenfläche:

$$F = \frac{M}{4(n+1)}$$

§. 324.

Fortsetzung; Flächenwinkel.

Aufgabe. Die Flächenwinkel der dihexagonalen Pyramide mPn zu finden.

Wir bezeichnen die ebenen Winkel der Flächen analog den ihnen gegenüberliegenden Kanten mit ξ, v und ζ; da nun der Sinus jedes Dreieckwinkels gleich dem doppelten Flächeninhalte F, dividirt durch das Product der ihn einschliessenden Seiten, so wird:

$$\sin\xi = \frac{2F}{YZ},\ \sin v = \frac{2F}{XZ},\ \sin\zeta = \frac{2F}{XY}$$

Substituirt man für F, X, Y und Z ihre Werthe aus §. 323 und 321, so folgt:

$$sin\,\xi = \frac{(n+1)M}{2\sqrt{m^2a^2(n+1)^2+3n^2}\,\sqrt{n^2-n+1}}$$

$$sin\,v = \frac{M}{2\sqrt{m^2a^2+1}\,\sqrt{n^2-n+1}}$$

$$sin\,\zeta = \frac{M}{2\sqrt{m^2a^2(n+1)^2+3n^2}\,\sqrt{m^2a^2+1}}$$

Berechnet man aus diesen Sinus, oder besser, mittels der Gleichungen der Kantenlinien die Werthe der Cosinus, so erhält man endlich für die Tangenten, als die im Gebrauche bequemsten Functionen, folgende Ausdrücke:

$$tang\,\xi = \frac{(n+1)M}{3n(n-1)}$$

$$tang\,v = \frac{M}{2-n}$$

$$tang\,\zeta = \frac{M}{2m^2a^2(n+1)+3n}$$

Anmerkung. Braucht man den Neigungswinkel α irgend einer vom Pole der Gestalt auslaufenden Kante gegen die Hauptaxe, so darf man nur in ihren (aus der Combination ihrer resp. Flächen folgenden) Gleichungen $x = 0$ setzen, und aus den dadurch bestimmten y und z die Centraldistanz D ihres Durchschnittspunctes mit der Basis aufsuchen; dann wird $tang\,\alpha = \frac{D}{ma}$. Im Allgemeinen aber ist die Auffindung des Cosinus des Neigungswinkels irgend zweier Kanten ein sehr einfaches Problem, weil man nur die Gleichungen beider Kanten zu bestimmen braucht, um die Grössen zu erhalten, welche statt der Buchstaben α, β, γ, δ, ε und ζ in die Formeln für $cos\,U$ (§. 318) substituirt werden müssen.

§. 325.

Fortsetzung; Kantenwinkel.

Aufgabe. Die Kantenwinkel der dihexagonalen Pyramide mPn zu finden.

Wir lassen den Kanten ihre in §. 321 gebrauchte Bezeichnung, und setzen die Gleichung der einen Fläche F

$$\frac{x}{ma} + \frac{y}{n} + z = 1$$

so sind die Gleichungen der drei Flächen F', F'' und F''', welche mit F die Kanten X, Y und Z bilden, folgende:

$$\text{für } F' \ldots\ldots \frac{x}{ma} + \frac{(n-1)y}{n} + z = 1$$

$$\text{für } F'' \ldots\ldots \frac{x}{ma} + y + \frac{z}{n} = 1$$

$$\text{für } F''' \ldots - \frac{x}{ma} + \frac{y}{n} + z = 1$$

Setzt man in den Ausdruck für $\cos W$ des §. 318 statt der Buchstaben m, n und r die Parameter der Gleichung von F, und statt der Buchstaben m', n' und r' successiv die Parameter der Gleichungen von F', F'' und F''', so erhält man;

$$\cos X = - \frac{2m^2a^2(n^2+2n-2)+3n^2}{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2}$$

$$\cos Y = - \frac{2m^2a^2(4n-n^2-1)+3n^2}{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2}$$

$$\cos Z = - \frac{4m^2a^2(n^2-n+1)-3n^2}{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2}$$

Die Cosinus der halben Winkel sind:

$$\cos\tfrac{1}{2}X = \frac{ma(2-n)}{M}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}Y = \frac{ma(n-1)\sqrt{3}}{M}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}Z = \frac{n\sqrt{3}}{M}$$

Hieraus folgen die Proportionen:

$$\cos\tfrac{1}{2}X : \cos\tfrac{1}{2}Z = ma(2-n) : n\sqrt{3}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}Y : \cos\tfrac{1}{2}Z = ma(n-1) : n$$

$$\cos\tfrac{1}{2}X : \cos\tfrac{1}{2}Y = 2-n : (n-1)\sqrt{3}$$

und wiederum für $X = Y$ die Bedingung:

$$n = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \text{ wie in §. 321.}$$

Ferner findet sich:

$$tang\,\tfrac{1}{2}X = \frac{n\sqrt{m^2a^2+1}\sqrt{3}}{ma(2-n)}$$

$$tang\,\tfrac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{m^2a^2(n+1)^2+3n^2}}{ma(n-1)\sqrt{3}}$$

$$tang\,\tfrac{1}{2}Z = \frac{2ma\sqrt{n^2-n+1}}{n\sqrt{3}}$$

Setzen wir den Winkel je zweier Nachbarflächen eines und desselben normalen Mitteleckes $= T$, und den Winkel je zweier Nachbarflächen eines diagonalen Mitteleckes $= U$, so wird:

$$tang\,\tfrac{1}{2}T = \frac{man\sqrt{3}}{\sqrt{m^2a^2(2-n)^2+3n^2}}$$

$$tang\,\tfrac{1}{2}U = \frac{ma(n+1)}{\sqrt{3}\sqrt{m^2a^2(n-1)^2+n^2}}$$

§. 326.

Fortsetzung; Kantenwinkel für Pyramiden von der Form $m\mathrm{P}\frac{m}{m-1}$.

Da dihexagonale Pyramiden von der Form $m\mathrm{P}\frac{m}{m-1}$ in der Natur besonders häufig vorkommen, und die zur Berechnung der Kantenwinkel dienlichen Formeln für sie einige Abkürzungen erhalten, so ist es bequem, dieselben für den Gebrauch unmittelbar zur Hand zu haben. Man findet, wenn $n = \frac{m}{m-1}$,

$$\cos X = -\frac{2a^2(m^2+2m-2)+3}{4a^2(m^2-m+1)+3}$$

$$\cos Y = -\frac{2a^2(2m^2-2m-1)+3}{4a^2(m^2-m+1)+3}$$

$$\cos Z = -\frac{4a^2(m^2-m+1)-3}{4a^2(m^2-m+1)+3}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}X = \frac{a(m-2)}{\sqrt{4a^2(m^2-m+1)+3}}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}Y = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{4a^2(m^2-m+1)+3}}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}Z = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4a^2(m^2-m+1)+3}}$$

daher die Proportionen:

$$\cos\tfrac{1}{2}X : \cos\tfrac{1}{2}Z = a(m-2) : \sqrt{3}$$
$$\cos\tfrac{1}{2}Y : \cos\tfrac{1}{2}Z = a : 1$$
$$\cos\tfrac{1}{2}X : \cos\tfrac{1}{2}Y = m-2 : \sqrt{3}$$

Endlich wird:

$$\tang\tfrac{1}{2}T = \frac{ma\sqrt{3}}{\sqrt{a^2(m-2)^2+3}}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}U = \frac{(2m-1)a}{\sqrt{3}\sqrt{a^2+1}}$$

§. 327.

Berechnung der dihexagonalen Prismen.

Setzt man in den Ausdrücken der vorhergehenden §§. $m = \infty$, so erhält man die Formeln zur Berechnung der dihexagonalen Prismen ∞Pn, wie folgt:

$$r = \frac{2n}{n+1}$$

$$N = \frac{n\sqrt{3}}{2\sqrt{n^2-n+1}}$$

$$\cos X = -\frac{n^2+2n-2}{2(n^2-n+1)}$$

$$\cos Y = -\frac{4n-n^2-1}{2(n^2-n+1)}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}X = \frac{n\sqrt{3}}{2-n}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}Y = \frac{n+1}{(n-1)\sqrt{3}}$$

Für $n = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ würde das Prisma ein regelmässig zwölfseitiges, welchem daher keine Realität zugestanden werden kann. Dasjenige gleichwinklige zwölfseitige Prisma aber, welches häufig vorkommt, ist nicht die einfache Gestat $\infty P\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, sondern die Combination $\infty P.\infty P2$, deren Flächen eine ganz andere Lage haben, als die Flächen jener einfachen Gestalt (§. 295).

Aus den Werthen für $cos\frac{1}{2}X$ und $cos\frac{1}{2}Y$ folgt für je zwei Prismen ∞Pn und $\infty Pn'$, in welchen die diagonalen Kanten des einen den normalen Kanten des andern gleich sind, und umgekehrt, und welche daher als inverse Gestalten bezeichnet werden können:

$$2-n : (n-1)\sqrt{3} = (n'-1)\sqrt{3} : 2-n'$$

und daher $n' = \frac{n+1}{2n-1}$.

§. 328.

Berechnung der hexagonalen Pyramiden mP.

Setzt man in den Formeln der §§. 319 bis 325 $n = 1$, so erhält man die Ausdrücke für die hexagonalen Pyramiden der Hauptreihe, wie folgt:

I. Coëfficient der Zwischenaxe:

$$r = 1$$

II. Flächennormale:

$$N = \frac{ma\sqrt{3}}{\sqrt{4m^2a^2+3}}$$

III. Kantenlinien:

$$X = \sqrt{m^2a^2+1}$$
$$Y = \tfrac{1}{2}\sqrt{4m^2a^2+3}$$
$$2Z = 1$$

Die Linie Z ist nämlich die halbe, und daher $2Z$ die ganze Mittelkantenlinie, weil je zwei über einem Sextanten liegende Flächen von mPn für $n = 1$ in eine Ebene fallen; aus demselben Grunde verschwindet die Kante Y als solche, und Y bedeutet daher nur die Höhenlinie der Flächen von mP.

IV. Volumen:

$$V = ma\sqrt{3}$$

V. Oberfläche:

$$S = 3\sqrt{4m^2a^2 + 3}$$

VI. Flächenwinkel:

$$tang\,\xi = \infty, \text{ also } \xi = 90^\circ$$

$$tang\,v = \sqrt{4m^2a^2 + 3}$$

$$tang\,\zeta = cot\,v;\; tang\,2\zeta = \frac{\sqrt{4m^2a^2+3}}{2m^2a^2+1}$$

Es ist nämlich ζ der halbe, und daher 2ζ der ganze ebene Winkel am Poleck.

VII. Kantenwinkel:

$$cos\,X = -\frac{2m^2a^2+3}{4m^2a^2+3}$$

$$cos\,Y = -\quad 1$$

$$cos\,Z = -\frac{4m^2a^2-3}{4m^2a^2+3}$$

Hieraus folgt: $4\,cos\,X + cos\,Z = -3$; und aus den Werthen der Cosinus der halben Winkel:

$$cos\tfrac{1}{2}X : cos\tfrac{1}{2}Z = ma : \sqrt{3}$$

Ferner bestimmt sich:

$$tang\tfrac{1}{2}X = \frac{\sqrt{m^2a^2+1}\sqrt{3}}{ma}$$

$$tang\tfrac{1}{2}Z = tang\tfrac{1}{2}U = 2ma\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

$$tang\tfrac{1}{2}T = \frac{ma\sqrt{3}}{\sqrt{m^2a^2+3}}$$

§. 329.

Berechnung der hexagonalen Pyramiden *mP*2.

Setzt man in den Formeln der §§. 319 bis 325 $n = 2$, so erhält man die Ausdrücke für die hexagonalen Pyramiden der Nebenreihe, wie folgt:

I. Coëfficient der Zwischenaxe:

$$r = \tfrac{4}{3}$$

II. Flächennormale:

$$N = \frac{ma}{\sqrt{m^2a^2+1}}$$

III. Kantenlinien:

$$X = \sqrt{m^2a^2+1}$$
$$Y = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\sqrt{4m^2a^2+3}$$
$$2Z = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

Die Linie Z ist nämlich die halbe, und folglich $2Z$ die ganze Mittelkantenlinie, weil je zwei in einer normalen Polkante zusammenstossende Flächen von mPn für $n = 2$ in eine Ebene fallen; aus demselben Grunde verschwindet die Kante X als solche, und X bedeutet hier nur die Höhenlinie der Flächen von $mP2$.

IV. Volumen:

$$V = 4ma\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

V. Oberfläche:

$$S = 4\sqrt{3}\sqrt{m^2a^2+1}$$

VI. Flächenwinkel:

$$tang\,\xi = \sqrt{3}\sqrt{m^2a^2+1}$$
$$tang\,v = \infty, \text{ also } v = 90°$$
$$tang\,\zeta = cot\,\xi;\; tang\,2\zeta = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{m^2a^2+1}}{3m^2a^2+2}$$

Es ist nämlich ζ der halbe, und daher 2ζ der ganze ebene Winkel am Poleck.

VII. Kantenwinkel:

$$cos\,X = -\;1,$$
$$cos\,Y = -\frac{m^2a^2+2}{2m^2a^2+2}$$
$$cos\,Z = -\frac{m^2a^2-1}{m^2a^2+1}$$

Daher ist wiederum $4\,cos\,Y + cos\,Z = -3$; für die Cosinus der halben Kantenwinkel folgt:

$$cos\tfrac{1}{2}Y : cos\tfrac{1}{2}Z = ma : 2$$

Ferner bestimmt sich:

$$tang\,\tfrac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{3m^2a^2+4}}{ma}$$

$$tang\,\tfrac{1}{2}Z = tang\,\tfrac{1}{2}T = ma$$

$$tang\,\tfrac{1}{2}U = \frac{ma\sqrt{3}}{\sqrt{m^2a^2+4}}$$

§. 330.

Berechnung der Ableitungscoëfficienten aus den Kantenwinkeln.

Es sey in jeder dihexagonalen Pyramide mPn
der halbe normale Winkel der Basis $= \nu$
- - diagonale - - - - $= \delta$

ferner der an der Basis anliegende halbe Winkel
des normalen Hauptschnittes $= \nu'$
des diagonalen - - - $= \delta'$

so wird allgemein:

$$tang\,\nu = \frac{n\sqrt{3}}{2-n},\quad tang\,\delta = \frac{n+1}{(n-1)\sqrt{3}}$$

$$tang\,\nu' = ma\,,\quad tang\,\delta' = \frac{ma(n+1)}{n\sqrt{3}}$$

So lange nun keine Relation zwischen den beiden Ableitungscoëfficienten m und n bekannt ist, hängt die Bestimmung derselben von zwei Winkeln der Pyramide ab; wir wollen daher je zwei dieser letzteren als gegeben betrachten, und daraus m und n berechnen.

1) X und Z sind gegeben; dann wird:

$$\cos\nu = \frac{\cos\frac{1}{2}X}{\sin\frac{1}{2}Z},\ \text{und}\ \frac{n}{2-n} = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,tang\,\nu$$

$$\cos\nu' = \frac{\cos\frac{1}{2}Z}{\sin\frac{1}{2}X},\ \text{und}\ ma = tang\,\nu'$$

2) Y und Z sind gegeben; dann wird:

$$\cos\delta = \frac{\cos\frac{1}{2}Y}{\sin\frac{1}{2}Z},\ \text{und}\ \frac{n+1}{n-1} = \sqrt{3}\,tang\,\delta$$

$$\cos\delta' = \frac{\cos\frac{1}{2}Z}{\sin\frac{1}{2}Y},\ \text{und}\ ma = \frac{n\sqrt{3}}{n+1}\,tang\,\delta'$$

3) X und Y sind gegeben; dann wird:

$$\frac{2-n}{n-1}=\frac{\sqrt{3}\cos\frac{1}{2}X}{\cos\frac{1}{2}Y}$$

oder auch:

$$n=\frac{2\cos\frac{1}{2}Y+\sqrt{3}\cos\frac{1}{2}X}{\cos\frac{1}{2}Y+\sqrt{3}\cos\frac{1}{2}X}$$

und $ma=\cot\varepsilon$, wenn $\cos\varepsilon=\dfrac{2\cos\frac{1}{2}Y+\sqrt{3}\cos\frac{1}{2}X}{\sin\frac{1}{2}X}$

oder $\cos\varepsilon=\dfrac{n\sqrt{3}}{2-n}\cot\frac{1}{2}X$

§. 331.

Fortsetzung.

Wenn die Pyramide von der Form $mP\dfrac{m}{m-1}$ ist, so ist es am vortheilhaftesten, entweder Y, oder Z, oder auch U zu kennen; man findet dann, weil

$$a\cos\tfrac{1}{2}Z=\cos\tfrac{1}{2}Y$$

1) aus Y.... $\cos\delta'=\dfrac{1}{a}\cot\frac{1}{2}Y$, u. $2m-1=\dfrac{\sqrt{3}}{a}\tang\delta'$

2) aus Z.... $\cos\delta=a\cot\frac{1}{2}Z$, u. $2m-1=\sqrt{3}\tang\delta$

3) aus U.... $2m-1=\dfrac{\sqrt{3}}{a}\sqrt{a^2+1}\tang\frac{1}{2}U$

oder, kennt man den Winkel U' in der Pyramide 2P2, so ist, weil $\tang\frac{1}{2}U'=\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+1}}$ (§. 329)

$$2m-1=3\tang\tfrac{1}{2}U\cot\tfrac{1}{2}U'$$

Für die hexagonale Pyramide mP folgt:

aus X.... $ma=\cot\varepsilon$, wenn $\cos\varepsilon=\sqrt{3}\cot\frac{1}{2}X$

aus Z.... $ma=\sqrt{\tfrac{3}{4}}\tang\frac{1}{2}Z$

und für die hexagonale Pyramide $mP2$:

aus Y.... $ma=\cot\varepsilon$, wenn $\cos\varepsilon=2\cos\frac{1}{2}Y$

aus Z.... $ma=\tang\frac{1}{2}Z$

Endlich folgt für das dihexagonale Prisma ∞Pn:

$$\text{aus } X \ldots\ldots \frac{n}{2-n} = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\, tang\, \tfrac{1}{2}X$$

$$\text{aus } Y \ldots\ldots \frac{n+1}{n-1} = \sqrt{3}\, tang\, \tfrac{1}{2}Y$$

B. Berechnung der hemiëdrischen Gestalten.

a) Berechnung der hexagonalen Skalenoëder.

§. 332.

Vorbereitung.

Wir bezeichnen in jedem hexagonalen Skalenoëder $\pm\frac{mPn}{2}$ (Fig. 375):

die kürzeren Polkanten mit X,
die längeren Polkanten mit Y,
die Mittelkanten mit Z;

ferner eine der, in dem ersten Sextanten (der $+y$ und $+z$) gelegenen Flächen mit F, und diejenigen drei Flächen, welche mit ihr die Kanten X, Y und Z bilden, mit F', F'' und F'''; endlich die ebenen Winkel der Flächen, analog den ihnen gegenüberliegenden Kanten, mit ξ, v und ζ.

Ist nun die Gleichung

$$\text{für } F \ldots\ldots \frac{x}{ma} + \frac{y}{n} + z = 1$$

so werden die calculativen Gleichungen der drei andern Flächen folgende:

$$\text{für } F' \ldots\ldots \frac{x}{ma} - \frac{y}{n} + \frac{(n-1)z}{n} = 1$$

$$\text{für } F'' \ldots\ldots \frac{x}{ma} + y + \frac{z}{n} = 1$$

$$\text{für } F''' \ldots\ldots -\frac{x}{ma} + \frac{(n-1)y}{n} + z = 1$$

und die Gleichung der am Mitteleckpuncte gelegenen Nachbarfläche von F

$$-\frac{x}{ma} + y + \frac{(n-1)z}{n} = 1$$

Aus der successiven Combination der Gleichung von F mit den Gleichungen von F', F'' und F''' erhält man die Gleichungen der drei Kantenlinien von F, wie folgt:

$$\text{für } X \ldots \left\{\begin{array}{l} \frac{x}{ma} - \frac{(2n-1)y}{n} = 1 \\ y + \frac{z}{2} = 0 \end{array}\right.$$

$$\text{für } Y \ldots \left\{\begin{array}{l} \frac{x}{ma} + \frac{(n+1)y}{n} = 1 \\ y - z = 0 \end{array}\right.$$

$$\text{für } Z \ldots \left\{\begin{array}{l} \frac{x}{ma(2-n)} + \frac{y}{2n} = 0 \\ \frac{y}{2} + z = 1 \end{array}\right.$$

Die Polkanten fallen also in die diagonalen Hauptschnitte, und die Mittelkanten in Parallelebenen derselben Hauptschnitte (vergl. §. 302).

Endlich erhält man durch successive Combination der Gleichungen von Z mit den Gleichungen von X und Y die Coordinaten der beiden Mitteleckpuncte der Fläche F, nämlich:

für den Mitteleckpunct an X:

$$x = \frac{ma(2-n)}{3n},\ y = -\tfrac{2}{3},\ z = \tfrac{4}{3}$$

für den Mitteleckpunct an Y:

$$x = -\frac{ma(2-n)}{3n},\ y = \tfrac{2}{3},\ z = \tfrac{2}{3}$$

für den Poleckpunct ist aber:

$$x = ma,\quad y = 0,\quad z = 0$$

Die Axendistanz der Mitteleckpuncte ist daher in allen hexagonalen Skalenoëdern constant $= \sqrt{\tfrac{4}{3}}$.

§. 333.

Zwischenaxe, Flächennormale, Kantenlinien.

Der vorhergehende §. enthält die Elemente zur vollständigen Berechnung der hexagonalen Skalenoëder. Da die Zwischenaxen und Flächennormale ihren ursprünglichen Werth behalten, so wird die Berechnung der Kantenlinien das erste aufzulösende Problem. Es sind die drei Eckpuncte, welche diese Kantenlinien in der Fläche F begränzen:

(1) der Poleckpunct,
(2) der Mitteleckpunct an X,
(3) der Mitteleckpunct an Y;

und zwar wird begränzt:

die Polkante X, von den Puncten (1) und (2)
die Polkante Y, - - - - (1) und (3)
die Mittelkante Z, - - - - (2) und (3)

Da nun aus dem vorigen §. die Coordinaten dieser Puncte bekannt sind, so findet sich nach der Formel für R in §. 318;

$$X = \frac{2\sqrt{m^2a^2(2n-1)^2+3n^2}}{3n} = \frac{2P}{3n}$$

$$Y = \frac{2\sqrt{m^2a^2(n+1)^2+3n^2}}{3n} = \frac{2Q}{3n}$$

$$Z = \frac{2\sqrt{m^2a^2(2-n)^2+3n^2}}{3n} = \frac{2R}{3n}$$

§. 334.

Volumen und Oberfläche.

Jedes Skalenoëder $\pm\frac{mPn}{2}$ wird durch die normalen und diagonalen Hauptschnitte in 12 unregelmässige Tetraëder oder einfache dreiseitige Pyramiden getheilt. Betrachtet man für jede dieser Elementarpyramiden als die in den normalen Hauptschnitt fallende Fläche als Grundfläche, so bildet das Product aus einer der Coordinaten y oder z des Mitteleckpunctes in $\sin 60°$ die Höhe derselben. Die so bestimmte Grundfläche ist aber ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie $= 2ma$, dessen Höhe $= 1$, und dessen Inhalt folglich $= ma$.

Nun ist die entsprechende Coordinate des Mitteleckpunctes: $y = \frac{2}{3}$, also $y \sin 60° = \sqrt{\frac{1}{3}}$, die Höhe der Elementarpyramide; folglich ihr Volumen:

$$v = \frac{ma}{3\sqrt{3}}$$

und das Volumen des ganzen Skalenoëders:

$$V = 12v = 4ma\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

woraus sich ergiebt, dass das Volumen der hexagonalen Skalenoëder gleichfalls eine von der Ableitungszahl n gänzlich unabhängige Grösse ist (vergl. §. 236).

Weil das Volumen V auch ein Product aus der Oberfläche S in den dritten Theil der Flächennormale, so wird

$$S = \frac{3V}{N}$$

oder, nach Substitution der Werthe von V und N,

$$S = \frac{4\sqrt{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2}}{n} = \frac{4M}{n}$$

und der Flächeninhalt einer Fläche des Skalenoëders:

$$F = \tfrac{1}{12}S = \frac{M}{3n}$$

§. 335.

Flächenwinkel.

Da der Sinus jedes Dreieckwinkels gleich dem doppelten Flächeninhalte, dividirt durch das Product der ihn einschliessenden Seiten, so wird:

$$\sin\xi = \frac{2F}{YZ},\ \sin v = \frac{2F}{XZ},\ \sin\zeta = \frac{2F}{XY}$$

Substituirt man für F, X, Y und Z ihre bekannten Werthe aus §. 334 und §. 333, so folgt:

$$\sin\xi = \frac{3nM}{2QR}$$

$$\sin v = \frac{3nM}{2PR}$$

$$\sin \zeta = \frac{3nM}{2PQ}$$

Sucht man hierauf mittels der Gleichungen der Kantenlinien der Fläche F nach §. 318 die Cosinus derselben Winkel ξ, v und ζ, so gelangt man endlich durch Combination beider Functionen auf die Tangenten, als die im Gebrauche bequemsten Ausdrücke:

$$\tang \xi = \frac{3nM}{2m^2a^2(n+1)(2-n)+3n^2}$$

$$\tang v = -\frac{3nM}{2m^2a^2(2n-1)(2-n)-3n^2}$$

$$\tang \zeta = \frac{3nM}{2m^2a^2(n+1)(2n-1)+3n^2}$$

Bezeichnen wir den Neigungswinkel
der längeren Polkante zur Axe mit α
- kürzeren - - - - - β
beider Polkanten eines Hauptschnittes - ψ

so wird:

$$\cot \alpha = \frac{ma(n+1)}{n\sqrt{3}}$$

$$\cot \beta = \frac{ma(2n-1)}{n\sqrt{3}}$$

und daher für ψ, oder den ebenen Winkel des diagonalen Hauptschnittes:

$$\tang \psi = \frac{3man^2\sqrt{3}}{m^2a^2(2n-1)(n+1)-3n^2}$$

§. 336.

Kantenwinkel.

Setzt man in dem Ausdrucke für $\cos W$ des §. 318 statt m, n und r die Parameter der Gleichung von F, und statt m', n' und r' successiv die Parameter der Gleichungen von F', F'' und F''', so erhält man vermöge der Bedeutung dieser Flächen zu einander die Cosinus der Kantenwinkel X, Y und Z, wie folgt:

$$\cos X = -\frac{2m^2a^2(2n^2-2n-1)+3n^2}{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2}$$

$$\cos Y = -\frac{2m^2a^2(4n-n^2-1)+3n^2}{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2} = \cos Y \text{ in §. 325}$$

$$\cos Z = -\frac{2m^2a^2(n^2+2n-2)-3n^2}{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2}$$

Die Cosinus der halben Kantenwinkel finden sich entweder nach der bekannten goniometrischen Formel, oder durch successive Combination der Gleichung von F mit den Gleichungen der diagonalen Hauptschnitte in den Sextanten (yz) und (zu) und des Schnittes durch die Mittelkante, wie folgt:

$$\cos \tfrac{1}{2}X = \frac{ma\sqrt{3}}{M}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}Y = \frac{ma(n-1)\sqrt{3}}{M}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}Z = \frac{\sqrt{m^2a^2(2-n)^2+3n^2}}{M} = \frac{R}{M}$$

Wegen des einfacheren Ausdruckes und der darauf zu gründenden Vergleichungen ist jedoch der Sinus von $\frac{1}{2}Z$ noch wichtiger als der Cosinus, nämlich:

$$\sin \tfrac{1}{2}Z = \frac{man\sqrt{3}}{M}$$

Hieraus folgen die Proportionen:

$$\cos \tfrac{1}{2}X : \cos \tfrac{1}{2}Y = 1 : n-1$$

$$\cos \tfrac{1}{2}X : \sin \tfrac{1}{2}Z = 1 : n$$

$$\cos \tfrac{1}{2}Y : \sin \tfrac{1}{2}Z = n-1 : n$$

und die Gleichung:

$$\sin \tfrac{1}{2}Z = \cos \tfrac{1}{2}X + \cos \tfrac{1}{2}Y$$

$$= 2\cos \tfrac{1}{4}(Y+X) \cos \tfrac{1}{4}(Y-X)$$

In jedem Skalenoëder ist also der Sinus der halben Mittelkante gleich der Summe der Cosinus der beiden halben Polkanten.

Endlich findet sich:

$$tang\,\tfrac{1}{2}X = \frac{\sqrt{m^2a^2(2n-1)^2+3n^2}}{ma\sqrt{3}} = \frac{P}{ma\sqrt{3}}$$

$$tang\,\tfrac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{m^2a^2(n+1)^2+3n^2}}{ma(n-1)\sqrt{3}} = \frac{Q}{ma(n-1)\sqrt{3}}$$

$$tang\,\tfrac{1}{2}Z = \frac{man\sqrt{3}}{\sqrt{m^2a^2(2-n)^2+3n^2}} = tang\,\tfrac{1}{2}T \text{ in §. 325}$$

es ist nämlich der Winkel Z in den Skalenoëdern identisch mit dem Winkel T in den dihexagonalen Pyramiden.

Anmerkung. Aus den halben Kantenwinkeln bestimmt sich:

$$n = \frac{cos\,\tfrac{1}{2}Y + cos\,\tfrac{1}{2}X}{cos\,\tfrac{1}{2}X}$$

$$n = \frac{sin\,\tfrac{1}{2}Z}{cos\,\tfrac{1}{2}X}$$

$$n = \frac{sin\,\tfrac{1}{2}Z}{sin\,\tfrac{1}{2}Z - cos\,\tfrac{1}{2}Y}$$

Ueber die Berechnung der Ableitungszahlen wird weiter unten das Nöthigste beigebracht werden.

§. 337.

Berechnung der Gränzgestalt $\frac{\infty Pn}{2}$.

Setzt man in den Ausdrücken der vorhergehenden §§. $m = \infty$, so erhält man die zur Berechnung des dihexagolen Prisma's in seiner skalenoëdrischen Hemiëdrie dienlichen Formeln. Da r und N ihre aus §. 327 bekannten Werthe beibehalten, so können uns nur die Kantenwinkel interessiren; für sie findet man:

$$cos\,X = -\frac{2n^2-2n-1}{2(n^2-n+1)}$$

$$cos\,Y = -\frac{4n-n^2-1}{2(n^2-n+1)} = cos\,Y \text{ in §. 327}$$

$$cos\,Z = -\frac{n^2+2n-2}{2(n^2-n+1)} = cos\,X \text{ ebendas.}$$

Hieraus folgt, dass die Mittelkante Z in den Skalenoëdern von unendlich grosser Axe mit der normalen Seitenkante der dihexagonalen Prismen ∞Pn identisch wird. Diejenige Kante X aber, auf welche sich der vorstehende Werth von $\cos X$ bezieht, ist bei der gewöhnlichen Erscheinungsweise der hemiëdrisch-dihexagonalen Prismen $\frac{\infty Pn}{2}$ nicht wahrzunehmen, weil selbige dann mit allen 12 Flächen auftreten. Wenn jedoch Hemimorphismus Statt findet, dann bildet sich auch diese Kante in der Wirklichkeit aus, indem sie keine andere als die scharfe Seitenkante der beiden ditrigonalen Prismen ist, in welche ∞Pn durch den Hemimorphismus wirklich zerlegt wird. Die Resultate des Calcüls stimmen also vollkommen mit jenen der Ableitung überein (vergl. §. 298).

§. 338.

Berechnung der Rhomboëder $\pm\frac{mP}{2}$ oder $\pm mR$.

Setzt man in den für die Skalenoëder berechneten Formeln $n = 1$, so erhält man die Ausdrücke für die Rhomboëder $\pm\frac{mP}{2}$ oder $\pm mR$, wie folgt:

I. Coëfficient der Zwischenaxe:

$$r = 1$$

II. Flächennormale:

$$N = \frac{ma\sqrt{3}}{\sqrt{4m^2a^2+3}}$$

III. Kantenlinien:

$$X = \tfrac{2}{3}\sqrt{m^2a^2+3}$$
$$Y = \tfrac{2}{3}\sqrt{4m^2a^2+3}$$
$$Z = X$$

Die Linie Y tritt jedoch nicht mehr als Kantenlinie hervor, sondern ist nur die geneigte Diagonale der Rhomboëderflächen; das Perpendikel vom Mitteleck auf diese geneigte Diagonale, oder die halbe horizontale Diagonale, ist in allen Rhomboëdern constant $= 1$, und daher das Verhältniss beider Diagonalen $= 3 : \sqrt{4m^2a^2+3}$.

IV. Volumen:

$$V = 4ma\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

V. Oberfläche:

$$S = 4\sqrt{4m^2a^2+3}$$

VI. Flächenwinkel:

$$tang\,\xi = \frac{3}{\sqrt{4m^2a^2+3}} = tang\,\zeta$$

$$\text{daher } cos\,2\zeta = \frac{2m^2a^2-3}{2(m^2a^2+3)} = -\,cos\,2\xi$$

ξ und ζ sind nämlich die halben, und daher 2ξ und 2ζ die ganzen Flächenwinkel an der geneigten Diagonale.

Ferner wird:

$$cot\,\alpha = 2ma\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$
$$cot\,\beta = ma\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

Der Winkel α ist aber der Neigungswinkel der geneigten Diagonale gegen die Axe; in jedem Rhomboëder ist daher die Tangente des Neigungswinkels der Flächen zur Axe halb so gross als die Tangente des Neigungswinkels der Polkanten zur Axe.

Endlich findet sich der ebene Winkel des diagonalen Hauptschnittes

$$tang\,\psi = \frac{3ma\sqrt{3}}{2m^2a^2-3}$$

und, als Function von X

$$cos\,\zeta = \frac{1}{2\,sin\,\frac{1}{2}X}$$

VII. Kantenwinkel:

$$cos\,X = \frac{2m^2a^2-3}{4m^2a^2+3}$$
$$cos\,Y = -\,1,\ \text{also}\ Y = 180°$$
$$cos\,Z = -\,cos\,X$$

$$tang\tfrac{1}{2}Z = \frac{ma\sqrt{3}}{\sqrt{m^2a^2+3}} = cot\tfrac{1}{2}X$$

Für $m^2a^2 = \frac{3}{2}$ wird $X = 90°$, und das Rhomboëder verwandelt sich in das Hexaëder; daher scheint der Werth $m^2a^2 = \frac{3}{2}$ in der Natur nicht vorkommen zu können.

§. 339.

Berechnung der Gränzgestalt $\frac{mP2}{2}$.

Setzt man dagegen in den für die Skalenoëder berechneten Formeln $n = 2$, so erhält man dieselben Ausdrücke, welche oben für die hexagonalen Pyramiden $mP2$ gefunden wurden. Die Resultate der Ableitung finden daher in denen der Berechnung ihre vollkommene Bestätigung, und der zwischen den Skalenoëdern und hexagonalen Pyramiden der Nebenreihe obwaltende Zusammenhang folgt aus den Berechnungsformeln der Skalenoëder mit derselben Evidenz wie aus ihrer Ableitungsconstruction. Wie aber in der Ableitung, so geht er auch in der Berechnung verloren, sobald man die Resultate der letzteren als Functionen der secundären Ableitungscoëfficienten ausdrückt.

§. 340.

Berechnung der hexagonalen Skalenoëder für das Zeichen mR^n.

Wir sahen oben in §. 304, dass dem secundären Zeichen $m'R^{n'}$ das primitive Zeichen

$$\frac{m'n'P\frac{2n'}{n'+1}}{2} = \frac{mPn}{2}$$

entspricht. Wollen wir also die in den vorhergehenden §§. enthaltenen Resultate der Berechnung so ausdrücken, dass sie sich nicht auf das primitive Zeichen $\frac{mPn}{2}$, sondern auf das secundäre Zeichen $m'R^{n'}$ beziehen, so haben wir nur durchgängig

für m den Werth $m'n'$

für n - - - $\frac{2n'}{n'+1}$

zu substituiren, worauf sich, nach Unterdrückung der Accente, dieselben Resultate für mR^n in folgender Form darstellen:

I. Coëfficient der Zwischenaxe:

$$r = \frac{4n}{3n+1}$$

II. Flächennormale:

$$N = \frac{man\sqrt{3}}{\sqrt{m^2a^2(3n^2+1)+3}} = \frac{man\sqrt{3}}{M'}$$

III. Kantenlinien:

$$X = \tfrac{1}{3}\sqrt{m^2a^2(3n-1)^2+12} = \tfrac{1}{3}P'$$
$$Y = \tfrac{1}{3}\sqrt{m^2a^2(3n+1)^2+12} = \tfrac{1}{3}Q'$$
$$Z = \tfrac{2}{3}\sqrt{m^2a^2+3} = \tfrac{2}{3}R'$$

Das Perpendikel vom Mitteleckpunct auf die längere Polkante ist:

$$\Sigma = \frac{2M'}{Q'}$$

IV. Volumen:

$$V = 4mna\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

V. Oberfläche:

$$S = 4\sqrt{m^2a^2(3n^2+1)+3} = 4M'$$

VI. Flächenwinkel:

$$tang\,\xi = \frac{3M'}{m^2a^2(3n+1)+3}$$

$$tang\,v = -\frac{3M'}{m^2a^2(3n-1)-3}$$

$$tang\,\zeta = \frac{6M'}{m^2a^2(3n+1)(3n-1)+6}$$

Ferner wird:

$$\cot\alpha = \frac{ma(3n+1)}{2\sqrt{3}}$$

$$\cot\beta = \frac{ma(3n-1)}{2\sqrt{3}}$$

Endlich findet sich der ebene Winkel des diagonalen Hauptschnittes:

$$\tang\psi = \frac{12man\sqrt{3}}{m^2a^2(3n-1)(3n+1)-12}$$

VII. Kantenwinkel:

$$\cos X = -\frac{m^2a^2(3n^2-6n-1)+6}{2m^2a^2(3n^2+1)+6}$$

$$\cos Y = -\frac{m^2a^2(3n^2+6n-1)+6}{2m^2a^2(3n^2+1)+6}$$

$$\cos Z = -\frac{m^2a^2(3n^2-1)-3}{m^2a^2(3n^2+1)+3}$$

Für die halben Kantenwinkel folgen die Proportionen:

$$\cos\tfrac{1}{2}X : \cos\tfrac{1}{2}Y = n+1 : n-1$$

$$\cos\tfrac{1}{2}X : \sin\tfrac{1}{2}Z = n+1 : 2n$$

$$\cos\tfrac{1}{2}Y : \sin\tfrac{1}{2}Z = n-1 : 2n$$

Endlich findet sich auch:

$$\tang\tfrac{1}{2}X = \frac{P'}{ma(n+1)\sqrt{3}}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}Y = \frac{Q'}{ma(n-1)\sqrt{3}}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}Z = \frac{man\sqrt{3}}{R'}$$

§. 341.

Berechnung von ∞Rn.

Setzt man in den Formeln des vorhergehenden §. $m = \infty$, so erhält man die Ausdrücke für die dihexagonalen Prismen:

$$r = \frac{4n}{3n+1}$$

$$N = \frac{n\sqrt{3}}{\sqrt{3n^2+1}}$$

$$\Sigma = \frac{2\sqrt{3n^2+1}}{3n+1}$$

$$\cos X = -\frac{3n^2-6n-1}{2(3n^2+1)}$$

$$\cos Y = -\frac{3n^2+6n-1}{2(3n^2+1)}$$

$$\cos Z = -\frac{3n^2-1}{3n^2+1}$$

wobei zu erinnern, dass Z die normale Seitenkante ist, und X dieselbe Bedeutung hat, wie solche in §. 337 angegeben worden.

§. 342.

Kantenwinkel der wichtigsten Skalenoëder.

Da in der Natur die Skalenoëder von der Form $mR^{\frac{5}{3}}$, mR^2, $mR^{\frac{7}{3}}$, mR^3, mR^5 und mR^7 besonders häufig vorkommen, und die Kantenwinkel *in praxi* den wichtigsten Gegenstand der Berechnung bilden, so ist es gut, die zu ihrer Auffindung für jene Skalenoëder dienlichen Formeln besonders zur Hand zu haben.

Man findet für jedes

Skalenoëder	$\cos X$	$\cos Y$	$\cos Z$
$mR^{\frac{5}{3}}$	$+\dfrac{4m^2a^2-9}{28m^2a^2+9}$	$-\dfrac{26m^2a^2+9}{28m^2a^2+9}$	$-\dfrac{2\text{[illegible]}m^2a^2-9}{28m^2a^2+9}$
mR^2	$+\dfrac{m^2a^2-6}{26m^2a^2+6}$	$-\dfrac{23m^2a^2+6}{26m^2a^2+6}$	$-\dfrac{11m^2a^2-3}{13m^2a^2+3}$
$mR^{\frac{7}{3}}$	$-\dfrac{2m^2a^2+9}{52m^2a^2+9}$	$-\dfrac{44m^2a^2+9}{52m^2a^2+9}$	$-\dfrac{46m^2a^2-9}{52m^2a^2+9}$
mR^3	$-\dfrac{4m^2a^2+3}{28m^2a^2+3}$	$-\dfrac{22m^2a^2+3}{28m^2a^2+3}$	$-\dfrac{26m^2a^2-3}{28m^2a^2+3}$
mR^5	$-\dfrac{22m^2a^2+3}{76m^2a^2+3}$	$-\dfrac{52m^2a^2+3}{76m^2a^2+3}$	$-\dfrac{74m^2a^2-3}{76m^2a^2+3}$
mR^7	$-\dfrac{52m^2a^2+3}{148m^2a^2+3}$	$-\dfrac{94m^2a^2+3}{148m^2a^2+3}$	$-\dfrac{146m^2a^2-3}{148m^2a^2+3}$

Ferner gelten für die halben Kantenwinkel die Proportionen:

in $mR^{\frac{5}{3}}$; $\cos\frac{1}{2}X : \cos\frac{1}{2}Y : \sin\frac{1}{2}Z = 4 : 1 : 5$
- mR^2; - - - - - - - - - - - - $= 3 : 1 : 4$
- $mR^{\frac{7}{3}}$; - - - - - - - - - - - - $= 5 : 2 : 7$
- mR^3; - - - - - - - - - - - - $= 2 : 1 : 3$
- mR^5; - - - - - - - - - - - - $= 3 : 2 : 5$
- mR^7; - - - - - - - - - - - - $= 4 : 3 : 7$

§. 343.

Berechnung der Ableitungscoëfficienten aus den Winkeln von mR^n.

Mittels der beiden Cotangenten:

$$\cot\alpha = \frac{ma(3n+1)}{2\sqrt{3}} \quad (\text{§. } 340)$$

$$\cot\beta = \frac{ma(3n-1)}{2\sqrt{3}}$$

und der Relationen, welche zwischen $\cos\frac{1}{2}X$, $\cos\frac{1}{2}Y$ und $\sin\frac{1}{2}Z$ Statt finden, ist man im Stande, die Ableitungszahlen m und n eines Skalenoëders mR^n aus je zweien seiner Kantenwinkel zu bestimmen.

1) X und Y sind gegeben; man findet n aus

$$\frac{n+1}{n-1} = \frac{\cos\frac{1}{2}X}{\cos\frac{1}{2}Y}$$

dann für den Hülfswinkel α:

$$\cos\alpha = \frac{3n+1}{(n-1)\sqrt{3}}\cot\tfrac{1}{2}Y$$

und endlich:

$$m = \frac{2\sqrt{3}\cot\alpha}{a(3n+1)}$$

oder auch, für den Hülfswinkel β:

$$\cos\beta = \frac{3n-1}{(n+1)\sqrt{3}}\cot\tfrac{1}{2}X$$

und endlich:

$$m = \frac{2\sqrt{3}\cot\beta}{a(3n-1)}$$

2) X und Z sind gegeben; dann wird:

$$\frac{2n}{n+1} = \frac{\sin\frac{1}{2}Z}{\cos\frac{1}{2}X}$$

woraus sich n bestimmt; hierauf erhält man:

$$\cos\beta' = \frac{\tang\frac{1}{2}Z}{n\sqrt{3}} = \frac{1}{n\sqrt{3}\cot\frac{1}{2}Z}$$

wo β' der Neigungswinkel der Polkante des eingeschriebenen Rhomboëders mR zur Axe; und endlich:

$$m = \frac{\cot\beta'\sqrt{3}}{a}$$

3) Y und Z sind gegeben; dann bestimmt sich n aus:

$$\frac{2n}{n-1} = \frac{\sin\frac{1}{2}Z}{\cos\frac{1}{2}Y}$$

Mittels n bestimmt man $\cos\beta'$, wie vorher, und daraus wiederum

$$m = \frac{\cot\beta'\sqrt{3}}{a}$$

§. 344.

Fortsetzung.

Kennt man einen der Ableitungscoëfficienten, so ist jedenfalls ein Winkel zur Bestimmung des Skalenoëders mR^n hinreichend.

A. Ist m, und folglich auch das eingeschriebene Rhomboëder mR bekannt, so findet man:

1) aus X .... $n = tang(\varphi - \frac{1}{2}Z')\cot\frac{1}{2}Z'$
wenn $\sin\varphi = 2\cos\frac{1}{2}X\cos\frac{1}{2}Z'$

2) aus Y .... $n = tang(\varphi + \frac{1}{2}Z')\cot\frac{1}{2}Z'$
wenn $\sin\varphi = 2\cos\frac{1}{2}Y\cos\frac{1}{2}Z'$

3) aus Z .... $n = tang\frac{1}{2}Z\cot\frac{1}{2}Z'$

indem Z' in allen diesen drei Fällen die Mittelkante des eingeschriebenen Rhomboëders mR bedeutet.

B. Ist n bekannt, so findet man:

1) aus X.... $\cos\beta = \frac{3n-1}{(n+1)\sqrt{3}}\cot\frac{1}{2}X$

und $m = \frac{2\sqrt{3}\cot\beta}{a(3n-1)}$

2) aus Y.... $\cos\alpha = \frac{3n+1}{(n-1)\sqrt{3}}\cot\frac{1}{2}Y$

und $m = \frac{2\sqrt{3}\cot\alpha}{a(3n+1)}$

3) aus Z.... $\cos\beta' = \frac{1}{n\sqrt{3}\cot\frac{1}{2}Z}$

und $m = \frac{\cot\beta'\sqrt{3}}{a}$

Unter diesen Fall gehören auch sämmtliche Rhomboëder, indem für sie $n = 1$ ist; daher wird allgemein für mR:

$$\cos\beta = \cot\tfrac{1}{2}X\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \frac{1}{tang\frac{1}{2}X\sqrt{3}}$$

und $m = \frac{\cot\beta\sqrt{3}}{a}$

Oder hat man auf irgend eine Art den Winkel α beobachtet, so wird

$$m = \frac{\cot \alpha \sqrt{3}}{2a}$$

§. 345

Polkanten von mR^n als Functionen der Polkanten ihrer Rhomboëder.

Wie die Tangente der halben Mittelkante Z in jedem Skalenoëder mR^n ein rationales Multiplum der Tangente der halben Mittelkante Z' des eingeschriebenen Rhomboëders mR, so sind auch die Tangenten seiner halben Polkanten X und Y rationale, nur von n abhängige Multipla der Tangenten der halben Polkanten X' und X'' in den beiden zugehörigen Rhomboëdern; und es lässt sich daher der Werth von n wie aus den Winkeln Z und Z', so auch aus den Winkeln X und X', oder Y und X'' auf eine sehr einfache Art bestimmen.

Wir wissen, dass in jedem Skalenoëder mR^n:

$$\tang \tfrac{1}{2}X = \frac{\sqrt{m^2a^2(3n-1)^2+12}}{ma(n+1)\sqrt{3}}$$

$$\tang\ Y = \frac{\sqrt{m^2a^2(3n+1)^2+12}}{ma(n-1)\sqrt{3}}$$

und dass in jedem Rhomboëder $m'R$:

$$\tang \tfrac{1}{2}X' = \frac{\sqrt{m'^2a^2+3}}{m'a\sqrt{3}}$$

Nun ist nach §. 307 für mR^n:

das Rhomboëder der kürzeren Polk. $= \tfrac{1}{2}m(3n-1)^R$

- - - - - längeren - - $= \tfrac{1}{2}m(3n+1)^R$

Setzt man in die Formel für $\tang \tfrac{1}{2}X'$ statt m' erst $\tfrac{1}{2}m(3n-1)$ und dann $\tfrac{1}{2}m(3n+1)$, so folgt:

$$\text{für } \tfrac{1}{2}m(3n-1)R \ldots \tang \tfrac{1}{2}X' = \frac{n+1}{3n-1} \tang \tfrac{1}{2}X$$

$$\text{für } \tfrac{1}{2}m(3n+1)R \ldots \tang \tfrac{1}{2}X'' = \frac{n-1}{3n+1} \tang \tfrac{1}{2}Y$$

Kennt man also bereits einen der Winkel X' oder X'', wie diess sehr oft der Fall ist, und hat man in mR^n den Winkel X oder Y gemessen, so führt diese einzige Messung auf die Bestimmung von n; denn es wird:

$$\frac{3n-1}{n+1} = tang\,\tfrac{1}{2}X\,cot\,\tfrac{1}{2}X'$$

$$\frac{3n+1}{n-1} = tang\,\tfrac{1}{2}Y\,cot\,\tfrac{1}{2}X''$$

§. 346.

Metastatische Skalenoëder.

Wenn wir aus irgend einem stumpfen Rhomboëder mR die Reihe der Skalenoëder:

$$mR \ldots\ldots\ldots mR^n \ldots\ldots\ldots mR^\infty$$

ableiten, indem wir der Ableitungszahl n successiv immer grössere und grössere Werthe ertheilen, ohne die irrationalen Werthe auszuschliessen, so werden die kürzeren Polkanten der successiv abgeleiteten Skalenoëder, von den Polkanten des Rhomboëders mR ausgehend, anfangs immer schärfer und schärfer werden, für einen singulären Werth von n ein Minimum erreichen, und darauf wieder stumpfer werden; bis sie endlich für $n = \infty$ den, der Gränzgestalt $mR^\infty = \infty P2$ zukommenden, Winkel von 120° erreichen.

Da sich nun je zwei in einer oberen (oder unteren) Polkante X zusammenstossende Flächen von mR^n auf zwei Mittelkanten des eingeschriebenen Rhomboëders stützen, durch welche zugleich eine untere (oder obere) Fläche desselben Rhomboëders geht, so schneiden sie diese letztere Fläche immer in denselben zwei Linien; und da sie beide für jeden Werth von n gleiche Neigung gegen die Rhomboëderfläche haben, so folgt aus bekannten Sätzen, dass ihr gegenseitiger Neigungswinkel X ein Minimum wird, sobald sie selbst und folglich auch ihre Durchschnittslinie auf der bezeichneten Rhomboëderfläche rechtwinklig sind. Dann wird aber der ebene Winkel der Rhomboëderfläche das Maass dieses Winkels X; folglich ist das gesuchte Minimum des Polkantenwinkels X von mR^n gleich dem Polflächenwinkel des eingeschriebenen Rhomboëders.

Weil aber die Polkante X, nachdem sie ihr Minimum erreichte, wieder bis zu 120° zunimmt, so muss sie offenbar für irgend einen zweiten singulären Werth von n der Polkante des eingeschriebenen Rhomboëders gleich werden.

Hieraus ergiebt sich, dass es in jeder, aus einem stumpfen Rhomboëder abgeleiteten Reihe von Skalenoëdern zwei, durch den Winkelwerth ihrer kürzeren Polkante eminente Skalenoëder giebt, indem dieser Winkel einerseits dem Polflächenwinkel, andererseits dem Polkantenwinkel des eingeschriebenen Rhomboëders gleich ist. Es findet also gleichsam eine Uebertragung oder Abtretung (*Metastasis*) der Winkel des Rhomboëders auf die Skalenoëder Statt, weshalb auch diese letzteren als metastatische Skalenoëder bezeichnet worden sind. Wir unterscheiden sie als:

1) M. S. der ersten Art; der Polkantenwinkel X ist dem Polflächenwinkel des eingeschriebenen Rhomboëders gleich.
2) M. S. der zweiten Art; der Polkantenwinkel X ist dem Polkantenwinkel des eingeschriebenen Rhomboëders gleich.

§. 347.

Fortsetzung.

Aus der Gleichheit der Polkantenwinkel X mit dem Polflächenwinkel des eingeschriebenen Rhomboëders mR ergeben sich für die metastatischen Skalenoëder der ersten Art noch folgende Eigenschaften:

Kennt man also bereits einen der Winkel X' oder X'', wie dieses sehr oft der Fall ist, und hat man in mR^n den Winkel X oder Y gemessen, so führt diese einzige Messung auf die Bestimmung von n; denn es wird:

$$\frac{3n-1}{n+1} = tang\,\tfrac{1}{2}X\,cot\,\tfrac{1}{2}X'$$

$$\frac{3n+1}{n-1} = tang\,\tfrac{1}{2}Y\,cot\,\tfrac{1}{2}X''$$

§. 346.

Metastatische Skalenoëder.

Wenn wir aus irgend einem stumpfen Rhomboëder mR, dessen Polkante jedoch $< 120°$ ist, die Reihe der Skalenoëder:

$$mR.........mR^n.........mR\infty$$

ableiten, indem wir der Ableitungszahl n successiv immer grössere und grössere Werthe ertheilen, so werden die kürzeren Polkanten der successiv abgeleiteten Skalenoëder, von den Polkanten des Rhomboëders mR ausgehend, anfangs immer schärfer und schärfer werden, für einen singulären Werth von n ein Minimum erreichen, und darauf wieder stumpfer werden; bis sie endlich für $n = \infty$ den, der Gränzgestalt $mR\infty = \infty P2$ zukommenden, Winkel von 120° erreichen.

Da sich nun je zwei, in einer oberen (oder unteren) Polkante X zusammenstossende Flächen von mR^n auf zwei Mittelkanten des eingeschriebenen Rhomboëders stützen, durch welche zugleich eine untere (oder obere) Fläche desselben Rhomboëders geht, so schneiden sie diese letztere Fläche immer in denselben zwei Linien; und da sie beide für jeden Werth von n gleiche Neigung gegen die Rhomboëderfläche haben, so folgt aus bekannten Sätzen, dass ihr gegenseitiger Neigungswinkel X ein Minimum wird, sobald sie selbst und folglich auch ihre Durchschnittslinie auf der bezeichneten Rhomboëderfläche rechtwinklig sind. Folglich ist das gesuchte Minimum des Polkantenwinkels X von mR^n gleich dem Polflächenwinkel des eingeschriebenen Rhomboëders.

Weil aber die Polkante X, nachdem sie ihr Minimum erreichte, wieder bis zu 120° zunimmt, so muss sie offenbar für irgend einen zweiten singulären Werth von n der Polkante des eingeschriebenen Rhomboëders gleich werden.

Hieraus ergiebt sich, dass es in jeder Reiho von Skalenoëdern, welche sich aus einem stumpfen Rhomboëder, dessen Polk. < 120°, ableiten lässt, zwei, durch den Winkelwerth ihrer kürzeren Polkante eminente Skalenoëder giebt, indem dieser Winkel einerseits dem Polflächenwinkel, anderseits dem Polkantenwinkel des eingeschriebenen Rhomboëders gleich ist. Es findet also gleichsam eine Uebertragung oder Abtretung (*Metastasis*) der Winkel des Rhomboëders auf die Skalenoëder Statt, weshalb auch diese letzteren als metastatische Skalenoëder bezeichnet worden sind. Wir unterscheiden sie als:

1) M. S. der ersten Art; der Polkantenwinkel X ist dem Polflächenwinkel des eingeschriebenen Rhomboëders gleich.
2) M. S. der zweiten Art; der Polkantenwinkel X ist dem Polkantenwinkel des eingeschriebenen Rhomboëders gleich.

M. S. der ersten Art giebt es übrigens für jedes stumpfe Rhomboëder, seine Polk. mag > oder < 120° seyn.

§. 347.

Fortsetzung.

Aus der Gleichheit der Polkantenwinkel X mit dem Polflächenwinkel des eingeschriebenen Rhomboëders mR ergeben sich für die metastatischen Skalenoëder der ersten Art noch folgende Eigenschaften:

1) dass ihre Polkantenlinien X einzeln auf den einzelen Flächen von mR rechtwinklig sind;
2) dass ihre Mittelkantenwinkel die Supplemente der Mittelkantenwinkel von mR sind;
3) dass der ebene Winkel v ihrer Flächen ein rechter ist.

Diese letztere Eigenschaft lässt am leichtesten auf den Bedingungswerth von n gelangen; wir fanden allgemein:

$$tang\, v = -\frac{3M'}{m^2a^2(3n-1)-3}$$

Ist nun $v = 90°$, so wird

$$m^2a^2(3n-1) - 3 = 0$$

$$\text{und} \quad n = \frac{m^2a^2+3}{3m^2a^2}$$

Aus diesem Werthe von n ergeben sich nachstehende Folgerungen:

1) Da n jederzeit rational gefordert wird, so muss auch a^2 rational seyn; eine Bedingung, die jederzeit erfüllt ist, sobald a rational, oder auch eine Quadratwurzel.
2) Da n jederzeit > 1 gefordert wird, so muss $m^2a^2 < \frac{3}{2}$, und folglich das Rhomboëder mR ein stumpfes Rhomboëder seyn (§. 287 und 338).
3) Da n, den bisherigen Erfahrungen zufolge, von sehr einfachem numerischen Ausdrucke zu seyn pflegt, so muss auch m^2a^2 einen dergleichen Ausdruck haben. Setzen wir z. B. mit Haüy

für Kalkspath: $a^2 = \frac{3}{4}$
für Silberblende: $a^2 = \frac{3}{5}$

so finden sich die, aus den beiderseitigen Grundgestalten R abzuleitenden metastatischen Skalenoëder der ersten Art:

für Kalkspath .... $R^{\frac{5}{3}}$
für Silberblende .... R^2

28*

Weil aber neuere Beobachtungen gezeigt haben, dass für Kalkspath $a^2 = 0{,}73$, für Silberblende $a^2 = 0{,}64$ anzunehmen ist, so werden die Werthe von n für beide Species so complicirt, dass man das wirkliche Vorkommen ihrer metastatischen Skalenoëder R^n mit Recht bezweifeln muss.

Anmerkung. Dass, und für welchen Bedingungswerth von n es ein Minimum der Polkante geben muss, lässt sich auch aus dem Ausdruck für $\cos X$ finden, den ich der Kürze wegen mit φn bezeichnen will. Differentiirt man die Gleichung

$$\cos X = \varphi n$$

so wird

$$d.\cos X = dn\,\varphi' n$$

und setzt man $\varphi' n = 0$, so ergiebt sich der entsprechende Werth von $n = \frac{m^2a^2+3}{3m^2a^2}$, welchem, weil der zweite Differentialquotient positiv, ein Minimum entspricht.

§. 348.

Fortsetzung.

Aus der Gleichheit der Polkantenwinkel X mit dem Polkantenwinkel des eingeschriebenen Rhomboëders mR ergiebt sich für die metastatischen Skalenoëder der zweiten Art:

dass der stumpfe Winkel v ihrer Flächen dem Polflächenwinkel des eingeschriebenen Rhomboëders gleich sey.

Setzt man $\tang \frac{1}{2}X$ in mR^n gleich $\tang \frac{1}{2}X$ in mR, so folgt:

$$8m^2a^2(n-1)n = 3(n+3)(n-1)$$

und daher

$$n = \frac{9}{8m^2a^2-3}$$

Aus diesem Werthe von n ergeben sich die nachstehenden Folgerungen:

1) Da n rational seyn muss, wenn das Skalenoëder Realität haben soll, so wird auch für a^2 ein rationaler Werth gefordert.

2) Da n jedenfalls > 1 gefordert wird, so muss auch $m^2a^2 < \frac{3}{2}$, und folglich das Rhomboëder mR ein stumpfes seyn.

3) Da n immer positiv gefordert wird, so darf auch m^2a^2 nie $> \frac{3}{8}$, oder die Polk. X nie $> 120°$ seyn.

4) Da n in allen bis jetzt beobachteten Fällen von ziemlich einfachem numerischem Ausdruck ist, so wird auch m^2a^2 von dergleichem Ausdruck seyn müssen. Nehmen wir z. B. mit Haüy die im vorigen §. angegebenen Werthe von a^2 für Kalkspath und Silberblende an, so werden die, aus den beiderseitigen R abzuleitenden metastatischen Skalenoëder der zweiten Art:

für Kalkspath .... R^3
für Silberblende .... R^5

§. 349.

Inverse Rhomboëder.

Für jedes Rhomboëder mR ist ein anderes Rhomboëder $m'R$ möglich, dessen Kantenwinkel den Flächenwinkeln jenes gleich sind, und umgekehrt. Man kann je zwei dergleichen Rhomboëder nach dieser gegenseitigen Vertauschung oder Umkehrung (*inversio*) ihrer Kanten- und Flächenwinkel als inverse Rhomboëder bezeichnen. Das eine derselben muss allemal ein spitzes, das andere ein stumpfes Rhomboëder seyn, weil die Polflächenwinkel von mR den Mittelkantenwinkeln von $m'R$, und die Polkantenwinkel von mR den Mittelflächenwinkeln von $m'R$ gleich sind, und umgekehrt.

Da nun allgemein für den Polflächenwinkel 2ζ des Rhomboëders mR

$$\cos 2\zeta = \frac{2m^2a^2 - 3}{2(m^2a^2 + 3)}$$

und für die Mittelkante Z des Rhomboëders $m'R$:

$$\cos Z = \frac{3 - 2m'^2a^2}{3 + 4m'^2a^2}$$

so folgt aus der Gleichsetzung beider Werthe

$$mm' = \frac{3}{2a^2}$$

als die Bedingungsgleichung für die Ableitungszahlen je zweier inverser Rhomboëder.

Setzen wir z B. im Kalkspathe mit Haüy $a^2 = \frac{3}{4}$ so würden folgende Rhomboëder inverse:

R und $2R$

$\frac{1}{2}R$ und $4R$

$\frac{1}{4}R$ und $8R$ u. s. w.

oder allgemein mR und $\frac{2}{m}R$.

Aus der Umkehrung der Kanten- und Flächenwinkel folgt, dass auch die Winkel ihrer respectiven diagonalen Hauptschnitte gleich sind, so dass nämlich der am Poleck gelegene Winkel des einen dem am Mitteleck gelegenen Winkel des andern gleicht.

Das Verhältniss der inversen Rhomboëder lässt sich am kürzesten und bestimmtesten mittels eines bekannten Ausdruckes der Triëdrometrie bezeichnen, indem man sie als solche Rhomboëder definirt, deren Polecke supplementäre Triëder sind. Daraus folgt unmittelbar nicht nur die gegenseitige Vertauschung ihrer Kanten- und Flächenwinkel, sondern auch, dass von je zwei inversen Rhomboëdern, wenn man sie in gleicher Stellung um einen gemeinschaftlichen Mittelpunct denkt, die oberen oder unteren Flächen des einen auf den unteren oder oberen Polkanten des andern rechtwinklig sind, und *vice versa*. Fragt man also für irgend ein Rhomboëder $\mp mR$ nach derjenigen Gestalt, deren Flächen auf sei-

1) Da n rational seyn muss, wenn das Skalenoëder Realität haben soll, so wird auch für a^2 ein rationaler Werth gefordert.

2) Da n jedenfalls > 1 gefordert wird, so muss auch $m^2a^2 < \frac{3}{2}$, und folglich das Rhomboëder mR ein stumpfes seyn.

3) Da n in allen bis jetzt beobachteten Fällen von ziemlich einfachem numerischen Ausdruck ist, so wird auch m^2a^2 von dergleichem Ausdruck seyn müssen. Nehmen wir z. B. mit Haüy die im vorigen §. angegebenen Werthe von a^2 für Kalkspath und Silberblende an, so werden die, aus den beiderseitigen R abzuleitenden metastatischen Skalenoëder der zweiten Art:

für Kalkspath .... R^3
für Silberblende .... R^5

Leider werden aber auch diese Resultate durch die neueren Bestimmungen der Werthe von a^2 widerlegt.

§. 349.

Inverse Rhomboëder.

Für jedes Rhomboëder mR ist ein anderes Rhomboëder $m'R$ möglich, dessen Kantenwinkel den Flächenwinkeln jenes gleich sind, und umgekehrt. Man kann je zwei dergleichen Rhomboëder nach dieser gegenseitigen Vertauschung oder Umkehrung (*inversio*) ihrer Kanten- und Flächenwinkel als inverse Rhomboëder bezeichnen. Das eine derselben muss allemal ein spitzes, das andere ein stumpfes Rhomboëder seyn, weil die Polflächenwinkel von mR den Mittelkantenwinkeln von $m'R$, und die Polkantenwinkel von mR den Mittelflächenwinkeln von $m'R$ gleich sind, und umgekehrt.

Da nun allgemein für den Polflächenwinkel 2ζ des Rhomboëders mR

$$\cos 2\zeta = \frac{2m^2a^2 - 3}{2(m^2a^2 + 3)}$$

und für die Mittelkante Z des Rhomboëders $m'R$:

$$\cos Z = \frac{3 - 2m'^2a^2}{3 + 4m'^2a^2}$$

so folgt aus der Gleichsetzung beider Werthe

$$mm' = \frac{3}{2a^2}$$

als die Bedingungsgleichung für die Ableitungszahlen je zweier inverser Rhomboëder.

Setzen wir z. B. im Kalkspathe mit Haüy $a^2 = \frac{3}{4}$, so würden folgende Rhomboëder inverse:

R und $2R$
$\frac{1}{2}R$ und $4R$
$\frac{1}{4}R$ und $8R$ u. s. w.

oder allgemein mR und $\frac{2}{m}R$.

Aus der Umkehrung der Kanten- und Flächenwinkel folgt, dass auch die Winkel ihrer respectiven diagonalen Hauptschnitte gleich sind, so dass nämlich der am Poleck gelegene Winkel des einen dem am Mitteleck gelegenen Winkel des andern gleicht.

Das Verhältniss der inversen Rhomboëder lässt sich am kürzesten und bestimmtesten mittels eines bekannten Ausdruckes der Trïedrometrie oder sphärischen Trigonometrie bezeichnen, indem man sie als solche Rhomboëder definirt, deren Polecke complementäre Triëder sind. Daraus folgt unmittelbar nicht nur die gegenseitige Vertauschung ihrer Kanten- und Flächenwinkel, sondern auch, dass von je zwei inversen Rhomboëdern, wenn man sie in verwendeter Stellung um einen gemeinschaftlichen Mittelpunct denkt, die Flächen des einen auf den Polkanten des andern rechtwinklig sind, und vice versa. Fragt man also für irgend ein Rhomboëder $\pm mR$ nach derjenigen Gestalt, deren Flächen auf seinen

nen Polkanten rechtwinklig sind, so kann dieselbe nur $\mp \frac{3}{2ma^2}R$ seyn.

b) Berechnung der hexagonalen Pyramiden von abnormer Flächenstellung.

§. 350.

Halbmesser der Basis.

Die Resultate der Berechnung der hexagonalen Pyramiden der dritten Art lassen sich unmittelbar aus den Formeln für die Pyramiden der ersten Art ableiten, wenn man in dieselben statt der halben Nebenaxe den Halbmesser der Basis von $\frac{r}{l}\frac{mPn}{2}$ einführt. Das einzige zur Berechnung erforderliche Element ist daher dieser Halbmesser, dessen Bestimmung von den Coordinaten des Mitteleckpunctes abhängt.

Die Gleichungen derjenigen beiden Mittelkanten, welche zur Darstellung des im ersten Sextanten gelegenen Mitteleckpunctes contribuiren, sind:

$$x = 0 \quad \text{und} \quad \frac{y}{n} + z = 1$$

$$x = 0 \quad \text{und} \quad y + \frac{(n-1)z}{n} = 1$$

folglich werden die Coordinaten des Mitteleckpunctes:

$$x = 0$$

$$y = \frac{n}{n^2-n+1}$$

$$z = \frac{n(n-1)}{n^2-n+1}$$

und die Centraldistanz dieses Punctes, oder der gesuchte Halbmesser:

$$R = \frac{n}{\sqrt{n^2-n+1}}$$

Die Gleichung desselben Halbmessers aber wird:

$$y - \frac{z}{n-1} = 0$$

oder orthometrisch ausgedrückt:

$$\frac{y_1}{\sqrt{3}} - \frac{z_1}{2n-1} = 0$$

daher die Tangente des Winkels ϑ, welchen er mit der Axe der y bildet, oder des Winkels der scheinbaren Verdrehung der Pyramiden $\frac{r}{l} \frac{mPn}{2}$:

$$tang\,\vartheta = \frac{(n-1)\sqrt{3}}{n+1}$$

§. 351.

Resultate der Berechnung.

Mittels des gefundenen Halbmessers R erhalten wir nun nach der angegebenen Methode aus §. 326 folgende Resultate für $\frac{r}{l} \frac{mPn}{2}$.

I. Coëfficient der Zwischenaxe:

$$r = \frac{2n}{n+1}, \text{ wie in §. 319,}$$

II. Flächennormale:

$$N = \frac{man\sqrt{3}}{M}, \text{ wie in §. 320,}$$

III. Kantenlinien:

$$\text{Polkante} = \frac{\sqrt{m^2a^2(n^2-n+1)+n^2}}{\sqrt{n^2-n+1}}$$

$$\text{Mittelkante} = \frac{n}{\sqrt{n^2-n+1}}$$

VI. Volumen:

$$V = \frac{man^2\sqrt{3}}{n^2-n+1}$$

V. Oberfläche:

$$S = \frac{3nM}{n^2-n+1}$$

VI. Flächenwinkel:

$$\text{an der Basis, } tang\,\varphi = \frac{M}{n}$$

$$\text{am Pole, } tang\,\psi = \frac{n}{M}$$

VII. Kantenwinkel:

$$\text{Polk.}\quad \cos X = -\frac{2m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2}{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2}$$

$$\text{Mittelk.}\quad \cos Z = -\frac{4m^2a^2(n^2-n+1)-3n^2}{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2}$$

Setzt man in diesen Formeln $n=1$, so verwandeln sich selbige in die, für die hexagonalen Pyramiden der Hauptreihe aufgefundenen Formeln des §. 328, und setzt man $n=2$, so verwandeln sie sich in die, für die hexagonalen Pyramiden der Nebenreihe aufgefundenen Formeln des §. 329; wodurch die Resultate der Ableitung ihre vollkommene Bestätigung erhalten, dass die hexagonalen Pyramiden mP und $mP2$ als Gränzgestalten von $\frac{r}{l}\frac{mPn}{2}$ keine, von ihrer holoëdrischen Erscheinungsweise verschiedenen Resultate liefern.

Für $m=\infty$ dagegen erhält man die Formeln für die hexagonalen Prismen der dritten Art, welche von den Prismen ∞P und $\infty P2$ nur durch den Halbmesser ihrer Basis und durch die scheinbare Verdrehung um den Winkel ϑ verschieden sind.

c) Berechnung der hexagonalen Trapezoëder.

§. 352.

Vorbereitung.

Wir bezeichnen in jedem hexagonalen Trapezoëder $r\frac{mPn}{2}$ oder $l\frac{mPn}{2}$ (Fig. 376)

die normalen Mittelkanten mit Z
die diagonalen Mittelkanten mit Z'
die Polkanten mit X,

unterscheiden jedoch für eine und dieselbe Fläche die an der diagonalen Mittelkante anliegende Polkante durch X'. Ferner bezeichnen wir die obere Fläche im ersten Sextanten mit F, und die vier Flächen, welche mit ihr die Kanten X, X', Z und Z' bilde mit F', F'', F''' und F^{IV}; endlich die ebenen Wink der Fläche F, nämlich:

den Winkel zwischen X und X' mit ζ
- - - - - Z und Z' - ϱ
- - - - - X und Z - σ
- - - - - X' und Z' - ξ

Ist nun die Gleichung

$$\text{für } F \ldots\ \frac{x}{ma} + \frac{y}{n} + z = 1$$

so werden die calculativen Gleichungen für die übri gen vier Flächen folgende:

$$\text{für } F' \ldots\ \frac{x}{ma} - \frac{(n-1)y}{n} + \frac{z}{n} = 1$$

$$\text{für } F'' \ldots\ \frac{x}{ma} + y + \frac{(n-1)z}{n} = 1$$

$$\text{für } F''' \ldots -\frac{x}{ma} + \frac{(n-1)y}{n} + z = 1$$

$$\text{für } F^{IV} \ldots -\frac{x}{ma} + y + \frac{z}{n} = 1$$

Die successive Combination der Gleichung von F mit den Gleichungen von F', F'', F''' und F^{IV} führt auf die Gleichungen der Kantenlinien:

$$\text{für } X \ldots \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x}{ma(n^2-n+1)} - \dfrac{y}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n^2-n+1} \\ \dfrac{y}{n-1} + \dfrac{z}{n} = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{für } X' \ldots \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x}{ma(n^2-n+1)} + \dfrac{y}{n} = \dfrac{1}{n^2-n+1} \\ y - \dfrac{z}{n-1} = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{für } Z \ldots \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x}{ma(2-n)} + \dfrac{y}{2n} = 0 \\ \dfrac{y}{2} + z = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{für } Z' \ldots . \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{x}{ma(n-1)} + \dfrac{y}{n} = \dfrac{1}{n+1} \\ \qquad y + z = \dfrac{2n}{n+1} \end{array} \right.$$

Aus den zweiten Gleichungen von Z und Z' folgt, dass die diagonalen Mittelkanten den normalen Hauptschnitten, und die normalen Mittelkanten den diagonalen Hauptschnitten parallel sind.

Endlich finden sich die Coordinaten des an der Kante X gelegenen Mitteleckpunctes durch Combination der Gleichung von F^{IV} mit den Gleichungen derselben Polkante, wie folgt:

$$x = \frac{ma(n-1)(2-n)}{n(n+1)}$$

$$y = \frac{2}{n+1}$$

$$z = \frac{2(n-1)}{n+1}$$

§. 353.

Kantenlinien.

Da die Zwischenaxen und Flächennormalen in den Trapezoëdern denselben Werth behaupten wie in den resp. Muttergestalten, so bildet die Berechnung der Kantenlinien X, Z und Z' das zunächst aufzulösende Problem. Wir wollen diese Berechnung an denjenigen drei Kanten vornehmen, welche in dem Mitteleckpuncte zusammenlaufen, dessen Coordinaten zu Ende des vorigen §. bestimmt wurden. Dieser Punct ist also ein gemeinschaftlicher Gränzpunct für alle drei Kanten, deren zweite Gränzpuncte folgende:

für X, der Poleckpunct, dessen Coordinaten:

$$x = ma, \; y = 0, \; z = 0$$

für $\frac{1}{2}Z'$, der Endpunct der Zwischenaxe, dessen Coordinaten:

$$x = 0, \; y = \frac{n}{n+1}, \; z = \frac{n}{n+1}$$

für $\frac{1}{2}Z$ der Fläche F'', der Endpunct der Axe der y, dessen Coordinaten:

$$x=0,\ y=1,\ z=0$$

Die Combination der Coordinaten je zweier Gränzpuncte einer und derselben Linie nach der Regel in §. 318 giebt sogleich:

$$X = \frac{2\sqrt{m^2a^2(n^2-n+1)^2+n^2(n^2-n+1)}}{n(n+1)}$$

$$Z' = \frac{2(2-n)\sqrt{m^2a^2(n-1)^2+n^2}}{n(n+1)}$$

$$Z = \frac{2(n-1)\sqrt{m^2a^2(2-n)^2+3n^2}}{n(n+1)}$$

Sollen Z und Z' gleich, und folglich die Flächen symmetrische Trapezoide werden, so muss

$$(2-n)^2 = 3(n-1)^2$$

$$\text{oder} \quad n = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

seyn; es können daher nur die regelmässig zwölfseitigen Pyramiden von dergleichen Trapezoiden umschlossene Trapezoëder liefern, welche also eben so unmöglich sind wie jene.

§. 354.

Volumen.

Man lege durch die vier Kanten einer jeden Fläche F und durch den Mittelpunct der Gestalt schneidende Ebenen, so wird das Trapezoëder in 12 vierseitige (einfache) Elementarpyramiden getheilt, von welchen sich wiederum eine jede auf folgende Weise in vier dreiseitige Theilpyramiden oder unregelmässige Tetraëder zerlegen lässt. Man verbinde in jeder Fläche F (Fig. 374) den Poleckpunct mit den Mittelpuncten der beiden Mittelkanten, und diese beiden Puncte selbst durch gerade Linien, so entsprechen die drei Verbindungslinien den Kantenlinien derselben Fläche in der dihexagonalen Pyramide mPn. Legt man nun durch jede dieser drei Linien und durch den Mittelpunct der Gestalt schneidende Ebenen, so theilen dieselben die Elementarpyramide v in vier Theilpyramiden φ, φ', φ'' und φ''', und es wird:

$$v = \varphi + \varphi' + \varphi'' + \varphi'''$$

Nun ist zuvörderst

$$\text{Volumen } \varphi = v \text{ in §. 322}, = \frac{man}{4(n+1)\sqrt{3}}$$

Für φ', φ'' und φ''' wählen wir diejenigen ihrer respectiven Flächen zu Grundflächen, welche an φ anliegen, oder in den normalen, diagonalen und basischen Hauptschnitt fallen; sie finden sich:

$$\text{für } \varphi' = \tfrac{1}{2}ma$$

$$\text{für } \varphi'' = \frac{man\sqrt{3}}{2(n+1)}$$

$$\text{für } \varphi''' = \frac{n\sqrt{3}}{4(n+1)}$$

Unter Voraussetzung dieser Grundflächen bestimmen sich die Höhen von φ', φ'' und φ''' aus den Coordinaten des Mitteleckpunctes in §. 352 wie folgt:

$$\text{Höhe von } \varphi' = z \sin 60° = \frac{(n-1)\sqrt{3}}{n+1}$$

$$\text{- - - } \varphi'' = y - \frac{n\sqrt{3}}{n+1} \tan 30° = \frac{2-n}{n+1}$$

$$\text{- - - } \varphi''' = x = \frac{ma(n-1)(2-n)}{n(n+1)}$$

Also wird:

$$\text{Volumen } \varphi' = \frac{ma(n-1)}{2(n+1)\sqrt{3}}$$

$$\text{- - - } \varphi'' = \frac{man(2-n)}{2(n+1)^2\sqrt{3}}$$

$$\text{- - - } \varphi''' = \frac{ma(n-1)(2-n)}{4(n+1)^2\sqrt{3}}$$

und das Volumen der Elementarpyramide:

$$v = \varphi + \varphi' + \varphi'' + \varphi''' = \frac{ma(2n-1)}{(n+1)^2\sqrt{3}}$$

endlich das Volumen des Trapezoëders selbst:

$$V = 12v = \frac{4ma(2n-1)\sqrt{3}}{(n+1)^2}$$

§. 355.

Oberfläche.

Da das Volumen eine Function der Oberfläche S und Flächennormale N, indem

$$V = \tfrac{1}{3}NS$$

so wird auch

$$S = \frac{3V}{N}$$

und, nach Substitution der bekannten Werthe von V und N,

$$S = \frac{12(2n-1)}{n(n+1)^2} M$$

wo M, wie immer, $= \sqrt{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2}$.

Der Inhalt einer Fläche des Trapezoëders wird

$$F = \tfrac{1}{12}S = \frac{2n-1}{n(n+1)^2} M$$

und der Inhalt der nach aussen gewendeten Flächen der drei Theilpyramiden φ', φ'' und φ'''

$$\text{für } \varphi' \ldots\ldots s' = \frac{n-1}{2n(n+1)} M$$

$$\text{für } \varphi'' \ldots\ldots s'' = \frac{2-n}{2(n+1)^2} M$$

$$\text{für } \varphi''' \ldots\ldots s''' = \frac{(n-1)(2-n)}{4n(n+1)^2} M$$

§. 356.

Flächenwinkel.

Setzt man in den zweiten Ausdruck für $\cos U$ des §. 318 statt der Buchstaben α, β, γ, u. s. w. successiv die Parameter aus den Gleichungen von X und X', Z und Z', X und Z, und X' und Z', so erhält man die Cosinus der Winkel ζ, ϱ, σ und ξ, von welchen ich nur den ersteren herschreibe:

$$\cos\zeta = \frac{2m^2a^2(n^2-n+1)+n^2}{2m^2a^2(n^2-n+1)+2n^2}$$

Der Sinus von ζ findet sich aus diesem Cosinus; die Sinus der übrigen drei Winkel aber weit leichter durch die Gleichungen:

$$\sin\sigma = \frac{4\varphi'}{XZ'},\ \sin\xi = \frac{4\varphi''}{XZ'},\ \sin\varrho = \frac{8\varphi'''}{ZZ'}$$

So erhält man endlich die Tangenten, als die im Gebrauche bequemsten Functionen: nämlich:

$$\tang\zeta = \frac{nM}{2m^2a^2(n^2-n+1)+n^2}$$

$$\tang\xi = -\frac{n^2M}{2m^2a^2(n^2-n+1)(n-1)-n^2(2-n)}$$

$$\tang\sigma = -\frac{n(n+1)M}{2m^2a^2(n^2-n+1)(2-n)-3n^2(n-1)}$$

$$\tang\varrho = \frac{nM}{2m^2a^2(n-1)(2-n)-3n^2}$$

§. 357.

Kantenwinkel.

Combinirt man die Parameter der Gleichung von F successiv mit den Parametern der Gleichungen von F', F''' und F^{IV} nach der Regel für die Auffindung von $\cos W$ in §. 318, so erhält man unmittelbar:

$$\cos X = -\frac{2m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2}{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2}$$

$$\cos Z' = -\frac{2m^2a^2(4n-n^2-1)-3n^2}{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2}$$

$$\cos Z = -\frac{2m^2a^2(n^2+2n-2)-3n^2}{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2} = \cos Z \text{ in §. 336.}$$

Ferner wird

$$\tang\tfrac{1}{2}Z' = \tang\tfrac{1}{2}U \text{ in §. 325}$$
$$\tang\tfrac{1}{2}Z = \tang\tfrac{1}{2}T \text{ ebendas.}$$

Für die aus $mP\frac{m}{m-1}$ abgeleiteten Trapezoëder, welche in der Natur besonders häufig vorkommen, wird

$$\cos X = -\frac{2a^2(m^2-m+1)+3}{4a^2(m^2-m+1)+3}$$

$$\cos Z' = -\frac{2a^2(2m^2-2m-1)-3}{4a^2(m^2-m+1)+3}$$

$$\cos Z = -\frac{2a^2(m^2+2m-2)-3}{4a^2(m^2-m+1)+3}$$

und $tang\,\frac{1}{2}Z' = (2m-1)\,D$, wenn man die für jede Krystallreihe constante Grösse $\frac{a}{\sqrt{3}\sqrt{a^2+1}}$ mit D bezeichnet. Für den Quarz ist z. B. $D=\sqrt{\frac{121}{663}}=0{,}4272...$ und daher

$$2m-1 = 2{,}34\; tang\,\tfrac{1}{2}Z$$

C. Berechnung der tetartoëdrischen Gestalten.

a) Berechnung der Rhomboëder von abnormer Flächenstellung.

§. 358.

Methode und Resultate der Berechnung.

Die Berechnung der Rhomboëder von abnormer Flächenstellung, oder der tetartoëdrischen Gestalten $\pm\frac{r}{l}\frac{mPn}{2}$ ist ein sehr einfaches Geschäft. Weil nämlich die in §. 338 für die Rhomboëder $\frac{mP}{2}$ aufgefundenen Resultate von der Flächenstellung dieser Gestalten insofern ganz unabhängig sind, wiefern sie überhaupt für jedes Rhomboëder gelten, das aus einer hexagonalen Pyramide von dem Axenverhältnisse $1 : ma$ abgeleitet wurde, so haben wir nur statt dieses Verhältnisses das Verhältniss $\frac{n}{\sqrt{n^2-n+1}} : ma$ zu Grunde zu legen, um aus denselben Formeln die Ausdrücke für unsre tetartoëdrischen Rhomboëder abzuleiten; denn diese Rhomboëder werden ja aus den hexagonalen Pyramiden der dritten Art gerade so abgeleitet, wie die Rhomboëder mR aus den hexagonalen Pyramiden der ersten Art. Man erhält so:

I. Coëfficient der Zwischenaxe:

$$r = \frac{2n}{n+1}$$

II. Flächennormale:

$$N = \frac{man\sqrt{3}}{M}$$

III. Kantenlinien:

$$X = \frac{2\sqrt{m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2}}{3\sqrt{n^2-n+1}} = Z$$

$$\text{horizontale Diagonale} = \frac{2n}{\sqrt{n^2-n+1}}$$

$$\text{geneigte Diagonale} = \frac{2M}{3\sqrt{n^2-n+1}}$$

IV. Volumen:

$$V = \frac{man^2}{(n^2-n+1)\sqrt{3}}$$

V. Oberfläche:

$$S = \frac{4nM}{n^2-n+1}$$

VI. Flächenwinkel:

Polflächenwinkel ζ, $tang\,\tfrac{1}{2}\zeta = \dfrac{3n}{M}$

VII. Kantenwinkel:

Polkante X, $\cos X = \dfrac{2m^2a^2(n^2-n+1)-3n^2}{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2}$

Mittelkante Z, $\cos Z = -\cos X$

§. 359.

Gränzgestalten dieser Rhomboëder.

Für $m = \infty$ verwandeln sich diese Formeln in diejenigen für die hexagonalen Prismen von abnormer Flächenstellung, deren abwechselnde Flächen, wie überhaupt die aller hexagonalen Prismen, welche Gränzgestalten von Rhomboëdern sind, eine entgegengesetzte Bedeutung haben; daher $X = 60°$, während $Z = 120°$.

Für $n = 1$ gehen dieselben Formeln in diejenigen über, welche für die Rhomboëder $\frac{mP}{2}$ oder mR in §. 338 angegeben wurden. Diese Rhomboëder sind daher in ihrer Verbindung mit Rhomboëdern der dritten Art als tetartoëdrische Gestalten zu deuten, wie sie denn auch eigentlich nur aus den vergrösserten Flächen h ä l f t e n der abwechselnden Flächen von mP bestehen.

Für $n = 2$ beziehen sich die Formeln auf solche Rhomboëder, welche durch Vergrösserung der abwechselnden Flächen von $mP2$ zum Vorscheine kommen, und bereits oben als Rhomboëder von diagonaler Flächenstellung oder R. der zweiten Art bezeichnet wurden. Man erhält für sie:

$$\text{Kantenlinie, } X = \tfrac{2}{3}\sqrt{m^2a^2+4}$$

$$\text{Volumen, } V = \frac{16ma}{3\sqrt{3}}$$

$$\text{Oberfläche, } S = \frac{16\sqrt{m^2a^2+1}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Flächenwinkel, } tang\,\tfrac{1}{2}\zeta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{m^2a^2+1}}$$

$$\text{Kantenwinkel, } cos\,X = \frac{m^2a^2-2}{2(m^2a^2+1)}$$

b) Berechnung der trigonalen Trapezoëder.

§. 360.

Vorbereitung.

Wir bezeichnen in jedem trigonalen Trapezoëder $\pm r\frac{mPn}{4}$ oder $\pm l\frac{mPn}{4}$ (Fig. 377)

die Polkanten mit X,
die längeren Mittelkanten mit Z,
die kürzeren Mittelkanten mit Z',

und unterscheiden, wo es nöthig, für eine jede Fläche die an Z' anliegende Polkante durch X'. Ferner bezeichnen wir die im ersten Sextanten gelegene Fläche mit F, und diejenigen vier Flächen, welche mit ihr die Kanten X, X', Z und Z' bilden, mit F', F'', F''' und F^{IV}; endlich die ebenen Winkel jeder Fläche in der Folge, wie sie zwischen X' und X, X und Z, Z und Z', Z' und X' liegen, mit ζ, σ, ϱ und ξ.

Ist nun die Gleichung

$$\text{für } F \ldots\ldots \frac{x}{ma} + \frac{y}{n} + z = 1$$

so werden die calculativen Gleichungen der vier andern Flächen folgende:

$$\text{für } F' \ldots\ldots \frac{x}{ma} - y - \frac{(n-1)z}{n} = 1$$

$$\text{für } F'' \ldots\ldots \frac{x}{ma} + \frac{(n-1)y}{n} - \frac{z}{n} = 1$$

$$\text{für } F''' \ldots\ldots -\frac{x}{ma} + \frac{(n-1)y}{n} + z = 1$$

$$\text{für } F^{IV} \ldots\ldots -\frac{x}{ma} + \frac{y}{n} - \frac{(n-1)z}{n} = 1$$

Die successive Combination der Gleichung von F mit den Gleichungen der übrigen Flächen führt auf folgende Gleichungen der Kantenlinien:

$$\text{für } X \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{x}{ma(n^2-n+1)} - \dfrac{y}{n(2n-1)} = \dfrac{1}{n^2-n+1} \\[2ex] \dfrac{y}{2n-1} + \dfrac{z}{n+1} = 0 \end{cases}$$

$$\text{für } X' \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{x}{ma(n^2-n+1)} + \dfrac{y}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n^2-n+1} \\[2ex] \dfrac{y}{n+1} + \dfrac{z}{2-n} = 0 \end{cases}$$

$$\text{für } Z \ldots \begin{cases} \dfrac{x}{ma(2-n)} + \dfrac{y}{2n} = 0 \\ \dfrac{y}{2} + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{für } Z' \ldots \begin{cases} -\dfrac{x}{ma(2n-1)} + \dfrac{y}{n} = 1 \\ y + \dfrac{z}{2} = n \end{cases}$$

Aus der ersteren Gleichung von Z folgt, dass diese Kante durch die Axe der z geht, und aus der zwischen x und z abzuleitenden Gleichung von Z', dass diese Kante durch die Axe der y geht. Die Mittelkanten jedes trigonalen Trapezoëders gehen also durch die Nebenaxen, und zwar schneiden die längeren Mittelkanten ihre resp. halben Nebenaxen in der Centraldistanz 1, die kürzeren Mittelkanten die ihrigen in der Centraldistanz n; übrigens lehren die Gleichungen zwischen y und z, dass beiderlei Kanten in Parallelebenen der diagonalen Hauptschnitte fallen.

Die Combination der Gleichungen von X' mit der Gleichung von F^{IV} führt endlich auf die Coordinaten des dieselbe Kante begränzenden Mitteleckpunctes:

$$x = \frac{ma(2n-1)(2-n)}{3n}$$
$$y = \tfrac{2}{3}(n+1)$$
$$z = -\tfrac{2}{3}(2-n)$$

§. 361.

Kantenlinien.

Die Coordinaten des Mitteleckpunctes lassen sogleich zur Berechnung der Kantenlinien gelangen. Es laufen nämlich von dem bestimmten Mitteleckpuncte aus:

die Polkante X',
die Mittelkante Z', und
die Mittelkante Z der Fläche F''.

Berücksichtigt man zunächst die **halben** Mittelkanten, so werden die drei zu berechnenden Linien, ausser von dem gemeinschaftlichen Mitteleckpuncte, von folgenden Puncten begränzt:

X' vom Poleckpuncte, dessen Coordinaten $x=ma$, $y=0$, $z=0$;

$\frac{1}{2}Z'$ von dem durch sie bestimmten Endpuncte der Axe der y, dessen Coord. $x=0$, $y=n$, $z=0$;

$\frac{1}{2}Z$ von dem Endpuncte der Axe der u, dessen Coordinaten $x=0$, $y=1$, $z=-1$.

Combinirt man die Coordinaten je zweier Gränzpuncte derselben Linie nach der bekannten Regel, so erhält man:

$$X = \frac{2\sqrt{m^2a^2(n^2-n+1)^2+3n^2(n^2-n+1)}}{3n}$$

$$Z = \frac{2(2n-1)\sqrt{m^2a^2(2-n)^2+3n^2}}{3n}$$

$$Z' = \frac{2(2-n)\sqrt{m^2a^2(2n-1)^2+3n^2}}{3n}$$

§. 362.

Volumen.

Die Berechnung des Volumens wird für diese Trapezoëder ganz auf dieselbe Art geführt, wie für die hexagonalen Trapezoëder. Man zerlegt nämlich erst die ganze Gestalt in 6 vierseitige Elementarpyramiden, und dann jede dieser letzteren in vier dreiseitige Theilpyramiden φ, φ', φ'' und φ''', deren Volumina besonders zu berechnen und zu addiren sind, um das Volumen jeder Elementarpyramide zu erhalten.

Nimmt man für φ ihre in die Ebene des Mittelquerschnittes fallende Fläche als Grundfläche, so wird ma ihre Höhe; diese Grundfläche aber ist ein Dreieck, dessen einer Winkel 60° beträgt, und von den Seiten 1 und n eingeschlossen wird; sein Inhalt ist daher $= \frac{1}{4}n\sqrt{3}$, woraus sich das Volumen von

$$\varphi = \frac{man}{4\sqrt{3}}$$

bestimmt. Betrachtet man ferner diejenigen Flächen der drei übrigen Theilpyramiden, mit denen sie an φ anliegen, als deren Grundflächen, so werden diese Grundflächen

$$\text{für } \varphi' = \tfrac{1}{2}ma$$
$$\text{für } \varphi'' = \tfrac{1}{2}man$$
$$\text{für } \varphi''' = \tfrac{1}{4}n\sqrt{3}$$

und die entsprechenden Höhen aus den (postitiv genommenen) Coordinaten des Mitteleckpunctes

$$\text{für } \varphi' = y - z\sin 60° = (2n-1)\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$
$$\text{für } \varphi'' = z\sin 60° = (2-n)\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$
$$\text{für } \varphi''' = x = \frac{ma(2n-1)(2-n)}{3n}$$

und die Volumina von

$$\varphi' = \frac{ma(2n-1)}{6\sqrt{3}}$$
$$\varphi'' = \frac{man(2-n)}{6\sqrt{3}}$$
$$\varphi''' = \frac{ma(2n-1)(2-n)}{12\sqrt{3}}$$

folglich das Volumen der Elementarpyramide:

$$v = \varphi + \varphi' + \varphi'' + \varphi''' = \frac{ma(4n-n^2-1)}{3\sqrt{3}}$$

und das Volumen des Trapezoëders selbst:

$$V = 6v = 2ma(4n-n^2-1)\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

§. 363.

Oberfläche.

Weil jederzeit

$$S = \frac{3V}{N}$$

so wird nach Substitution der bekanuteu Werthe von V und N:

$$S = \frac{2(4n - n^2 - 1)M}{n}$$

und daher der Flächeninhalt einer jeden einzelen Fläche des Trapezoëders:

$$F = \tfrac{1}{6}S = \frac{(4n - n^2 - 1)M}{3n}$$

und die Flächeninhalte der nach aussen gewendeten Flächen der vier Theilpyramiden:

$$\text{für } \varphi \;\ldots\; s = \tfrac{1}{4}M$$

$$\text{für } \varphi' \;\ldots\; s' = \frac{(2n-1)M}{6n}$$

$$\text{für } \varphi'' \;\ldots\; s'' = \tfrac{1}{6}(2-n)M$$

$$\text{für } \varphi''' \;\ldots\; s''' = \frac{(2n-1)(2-n)M}{12n}$$

§. 364.

Flächenwinkel.

Combinirt man nach der Formel für $\cos U$ in §. 318 successiv die Parameter der Gleichungen von X und X', X und Z, X' und Z', Z und Z', so erhält man die Cosinus der Winkel ζ, σ, ξ und ϱ, von denen ich jedoch nur den ersteren hersetze:

$$\cos\zeta = \frac{2m^2a^2(n^2 - n + 1) - 3n^2}{2m^2a^2(n^2 - n + 1) + 6n^2}$$

Der Sinus von ζ bestimmt sich leicht aus $\cos\zeta$, während die Sinus der übrigen Winkel aus den bekannten Flächeninhalten s', s'', s''' und den gleichfalls bekannten Werthen der sie einschliessenden Seiten gefunden werden. So gelangt man endlich auf die Tangenten, als die im Gebrauche bequemsten Functionen:

$$\tang\zeta = \frac{3nM}{2m^2a^2(n^2 - n + 1) - 3n^2}$$

$$\tang\sigma = -\frac{3nM}{2m^2a^2(n^2 - n + 1)(2-n) - 3n^2(2n-1)}$$

$$tang\,\xi = -\frac{3n^2M}{2m^2a^2(n^2-n+1)(2n-1)-3n^2(2-n)}$$

$$tang\,\varrho = \frac{3nM}{2m^2a^2(2n-1)(2-n)-3n^2}$$

§. 365.

Kantenwinkel.

Setzt man in die Formel für $cos\,W$ des §. 318 statt m, n, r die Parameter der Gleichung von F, und statt m', n' und r' successiv die Parameter der Gleichungen von F', F''' und F^{IV}, so erhält man unmittelbar die Cosinus der Kanten X, Z und Z', wie folgt:

$$cos\,X = \frac{2m^2a^2(n^2-n+1)-3n^2}{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2} = cos\,X \text{ in §. 358}$$

$$cos\,Z = -\frac{2m^2a^2(n^2+2n-2)-3n^2}{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2} = cos\,Z \text{ in §. 336}$$

$$cos\,Z' = \frac{2m^2a^2(2n^2-2n-1)+3n^2}{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2}$$

§. 365 a.

Gränzgestalten der trigonalen Trapezoëder.

Für $m = \infty$ verwandeln sich die Formeln der vorhergehenden §§. in diejenigen für die ditrigonalen Prismen, deren Kantenwinkel:

$$cos\,X = \tfrac{1}{2}, \text{ also } X = 60°$$

$$cos\,Z = -\frac{n^2+2n-2}{2(n^2-n+1)}$$

$$cos\,Z' = \frac{2n^2-2n-1}{2(n^2-n+1)}$$

Z und Z' sind die eigentlichen Seitenkanten dieser Prismen, X dagegen der Neigungswinkel je zweier abwechselnder Flächen (vergl. §. 317).

Für $n = 1$ verwandeln sich dieselben Formeln in diejenigen für die Rhomboëder $\frac{mP}{2}$ oder mR, zum

Beweise, dass die hexagonalen Pyramiden der Hauptreihe auch in ihrer trapezoëdrischen Tetartoëdrie für die Erscheinung dasselbe Resultat liefern wie in ihrer skalenoëdrischen Hemiëdrie.

Für $n = 2$ endlich erhält man, ganz in Uebereinstimmung mit den Resultaten der Ableitung, die Formeln für die trigonalen Pyramiden, wie folgt:

Kantenlinien:

$$X = \sqrt{m^2a^2+4}$$

$$Z = 2\sqrt{3}, \text{ und } Z' = 0.$$

Volumen:

$$V = 2ma\sqrt{3}$$

Oberfläche:

$$S = 6\sqrt{3}\sqrt{m^2a^2+1}$$

Flächenwinkel:

$$tang\,\zeta = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{m^2a^2+1}}{m^2a^2-2}$$

$$tang\,\sigma = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\sqrt{m^2a^2+1}$$

Kantenwinkel:

$$cos\,X = \frac{m^2a^2-2}{2(m^2a^2+1)}$$

$$cos\,Z = -\frac{m^2a^2-1}{m^2a^2+1}$$

Viertes Capitel.

Von den Combinationen des Hexagonalsystemes.

A. Allgemeine Entwicklung.

§. 366.

Grundgestalt.

Die Zähligkeit jeder Combination bestimmt sich auch in diesem Systeme nach der allgemeinen Regel des §. 66, während die übrigen Bestimmungen der allgemeinen Entwicklung die Grundgestalt der Krystallreihe oder doch wenigstens die Lage der Axen als bekannt voraussetzen; in welcher Hinsicht für gegenwärtiges System die in §. 249 für das tetragonale System aufgestellten Regeln buchstäblich anzuwenden sind. Wie man die Grundgestalt in jedem Falle zu denken habe, das hängt freilich von dem Charakter der in der Combination enthaltenen Gestalten ab. Erscheinen blos holoëdrische Gestalten, oder sind bestimmte Anzeigen der trapezoëdrischen oder pyramidalen Hemiëdrie vorhanden, so wird die Grundgestalt als eine hexagonale Pyramide vorgestellt werden müssen, während sie dagegen als ein Rhomboëder zu denken ist, sobald rhomboëdrische Hemiëdrie oder auch Tetartoëdrie Statt findet. Wegen dieses verschiedenen Charakters der Grundgestalt, und wegen der Unsicherheit, welcher diese Bestimmungen zum Theil unterworfen sind, scheint es vortheilhafter, zunächst immer nur die Stellung des Axensystemes und das Grundverhältniss $1:a$ zu bestimmen.

§. 367.

Charakter der Combinationen.

In den meisten Fällen lässt sich der Charakter einer Combination sehr bestimmt aus den Symmetrieverhältnissen derselben beurtheilen, indem er nur dann entweder ganz unbestimmt, oder doch zweideutig bleibt, wenn die Combination nur aus den der Holoëdrie und Hemiëdrie gemeinschaftlichen Gränzgestalten besteht, oder der Krystall nur nach einer Richtung der Hauptaxe ausgebildet ist. Combinationen wie $oP.\infty P$, $oP.\infty P2.\infty P$ u. a. gestatten daher gar kein Urtheil über den Charakter der Krystallreihe, und selbst solche Combinationen, in welchen auch hexagonale Pyramiden aus e i n e r Reihe, oder aus denjenigen beiden Reihen auftreten, die sich im Verhältnisse der normalen und diagonalen Flächenstellung befinden, lassen es unentschieden, ob die Krystallreihe als holoëdrisch oder als trapezoëdrisch- oder pyramidal-hemiëdrisch zu deuten sey. Diese Unbestimmtheit liegt in der Natur der Sache und kann der wissenschaftlichen Methode nicht zum Vorwurfe gereichen, weil selbige keine Kriterien für Unterschiede aufstellen kann, welche in der Erscheinung selbst durch keine Merkmale hervorgehoben sind. Die rhomboëdrische Hemiëdrie dagegen offenbart sich jedenfalls sehr bestimmt, sobald nur ausser oP, ∞P und den Gliedern der Nebenreihe noch andre Gestalten in der Combination enthalten sind. Der tetartoëdrische Charakter endlich giebt sich gleichfalls deutlich zu erkennen, wenn nur ausser oP und ∞P noch andre Gestalten auftreten, wie diess doch gewöhnlich der Fall ist. Um jedoch über die Art der Hemiëdrie oder Tetartoëdrie mit Sicherheit entscheiden zu können, dazu wird in den meisten Fällen erfordert, dass die Krystalle nach beiden Richtungen der Hauptaxe vollständig ausgebildet sind, weil diese Entscheidung von dem gegenseitigen Verhältnisse der oberen und unteren Hälfte der Gestalten abhängt.

§. 368.

Allgemeine Orientirung der Combinationen.

Nachdem die Grundgestalt erwählt, oder doch die Lage des Axensystemes bestimmt worden, ist die allgemeine Orientirung der Combination, oder die Bestimmung der Stellen, welche ihre Gestalten in den verschiedenen Abtheilungen der Schemata in §. 296 oder §. 306 einnehmen, eine sehr einfache Aufgabe. Man erhält ihre Auflösung, indem man für die verschiedenen Gestalten der Combination angiebt,

1) welche in die Hauptreihe,
2) welche in die Nebenreihe, und
3) welche in die Zwischenreihen

gehören. Zugleich ergeben sich unmittelbar aus den Verhältnissen der zu den verschiedenen Reihen gehörigen Gestalten folgende Regeln:

a) Für holoëdrische Combinationen:

1) Je zwei Gestalten mPn und $m'Pn'$, welche horizontale CK. bilden, gehören in eine und dieselbe horizontale Reihe, oder haben $n' = n$.
2) Je zwei Gestalten mPn und $m'Pn'$, deren Flächen geneigte CK. bilden, welche einem der normalen Hauptschnitte parallel laufen, gehören in eine und dieselbe verticale Reihe, oder haben $m' = m$.

b) Für rhomboëdrische Combinationen:

1) Je zwei Gestalten mR^n und $m'R^{n'}$, welche horizontale CK. hervorbringen, gehören in eine und dieselbe horizontale Reihe, oder haben $n' = n$.
2) Je zwei Gestalten mR^n und $m'R^{n'}$, deren Mittelkanten gleichlaufend sind, gehören in eine und dieselbe verticale Reihe, oder haben $m' = m$.

B. Besondere Entwicklung.

§. 369.

Vorzüglich zu berücksichtigende Combinationen.

Die besondere Entwicklung der hexagonalen Combinationen überhaupt setzt die genauere Kenntniss derjenigen Verhältnisse voraus, von welchen die eigenthümliche Erscheinungsweise der binären Combinationen abhängt. Wir haben daher die Theorie dieser binären Combinationen in völliger Allgemeinheit zu entwickeln, um für jeden vorkommenden Fall das den combinirten Gestalten entsprechende Verhältniss ihrer Ableitungszahlen unmittelbar aus der Art und Weise ihres Verbundenseyns auffinden zu können. Weil nun die holoëdrische und hemiëdrische oder tetartoëdrische Erscheinungsweise der Gestalten meist eine eben so wesentliche Verschiedenheit ihrer Combinationen zur Folge hat, so zerfällt auch die Theorie der binären Combinationen in die drei Abschnitte von den holoëdrischen, hemiëdrischen und tetartoëdrischen Combinationen, und wiederum jeder der beiden letzteren Abschnitte in so viele Unterabtheilungen, als es verschiedene Arten der Hemiëdrie und Tetartoëdrie giebt. Wiefern jedoch nächst den holoëdrischen, vorzüglich die rhomboëdrischen Combinationen unsre ganz besondre Aufmerksamkeit in Anspruch nehmen, indem die meisten hexagonal krystallisirenden Mineralien der rhomboëdrischen Hemiëdrie unterworfen sind, und eines dieser Mineralien einen solchen Gestaltenreichthum, eine solche Mannichfaltigkeit der Combinationen zeigt, dass sich keine andre Substanz in dieser Hinsicht mit ihm messen kann; sofern werden wir auch nur die Theorie dieser beiden Arten von Combinationen ausführlich behandeln.

a) Holoëdrische Combinationen.

§. 370.

Combinationen zweier dihexagonaler Pyramiden $m\mathrm{P}n$ und $m'\mathrm{P}n'$.

Die Theorie der holoëdrischen Combinationen beruht auf den Combinationsverhältnissen zweier dihexagonaler Pyramiden $m\mathrm{P}n$ und $m'\mathrm{P}n'$, für welche wir, wie verschieden auch in der Combination ihre gegenseitigen Dimensionen seyn mögen, jedenfalls die durch die Ableitung bestimmten Verhältnisse zu Grunde legen müssen. Wir denken daher beide Gestalten um einen gemeinschaftlichen Mittelpunct in paralleler Stellung, reduciren sie auf gleiche Nebenaxen, und erhalten dann

1) für die Hauptaxen h und h' die Bedingung, dass

$$h' >=< h, \text{ wenn } m' >=< m$$

2) für die Zwischenaxen r und r' die Bedingung, dass

$$r' >=< r, \text{ wenn } n' >=< n$$

3) für die beiderseitigen Quotienten $\frac{h}{r} = q$ und $\frac{h'}{r'} = q'$ die Bedingung, dass

$$q' >=< q, \text{ wenn } \frac{m'(n'+1)}{n'} >=< \frac{m(n+1)}{n}$$

Sind nun beide Gestalten zu einer Combination verbunden, so wird die Annahme gleicher Nebenaxen zwar in der Wirklichkeit widerlegt, aber dessenungeachtet beibehalten werden müssen, weil alle Vergleichungen und Bestimmungen der Gestalten auf den Voraussetzungen der Ableitung beruhen. Die Erscheinungsweise der Combination $mPn.m'Pn'$ hängt nun wesentlich davon ab, welche von den in vorstehenden drei Bedingungen enthaltenen Verhältnissen für beide Gestalten unter der Voraussetzung gleicher Nebenaxen Statt finden.

Es bildet nämlich $m'Pn'$ an mPn

I. Zuschärfungen der Kanten, und zwar:

1) der normalen Polk., wenn $m' = m$, $n' > n$ und folglich $q' < q$; Fig. 378.

2) der diagonalen Polk., wenn $q' = q$, $n' < n$ und folglich $m' < m$; ähnl. Fig. 378.

3) der Mittelkanten, wenn $n' = n$, $m' > m$ und daher $q' > q$; Fig. 379.

II. Zwölffl. Zusp. der Poleeke, wenn $m' < m$, und $q' < q$; und zwar sind die CK. mit den Mittelkanten von mPn

4) parallel, ... wenn $n' = n$; Fig. 380.

5) convgt. n. d. norm. Mittelecken . . . . - - - $>$ - - 381.

6) convgt n. d. diag. Mittelecken . . . . - - - $<$ - ähnl. 381.

III. Vierfl. Zusp. der normalen Mittelecke, wenn $m' > m$, und $n' > n$; und zwar sind die CK. mit den diagonalen Polkanten von mPn

7) parallel, ... wenn $q' = q$; Fig. 382.

8) convgt. n. d. Polecken . - - - $<$ - - 383.

9) convgt. n. d. Mitteleeken - - - $>$ - - 384.

IV. Vierfl. Zusp. der diagonalen Mittelecke, wenn $q' > q$, und $n' < n$; und zwar sind die CK. mit den normalen Polk. von mPn

10) parallel, ... wenn $m' = m$; ähnl. Fig. 382.

11) convgt. n. d. Polecken . . . . - - - $<$ - - - - 383.

12) convgt. n. d. Mittelecken . . . . . . - - - $>$ - - - - 384.

Nachdem wir in diesen 12 Fällen die allgemeine Grundlage der Combinationslehre gefunden, wollen wir die binären Combinationen der einzelen Gestalten durchgehen; wobei denn wiederum die Combinationsgleichung in derjenigen Form mitgetheilt werden wird, in welcher sie unmittelbar die Verhältnisse der Ableitungszahlen der dritten Gestalt angiebt, deren Flächen die CK. der beiden gegebenen Gestalten abstumpfen.

§. 371.

Combinationen der dihexagonalen Pyramide mPn.

1) Mit $m'Pn'$; diese Gestalt veranlasst die im vorigen §. aufgezählten Combinationen unter den daselbst angegebenen Bedingungen.

CG. $m''n''(m'n - mn') + m''(m - m')nn' + n''(n' - n)mm' = 0.$

2) Mit $m'P$; da $n' = 1$, so ist es jedenfalls $< n$, und die möglichen CV. werden Nr. 2, 6, 10, 11 und 12; die Flächen von $m'P$ sind immer auf die diagonalen Polkanten von mPn gesetzt, und bilden

a) Abst. derselben, . . . wenn $m' = \frac{m(n+1)}{2n}$; Fig. 385.

b) Sechsfl. Zusp. der Polecke . . . . - - - $<$ - - - - 386.

c) Zusch. der diag. Mittelecke . . . . wenn $m' > \frac{m(n+1)}{2n}$; und zwar sind die CK. mit den normalen Polk.

α) parallel, ... wenn $m' = m$; Fig. 387.

β) convgt. nach den Polecken - - - $<$ - - 388.

γ) convgt. nach den Mittelecken - - - $>$ - - 389.

Im Falle b erscheinen die Zuspfl. als Rhomben, wenn $m' = \frac{m}{n}$

CG. $m''n''(m'n-m)+m''(m-m')n-n''(n-1)mm'=0$

3) Mit m'P2; da $n'=2$, so ist es stets $>n$, und die möglichen CV. werden Nr. 1, 5, 7, 8 und 9; die Flächen von m'P2 sind immer auf die normalen Polk. von mPn gesetzt, und bilden:

a) Abst. derselben, ... wenn $m'=m$; ähnl. Fig. 385.

b) Sechsfl. Zusp. der Polecke . . . . - - - $<$ - Fig. 386.

c) Zusch. der norm. Mittelecke . . . . - - - $>$ -; und zwar sind die CK. mit den diag. Polk.

α) parallel, ... wenn $m' = \frac{2m(n+1)}{3n}$; ähnl. Fig. 387.

β) convgt. n. d. Polecken - - - $<$ - - - ähnl. Fig. 388.

γ) convgt. n. d. Mittelecken - - - $>$ - - - ähnl. Fig. 389.

Im Falle b erscheinen die Zuspfl. als Rhomben, wenn $m' = \frac{2m(2n-1)}{3n}$.

CG. $m''n''(m'n-2m)+2m''(m-m')n+n''(2-n)mm'=0$

4) Mit ∞Pn': da $m'>m$, und $q'>q$, so werden die möglichen CV. Nr. 3, 9 und 12; die Flächen des Prismas sind immer auf die Mittelkanten von mPn gesetzt, und bilden:

a) Abst. derselben, ... wenn $n'=n$; Fig. 390.
b) Zusch. der norm. Mittelecke . . . . - - $>$ - Fig. 391.
c) Zusch. der diag. Mittelecke . . . . - - $<$ - ähnl. Fig. 391.
CG. $m''(n''-n')n+n''(n'-n)m=0$

5) Mit ∞P; da ausser den Bedingungen *sub* 4 auch noch $n' < n$, so bildet ∞P jedenfalls Abst. der diag. Mittelecke; Fig. 392.
CG. $m''(n''-1)n-n''(n-1)m=0$

6) Mit ∞P2; da ausser den Bedingungen *sub* 4 auch noch $n' > n$, so bildet ∞P2 jedenfalls Abst. der norm. Mittelecke; ähnl. Fig. 392.
CG. $m''(2-n'')n-n''(2-n)m=0$

7) oP bildet Abst. der Polecke; Fig. 393.
CG. $n''=n$.

§. 372.

Combinationen der hexagonalen Pyramide mP.

1) Mit m'Pn'; da $n=1$, so ist $n'>n$ und die möglichen CV. werden Nr. 1, 5, 7, 8 und 9; die Flächen liegen immer paarweis an den Polk. von mP, und bilden:
a) Zuschärfungen derselben, wenn $m'=m$; Fig. 394.
b) Zwölffl. Zusp. d. Polecke, - - - $<$ - Fig. 395.
c) Vierfl. Zusp. d. Mittelecke, - - - $>$ - und zwar sind die CK. mit den Höhenlinien der Flächen von mP
α) parallel, ... wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'}=2m$; Fig. 396.
β) convgt. n. den Polecken - - - - - $<$ - - Fig. 397.
γ) convgt. n. den Mittelecken - - - - - $>$ - - Fig. 398.
Im Falle cγ werden die CK. den Polkanten von mP parallel, wenn $\frac{m'}{n'}=m$.
CG.
I. $m''n''(m'-mn')+m''(m-m')n'+n''(n'-1)mm'=0$

2) Mit $m'P$; die Flächen sind immer auf die Flächen von mP gerade aufgesetzt, und bilden:
   a) Sechsfl. Zusp. der Polecke, wenn $m' < m$; Fig. 399.
   b) Zusch. der Mittelkanten, - - - $>$ - Fig. 400.

CG. $n'' = 1$

3) Mit $m'P2$; da $n' > n$, so werden wiederum Nr. 1, 5, 7, 8 und 9 die möglichen CV.; die Flächen sind immer auf die Polk. von mP gesetzt, und bilden
   a) Abstumpfungen derselben, wenn $m' = m$; Fig. 401.
   b) Sechsfl. Zusp. der Polecke - - - $<$ - Fig. 402.
   c) Zusch. der Mittelecke - - - $>$ - und zwar sind die CK. mit den Höhenlinien der Flächen von mP
      α) parallel, ... wenn $m' = \frac{4}{3}m$; Fig. 403.
      β) convgt. nach den Polecken - - - $<$ - - Fig. 404.
      γ) convgt. nach den Mittelecken - - - $>$ - - Fig. 405.

   Im Falle b erscheinen die Zuspfl. als Rhomben, wenn $m' = \frac{1}{2}m$, und im Falle cγ werden die CK. den Polk. von mP parallel, wenn $m' = 2m$.

CG. $m''n''(m'-2m)+2m''(m-m')+mm'n''=0$

4) $\infty Pn'$ bildet jedenfalls Zusch. der Mittelecke, die Zuschfl. auf die Mittelkanten gesetzt; Fig. 406.

CG. $m''(n''-n')+n''(n'-1)m=0$

5) ∞P bildet Abst. der Mittelkanten; Fig. 407.

6) $\infty P2$ bildet Abst. der Mittelecke; Fig. 408.

CG. $2m''-n''(m''+m)=0$

7) oP bildet Abst. der Polecke; Fig. 409.

§. 373.

Combinationen der hexagonalen Pyramide $mP2$.

1) Mit $m'Pn'$; da $n' < n$, so werden die möglichen CV. Nr. 2, 6, 10, 11 und 12; die Flächen von $m'Pn'$ liegen immer paarweis an den Polk. von $mP2$, und bilden:

a) Zuschärf. derselben, . . . wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} = \frac{3}{2}m$; ähnl. Fig. 394.

b) Zwölffl. Zusp. der Polecke - - - - - $<$ - - ähnl. Fig. 395.

c) Vierfl. Zusp. d. Mittelecke . . - - - - - $>$ - - und zwar sind die CK. mit den Höhenlinien der Flächen von $mP2$:

α) parallel, ... wenn $m' = m$; ähnl. Fig. 396.

β) convgt. n. d. Polecken - - - $<$ - ähnl. Fig. 397.

γ) convgt. n. d. Mittelecken - - - $>$ - ähnl. Fig. 398.

Im Falle cγ werden die CK. den Polk. von $mP2$ parallel, wenn $\frac{2m'(2n'-1)}{n'} = 3m$.

CG. $m''n''(2m'-mn')+2m''(m-m')n'-n''(2-n')mm'=0$

2) Mit $m'P$; da wiederum $n' < n$, so gelten dieselben CV. wie *sub* 1; die Flächen sind immer auf die Polk. von $mP2$ gesetzt, und bilden:

a) Abst. derselben, . . . wenn $m' = \frac{3}{4}m$; ähnl. Fig. 401.

b) Sechsfl. Zusp. der Polecke . . . . - - - $<$ - - ähnl. Fig. 402.

c) Zusch. der Mittelecke - - - $>$ - - und zwar sind die CK. mit den Höhenlinien der Flächen von $mP2$:

α) parallel, ... wenn $m' = m$; ähnl. Fig. 403.

β) convgt. n. d. Polecken . . - - - $<$ - ähnl. Fig. 404.

γ) convgt. n. d. Mittelecken - - - $>$ - ähnl. Fig. 405.

Im Falle b erscheinen die Zuspfl. als Rhomben, wenn $m' = \frac{1}{2}m$, und im Falle cγ werden die CK. den Polk. von $mP2$ parallel, wenn $m' = \frac{3}{2}m$.

CG. $m''n''(2m'-m)+2m''(m-m')-mm'n''=0$

3) $m'P2$ bildet:

a) Sechsfl. Zusp. der Polecke, ... wenn $m' < m$; ähnl. Fig. 399.

b) Zusch. der Mittelkanten - - - $>$ - ähnl. Fig. 400.

4) $\infty Pn'$ bildet Zusch. der Mittelecke, die Zuschfl. auf die Mittelkanten gesetzt; ähnl. Fig. 406.

CG. $2m''(n''-n')-n''(2-n')m=0$.

5) ∞P bildet jedenfalls Abst. der Mittelecke, ähnl. Fig. 408.

CG. $n''(2m''-m)-2m''=0$

6) ∞P2 bildet Abst. der Mittelkanten; Fig. 407.

7) *o*P bildet Abst. der Polecke; Fig. 409.

§. 374.

Combinationen des dihexagonalen Prismas ∞P*n*.

Es bildet an ∞P*n*:

1) $m'Pn'$, zwölffl. Zusp. beider Enden, und zwar sind die CK.

α) horizontal, ... wenn $n'=n$ *)
β) nach den norm. Seitenkanten fallend, - - - $>$ -
γ) nach den diag. Seitenkanten fallend, - - - $<$ -

CG. $m''(n-n'')n'+n''(n'-n)m'=0$

2) m'P, sechsfl. Zusp. beider Enden, die Zuspfl. auf die diag. Seitenkanten gesetzt.

CG. $m''(n-n'')-n''(n-1)m'=0$

3(m'P2, sechsfl. Zusp. beider Enden, die Zuspfl. auf die norm. Seitenkanten gesetzt.

CG. $2m''(n-n'')+n''(2-n)mm'$

4) *o*P, gerad angesetzte Endflächen.

5) $\infty Pn'$, Zusch. der norm. oder diagonalen Seitenkanten, je nachdem $n'>$ oder $<n$.

6) ∞P, Abst. der diagonalen, und

7) ∞P2, Abst. der normalen Seitenkanten.

§. 375.

Combinationen des hexagonalen Prismas ∞P.

Es bilden am Prisma ∞P:

---

*) Man vergleiche die analogen Figuren zum Tetragonalsysteme.

1) $m'Pn'$, zwölffl. Zusp. beider Enden.
CG. . $n''(n'-1)m'-m''(n''-1)n'=0$

2) $m'P$, sechsfl. Zusp. beider Enden, die Zuspfl. auf die Flächen gerad aufgesetzt; Fig. 410.

3) $m'P2$, sechsfl. Zusp. beider Enden, die Zuspfl. auf die Kanten gesetzt; Fig 411.
CG. $(2m''-m')n''-2m''=0$

4) oP, gerad angesetzte Endflächen.

5) ∞Pn, Zusch. der Seitenkanten.

6) $\infty P2$, Abst. der Seitenkanten.

§. 376.

Combinationen des hexagonalen Prismas $\infty P2$.

Es bilden am Prisma $\infty P2$:

1) $m'Pn'$, zwölffl. Zusp. beider Enden.
CG. $m''(2-n'')n'-n''(2-n')m'=0$

2) $m'P$, sechsfl. Zusp. beider Enden, die Zuspfl. auf die Kanten gesetzt; ähnl. Fig. 411.
CG. $2m''-n''(m'+m'')=0$

3) $m'P2$, sechsfl. Zusp. beider Enden, die Zuspfl. auf die Flächen gesetzt; ähnl. Fig. 410.

4) oP, gerad angesetzte Endflächen.

5) ∞Pn, Zusch. der Seitenkanten.

6) ∞P, Abst. der Seitenkanten.

§. 377.

Combinationen von oP.

Es bilden mit dem basischen Flächenpaare als vorherrschender Gestalt:

1) mPn, eine dihexagonale Tafel mit zweireihig schief angesetzten Randflächen.

2) mP und $mP2$, eine hexagonale Tafel mit zweireihig schief angesetzten Randflächen.

3) ∞Pn, eine dihexagonale Tafel mit gerad angesetzten Randflächen.

4) ∞P und $\infty P2$, eine hexagonale Tafel mit gerad angesetzten Randflächen.

b) Hemiëdrische Combinationen.

1) Rhomboëdrische Combinationen.

§. 378.

Verschiedene Darstellung dieser Combinationen.

Die rhomboëdrischen Combinationen sind diejenigen hexagonalen Combinationen, in welchen die Glieder der Hauptreihe als Rhomboëder, die Glieder der Zwischenreihen als Skalenoëder, alle übrigen Gestalten aber mit ihrer vollen Flächenzahl erscheinen (§. 306). Da wir nun in der Lehre von der Ableitung den Zusammenhang und die Bezeichnung der Gestalten des Hexagonalsystemes in seiner skalenoëdrischen Erscheinungsweise von einem zweifachen Gesichtspuncte aus dargestellt haben, indem wir dabei einerseits die ursprünglichen Beziehungen der hemiëdrischen Gestalten zu ihren respectiven Muttergestalten, anderseits aber gewisse abgeleitete Beziehungen der Skalenoëder zu den Rhomboëdern zu Grunde legten, so fragt es sich, welche von beiden Ansichten wir der Combinationslehre zu Grunde legen sollen. Wegen der grösseren Anschaulichkeit und Einfachheit der secundären Ableitung würden wir derselben jedenfalls den Vorzug geben müssen, wenn nicht bei ihrer Anwendung der Zusammenhang der hexagonalen Pyramiden der Nebenreihe mit den Rhomboëdern und Skalenoëdern gänzlich verloren ginge; ein Zusammenhang, den wir wegen des nicht seltenen Auftretens jener Pyramiden in rhomboëdrischen Combinationen ja nicht aus dem Auge verlieren dürfen. Um daher beiden Anforderungen Genüge zu leisten, sind wir genöthigt, die Combinationsgesetze zuvörderst für die primitive Ableitung und Bezeichnung aufzusuchen, und nachher sämmtliche auf die Skalenoëder bezügliche Regeln in die Sprache der secundären Ableitung zu übersetzen.

α) Combinationsregeln für die primitive Bezeichnung.

§. 379.

Combinationen zweier Skalenoëder.

Die Theorie der binären rhomboëdrischen Combinationen beruht auf den Combinationsgesetzen zweier Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$ und $\frac{m'Pn'}{2}$, für welche wir jedoch, wie für die hemiëdrischen Gestalten überhaupt, die zweifache Stellung zu berücksichtigen haben. Aus den Gleichungen der Kantenlinien in §. 332, oder auch unmittelbar aus den Cotangenten der Winkel α und β in §. 335, und der leicht zu berechnenden Cotangente des Neigungswinkels γ der Mittelkanten gegen die Basis, folgt für je zwei Skalenoëder

A. bei gleicher Stellung:

$$\alpha' >=< \alpha, \text{ wenn } \frac{m'(n'+1)}{n'} <=> \frac{m(n+1)}{n}$$

$$\beta' >=< \beta, \text{ wenn } \frac{m'(2n'-1)}{n'} <=> \frac{m(2n-1)}{n}$$

$$\gamma' >=< \gamma, \text{ wenn } \frac{m'(2-n')}{n'} >=< \frac{m(2-n)}{n}$$

B. bei verwendeter Stellung:

$$\beta' >=< \alpha, \text{ wenn } \frac{m'(2n'-1)}{n'} <=> \frac{m(n+1)}{n}$$

$$\alpha' >=< \beta, \text{ wenn } \frac{m'(n'+1)}{n'} <=> \frac{m(2n-1)}{n}$$

Aus diesen Bedingungen ergeben sich folgende Combinationsverhältnisse beider Gestalten:

A. bei gleicher Stellung; dann bildet $\pm\frac{m'Pn'}{2}$ als untergeordnete Gestalt an $\pm\frac{mPn}{2}$:

I. Zuschärfungen der Kanten; und zwar

1) der stumpferen Polk., wenn $\alpha'=\alpha$, $\beta'>\beta$ und daher auch $n'<n$; Fig. 424.

2) der schärferen Polk., wenn $\beta'=\beta$, $\alpha'>\alpha$ und daher $n'>n$, Fig. 425.

3) der Mittelkanten, wenn $\gamma'=\gamma$, $\alpha'<\alpha$ und $m'>m$; Fig. 426.

II. Sechsfl. Zusp. der Polecke, wenn $\alpha'>\alpha$ und $\beta'>\beta$; und zwar sind die CK.

4) horizontal, ... wenn $n'=n$; Fig. 427.

5) nach d. schärf. Polk. einfallend . . . . - - - > - Fig. 429.

6) nach d. stumpf. Polk. einfallend . . . . - - - < - Fig. 428.

Im Falle 6 werden die CK. den Mittelkanten parallel, wenn $\frac{m'(2-n')}{n'}=\frac{m(2-n)}{n}$.

III. Zusch. der Mittelecke, je zwei Zuschfl. auf die stumpferen Pol- und die Mittelkanten gesetzt, wenn $\alpha'<\alpha$ und $\gamma'>\gamma$; und zwar sind die heteropolaren CK.

7) horizontal, ... wenn $n'=n$; Fig. 430.

8) nach d. stumpf. Polk. einfallend . . . . - - - > -

9) nach d. schärf. Polk. einfallend . . . . - - - < -

Im Falle 9 werden die CK. den schärf. Polk. parallel, wenn $\beta'=\beta$; Fig. 431.

IV. Zusch. der Mittelecke, je zwei Zuschfl. auf die schärferen Pol- und die Mittelkanten gesetzt, wenn $\beta'<\beta$, und $\gamma'<\gamma$, daher $n'>n$; und zwar sind die CK. mit den stumpferen Polk.

10) parallel, ... wenn $\alpha'=\alpha$; Fig. 438.
11) convgt. n. d. Mittelecken - - - $<$ -
12) convgt. n. d. Polecken - - - $>$ -

B. Bei verwendeter Stellung; dann bildet $\mp\frac{m'Pn'}{2}$ an der vorherrschenden Gestalt $\pm\frac{mPn}{2}$.

I. Zusch. der Kanten, und zwar nur
13) der schärf. Polk., wenn $\alpha'=\beta$ und $\beta'>\alpha$; ähnl. Fig. 425.

II. Sechsfl. Zusp. der Polecke, wenn $\alpha'>\beta$ und $\beta'>\alpha$, und zwar sind die CK.
14) stets n. d. schärf. Polk. fallend; ähnl. Fig. 429.

III. Zusch. der Mittelecke, je zwei Zuschfl. auf die schärf. Pol- und Mittelkanten gesetzt, wenn $\alpha'<\beta$; und zwar sind die CK. mit den stumpferen Polk.
15) parallel, ... wenn $\beta'=\alpha$; Fig. 438.
16) convgt. n. d. Mittelecken, - - - $<$ -
17) convgt. n. d. Polecken, - - - $>$ -

In diesen 17 Fällen sind alle möglichen CV. zweier Skalenoëder erschöpft, weshalb sie die Grundlage der folgenden §§. bilden, in welchen wir die binären Combinationen der einzelen Gestalten durchgehen werden.

§. 380.

Combinationen des Skalenoëders $\frac{mPn}{2}$.

1) Mit $\frac{m'Pn'}{2}$; diese Gestalt bildet bei gleicher Stellung die im vorigen §. *sub* A, bei verwendeter Stellung die ebendaselbst *sub* B aufgeführten CV. unter den angegebenen Bedingungen.

2) Mit $\frac{m'P}{2}$;

A. bei gleicher Stellung; weil $n'<n$, so wer-

den die möglichen CV. Nr. 1, 6 und 9; die Flächen des Rhomboëders sind immer auf die stumpferen Polk. des Skalenoëders gesetzt, und bilden:

a) Abst. derselben, wenn $m' = \frac{m(n+1)}{2n}$; Fig. 432.

b) Dreifl. Zusp. d. Polecke, . . . - - - < - - - Fig. 433 u. 434.

c) Abst. der Mittelecke, ... - - - > - - - und zwar sind die CK. mit den schärferen Polk.:

α) parallel, ... wenn $m' = \frac{m(2n-1)}{n}$; Fig. 435.

β) convgt. n. d. Polecken, - - - < - - - Fig. 436.

γ) convgt. n. d. Mittelecken - - - > - - - Fig. 437.

Im Falle b erscheinen die Zuspf. als Rhomben, wenn $m' = \frac{m(2-n)}{n}$; Fig. 433., im Falle cγ, wenn $m' = \frac{m(n^2-n+1)}{n(2-n)}$.

B. Bei verwendeter Stellung; die Flächen des Rhomboëders sind immer auf die schärf. Polk. des Skal. gesetzt, und bilden:

a) Abst. derselben, wenn $m' = \frac{m(2n-1)}{2n}$; Fig. 439.

b) Dreifl. Zusp. d. Polecke, ... - - - < - - - Fig. 440.

c) Abst. d. Mittelecke, - - - > - - - und zwar sind die CK. mit den stumpferen Polk.:

α) parallel, ... wenn $m' = \frac{m(n+1)}{n}$; Fig. 441.

β) convgt. n. d. Poleken, . . - - - < - - -

γ) convgt. n. d. Mittelecken - - - > - - -

3) Mit m'P2; da $n' > n$, so werden die möglichen CV. Nr. 2, 5, 10, 11 und 12*); die Flächen von m'P2 liegen immer paarweis an den schärferen Polk. und bilden:

---

*) Nr. 3 und 8 sind unmöglich, weil $\gamma' = 0$, und daher $\angle\gamma'$

a) Zusch. derselben, ... wenn $m' = \frac{2m(2n-1)}{3n}$
b) Sechsfl. Zusp. der Polecke, - - - $<$ - - -
c) Zusch. der Mittelecke, . . - - - $>$ - - -
und zwar sind die CK. mit den stumpferen Kanten des Skalenoëders:
α) parallel, ... wenn $m' = \frac{2m(n+1)}{3n}$
β) convgt. n. d. Polecken - - - $<$ - - -
γ) convgt. n. d. Mittelecken - - - $>$ - - -

4) Mit $\infty Pn'$; da $m' > m$, so sind Nr. 7, 8 und 9 die möglichen CV.; die Flächen des Prismas bilden jedenfalls Zusch. der Mittelecke, und zwar sind die CK.:
α) horizontal, ... wenn $n' = n$
β) n. d. stumpfen Polk. fallend - - - $>$ -
γ) n. d. schärf. Polk. fallend - - - $<$ -

5) ∞P bildet Abst. der Mittelecke, Fig. 442.

6) $\infty P2$ bildet Abst. der Mittelkanten; Fig. 443.

7) oP bildet Abst. der Polecke; Fig. 444.

§. 381.

Combinationen des Rhomboëders $\frac{mP}{2}$.

1) Mit $\frac{m'Pn'}{2}$;

A. bei gleicher Stellung; da $n' > 1$, so werden die möglichen CV. Nr. 2, 3, 5, 8, 10, 11 und 12; die Flächen des Skalenoëders erscheinen immer paarweis und bilden:

a) Sechsfl. Zusp. d. Polecke, wenn
$\frac{m'(2-n')}{n'} < m$ und $\frac{m'(2n'-1)}{n'} < m$; Fig. 413.

b) Zusch. d. Polk., wenn
$\frac{m'(2-n')}{n'} < m$ und $\frac{m'(2n'-1)}{n'} = m$; Fig. 412.

c) Zusch. d. Mittelecke, die Zuschfl. auf die Pol- und Mittelkanten gesetzt, wenn

$$\frac{m'(2-n')}{n'} < m \text{ und } \frac{m'(2n'-1)}{n'} > m;\ \text{Fig. 416.}$$

d) Zusch. d. Mittelkanten, wenn

$$\frac{m'(2-n')}{n'} = m;\ \text{Fig. 414.}$$

e) Zusch. d. Mittelecke, die Zuschfl. paarweis auf die Flächen gesetzt, wenn

$$\frac{m'(2-n')}{n'} > m;\ \text{Fig. 415.}$$

Im Falle c sind die CK. mit den geneigten Diagonalen der Rhomboëderflächen:

α) parallel, ... wenn $\frac{m'(n'+1)}{2n'} = m$

β) convgt. n. d. Polecken - - - - - $<$ -

γ) convgt. n. d. Mittelecken - - - - - $>$ -

B. Bei verwendeter Stellung bildet das Skalenoëder:

a) Zusch. d. Polk., ... wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} = m$

b) Sechsfl. Zusp. d. Polecke - - - - - $<$ -

c) Zusch. der Mittelecke . . - - - - - $>$ -

und zwar sind die CK. mit den geneigten Diagonalen der Rhomboëderflächen:

α) parallel, ... wenn $\frac{m'(2n'-1)}{2n'} = m$

β) convgt. n. d. Polecken . . - - - - - $<$ -

γ) convgt. n. d. Mittelecken - - - - - $>$ -

2) Mit $\frac{m'P}{2}$;

A. bei gleicher Stellung; die Flächen sind immer auf die Flächen gesetzt, und bilden:

a) dreifl. Zusp. der Polecke, wenn $m' < m$; Fig. 417.

b) Abst. der Mittelecke . . - - - $>$ - Fig. 418.

B. Bei verwendeter Stellung; die Flächen sind immer auf die Polk. gesetzt, und bilden:

a) Abst. derselben, ... wenn $m' = \frac{1}{2}m$; Fig. 419.
b) Dreifl. Zusp. der Polecke - - - < - - Fig. 420.
c) Abst. der Mittelecke . . . - - - > - - und zwar sind die CK. mit den geneigten Diagonalen der Flächen des vorherrschenden Rhomboëders:
α) parallel, ... wenn $m' = 2m$
β) convgt. n. d. Polecken . . - - - < - - Fig. 421.
γ) convgt. n. d. Mittelecken - - - > - -

3) Mit m'P2; die Flächen dieser Pyramiden sind paarweis auf die Polk. des Rhomboëders gesetzt, und bilden:
a) Zusch. derselben, ... wenn $m' = \frac{2}{3}m$
b) Sechsfl. Zusp. der Polecke - - - < - -
c) Zusch. der Mittelecke . . . - - - > - - und zwar sind die CK. mit den geneigten Diagonalen der Rhomboëderflächen:
α) parallel, ... wenn $m' = \frac{4}{3}m$
β) convgt. n. d. Polecken . - - - < - -
γ) convgt. n. d. Mittelecken - - - > - -

4) ∞Pn' bildet stets Zusch. der Mittelecke, die Zuschfl. auf die Mittelkanten gesetzt, die Zuschärfungskanten vertical; ähnl. Fig. 415.

5) ∞P bildet Abst. der Mittelecke; ähnl. Fig. 418.

6) ∞P2 bildet Abst. der Mittelkanten; Fig. 422.

7) oP bildet Abst. der Polecke; Fig. 423.

§. 382.

Combinationen der hexagonalen Pyramide mP2.

1) Mit $\frac{m'Pn'}{2}$; da $n' < 2$, so werden die möglichen CV. Nr. 1, 6 und 9; die Flächen des Skalenoëders sind paarweis auf die abwechselnden Polk. der Pyramide gesetzt, und bilden:
a) Zusch. derselben, wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} = \frac{3}{2}m$; Fig. 445.

b) Sechsfl. Zusp. der Polecke . . . . . . wenn $\frac{m'(n'+1)}{n'} < \frac{3}{2}m$; Fig. 446.

c) Zusch. der Mittelecke . . . . - - - - - > - - und zwar sind die heteropolaren CK. mit den Höhenlinien der Pyramidenflächen:

α) parallel, ... wenn $m' = m$

β) convgt. n. d. Polecken . . - - - < -

γ) convgt. n. den Mittelecken - - - > - Fig. 447.

Im Falle cγ werden dieselben CK. den Polkanten der Pyramide parallel, wenn $\frac{m'(2n'-1)}{n'} = \frac{3}{2}m$.

2) Mit $\frac{m'P}{2}$; diese Gestalt, deren Flächen immer auf die abwechselnden Polkanten der Pyramide gesetzt sind, bildet:

a) Abst. derselben, ... wenn $m' = \frac{3}{4}m$; Fig. 448.

b) Dreifl. Zusp. der Polecke - - - < - - Fig 449.

c) Abst. der Mittelecke . . - - - > - - und zwar sind die heteropolaren CK. mit den Höhenlinien der Pyramidenflächen:

α) parallel, ... wenn $m' = m$

β) convgt. n. d. Polecken . - - - < -

γ) convgt. n. d. Mittelecken - - - > - Fig. 450.

Im Falle cγ werden dieselben CK. den Polkanten der Pyramide parallel, wenn $m' = \frac{3}{2}m$; Fig. 450.

§. 383.

Combinationen von ∞P, ∞P2 und *o*P.

Es bilden an ∞P:

1) $\frac{m'Pn'}{2}$, beiderseits sechsfl. Zusp., die Zuspfl. paarweis auf die abwechselnden Flächen oben und unten widersinnig aufgesetzt, so dass auf jeder Fläche von ∞P ein oberes und ein unteres Paar Combinationskanten entsteht, welche allein ein Deltoid bilden würden; die Flächen von ∞P werden daher unregelmässige Sechsecke; Fig. 451.

2) $\frac{m'P}{2}$, dreifl. Zusp., die Zuspfl. auf die abwechselnden Flächen oben und unten widersinnig aufgesetzt; auf jeder Fläche von ∞P entstehen eine horizontale (heteropolare) und zwei geneigte (amphipolare) Combinationskanten, weshalb diese Flächen selbst als unregelmässige Fünfecke erscheinen; Fig. 458.

Es bilden an ∞P2:

1) $\frac{m'Pn'}{2}$, beiderseits sechsfl. Zusp., so dass auf jeder Fläche des Prismas zwei, der Mittelkante des Skalenoëders parallele CK. entstehen, weshalb diese Flächen selbst als Rhomboide erscheinen; Fig. 452.

2) $\frac{m'P}{2}$, beiderseits dreifl. Zusp., die Zuspfl. auf die abwechselnden Kanten von ∞P2 oben und unten widersinnig aufgesetzt; die CK. liegen wie im vorigen Falle, und es erscheinen daher die Flächen des Rhomboëders als Rhomben, die Flächen des Prismas als Rhomboide; Fig, 457.

Es bilden mit *o*P:

1) $\frac{m'Pn'}{2}$, zwölfseitige Tafeln, mit 12 trapezischen Randflächen, welche paarweis, abwechselnd schief angesetzt sind; Fig. 453 und 454.

2) $\frac{m'P}{2}$, sechsseitige Tafeln mit sechs trapezischen, abwechselnd schief angesetzten Randflächen; Fig. 455 und 456.

β) Combinationsregeln für die secundäre Bezeichnung.

§. 384.

Combinationen zweier Skalenoëder mR^n und $m'R^{n'}$.

Wollen wir die in den vorhergehenden §§. enthaltenen Regeln der binären rhomboëdrischen Combinationen in die Sprache der secundären Ableitung und Bezeichnung übersetzen, so haben wir, weil dem Zeichen mR^n das Zeichen $mnP\frac{2n}{n+1}$ entspricht, in den allgemeinen Bedingungen des §. 379 mn und $m'n'$ statt m und m', $\frac{2n}{n+1}$ und $\frac{2n'}{n'+1}$ statt n und n' zu schreiben; dann erhalten dieselben Bedingungen für die Combinationen zweier Skalenoëder mR^n und $m'R^{n'}$ folgende Form:

A. Bei gleicher Stellung ist:

$\alpha' >=< \alpha$, wenn $m'(3n'+1) <=> m(3n+1)$
$\beta' >=< \beta$, wenn $m'(3n'-1) <=> m(3n-1)$
$\gamma' >=< \gamma$, wenn $m' >=< m$

B. Bei verwendeter Stellung ist:

$\alpha' >=< \beta$, wenn $m'(3n'+1) <=> m(3n-1)$
$\beta' >=< \alpha$, wenn $m'(3n'-1) <=> m(3n+1)$

Aus diesen Bedingungen ergeben sich folgende Combinationsverhältnisse beider Gestalten.

Es bildet das untergeordnete Skalenoëder $m'R^{n'}$ an dem vorherrschenden Skalenoëder mR^n:

A. Bei gleicher Stellung,

I. Zuschärfungen der Kanten, und zwar

1) der stumpferen Polk., wenn $m'(3n'+1)=m(3n+1)$, $m'>m$ und $n'<n$: Fig. 424.

2) der schärf. Polk., wenn $m'(3n'-1)=m(3n-1)$, $m'<m$ und $n'>n$; Fig. 425.

3) der Mittelkanten, wenn $m'=m$ und $n'>n$; Fig. 426.

II. Sechsfl. Zusp. der Polecke, wenn $m'(3n'+1) > m(3n+1)$ und $m'(3n'-1) > m(3n-1)$, und zwar sind die CK.

4) horizontal, ... wenn $n'=n$; Fig. 427.

5) nach d. schärf. Polk. fallend - - - $>$ - Fig. 429.

6) nach d. stumpferen Polk. fallend . . . . - - - $<$ - Fig. 428.

Im Falle 6 werden die CK. den Mittelkanten von mR^n parallel, wenn $m' = m$.

III. Zusch. der Mittelecke, je zwei Zuschfl. auf die stumpferen Pol- und Mittelkanten gesetzt, wenn $m'(3n'+1) > m(3n+1)$, und $m' > m$; und zwar sind die CK.

7) horizontal, ... wenn $n' = n$; Fig. 430.
8) nach d. stumpf. Polk. fallend - - - > -
9) nach d. schärf. Polk. fallend - - - < - Fig. 431.

Im Falle 9 werden die CK. den schärf. Polk. von mR^n parallel, wenn $m'(3n'-1) = m(3n-1)$; Fig. 431.

IV. Zusch. der Mittelecke, je zwei Zuschfl. auf die schärferen Pol- und Mittelkanten gesetzt, wenn $m'(3n'-1) > m(3n-1)$, und $m' < m$, $n' > n$; und zwar sind die CK. mit den stumpferen Polk.

10) parallel, wenn $m'(3n'+1) = m(3n+1)$; Fig. 438.
11) convgt. n. d. Mittelecken - - - - - > - - -
12) convgt. n. d. Polecken - - - - - < - - -

B. *Bei verwendeter Stellung,*

I. Zusch. der Kanten, und zwar nur

13) der schärf. Polk., wenn $m'(3n'+1) = m(3n-1)$

II. Sechsfl. Zusp. der Polecke, wenn $m'(3n'+1) < m(3n-1)$; und zwar sind die CK. jederzeit

14) nach d. schärf. Polk. fallend.

III. Zusch. der Mittelecke, wenn $m'(3n'+1) > m(3n-1)$; und zwar sind die CK. mit den stumpferen Polk. von mR^n

15) parallel, ... wenn $m'(3n'-1) = m(3n+1)$
16) convgt. n. d. Mittelecken . . . . - - - - - > - - -
17) convgt. n. d. Polecken . . . . - - - - - < - - -

Für die speciellen Regeln der binären Combinationen, wie solche in den §§. 380 — 383 mitgetheilt wurden, haben wir gleichfalls nur die primitiven Ableitungscoëfficienten aller Skalenoëder als Functionen der secundären Coëfficienten auszudrücken, d. h. für jedes m den Werth mn, für jedes n den Werth $\frac{2n}{n+1}$ zu substituiren, darauf mR^n statt $\frac{mPn}{2}$ und mR statt $\frac{mP}{2}$ zu schreiben, um dieselben Regeln in die Sprache der secundären Bezeichnung zu übersetzen; wobei es sich von selbst versteht, dass die Ableitungscoëfficienten m und m' der Rhomboëder und hexagonalen Pyramiden der Nebenreihe ganz unverändert bleiben müssen. Wiewohl nun hiernach die Transformation der in den §§. 380 — 383 enthaltenen Regeln leicht auszuführen ist, so glaube ich doch die Resultate derselben mittheilen zu müssen, weil die rhomboëdrischen Combinationen eine so wichtige Rolle im Mineralreiche spielen, und die secundäre Bezeichnung für die Mineralogie der primitiven vorzuziehen ist.

§. 385.

Combinationen des Skalenoëders mR^n.

1) Mit $m'R^{n'}$; diese Gestalt bringt die im vorigen §. aufgezählten 17 CV. unter den daselbst erwähnten Bedingungen hervor.

2) Mit $m'R$;

A. bei gleicher Stellung; da $n' < n$, so werden die möglichen CV. Nr. 1, 6 und 9; die Flächen des Rhomboëders sind immer auf die stumpferen Polkanten gesetzt, und bilden

a) Abst. derselben, wenn $m' = \frac{1}{4}m(3n+1)$: Fig. 432.

b) Dreifl. Zusp.
d. Polecke, wenn $m' < \frac{1}{4}m(3n+1)$; Fig. 433 u. 434.

c) Abst. d. Mittelecke . . . - - - > - - - und zwar sind die CK. mit den schärferen Polk.

α) parallel, ... wenn $m' = \frac{1}{2}m(3n-1)$; Fig. 435.
β) convgt. n. d. Polecken - - - < - - - Fig. 436.
γ) convgt. n. d. Mittelecken - - - > - - - Fig. 437.

Im Falle b erscheinen die Zuspfl. als Rhomben, wenn $m' = m$, im Falle cγ, wenn $m, = \frac{1}{4}(3n^2 + 1)m$.

B. Bei verwendeter Stellung; die Flächen von $m'R$ sind immer auf die schärf Polk. von mR^n gesetzt, und bilden:

a) Abst. derselben, wenn $m' = \frac{1}{4}m(3n-1)$; Fig. 439.

b) Dreifl. Zusp. der
Polecke . . . . . - - - < - - - Fig. 440.

c) Abst. der Mittelecke . . . . - - - > - - - und zwar sind die CK. mit den stumpferen Polk.

α) parallel, ... wenn $m' = \frac{1}{2}m(3n+1)$; Fig. 441,
β) convgt. n. d. Polecken - - - < - - - -
γ) convgt. n. d. Mittelecken - - - > - - - -

3) Mit $m'P2$; die Flächen der Pyramide liegen immer paarweis an den schärferen Polk. des Skalenoëders, und bilden:

a) Zusch. derselben, ... wenn $m' = \frac{}{3}m(3n-1)$
b) Sechsfl. Zusp. der Polecke - - - < - - -
c) Zusch. der Mittelecke . . - - - > - - -
und zwar sind die CK. mit den stumpferen Polk.

α) parallel, ... wenn $m' = \frac{1}{2}m(3n+1)$
β) convgt. n. d. Polecken - - - < - - - -
γ) convgt. n. d. Mittelecken - - - > - - - -

4) $\infty R^{n'}$ bildet Zusch. der Mittelecke, die Zuschfl. auf die Mittelkanten gesetzt, und zwar sind die CK.

α) horizontal, ... wenn $n' = n$; ähnl. Fig. 430.
β) nach d. stumpf. Polk. fallend - - - > -
γ) nach d. schärf. Polk. fallend - - - < -

5) ∞R bildet Abst. der Mittelecke; Fig. 442.

6) ∞P2 bildet Abst. der Mittelkanten; Fig. 443.

7) oR bildet Abst. der Polecke; Fig. 444.

§. 386.

Combinationen des Rhomboëders mR.

1) Mit $m'R^{n'}$;

A. Bei gleicher Stellung; da $n' > n$, so sind die möglichen CV. Nr. 2, 3, 5, 8, 10, 11 und 12; die Flächen des Skalenoëders liegen immer paarweis beisammen, und bilden:

a) Sechsfl. Zusp. d. Polecke, wenn $m' < m$ u. $\frac{1}{2}m'(3n'-1) < m$; Fig. 413.

b) Zusch. der Polkanten - - - - - - - - - - = - Fig. 412.

c) Zusch. der Mittelecke, die Zuschfl. auf die Pol- und Mittelkanten gesetzt . . . - - - - - - - - - - > - Fig. 416.

d) Zusch. der Mittelkanten, wenn $m' = m$; Fig. 414.

e) Zusch. der Mittelecke, die Zuschfl. paarweis auf die Rhomboëderflächen gesetzt - - $m' > m$; Fig. 415.

Im Falle c sind die CK. mit den geneigten Diagonalen der Rhomboëderflächen:

α) parallel, ... wenn $\frac{1}{2}m'(3n'+1) = m$

β) convgt. n. d. Polecken - - - - - - - $<$ -

γ) convgt. n. d. Mittelecken - - - - - - - $>$ -

B. Bei verwendeter Stellung bildet $m'R^{n'}$

a) Zusch. der Polkanten, . . wenn $\frac{1}{2}m'(3n'+1) = m$

b) Sechsfl. Zusp. d. Polecke - - - - - $<$ -

c) Zusch. der Mittelecke . . - - - - - $>$ -

und zwar sind die CK. mit den geneigten Diagonalen der Rhomboëderflächen:

α) parallel, ... wenn $\frac{1}{4}m'(3n'-1) = m$
β) convgt. n. den Polecken - - - - - - - $<$ -
γ) convgt. n. d. Mittelecken - - - - - - - $>$ -

2) Mit $m'R$;

A. bei gleicher Stellung; die Flächen sind immer auf die Flächen aufgesetzt, und bilden:

a) Dreifl. Zusp. d. Polecke, wenn $m' < m$; Fig. 417.
b) Abst. der Mittelecke . . . - - - $>$ - Fig. 418.

B. Bei verwendeter Stellung; die Flächen von $m'R$ sind immer auf die Polk. von mR gesetzt, und bilden:

a) Abst. derselben, ... wenn $m' = \frac{1}{2}m$; Fig. 419.
b) Dreifl. Zusp. d. Polecke - - - $<$ - - Fig. 420.
c) Abst. der Mittelecke . - - - $>$ - - und zwar sind die CK. mit den geneigten Diagonalen der Flächen von mR:

α) parallel, ... wenn $m' = 2m$
β) convgt. n. d. Polecken - - - $<$ - - Fig. 421.
γ) convgt. n. d. Mittelecken - - - $>$ - -

3) Mit $m'P2$; die Flächen sind immer paarweis auf die Polk. des Rhomboëders gesetzt, und bilden:

a) Zusch. derselben, . . . wenn $m' = \frac{2}{3}m$
b) Sechsfl. Zusp. d. Polecke - - - $<$ - -
c) Zusch. der Mittelecke - - - $>$ - - und zwar sind die CK. mit den geneigten Diagonalen der Rhomboëderflächen:

α) parallel, ... wenn $m' = \frac{4}{3}m$
β) convgt. n. d. Polecken - - - $<$ - -
γ) convgt. n. d. Mittelecken - - - $>$ - -

4) $\infty R^{n'}$ bildet Zusch. der Mittelecke, die Zuschfl. auf die Mittelkanten gesetzt; ähnl. Fig. 415.

5) ∞R bildet Abst. der Mittelecke; ähnl. Fig. 418.

6) $\infty P2$ bildet Abst. der Mittelkanten; Fig. 422.

7) oR bildet Abst. der Polecke; Fig. 423.

§. 387.

Combinationen der hexagonalen Pyramide $mP2$.

1) Mit $m'R^{n'}$; die Ambiguität der Stellung des Skalenoëders ist ohne Einfluss; seine Flächen liegen immer paarweis an den abwechselnden Polkanten von $mP2$, und bilden:

a) Zusch. der abwechselnden Polkanten, wenn $\frac{1}{3}m'(3n'+1)=m$; Fig. 445.

b) Sechsfl. Zusp. der Polecke, ... - - - - - $<$ - Fig. 446.

c) Zusch. d. Mittelecke - - - - - $>$ - und zwar sind die heteropolaren CK. mit den übrigen Polk. der Pyramide:

α) parallel, ... wenn $\frac{1}{3}m'(3n'-1)=m$

β) convgt. n. d. Polecken - - - - - - $<$ - Fig. 447.

γ) convgt. n. d. Mittelecken - - - - - - $>$ -

Im Falle cβ werden dieselben CK. den Höhenlinien der Pyramidenflächen paralell, wenn $m'n'=m$.

2) Mit $m'R$; die Ambiguität der Stellung ist ohne Einfluss; die Flächen des Rhomboëders sind auf die abwechselnden Polk. der Pyramide gesetzt und bilden:

a) Abst. derselben, . . . wenn $m'=\frac{3}{4}m$; Fig. 448.

b) Dreifl. Zusp. der Polecke - - - $<$ - - Fig. 449.

c) Abst. der Mittelecke . . - - - $>$ - - und zwar sind die heteropolaren CK. mit den übrigen Polk. der Pyramide:

α) parallel, ... wenn $m'=\frac{3}{2}m$; Fig. 450.

β) convgt. n. d. Polecken - - - $<$ - -

γ) convgt. n. d. Mittelecken - - - $>$ - -

Im Falle cβ werden dieselben CK. den Höhenlinien parallel, wenn $m'=m$.

γ) Combinationsgleichungen für die rhomboëdrischen Combinationen.

§. 388.

CG. für die primitive Bezeichnung.

Weil in den Combinationen hemiëdrischer Gestalten überhaupt mehre verschiedenartige Combinationskanten zu berücksichtigen sind, so haben wir auch für die Combinationen zweier Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$ und $\frac{m'Pn'}{2}$ mehre Combinationsgleichungen aufzusuchen, und namentlich folgende Fälle zu unterscheiden:

A. *Bei gleicher Stellung der beiden gegebenen Gestalten.*

a) Für heteropolare CK. = *II.*

Die diesem Falle entsprechende CG. ist identisch mit der oben in §. 371 *sub* 1 stehenden CG. für mPn und $m'Pn'$, und wird daher:

I. $m''n''(m'n-mn')+m''(m-m')nn'+n''(n'-n)mm'=0$

Die dritte Gestalt $\frac{m''Pn''}{2}$ hat jedenfalls gleiche Stellung mit jeder der gegebenen Gestalten.

b) Für amphipolare CK. = *II'.*

Aus der gegenseitigen Lage der Flächen beider Gestalten ergiebt sich, dass die diesem Falle entsprechende CG. aus der CG. Nr. I. folgt, sobald man in derselben m' negativ, und statt n' die Grösse $\frac{n'}{n'-1}$ setzt; dann wird die gesuchte CG.:

II. $m''n''[mn'+m'n(n'-1)]-m''(m+m')nn'+n''[n'-n(n'-1)]mm'=0$

Bei dem Gebrauche dieser und der folgenden Gleichungen wird jedoch durchgängig vorausgesetzt, dass die abstumpfenden Flächen der dritten Gestalt gleiche Lage mit den Flächen der ersten Gestalt haben, und dass sich die dritte Gestalt selbst mit der ersten in gleicher Stellung befinde. Man hat daher jedenfalls diejenige der gegebenen Gestalten $=\frac{mPn}{2}$ zu setzen, deren Flächen mit den Flächen der gesuchten Gestalt analoge Lage haben.

B. Bei verwendeter Stellung der beiden gegebenen Gestalten.

a) Für heteropolare CK. $= II_1$.

Aus den Verhältnissen der beiden gegebenen Gestalten ist einleuchtend, dass man nur in der CG. Nr. II. die Grösse m' negativ zu setzen braucht, um auf die, dem gegenwärtigen Falle entsprechende, CG. zu gelangen; es wird selbige demnach:

III. $m''n''[mn'-m'n(n'-1)]-m''(m-m')nn'-n''[n'-n(n'-1)]mm'=0$

und ist bei ihrem Gebrauche nur darauf zu sehen, dass man diejenige der bekannten Gestalten als $\frac{mPn}{2}$ einführt, welche gleiche Stellung mit der gesuchten Gestalt hat.

b) Für amphipolare CK. $= II'_1$.

Die für diesen Fall gültige Gleichung ist keine andre als die CG. Nr. I. mit negativem m', also:

IV. $m''n''(m'n+mn')-m''(m'+m)nn'+n''(n'-n)mm'=0$

Die Bedingung ihrer unmittelbaren Gültigkeit ist übrigens dieselbe wie in den vorhergehenden Fällen.

§. 389.

CG. für die secundäre Bezeichnung.

Die im vorigen §. mitgetheilten CG. beziehen sich nur auf die primitiven Zeichen, besitzen aber eben deshalb den Vortheil einer allgemeinen, von der Beschaffenheit der combinirten Gestalten ganz unabhängigen Gültigkeit, weil das Zeichen $\frac{mPn}{2}$ eben sowohl ein Skalenoëder und Rhomboëder, als eine hexagonale Pyramide der Nebenreihe bedeuten kann. Für die secundäre Bezeichnung werden diese Gleichungen nicht nur überhaupt einer angemessenen Transformation, sondern auch, wegen der von dieser Bezeichnung ausgeschlossenen Pyramiden der Nebenreihe, einer unvermeidlichen Vervielfältigung unterworfen werden müssen, indem dadurch zunächst die Unterscheidung der Fälle nothwendig wird, ob beide gegebene Gestalten von der Form mR^n sind, oder ob eine derselben von der Form mP2 ist. Die Transformation selbst ist ganz einfach, und besteht darin, dass in den vier CG. des vorigen §. für jede Gestalt mR^n statt m und n die Grössen mn und $\frac{2n}{n+1}$ eingeführt werden, während für jede Gestalt mP2 $n=2$ zu setzen ist. Die Gleichungen gewinnen dadurch sehr an Einfachheit und Uebereinstimmung.

Man erhält nämlich:

1) Für mR^n und $m'R^{n'}$

A. Bei gleicher Stellung derselben:

I. $m''n''(m-m')\pm m'n'(m''-m)-mn(m''-m')=0$

wo das obere Zeichen für heteropolare, das untere Zeichen für amphipolare CK. gilt. Im letzteren Falle könnte sich die dritte Gestalt $m''R^{n''}$ in verwendeter Stellung zu mR^n befinden; dann ist m'' negativ zu nehmen; auch könnte die dritte Gestalt von der Form m''P2 seyn; dann wird die CG.:

a) $m''(m-m')+mm'(n+n')=0$

B. Bei verwendeter Stellung derselben:

II. $m''n''(m+m')\mp m'n'(m''-m)-mn(m''+m')=0$

wo wiederum das obere Zeichen für heteropolare, das untere Zeichen für amphipolare CK. gilt. Wenn die dritte Gestalt von der Form m''P2 ist, wird diese CG.:

a) $m''(m+m')-mm'(n\pm n')=0$

2) Für mR^n und m'P2;

da der Unterschied der Stellung hier wegfällt, so gilt die einzige CG.:

III. $m''(n''-n)m\pm m'(m''-m)=0$

mit oberem oder unterem Zeichen, je nachdem die CK. heteropolar oder amphipolar ist. Im letzteren

Falle könnte sich die dritte Gestalt $m''R^{n''}$ in verwendeter Stellung zu mR^n befinden; dann wird m'' negativ genommen.

2) Pyramidal-hemiëdrische Combinationen.

§. 390.

Merkmale derselben.

Die pyramidal-hemiëdrischen Combinationen sind für die Erscheinung nur dadurch von den holoëdrischen Combinationen unterschieden, dass die Pyramiden und Prismen der Zwischenreihen als hexagonale Pyramiden und Prismen von abnormer Flächenstellung auftreten. Da sich also diese Hemiëdrie nur insofern zu erkennen geben kann, inwiefern Gestalten aus den Zwischenreihen vorkommen und die Krystalle an beiden Enden hinreichend ausgebildet sind, so ist begreiflich, dass der Charakter einer hexagonalen Krystallreihe überhaupt problematisch bleiben muss, so lange die beobachteten Krystalle nur Gestalten der Haupt- und Nebenreihe enthalten und nur an einem Ende vollständig ausgebildet sind. Daher ist denn auch diese merkwürdige Hemiëdrie erst vor einigen Jahren durch Haidingers Beobachtungen am Apatite nachgewiesen worden, dessen Krystallreihe man früher für holoëdrisch gehalten hatte, weil die gewöhnlichen Varietäten nur Gestalten von der Form mP und $mP2$ zeigen, und an den beobachteten dihexagonalen Pyramiden der hemiëdrische Charakter übersehen, oder mit einer zufälligen Unvollzähligkeit der Flächen verwechselt worden war. Wo jedoch diese Hemiëdrie wirklich Statt findet, da giebt sie sich an gehörig ausgebildeten Krystallen auf eine so auffallende Weise durch das einseitige, links oder rechts gewendete, und in Bezug auf oben und unten gleichsinnige Auftreten der Flächen aller mPn zu erkenen, dass die genauere Prüfung einiger weniger Individuen zur Anerkennung ihres Vorhandenseyns führen muss. Die Combinationen selbst haben in ihrer Entwicklung durchaus keine Schwierigkeit, indem für sie unmittelbar die für die holoëdrischen Combinationen gegebenen Regeln anzuwenden sind.

3) Trapezoëdrisch-hemiëdrische Combinationen.

§. 391.

Merkmale derselben.

Obgleich das Vorkommen der trapezoëdrischen Hemiëdrie an und für sich sehr wohl möglich ist, so dürfte doch, neueren Beobachtungen zufolge, der Quarz, für welchen allein man diese Hemiëdrie anzunehmen berechtigt war, nicht sowohl ihr, als vielmehr der gleichnamigen Tetartoëdrie unterworfen seyn. Dadurch wird jedoch die Möglichkeit, ja selbst die Wahrscheinlichkeit derselben keinesweges zweifelhaft gemacht. Ihre Anerkennung ist übrigens, eben so wie jene der pyramidalen Hemiëdrie, abhängig

1) von dem Vorkommen der Glieder der Zwischenreihen, weil sich die Gestalten der Haupt- und Nebenreihe ihrer stereometrischen Erscheinung nach dem Einflusse derselben gänzlich entziehen;
2) von der vollständigen Ausbildung der Krystalle an beiden Enden, weil der Unterschied zwischen der trapezoëdrischen und pyramidalen Hemiëdrie in der verschiedenen Lage der oberen gegen die unteren Flächen begründet ist.

Sind aber die Krystalle hinreichend ausgebildet, so wird das einseitige, links oder rechts gewendete, aber in Bezug auf oben und unten widersinnige Auftreten der Hälfte der Flächen aller mPn die trapezoëdrisch-hemiëdrischen Combinationen auf den ersten Blick erkennen lassen. Ihre weitere Entwicklung ist ohne Schwierigkeit.

c) Tetartoëdrische Combinationen.

1) Trapezoëdrisch - tetartoëdrische Combinationen.

§. 392.

Merkmale und Entwicklung derselben.

Die trapezoëdrische Tetartoëdrie ist nach §. 31.. daran zu erkennen, dass

1) die Pyramiden der Hauptreihe als Rhomboëder und das Prisma dieser Reihe als hexagonales Prisma,
2) die Pyramiden der Nebenreihe als trigonale Pyramiden und das Prisma derselben Reihe als trigonales Prisma,
3) die Pyramiden der Zwischenreihen als trigonale Trapezoëder und die Prismen derselben als ditrigonale Prismen

auftreten. Da also alle Gestalten dem Einflusse dieser Tetartoëdrie unterliegen, so wird sich dieselbe jedenfalls leichter und bestimmter zu erkennen geben, als die verschiedenen Arten der Hemiëdrie; nur setzt diese Erkennung gleichfalls voraus, dass beide Enden der Krystalle zu beobachten sind, weil ausserdem der Charakter der Tetartoëdrie unentschieden bleibt; es müsste denn diese Entscheidung durch das eigenthümliche Vorkommen der Prismen ∞Pn oder $\infty P2$ noch möglich werden.

Die besondre Entwicklung der Combinationen hat keine Schwierigkeiten, indem dabei theils die Regeln der holoëdrischen und rhomboëdrischen Combinationen, theils die allgemeine Combinationsgleichung zu Hülfe genommen werden, wobei freilich auf die richtige Bestimmung der Gleichungen der zum Durchschnitte kommenden Flächen besonders genau gesehen werden muss. Uebrigens ist der Quarz bis jetzt die einzige bekannte Species, an welcher sich diese und merkwürdige Tetartoëdrie verwirklicht findet, seine Krystallreihe wird durch dieselbe vor allen übrigen Krystallreihen des hexagonalen Systemes auf eine höchst auffallende Weise ausgezeichnet.

2) Rhomboëdrisch-tetartoëdrische Combinationen.

§. 393.

Merkmale der rhomboëdrischen Tetartoëdrie.

Die Merkmale dieser Tetartoëdrie sind gleichfalls sehr auffallend, indem für sie die sämmtlichen Pyramiden des Systemes als Rhomboëder auftreten. Da nun nächst den Gestalten der Hauptreihe jene der Nebenreihe besonders häufig vorzukommen pflegen, so kann es als ein hervorstechendes Merkmal dieser Tetartoëdrie betrachtet werden, dass auch die Pyramiden $mP2$ als Rhomboëder auftreten, weil dieser Umstand zur Unterscheidung derselben von den verschiedenen Arten der Hemiëdrie sowohl, als von der trapezoëdrischen Tetartoëdrie dienen kann, von welchen jene dieselben Pyramiden ganz unverändert lassen, während diese sie auf trigonale Pyramiden reducirt.

Das Titaneisen (von Gastein, Oisans und Miask) ist bis jetzt die einzige bekannte Substanz, an welcher sich die rhomboëdrische Tetartoëdrie verwirklicht findet. Seine Combinationen erhalten zum Theil ein sehr unsymmetrisches Ansehen, sind jedoch leicht zu entwickeln, wenn man nur, mit steter Berücksichtigung der Lage der verschiedenen Flächen, die Regeln für die holoëdrischen und rhomboëdrischen Combinationen, so wie die allgemeine Combinationsgleichung zu Hülfe nimmt.

C. Berechnung der Combinationskanten.

§. 394.

Combinationskanten holoëdrischer Gestalten.

Zwischen je zwei holoëdrischen Gestalten können bei regelmässiger Ausbildung nur heteropolare

CK. derselben Art entstehen, indem von beiden Gestalten immer nur analog liegende Flächen zum Durchschnitte kommen. Bezeichnen wir diese CK. wie bisher mit Π, so findet sich allgemein für je zwei dihexagonale Pyramiden mPn und $m'Pn'$, indem die Fläche der einen durch die Gleichung

$$\frac{x}{ma} + \frac{y}{n} + z = 1$$

die Fläche der andern durch die Gleichung

$$\frac{x}{m'a} + \frac{y}{n'} + z = 1$$

repräsentirt wird, nach der Formel für $\cos W$ in §. 316

$$\cos\Pi = -\frac{2mm'a^2(2nn'-n-n'+2)+3nn'}{MM'}$$

wo

$$M = \sqrt{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2}$$

und $$M' = \sqrt{4m'^2a^2(n'^2-n'+1)+3n'^2}$$

Setzt man in diesen Ausdruck für m' und n' successiv die den übrigen Gestalten entsprechenden Werthe, so erhält man die Cosinus der CK. für alle binären Combinationen der dihexagonalen Pyramide mPn, und setzt man hierauf eben so für m und n successiv dieselben Werthe, so erhält man die Cosinus der CK. aller binären holoëdrischen Combinationen überhaupt, welche sich in folgender Tabelle zusammenstellen lassen:

	oP	$\infty P2$	∞P	∞Pn	$mP2$	mP	mPn
$m'Pn'$	$\frac{n'\sqrt{3}}{M'}$	$\frac{m'an'\sqrt{3}}{M'}$	$\frac{m'a(n'+1)}{M'}$	$\frac{m'a(2nn'-n-n'+2)}{M'\sqrt{n^2-n+1}}$	$\frac{n'(mm'a^2+1)\sqrt{3}}{M'\sqrt{m^2a^2+1}}$	$\frac{2mm'a^2(n'+1)+3n'}{M'\sqrt{4m^2a^2+3}}$	$\frac{2mm'a^2(2nn'-n-n'+2)+3nn'}{MM'}$
$m'P$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4m'^2a^2+3}}$	$\frac{m'a\sqrt{3}}{\sqrt{4m'^2a^2+3}}$	$\frac{2m'a}{\sqrt{4m'^2a^2+3}}$	$\frac{m'a(n+1)}{\sqrt{4m'^2a^2+3}\sqrt{n^2-n+1}}$	$\frac{(mm'a^2+1)\sqrt{3}}{\sqrt{4m'^2a^2+3}\sqrt{m^2a^2+1}}$	$\frac{4mm'a^2+3}{\sqrt{4m'^2a^2+3}\sqrt{4m^2a^2+3}}$	
$m'P2$	$\frac{1}{\sqrt{m'^2a^2+1}}$	$\frac{m'a}{\sqrt{m'^2a^2+1}}$	$\frac{m'a\sqrt{3}}{2\sqrt{m'^2a^2+1}}$	$\frac{m'an\sqrt{3}}{\sqrt{m'^2a^2+1}\sqrt{n^2-n+1}}$	$\frac{mm'a^2+1}{\sqrt{m'^2a^2+1}\sqrt{m^2a^2+1}}$		
$\infty Pn'$	0	$\frac{n'\sqrt{3}}{2\sqrt{n'^2-n'+1}}$	$\frac{n'+1}{2\sqrt{n'^2-n'+1}}$	$\frac{2nn'-n-n'+2}{2\sqrt{n'^2-n'+1}\sqrt{n^2-n+1}}$			
∞P	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1				
$\infty P2$	0	1					
oP	1						

§. 395.

Combinationskanten der Skalenoëder und Rhomboëder.

Zwischen je zweien Skalenoëdern $\frac{mPn}{2}$ und $\frac{m'Pn'}{2}$ sind nicht nur heteropolare, sondern auch amphipolare CK. möglich, wobei noch ausserdem der Unterschied der Stellung zu berücksichtigen.

A. Bei gleicher Stellung; bezeichnen wir, wie oben in §. 388, die heteropolare CK. mit Π, die amphipolare mit Π', so ist zuvörderst Π identisch mit Π im vorhergehenden §. und daher:

$$\cos\Pi = -\frac{2mm'a^2(2nn'-n-n'+2)+3nn'}{MM'}$$

Dagegen findet sich

$$\cos\Pi' = -\frac{2mm'a^2(nn'+n+n'-2)-3nn'}{MM'}$$

B. Bei verwendeter Stellung; wir bezeichnen wiederum die heteropolare CK. mit Π_1, die amphipolare CK. mit Π'_1, und erhalten durch Substitution der den resp. Flächen zukommenden Parameter in die Formel für $\cos. IV$

$$\cos\Pi_1 = -\frac{2mm'a^2(nn'+n+n'-2)+3nn'}{MM'}$$

$$\cos\Pi_1' = -\frac{2mm'a^2(nn'-n-n'+2)-3nn'}{MM'}$$

Aus diesen allgemeinen Formeln wird man leicht die jedem besondern Falle entsprechenden Werthe abzuleiten vermögen.

§. 396.

Fortsetzung.

Will man vorstehende Cosinus der CK. als Functionen der secundären Ableitungscoëffcienten ausdrücken, so hat man, weil allgemein

$$mR^n = mnP\frac{2n}{n+1}$$

für jedes Skalenoëder mn statt m und $\frac{2n}{n+1}$ statt n zu substituiren, während man für die hexagonalen Pyramiden m unverändert lässt, und $n=2$ setzt; man erhält so:

für zwei Skalenoëder mR^n und $m'R^{n'}$

A. bei gleicher Stellung,

$$cos \left\{ \begin{matrix} \Pi \\ \Pi' \end{matrix} \right. = -\frac{mm'a^2(3nn'\pm 1)\pm 3}{NN'}$$

B. bei verwendeter Stellung,

$$cos \left\{ \begin{matrix} \Pi_1 \\ \Pi_1' \end{matrix} \right. = -\frac{mm'a^2(3nn'\mp 1)\pm 3}{NN'}$$

wo die oberen Zeichen für heteropolare, die unteren für amphipolare CK. gelten, und

$$N = \sqrt{m^2a^2(3n^2+1)+3}$$

$$N' = \sqrt{m'^2a^2(3n'^2+1)+3}$$

Ist eine der Gestalten eine hexagonale Pyramide m'P2, so verschwindet die Ambiguität der Stellung, und man erhält:

für das Skalenoëder mR^n und die Pyramide m'P2

$$cos \left\{ \begin{matrix} \Pi \\ \Pi' \end{matrix} \right. = -\frac{(mnm'a^2\pm 1)\sqrt{3}}{N\sqrt{m'^2a^2+1}}$$

Da die meisten CK., welche in den übrigen hemiëdrischen und tetartoëdrischen Combinationen zum Vorscheine kommen, mit gewissen CK. theils der holoëdrischen, theils der rhomboëdrischen Combinationen identisch sind, so werden die vorstehenden Formeln für die meisten der vorkommenden Fälle ausreichend seyn; wo sie es nicht sind, hat man nur die Gleichungen der zum Durchschnitte kommenden Flächen zu bestimmen, um die gesuchte CK. nach der Formel $cos\ W$ in §. 318 berechnen zu können.

D. Beispiele der Entwicklung von Combinationen.

§. 397.

Combination des Berylles.

Fig. 459 stellt eine sechszählige, holoëdrische Combination des Berylles dar, deren Gestalten sich für P als Grundgestalt ordnen, wie folgt: es gehören

der Hauptreihe, m, P, u, M,

der Nebenreihe, s,

einer Zwischenreihe, v.

Unmittelbar bestimmen sich als die Gränzen der Hauptreihe

$$m = 0P$$

$$\text{und } M = \infty P$$

Weil die Flächen von $s = m''P2$ die CK. zwischen je einer Fläche von P und einer im Nebensextanten gelegenen Fläche von ∞P abstumpfen, so gilt für sie die CG. II. in §. 388, oder noch kürzer, die CG. I., a in §. 389; setzt man daher $m = n = n' = 1$, und $m' = \infty$, so folgt $m'' = 2$, und es wird daher:

$$s = 2P2\ ^{*})$$

Da nun die Flächen dieser Pyramide die Polkanten der Pyramide u regelmässig abstumpfen, so folgt

$$u = 2P$$

Die Flächen v der dihexagonalen Pyramide sind gleichfalls der CG. II. in §. 388 unterworfen; da jedoch ihr Combinationsverhältniss auch so aufgefasst werden kann, dass sie die CK. zwischen 2P2 und ∞P abstumpfen, so gelangt man noch kürzer zu ihrer Bestimmung durch unmittelbare Anwendung der

*) Man sieht, dass die Flächen s die Combinationsecke von P und ∞P so abstumpfen, dass sie als Rhomben erscheinen; die so eben angeführte CG. giebt allgemein für diejenige Pyramide der Nebenreihe, deren Flächen die CE. zwischen mP und ∞P als Rhomben abstumpfen, das Zeichen $2mP2$.

CG. §. 375, 3, aus welcher folgt, dass sie von der Form $mP\frac{m}{m-1}$ seyn muss; doch ist die Bestimmung des Coëfficienten m von einer Messung abhängig; misst man z. B. die CK. $v:M$, so findet man ungefähr $142°\frac{1}{4}$. Nun ist $142°\frac{1}{4} - 90° = 52°\frac{1}{4} = \frac{1}{2}U$ in §. 326, und, nach demselben §.,

$$2m - 1 = \frac{\sqrt{3}\sqrt{a^2+1}\ tang\ \frac{1}{2}U}{a}$$

Da nun im Beryll sehr nahe $a = 0{,}5$, so folgt

$$2m - 1 = 5{,}002$$

und daher

$$v = 3P\tfrac{3}{2}$$

Die Combination ist also vollständig entwickelt, und ihr Zeichen: $\infty P.0P.P.2P.2P2.3P\frac{3}{2}$.

§. 398.

Combination des Apatites.

Fig. 460 stellt eine neunzählige, holoëdrische Combination des Apatites dar; wählt man die mit x bezeichneten Flächen zur Grundgestalt, so wird $a^2 = \frac{15}{28}$, und die Gestalten selbst ordnen sich wie folgt:

es gehören

in die Hauptreihe P, r, x, z, M,

in die Nebenreihe, a, s, d, e.

Zuvörderst bestimmen sich unmittelbar als Gränzgestalten der Haupt- und Nebenreihe

$$P = 0P$$
$$M = \infty P$$
$$e = \infty P2$$

Da nun die Flächen a die Polkanten der Grundgestalt abstumpfen, so folgt

$$a = P2:\ §.\ 372,\ 3,\ a$$

und da die CK. $s:x$ den Polkanten der Grundgestalt parallel sind, so folgt

$$s = 2P2;\ §.\ 372,\ 3,\ \gamma.$$

Aus derselben Regel ergiebt sich auch, dass

$$r = \tfrac{1}{2}P$$

und aus dem Verhältnisse der Flächen s und z, dass

$$z = 2P$$

so wie endlich, wiederum nach der Regel §. 372, 3, c), dass

$$d = 4P2$$

Die Combination ist sonach vollständig entwickelt, und ihr Zeichen: $\infty P . \infty P2 . 0P . \tfrac{1}{2}P . P . 2P . P2 . 2P2 . 4P2$.

§. 399.

Combinationen des Kalkspathes.

Fig. 461 stellt eine siebenzählige, rhomboëdrische Combination des Kalkspathes dar, deren Gestalten sich für P als Grundgestalt ordnen, wie folgt: es gehören

der Hauptreihe, P, g, q, f, c,

Zwischenreihen, t und r.

Die verticalen Flächen c bestimmen sich sogleich als die Gränzgestalt ∞R.

Da nun die Mittelkanten des Skalenoëders r den CK. $r : P$ parallel sind, und $P = R$, so muss das Skalenoëder aus der Grundgestalt abgeleitet, und folglich von der Form R^n seyn. Die Bestimmung von n kann auf verschiedene Art Statt finden, ist jedoch, wie die Entwicklung der ganzen Combination, von einer Messung abhängig. Am leichtesten findet sich n, wenn man seine Bestimmung von der des Rhomboëders f abhängig macht, welches die schärferen Polk. von R^n abstumpft, und folglich $-\tfrac{1}{4}(3n-1)R$ ist (§. 385, 2, Ba). Misst man nämlich die CK. $f : c$ und subtrahirt davon 90°, so findet man den Neigungswinkel der Flächen f zur Basis, dessen Tangente genau doppelt so gross ist als die Tangente desselben Winkels der Flächen P; folglich ist

$$f = -2R$$

$$\text{und} \quad r = R^3$$

Das Rhomboëder g stumpft die Polkanten der Grundgestalt ab, und ist daher $-\frac{1}{2}R$ (§. 386, 2, Ba).

Weil ferner das Skalenoëder t mit R^3 horizontale CK. bildet, so gehört es in dieselbe horizontale Reihe unsers Schemas, und ist daher ein mR^3; nun werden aber seine schärferen Polk. durch die Flächen des Rhomboëders $-\frac{1}{2}R$ abgestumpft, folglich ist

$$\tfrac{1}{2} = 2m$$

$$\text{und} \quad t = \tfrac{1}{4}R^3$$

Das Rhomboëder φ ist irgend ein $-mR$, für welches $m < 2$ und $> \frac{1}{2}$; weil aber seine Polkanten von dem in verwendeter Stellung befindlichen Skalenoëder $\frac{1}{4}R^3$ zugeschärft werden, und mithin den stumpferen Polk. desselben parallel sind, so folgt

$$m = \tfrac{1}{8}(3.3+1), \text{ (§. 386, 1, Ba)}$$

und daher $\varphi = -\frac{5}{4}R$

Die Combination ist nun vollständig entwickelt, und ihr Zeichen: $R^3.\frac{1}{4}R^3.\infty R.-\frac{5}{4}R.-\frac{1}{2}R.-2R.R.$

§. 400.

Fortsetzung.

Fig. 462 stellt eine sechszählige, rhomboëdrische Combination des Kalkspathes dar; weil sie also derselben Krystallreihe angehört, wie die vorige Combination, so haben wir zuvörderst nachzusehen, ob etwa die im vorigen §. angenommene Grundgestalt hier wiederum erscheint. Eine Messung lehrt, dass in der That die Flächen P in beiden Combinationen dieselben sind, und haben wir daher $P = R$ zu setzen; dann gehören

in die Hauptreihe, o, P, m, c,

in Zwischenreihen, r und σ

Es bestimmen sich sogleich als die Gränzgestalten der Rhomboëder

$$o = 0R$$

$$c = \infty R$$

Die Bestimmung des Rhomboëders m fordert eine Messung; misst man die CK. $m : o$, so findet man, dass die Tangente ihres Supplementes genau viermal so gross ist, als die Tangente des Neigungswinkels von P gegen o; woraus folgt, dass

$$m = 4R$$

Da die Kanten des Rhomboëders R seinen CK. zu r und σ parallel laufen, so müssen beide Skalenoëder aus der Grundgestalt abgeleitet, oder von der Form R^n seyn. Nun schärft das flachere Skalenoëder die Polkanten des Rhomboëders $4R$ zu, folglich ist

$$\tfrac{1}{2}(3n-1) = 4 \text{ (§. 386, 1, A b)}$$

und daher $r = R^3$

Das spitzere Skalenoëder stumpft aber die amphipolaren CK. zwischen $4R$ und ∞R ab, und ist daher mittels der CG. I. in §. 389 zu bestimmen, indem man aus selbiger die allgemeine Regel ableitet, dass dasjenige Skalenoëder, welches die amphipolaren CK. zwischen mR und ∞R abstumpft, von der Form $m'R^{\frac{2m-m'}{m'}}$ seyn müsse; da nun in unserm Falle $m = 4$ und $m' = 1$, so folgt

$$\sigma = R^7$$

Die Combination ist nun vollständig entwickelt, und erhält das Zeichen: $4R.0R.\infty R.R^7.R^3.R.$

§. 401.

Fortsetzung.

Fig. 463 stellt gleichfalls eine rhomboëdrische, sechszählige Combination des Kalkspathes dar, in welcher man sogleich das Rhomboëder P als die Grundgestalt erkennt; es gehören daher

in die Hauptreihe, P, m, c,

in Zwischenreihen, r, y und z.

Die verticalen Flächen c gehören dem Prisma ∞R. Die beiden Skalenoëder r und y sind wegen des Parallelismus ihrer Mittelkanten mit jenen von R allgemein von der Form $R\underline{n}$ und $R^{n'}$; das Skalenoëder z dagegen muss, wegen seiner horizontalen CK. mit r, denselben Ableitungscoëfficienten rechter Hand haben, und daher ein mR^n seyn. Die nähere Bestimmung der Skalenoëder $r = R$ und $y = R^{n'}$ lässt sich am leichtesten mittels des Rhomboëders m geben, welches durch Messung seiner CK. zu ∞R als $4R$ erkannt wird. Es haben nämlich die Polkanten dieses Rhomboëders dieselbe Lage wie die schärferen Polkanten des Skalenoëders R^n, folglich ist

$$\tfrac{1}{2}(3n-1) = 4$$
daher $\quad r = R^3$
und $\quad z = mR^3$

Die Flächen desselben Rhomboëders stumpfen aber die stumpferen Polkanten sowohl des Skalenoëders $R^{n'}$ als auch des Skalenoëders mR^3 ab; folglich gilt

für $R^{n'}$ die Gleichung . . $\tfrac{1}{4}(3n'+1) = 4$
- mR^3 - - - . . $\tfrac{5}{4}m \quad = 4$

und es wird daher

$$y = R^5$$
$$z = \tfrac{8}{5}R^3$$

Das Zeichen der nun vollständig entwickelten Combination ist: $R^5.R^3.R.4R.\infty R.\tfrac{8}{5}R^3$.

§. 402.

Combination des Eisenglanzes.

Fig. 464 stellt eine fünfzählige, rhomboëdrische Combination des Eisenglanzes dar, deren Gestalten sich für P als Grundgestalt ordnen wie folgt: es gehören

in die Hauptreihe, s, v, P,
in die Nebenreihe, n,
in eine Zwischenreihe, y.

Dass nämlich n eine hexagonale Pyramide $mP2$

sey, ergiebt sich unmittelbar aus ihren horizontalen Mittelkanten.

In der Grundgestalt ist $a^2 = \frac{15}{8}$, und daher die Neigung ihrer Flächen gegen die Horizontalebene = 57° 42′; misst man nun die CK. $s : P$ und $v : P$, so findet man, nach Abzug von 122° 18′, als dem Supplemente jenes Winkels, die Neigungswinkel der Flächen s und v gegen dieselbe Horizontalebene, und durch Vergleichung ihrer Tangenten mit *tang* 57° 42′

$$s = \tfrac{1}{4}R$$
$$v = \tfrac{4}{7}R$$

Die hexagonale Pyramide n bestimmt sich unmittelbar dadurch, dass R ihre abwechselnden Polkanten abstumpft, als

$$n = \tfrac{4}{3}P2 \text{ (§. 387, 2, a)}$$

Das Skalenoëder y endlich, welches sich in gleicher Stellung mit den Rhomboëdern befindet, ist ein solches, dessen stumpfere Polk. von R abgestumpft werden; folglich gilt für dasselbe die Gleichung

$$1 = \tfrac{1}{4}m(3n+1)$$

$$\text{oder } m = \frac{4}{3n+1}$$

Nun giebt Haüy die Polkanten dieses Skalenoëders zu 108° 6′ und 152° 50′ an; folglich wird, nach §. 343

$$\frac{n+1}{n-1} = \frac{\cos 54^\circ\, 3'}{\cos 76^\circ\, 25} = \tfrac{5}{2}$$

und das gesuchte Skalenoëder $= \frac{1}{2}R^{\frac{7}{3}}$, dessen Polkanten jedoch, nach dem hier angenommenen richtigeren Werthe von a, 107° 23′ und 152° 32′ messen.

Das Zeichen der nun vollständig entwickelten Combination ist: $\frac{4}{3}P2.R.\frac{1}{4}R.\frac{4}{7}R.\frac{1}{2}R^{\frac{7}{3}}$.

§. 403.

Hemiëdrische Combinationen des Apatites.

Die in Fig. 465 dargestellte zehnzählige Combination des Apatites giebt sich sogleich als eine pyramidal-hemiëdrische Combination zu erkennen, indem die mit u und b bezeichneten Flächen einseitig, aber sowohl oben als unten nach links gewendet erscheinen; sie sind also die Flächen dihexagonaler Pyramiden, welche parallelflächig hemiëdrich, als hexagonale Pyramiden von abnormer Flächenstellung auftreten. Uebrigens ist die Combination fast ganz identisch mit der bereits in §. 398 entwickelten Combination desselben Minerales, indem sie sich von selbiger, ausser durch ihren hemiëdrischen Charakter, nur noch durch den Mangel der Pyramide 4P2 unterscheidet; weshalb wir es denn auch zunächst nur mit der Bestimmung der Flächen b und u zu thun haben. Beide stumpfen die CK. zwischen $s = 2P2$ und $M = \infty P$ ab, und sind daher von der Form

$$mP\frac{m}{m-1}$$

Ausserdem erscheint aber auch u zwischen $x = P$, und $e = \infty P2$, so wie b zwischen $z = 2P$, und $e = \infty P2$ mit parallelen CK; weshalb beide Pyramiden der CG. in §. 372, 6 Genüge leisten, welche für sie folgende Gestalt annimmt:

$$\text{für } u \ldots\ldots 2m - n(m+1) = 0$$
$$\text{für } b \ldots\ldots 2m - n(m+2) = 0$$

also wird

$$n = \frac{2m}{m+1} \quad \text{für } u$$

$$n = \frac{2m}{m+2} \quad \text{für } b$$

für beide Pyramiden gilt überdiess

$$n = \frac{m}{m-1}$$

folglich wird

$$u = \frac{l}{r}\,\frac{3P\frac{3}{2}}{2}$$

I.

$$b = \frac{l}{r}\frac{4P\frac{4}{3}}{2}$$

Fig. 466 stellt eine ähnliche Combination des Apatites dar, in welcher jedoch die Pyramiden $\frac{1}{2}$P und 4P$\frac{4}{3}$ fehlen, und dagegen zwei hexagonale Prismen von abnormer Flächenstellung auftreten. Das eine links gewendete und mit *c* bezeichnete Prisma giebt sich durch seine horizontalen CK. mit 3P$\frac{3}{2}$ sogleich als das Prisma $\frac{l}{r}\frac{\infty P\frac{3}{2}}{2}$ zu erkennen, während die Bestimmung des zweiten, rechts gewendeten und mit *f* bezeichneten Prismas eine Messung erfordert. Misst man z. B. die CK: *f* : *e*, so findet man nach Abzug von 90° die halbe normale Seitenkante des Prismas, und aus dieser nach der Formel in §. 331

$$n = \tfrac{5}{4}$$

weshalb das Zeichen von $f = \frac{r}{l}\frac{\infty P\frac{5}{4}}{2}$ wird. Uebrigens verdient es erwähnt zu werden, dass die beiden dihexagonalen Prismen ∞P$\frac{3}{2}$ und ∞P$\frac{5}{4}$, als die Muttergestalten dieser hemiëdrischen Prismen, nach §. 327 inverse Gestalten sind.

§. 404.

Combination des Titaneisens von Oisans.

Diese, in Fig. 468 nach Glocker's Angaben dargestellte Combination giebt sich sogleich durch die rhomboëdrische Erscheinung der hexagonalen Pyramide aus der Nebenreihe als eine rhomboëdrisch-tetartoëdrische Combination zu erkennen. Wählt man die mit *P* bezeichneten Flächen, welche ein sehr spitzes Rhomboëder darstellen, zur Grundgestalt, so wird *a* sehr nahe $\doteq 7$; da nun die Flächen *z* nicht nur vertical, sondern auch als Abstumpfungsflächen der Mittelkanten des Rhomboëders P erscheinen, so wird

$$z = \infty P2$$

und daher nothwendig x irgend eine tetartoëdrisch erscheinende hexagonale Pyramide der Nebenreihe.

Die Flächen l gehören einem Rhomboëder der Hauptreihe, weil je ein oberes P mit einem unteren l horizontale CK. bildet; woraus zugleich folgt, dass sich beide Rhomboëder in verwendeter Stellung befinden. Nun sind aber die heteropolaren CK. von l und P den CK. von P und z, d. h. den Mittelkanten, und folglich auch den Polkanten der Grundgestalt parallel; also muss l dasjenige Rhomboëder von verwendeter Stellung seyn, dessen Flächen den Polkanten von R parallel laufen, d. h. es ist

$$l = -\tfrac{1}{2}R$$

Aus demselben Grunde müssen auch die Flächen x von derjenigen hexagonalen Pyramide mP2 stammen, welche die Polkanten der Grundgestalt zuschärft, oder es ist

$$x = \tfrac{2}{3}\mathrm{P}2 \text{ (§. 386, 3, a)}$$

Da endlich o die basische Fläche, so ist die Combination vollständig entwickelt, und ihr Zeichen:

$$0R.R.-\tfrac{1}{2}R.\infty\mathrm{P}2.\frac{\frac{2}{3}\mathrm{P}2}{4}.$$

§. 405.

Combination des Titaneisens von Gastein.

Diese in Fig. 467 nach Mohs dargestellte fünfzählige Combination zeichnet sich durch ihr unsymmetrisches Ansehen auf eine sehr auffallende Art aus, ist aber demungeachtet unabhängig von allen Messungen zu entwickeln. Wählen wir das von den mit P bezeichneten Flächen gebildete Rhomboëder zur Grundgestalt R, so ist zuvörderst $a = 0R$. Da nun die heteropolare CK. von P und b auf der CK. von P und a rechtwinklig ist (was sich freilich aus der perspectivischen Zeichnung nicht bestimmt, wohl aber an dem Krystall *in natura* ersehen lässt), so folgt, dass diese CK. der geneigten Diagonale der Rhomboëderfläche parallel ist; dasselbe gilt von der heteropolaren CK. $b:d$ und $P:d$, indem je drei dieser CK. nicht nur einander, sondern auch der geneigten Diagonale der zugehörigen Fläche von R parallel laufen. Nun ist d ein in verwendeter Stellung befindliches Rhomboëder, da je eine untere Fläche d mit einer oberen Fläche P horizontale CK. bildet; folglich ist

$$d = -2R \text{ (§. 368, 2, B}\alpha\text{)}$$

Die Flächen b können ihrer Stellung nach nur von einer hexagonalen Pyramide der Nebenreihe herstammen, welche jedoch hier, eben so wie in dem Titaneisen von Oisans, nur als Rhomboëder, und mithin tetartoëdrisch erscheint. Da nun dieselben Flächen mit R CK. bilden, welche seinen geneigten Diagonalen parallel sind, so folgt, dass

$$b = \tfrac{4}{3}P2 \text{ (§. 368, 3, } \alpha\text{)}$$

Ueber dem Rhomboëder $-2R$ erscheinen die Flächen c eines flacheren Rhomboëders von gleicher Stellung; da seine CK. zu R auf seinen CK. zu $0R$ rechtwinklig sind, so folgt

$$c = -\tfrac{1}{2}R$$

Weil jedoch diese Rechtwinkligkeit aus der perspectivischen Zeichnung nicht zu ersehen ist, so wollen wir lieber den sehr auffallenden Parallelismus der CK. von $b:c$ und $b:d$ im Auge behalten, welcher uns lehrt, dass die Pyramidenflächen b die amphipolaren CK. beider Rhomboëder abstumpfen. Es kommt daher die CG. I., a in §. 389 zur Anwendung, und man findet, indem man $m''=\frac{4}{3}$, $m=m$, $m'=2$ und $n=n'=1$ setzt, wiederum

$$c = -\tfrac{1}{2}R$$

Die Combination ist nun vollständig entwickelt, und erhält das Zeichen: $0R.\dfrac{\frac{4}{3}P2}{4}.R.-2R.-\frac{1}{2}R.$

§. 406.

Combinationen des Quarzes.

Fig. 470. giebt sich durch die Lage der Flächen s und x sogleich als eine trapezoëdrisch-tetartoëdrische, sechszählige Combination zu erkennen. Betrachten wir den Inbegriff der mit P bezeichneten Flächen als die Grundgestalt R, so sind die noch ausserdem in der Combination enthaltenen Gestalten folgende:

z ein Rhomboëder in verwendeter Stellung,
t ein Rhomboëder in gleicher Stellung,
r das hexagonale Prisma ∞P,
s eine trigonale Pyramide, und
x ein trigonales Trapezoëder.

Aus dem Parallelismus der CK. $z : P$ und $P : r$ folgt, mittels Anwendung der allgemeinen CG., dass

$$z = -R^{*})$$

Weil die Flächen s nicht nur zwischen P und r, sondern auch zwischen z und r mit parallelen CK. erscheinen, so folgt nicht nur, dass sie einer Pyramide der Nebenreihe angehören, sondern auch, dass diese Pyramide = 2P2 ist; da sie aber nur mit der halben Flächenzahl nach dem Gesetze der trapezoëdrischen Tetartoëdrie erscheint, so muss

$$s = \frac{2P2}{4}$$

gesetzt werden.

Da nun die Flächen x, welche ursprünglich von einer dihexagonalen Pyramide herstammen die CK. zwischen s und r abstumpfen, so wird ihr Zeichen allgemein von der Form $mP\frac{m}{m-1}$. Ihre vollständige Be-

*) Prof. Breithaupt hat jedoch neulich Messungen bekannt gemacht, nach welchen das Rhomboëder z etwas flacher seyn müsste als R; dann fiele freilich auch der Parallelismus der CK. $z : P$ und $P : r$ weg.

stimmung ist jedoch entweder von der Messung einer CK., oder von der Kenntniss des Rhomboëders t abhängig. Misst man z. B. diejenige CK. $x:r$, welche der CK. $x:s$ parallel ist, so findet man 168° 0′; nun ist

$$168° - 90° = 78° = \tfrac{1}{2}Z' \text{ in §. 357}$$

$$\text{folglich } 2m - 1 = 2{,}34\, tang\, 78° = 11$$

$$\text{und} \quad x = 6P\tfrac{6}{5}$$

Da nun dieselben Flächen x mit parallelen CK. zwischen t und r erscheinen, oder bestimmter, da sie die amphipolaren CK. beider Gestalten abstumpfen, so findet sich nach der CG. II. in §. 388, durch Einführung der Werthe $m''=6$, $n''=\frac{6}{5}$, $m=m$, $m'=\infty$, $n=n'=1$

$$t = 5R$$

Die Combination ist nun vollständig entwickelt, und erhält das Zeichen: $\infty P.R.-R.5R.\frac{2P2}{4}.\frac{6P\frac{6}{5}}{4}$.

§. 407.

Fortsetzung.

Auch die in Fig. 469 nach Haidinger dargestellte zwölfzählige Combination des Quarzes ist eine trapezoëdrisch-tetartoëdrische Combination, obgleich die Gestalten der Hauptreihe als hexagonale Pyramiden gezeichnet wurden. Die Erscheinungsweise der Flächen s sowohl, als der Flächen x, y, u, v, o und der Flächen d verbürgt uns diesen tetartoëdrischen Charakter hinlänglich. Setzt man die mit P bezeichneten Flächen $=$ P, so wird

$$r = \infty P$$
$$s = 2P2$$

und $mP\frac{m}{m-1}$ die allgemeine Form sämmtlicher in der Combination enthaltenen Trapezoëder. Die Bestimmung dieser, so wie der hexagonalen Pyramiden b, m, a und des ditrigonalen Prismas ist jedoch für jede

Gestalt von einer Messung abhängig. Misst man zuvörderst die CK. $b:r$, $m:r$ und $a:r$, so findet man

$$b = \tfrac{5}{3}P$$
$$m = 3P$$
$$a = 4P$$

und misst man hierauf die CK. der Flächen x, y, u, v und o zu der analog liegenden Fläche r, so findet man, nach Abzug von 90°, mittels der Formel $2m-1 = 2{,}34\,tang\,\tfrac{1}{2}Z'$ in §. 357

$$o = 3P\tfrac{3}{2}$$
$$x = 4P\tfrac{4}{3}$$
$$y = 5P\tfrac{5}{4}$$
$$u = 6P\tfrac{6}{5}$$

und $v = 8P\tfrac{8}{7}$

endlich, durch Messung der Kante $d:d$,

$$d = \infty P\tfrac{3}{2}$$

Die Flächen o gehören einem rechten, die Flächen x, y, u und v linken trigonalen Trapezoëdern.

Anmerkung. An vielen Quarzkrystallen erscheinen allerdings die Flächen s sowohl, als die Flächen x, y, u. s. w. auf eine solche Weise, dass noch ein anderes Gesetz der trapezoëdrischen Tetartoëdrie angenommen werden müsste. Doch ist diese Erscheinungsweise in vielen Fällen durch eine Zwillingsbildung zu erklären, welcher zumal der Bergkrystall sehr häufig unterworfen ist.

Verbesserungen.

S. 39 Z. 9 v. u. lies die Durchschnittslinie statt der Durchschnittspunct

— 44 sind vor den drei Formeln für *cos X*, *Y* und *Z* die Zeichen — wegzulassen.

— 68 Z. 5 v. o. l. Holoëdrie st. Homoëdrie

— 115 Z. 1 v. o. ist nach $8O\frac{3}{2}$ einzuschalten $4O\frac{4}{3}$, welches neulich am Granat von Cziklova beobachtet wurde.

— 146 Z. 6 v. o. l. Ikositetraëder st. Ikosaëder

— 150 Z. 7 v. o. l. $\frac{n^2}{n^2+1}$ st. $\frac{n}{n^2+1}$

— 328 Z. 12 v. o. l. $\frac{m'P}{2}$ st. $\frac{m'P}{n}$

— 413 Z. 5 v. o. l. $\sqrt{3m^2a^2+4}$ st. $\sqrt{4m^2a^2+3}$

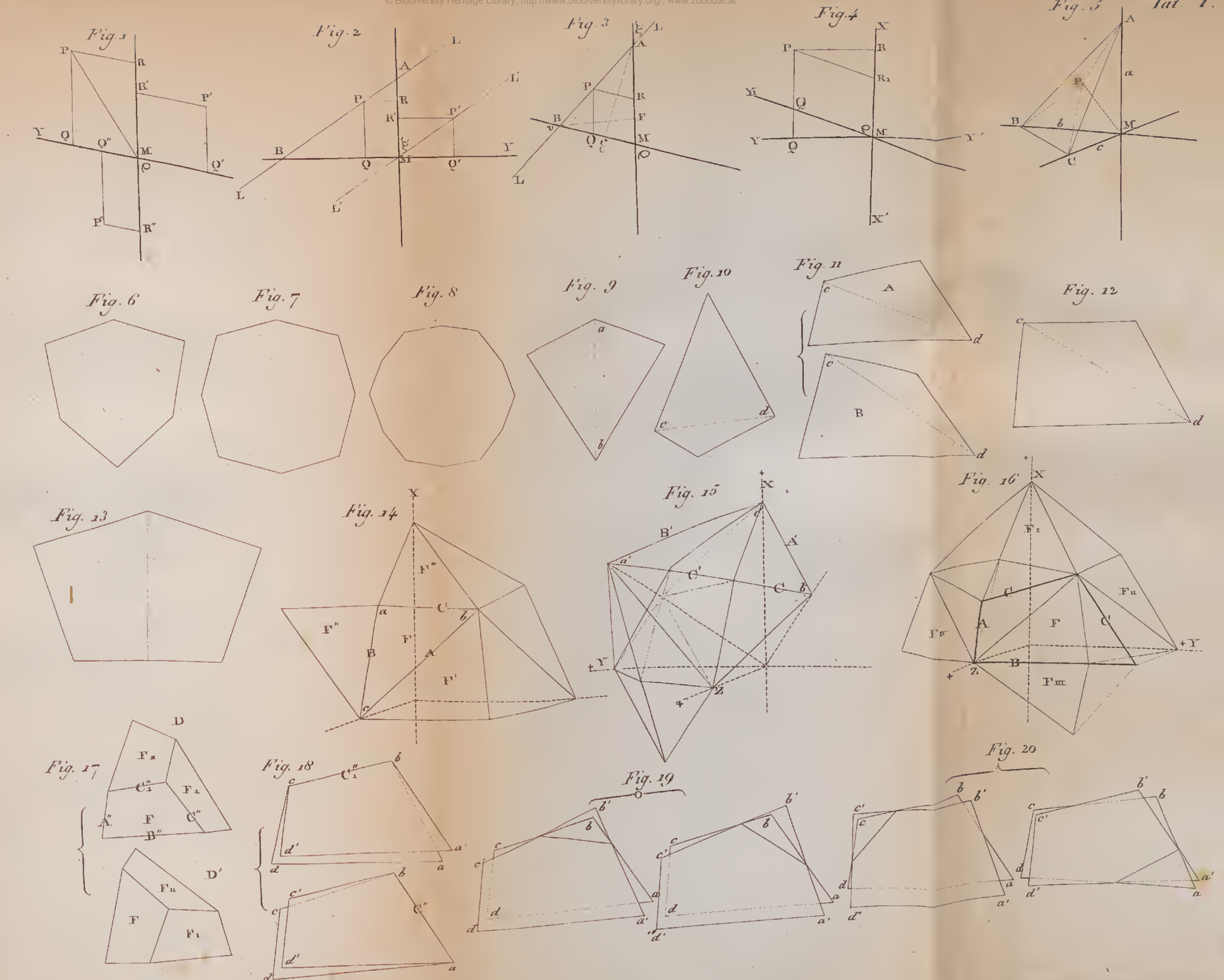


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 16
Fig. 17
Fig. 18
Fig. 19
Fig. 20

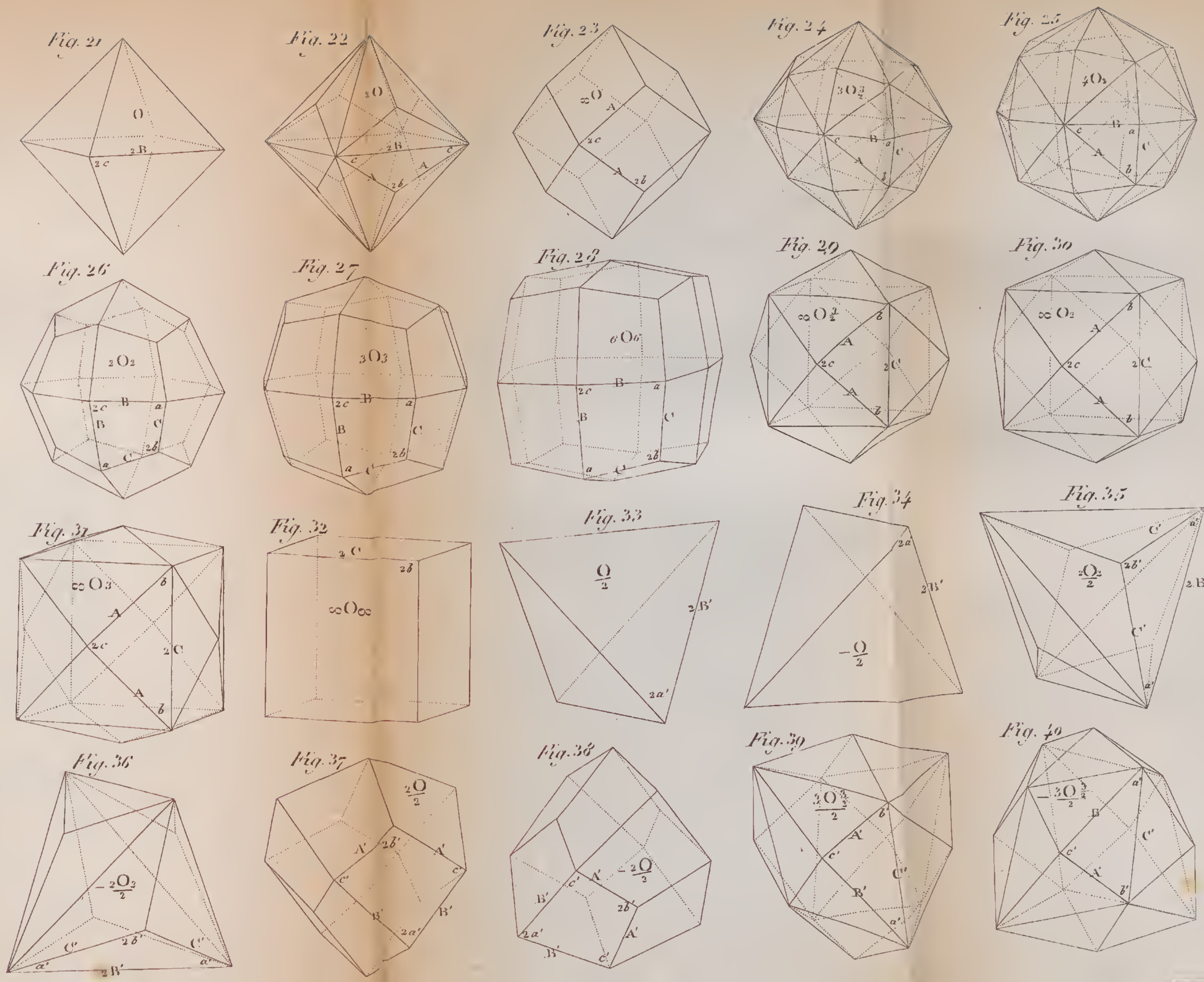


Fig. 21
O
Fig. 22
2O
Fig. 23
∞O
Fig. 24
3O3/2
Fig. 25
4O2
Fig. 26
2O2
Fig. 27
3O3
Fig. 28
6O6
Fig. 29
∞O3/2
Fig. 30
∞O2
Fig. 31
∞O3
Fig. 32
∞O∞
Fig. 33
O/2
Fig. 34
−O/2
Fig. 35
2O2/2
Fig. 36
−2O2/2
Fig. 37
2O/2
Fig. 38
−2O/2
Fig. 39
3O3/2/2
Fig. 40
−3O3/2/2

Fig. 41

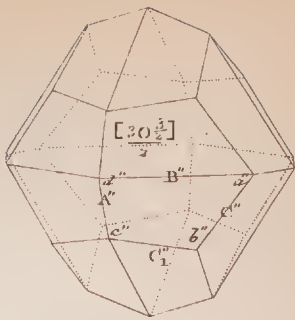


Fig. 42

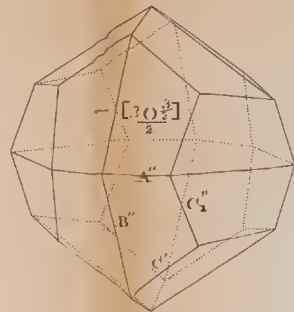


Fig. 43

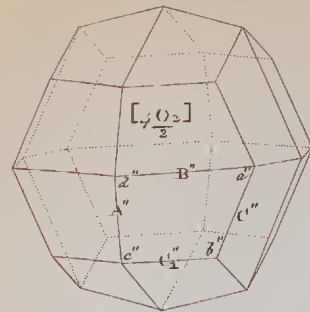


Fig. 44

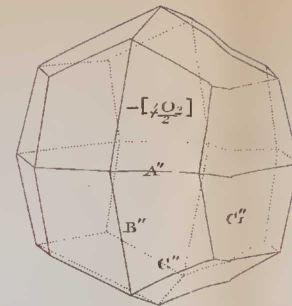


Fig. 45

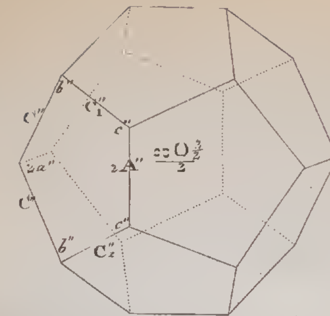


Fig. 46

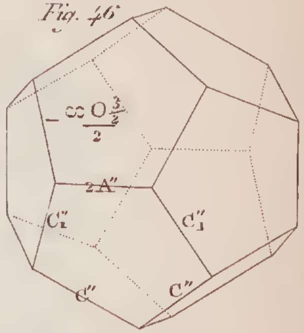


Fig. 47

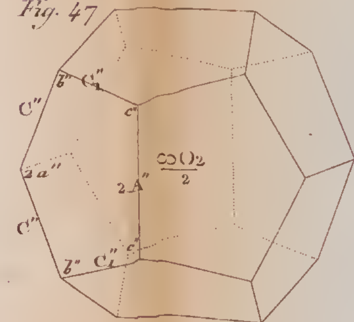


Fig. 48

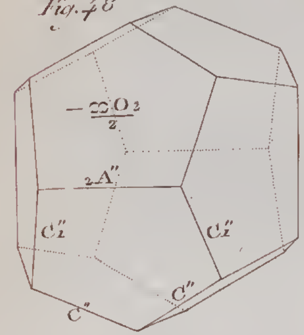


Fig. 49

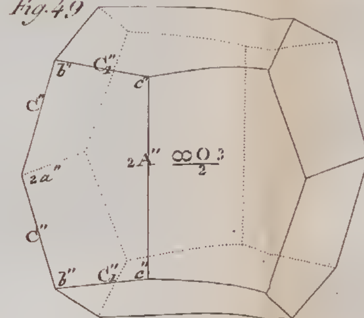


Fig. 50

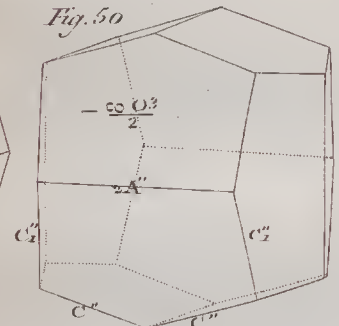


Fig. 51 $mOn.3O\frac{3}{2}$

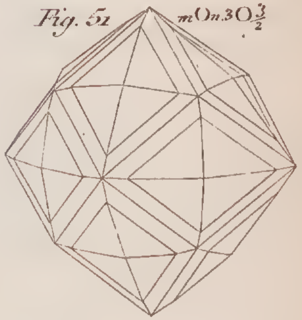


Fig. 52 $mOn.3O\frac{3}{2}$

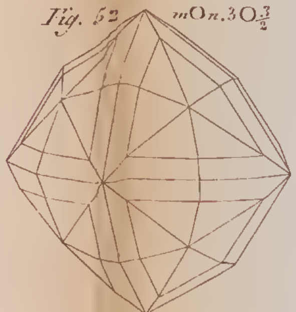


Fig. 53 $mOn.3O\frac{3}{2}$

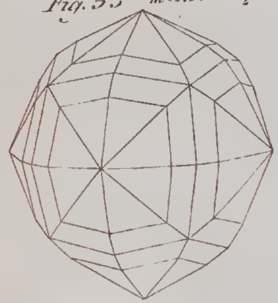


Fig. 54 $mOn.3O\frac{3}{2}$

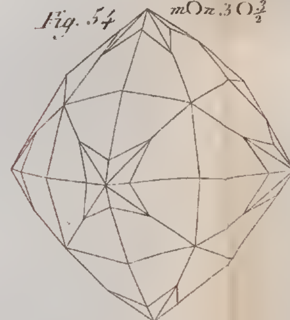


Fig. 55 $mOn.3O\frac{3}{2}$

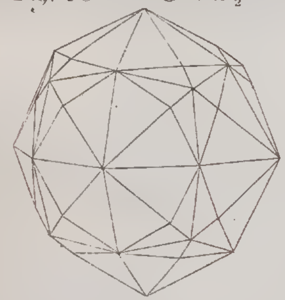


Fig. 56 $mOn.3O\frac{3}{2}$

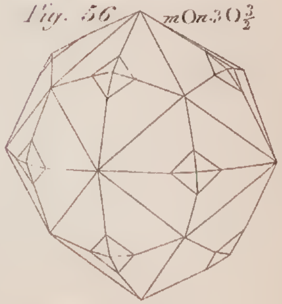


Fig. 57 $3O\frac{3}{2}.\ 2O2$

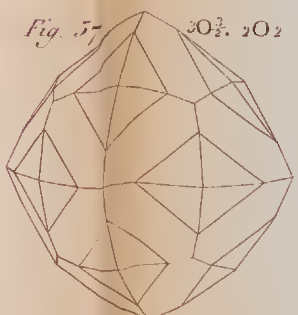


Fig. 58 $3O\frac{3}{2}.3O3$

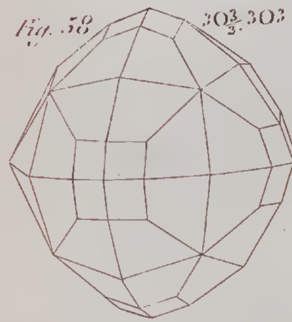


Fig. 59 $mOn.m'Om'$

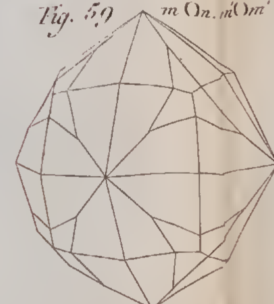


Fig. 60 $4O2.3O$

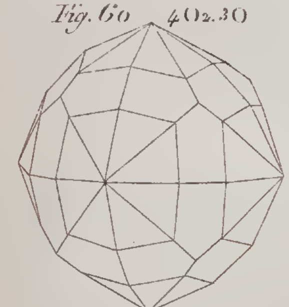


Fig. 61 $3O\frac{3}{2}.mO$

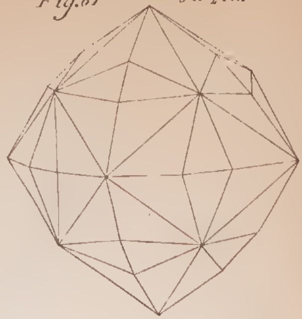


Fig. 62 $mOn.m'O$

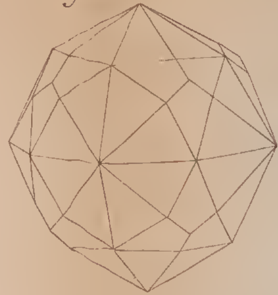


Fig. 63 $3O\frac{3}{2}.\infty O\frac{3}{2}$

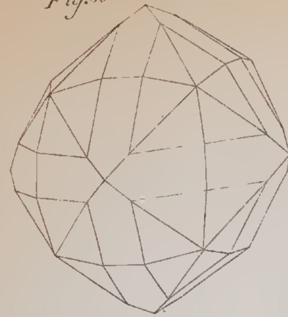


Fig. 64 $3O\frac{3}{2}.\infty O2$

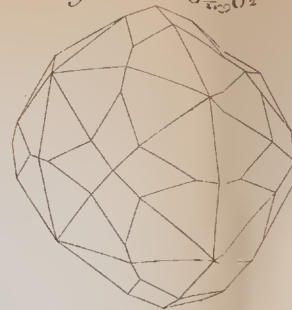


Fig. 65 $3O\frac{3}{2}.\infty O\frac{5}{4}$

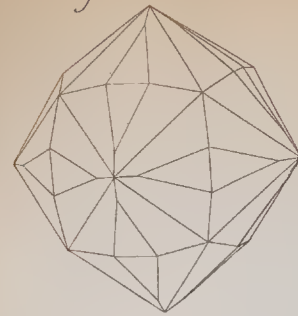


Fig. 66 $3O\frac{3}{2}.\infty O$

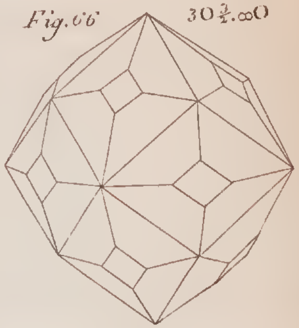


Fig. 67 $3O\frac{3}{2}.O$

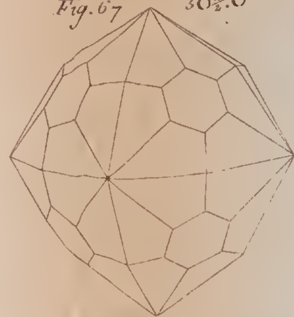


Fig. 68 $4O2.\infty O\infty$

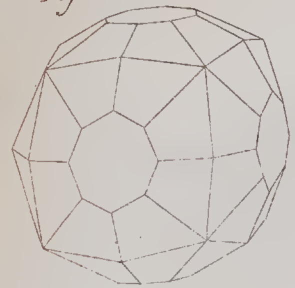


Fig. 69 $2O2.4O2$

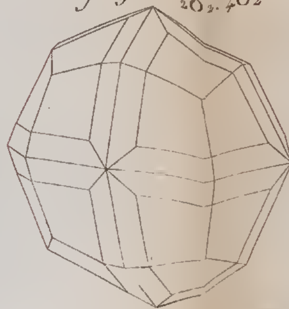


Fig. 70 $2O2.mOn$

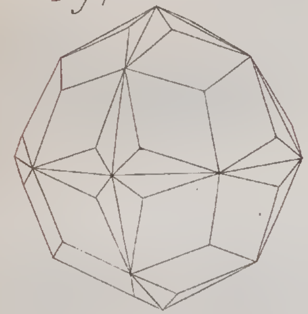


Fig. 71 $2O2.3O\frac{3}{2}$

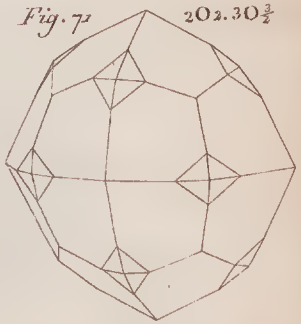


Fig. 72 $mOn.m'On'$

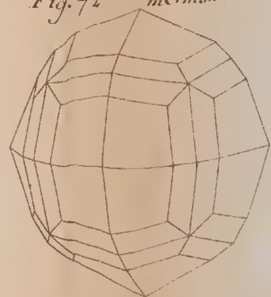


Fig. 73 $2O2.mOn$

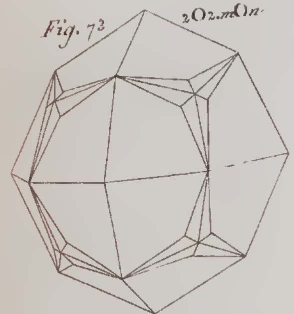


Fig. 74 $2O2.3O3$

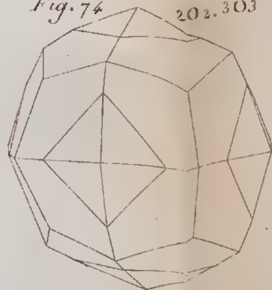


Fig. 75 $2O2.\frac{3}{2}O$

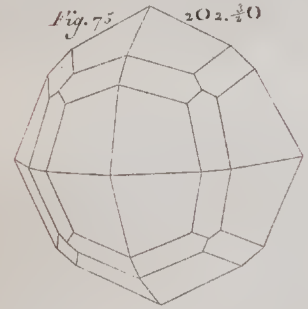


Fig. 76 $2O2.2O$

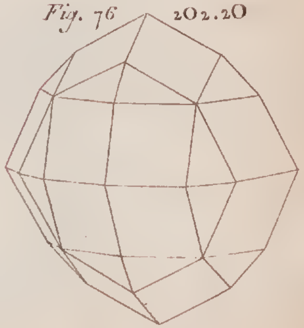


Fig. 77 $2O2.mO$

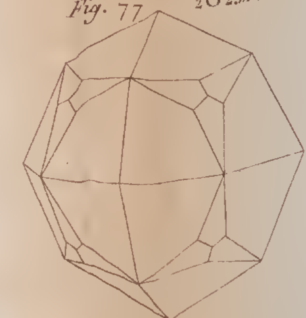


Fig. 78 $2O2.\infty O$

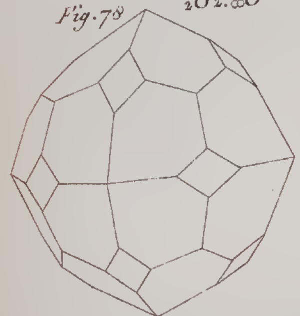


Fig. 79 $2O2.O$

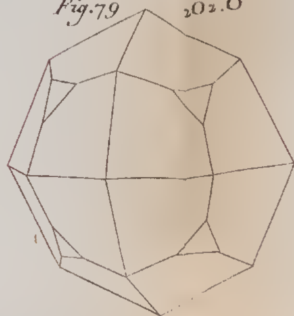


Fig. 80 $2O2.O$

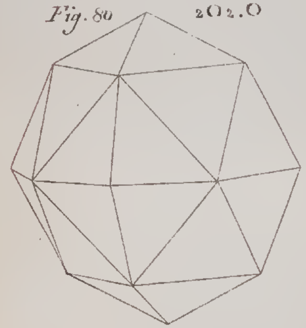


Fig. 81 $2O2.\infty O\infty$

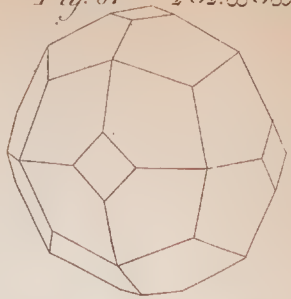


Fig. 82 $2O2.\infty O\infty$

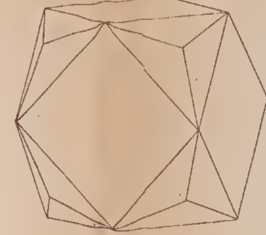


Fig. 83 $2O2.\infty O2$

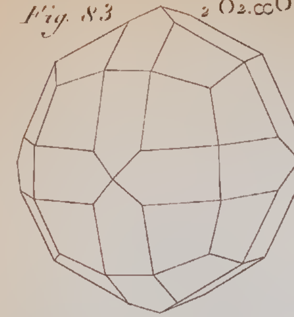


Fig. 84 $2O2.\infty O3$

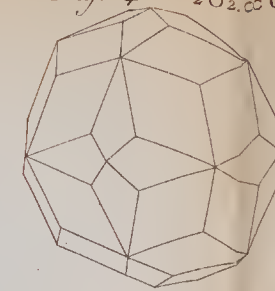


Fig. 85 $2O2.\infty O\frac{3}{2}$

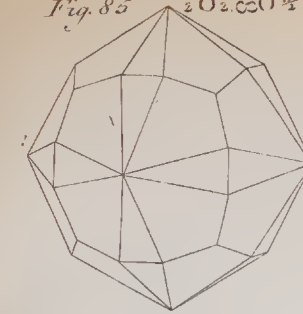


Fig. 86 $2O.mOn$

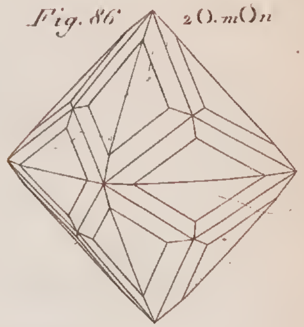


Fig. 87 $mO.m'On'$

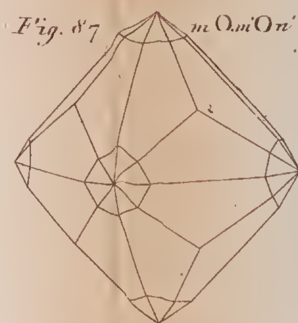


Fig. 88. $mO.m'On'$

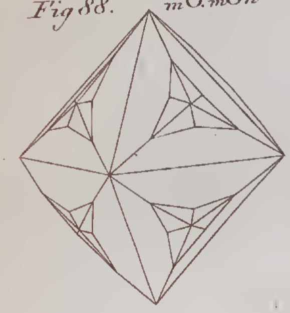


Fig. 89 $2O.\frac{4}{3}O\frac{4}{3}$

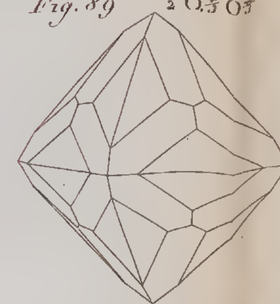


Fig. 90 $2O.2O2$

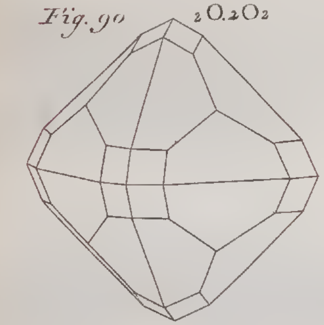


Fig. 91 $mO.m'Om'$

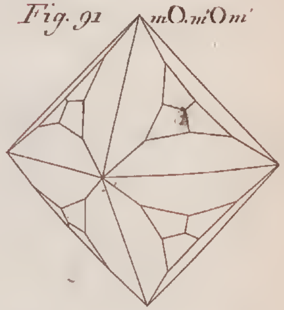


Fig. 92 $3O.2O$

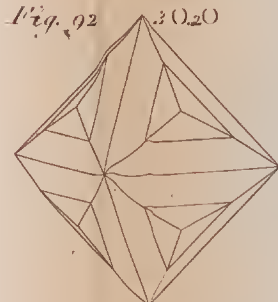


Fig. 93 $2O.\infty O2$

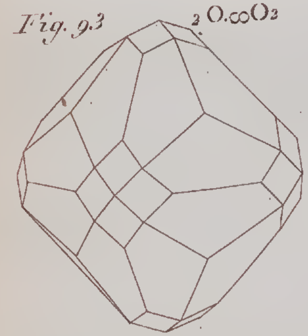


Fig. 94 $2O.\infty O$

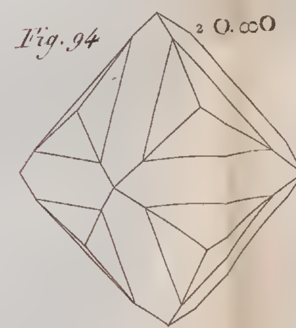


Fig. 95 $22O.O$

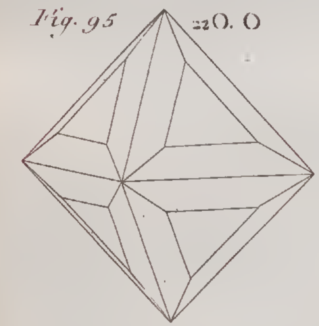


Fig. 96 $2O.\infty O\infty$

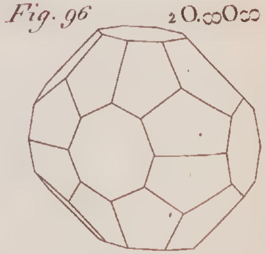


Fig. 97 $\infty O\frac{5}{3}.4O2$

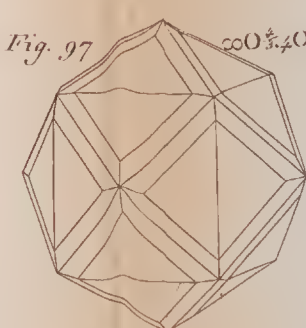


Fig. 98 $\infty On.m'On'$

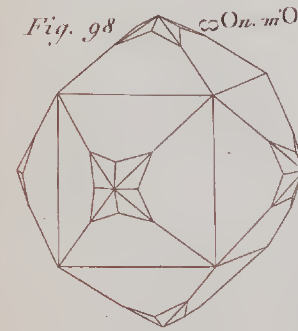


Fig. 99 $\infty O\frac{3}{2}.3O\frac{3}{2}$

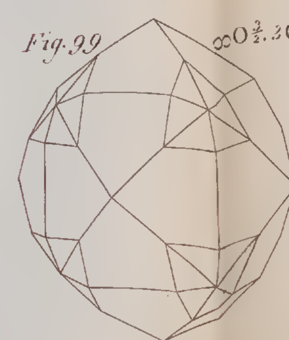


Fig. 100 $\infty O\frac{3}{2}.3O3$

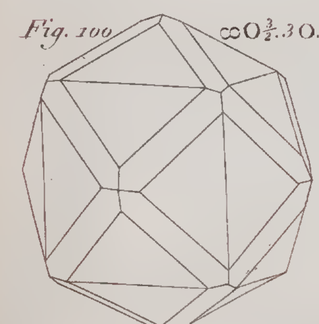


Fig. 101 $\infty O\frac{3}{2} . 4O4$

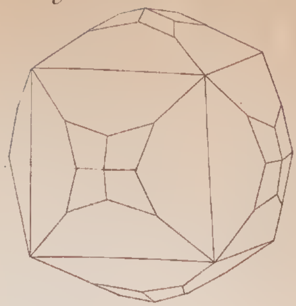


Fig. 102 $\infty O3 . 2O2$

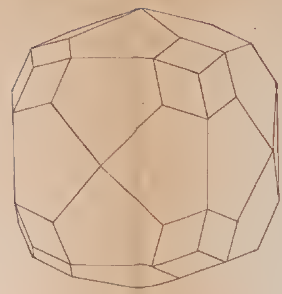


Fig. 103 $\infty O2 . 2O$

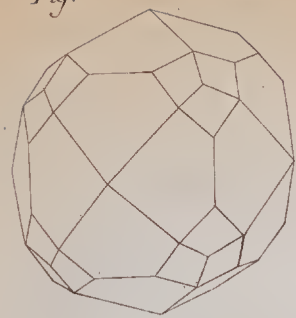


Fig. 104 $\infty O2 . \infty O3$

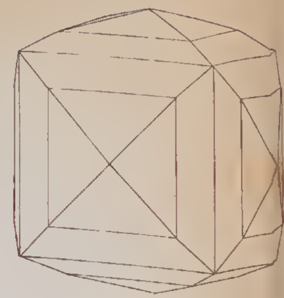


Fig. 105 $\infty O2 . \infty O$

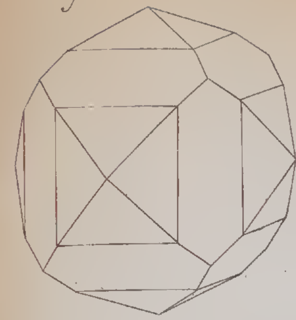


Fig. 106 $\infty O2 . O$

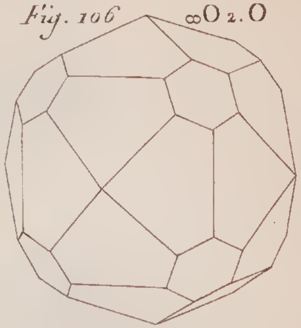


Fig. 107 $\infty O2 . \infty O\infty$

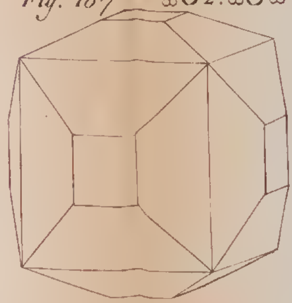


Fig. 108 $\infty O . 3O\frac{3}{2}$

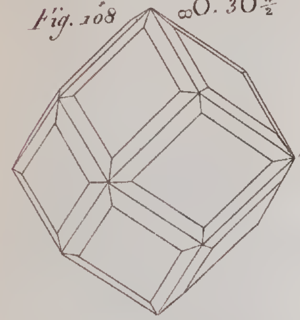


Fig. 109 $\infty O . 5O\frac{5}{3}$

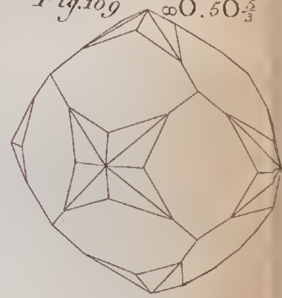


Fig. 110 $\infty O . mOn$

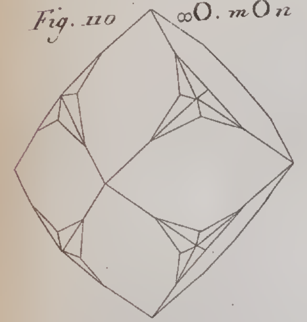


Fig. 111 $\infty O . 2O2$

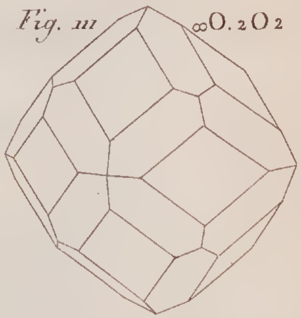


Fig. 112 $\infty O . 3O3$

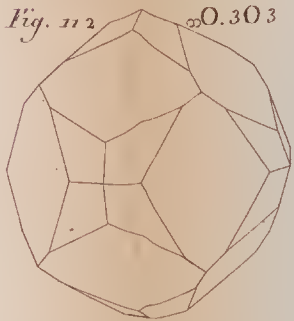


Fig. 113 $\infty O . \frac{3}{2}O\frac{3}{2}$

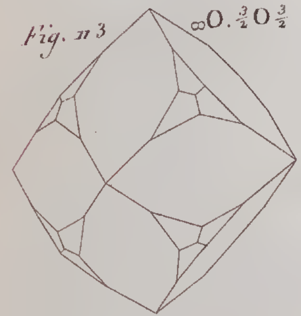


Fig. 114 $\infty O . 2O$

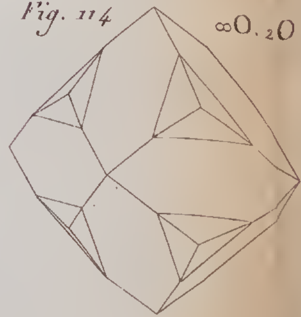


Fig. 115 $\infty O . \infty On$

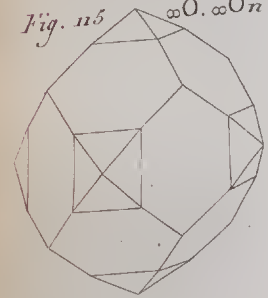


Fig. 116 $\infty O . O$

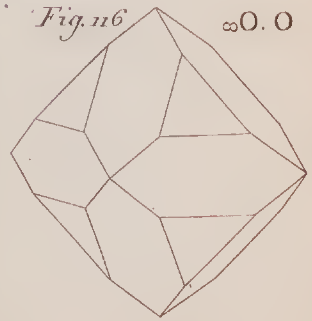


Fig. 117 $\infty O . \infty O\infty$

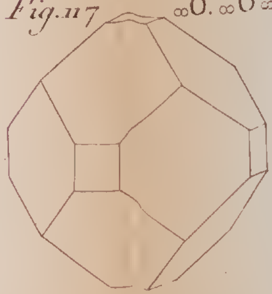


Fig. 118 $O . 3O\frac{3}{2}$

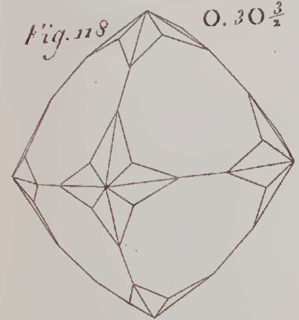


Fig. 119 $O . 2O2$

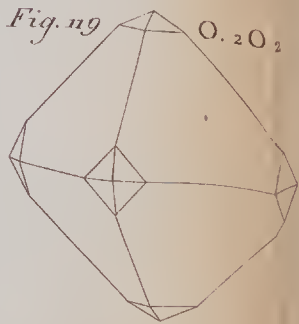


Fig. 120 $O . 2O$

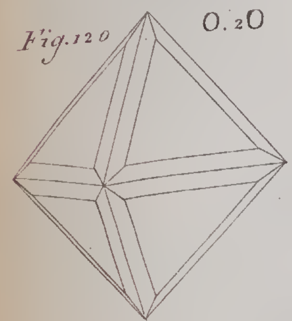


Fig. 121 O. ∞O2

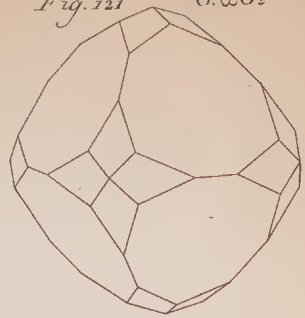


Fig. 122 O. ∞O

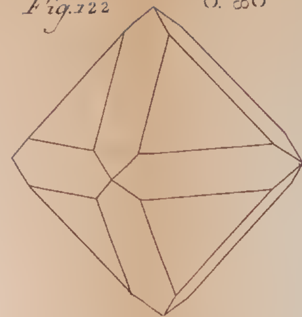


Fig. 123 O. ∞O∞

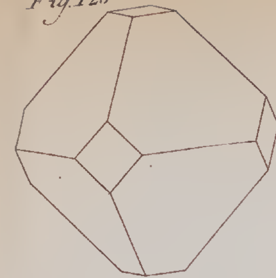


Fig. 124 O. ∞O∞

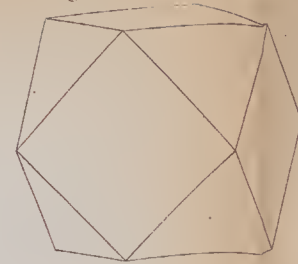


Fig. 125 ∞O∞. $\frac{4}{3}O\frac{4}{3}$

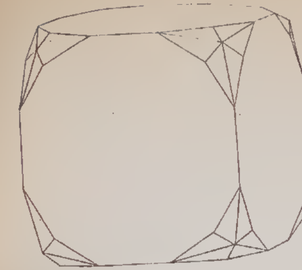


Fig. 126 ∞O∞. 2O2

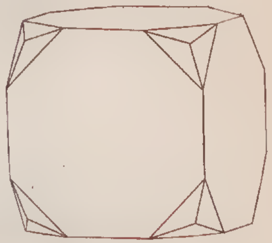


Fig. 127 ∞O∞. 2O

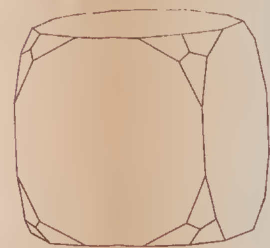


Fig. 128 ∞O∞. ∞O2

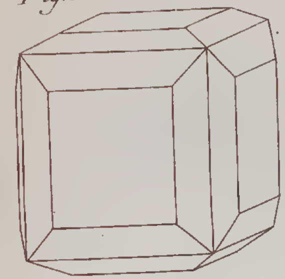


Fig. 129 ∞O∞. ∞O

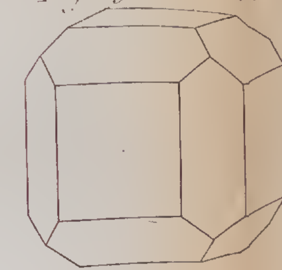


Fig. 130 ∞O∞. O

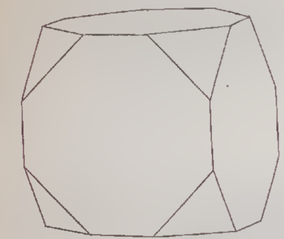


Fig. 131 mOn. $3O\frac{3}{2}$

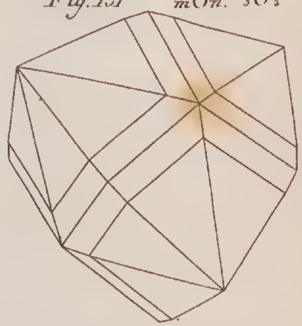


Fig. 132 mOn. $3O\frac{3}{2}$

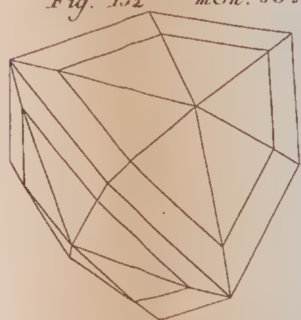


Fig. 133 $3O\frac{3}{2}$. mOn

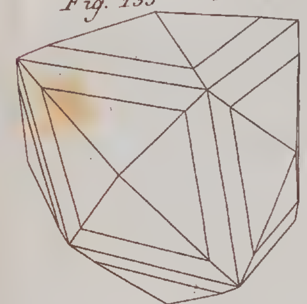


Fig. 134 $3O\frac{3}{2}$. mOn

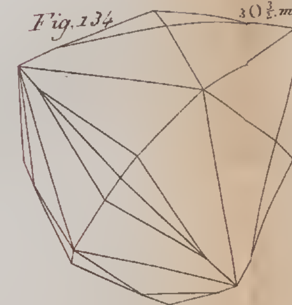


Fig. 135 mOn. $3O\frac{3}{2}$

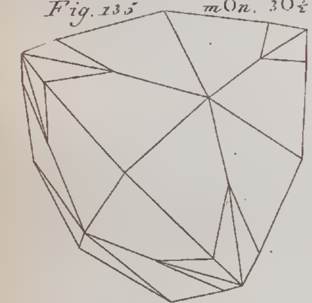


Fig. 136 mOn. $3O\frac{3}{2}$

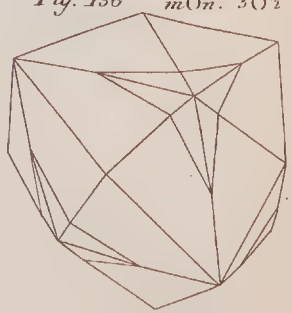


Fig. 137 mOn. 2O

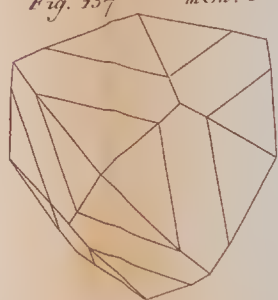


Fig. 138 mOn. 2O

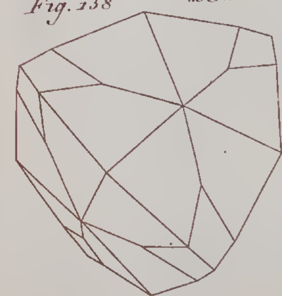


Fig. 139 mOn. 2O

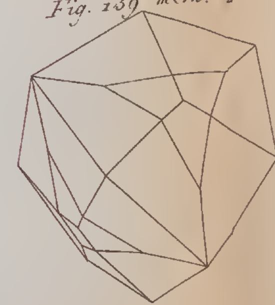


Fig. 140 $3O\frac{3}{2}$. 2O2

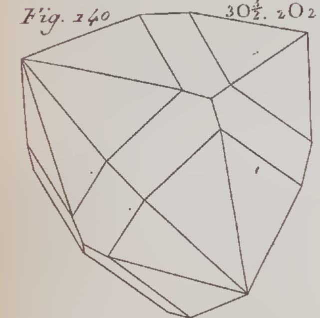


Fig. 141 $\frac{3O\frac{3}{2}}{2}.\frac{mOm}{2}$

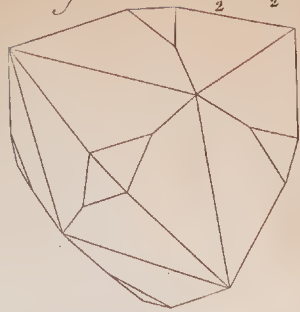


Fig. 142 $\frac{3O\frac{3}{2}}{2}.\frac{mOm}{2}$

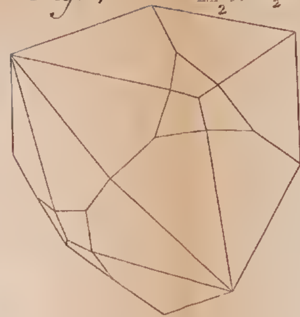


Fig. 143 $\frac{3O\frac{3}{2}}{2}.-\frac{6O6}{2}$

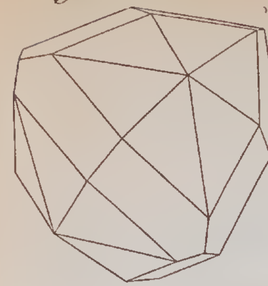


Fig. 144 $\frac{3O\frac{3}{2}}{2}.-\frac{mOm}{2}$

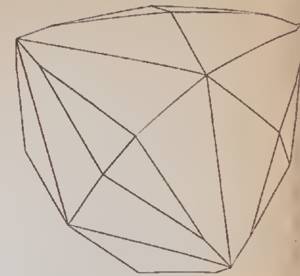


Fig. 145 $\frac{3O\frac{3}{2}}{2}.-\frac{mOm}{2}$

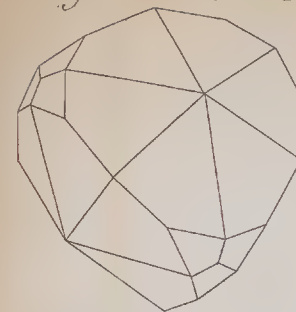


Fig. 146 $3O\frac{3}{2}.\infty O$

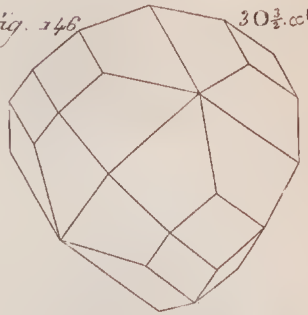


Fig. 147 $3O\frac{3}{2}.\infty O\infty$

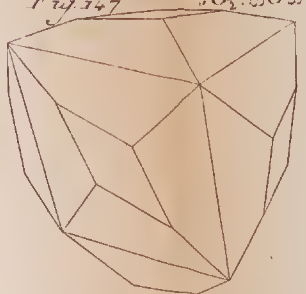


Fig. 148 $\frac{3O\frac{3}{2}}{2}.\frac{O}{2}$

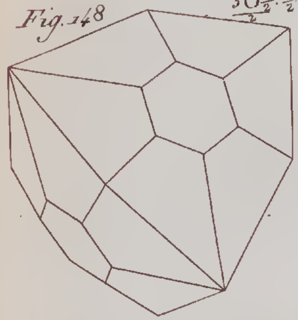


Fig. 149 $\frac{3O\frac{3}{2}}{2}.-\frac{O}{2}$

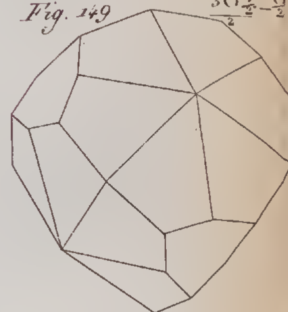


Fig. 150 $\frac{mOm}{2}.\frac{m'On'}{2}$

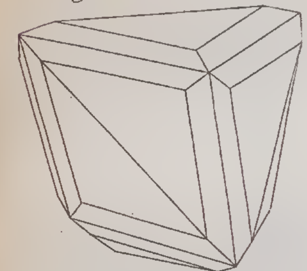


Fig. 151 $\frac{2O2}{2}.\frac{3O\frac{3}{2}}{2}$

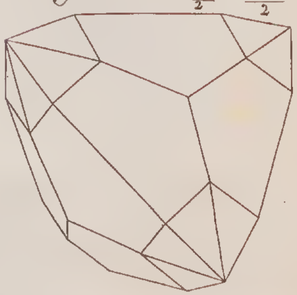


Fig. 152 $\frac{2O2}{2}.\frac{O}{2}$

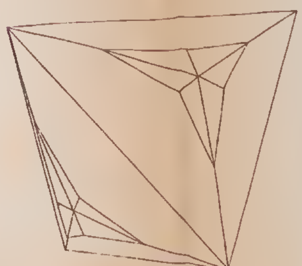


Fig. 153 $\frac{2O2}{2}.\frac{3O\frac{3}{2}}{2}$

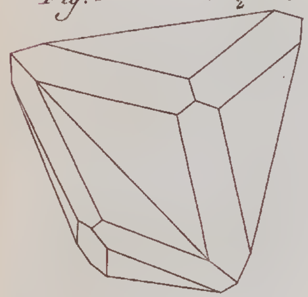


Fig. 154 $\frac{2O2}{2}.\frac{2O}{2}$

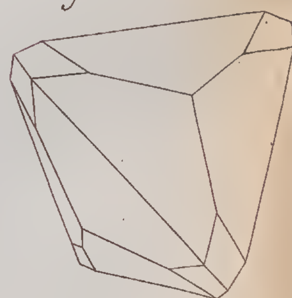


Fig. 155 $\frac{2O2}{2}.\frac{mO}{2}$

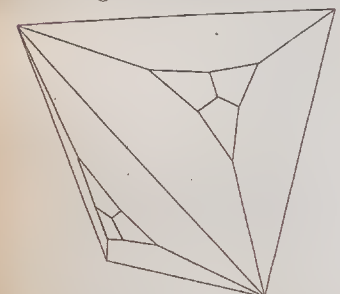


Fig. 156 $\frac{2O2}{2}.\frac{3O3}{2}$

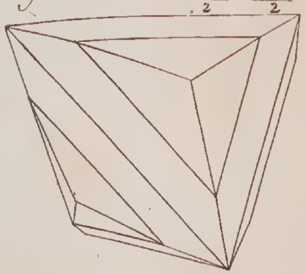


Fig. 157 $\frac{2O2}{2}.-\frac{2O2}{2}$

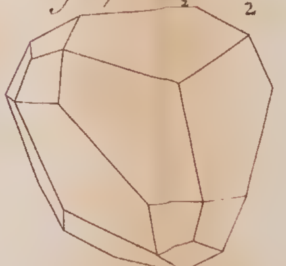


Fig. 158 $\frac{2O2}{2}.\infty O$

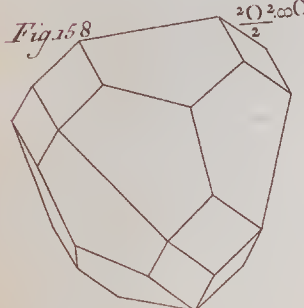


Fig. 159 $\frac{2O2}{2}.\infty O\infty$

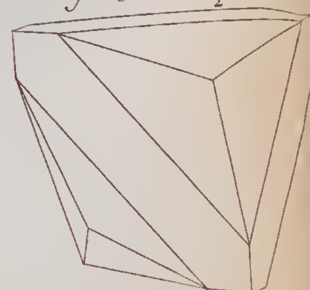
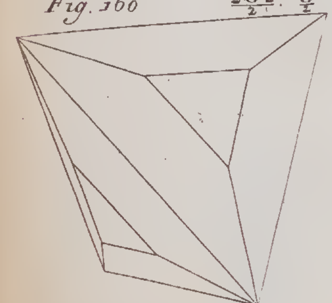


Fig. 160 $\frac{2O2}{2}.\frac{O}{2}$



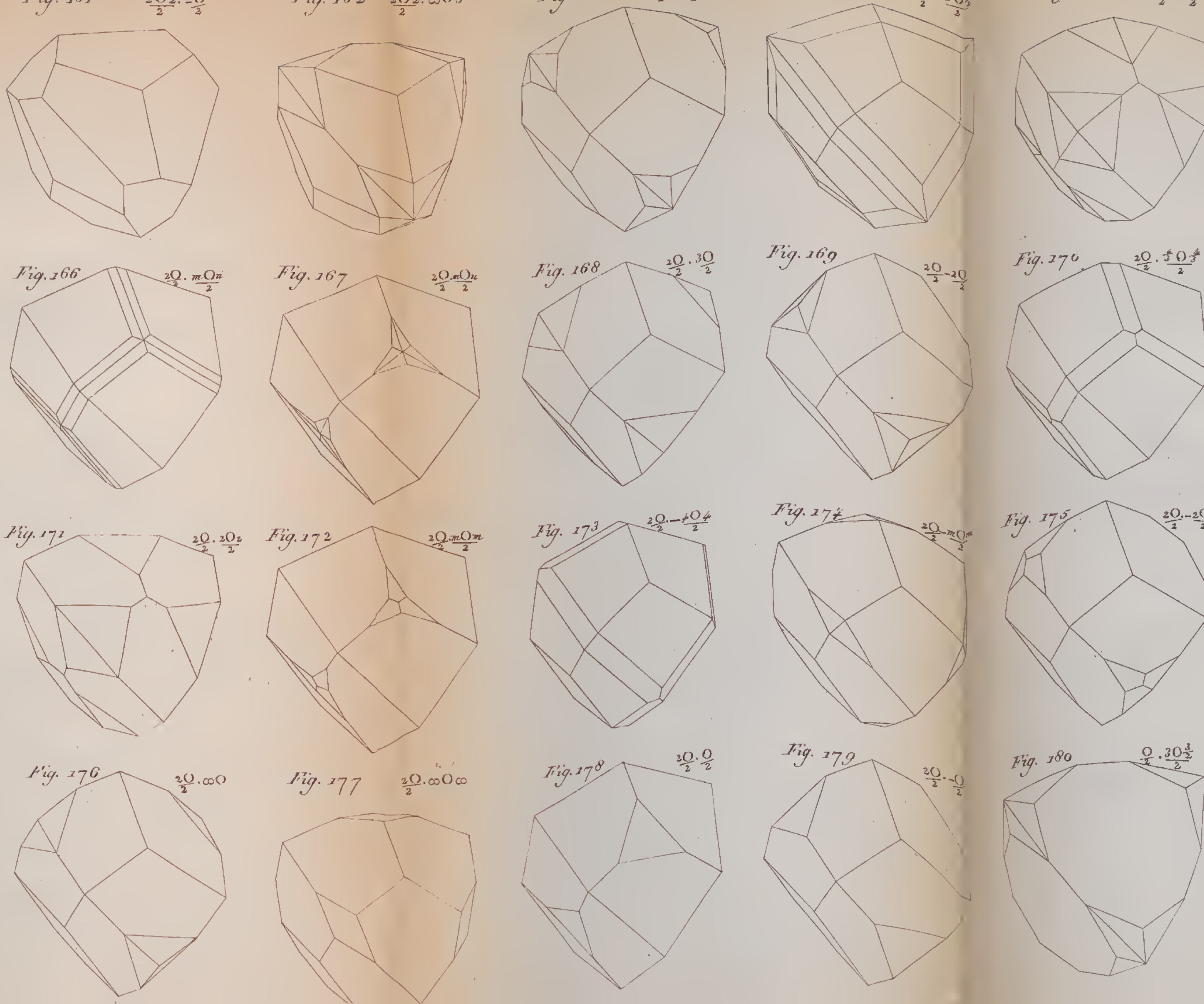


Fig. 161 $\frac{2O2}{2} . -\frac{O}{2}$

Fig. 162 $\frac{2O2}{2} . \infty O3$

Fig. 163 $\frac{2O}{2} . \frac{mOn}{2}$

Fig. 164 $\frac{\frac{3}{2}O}{2} . \frac{3O\frac{3}{2}}{2}$

Fig. 165 $\frac{2O}{2} . \frac{mOn}{2}$

Fig. 166 $\frac{2O}{2} . \frac{mOn}{2}$

Fig. 167 $\frac{2O}{2} . \frac{mOn}{2}$

Fig. 168 $\frac{2O}{2} . \frac{3O}{2}$

Fig. 169 $\frac{2O}{2} . -\frac{2O}{2}$

Fig. 170 $\frac{2O}{2} . \frac{\frac{4}{3}O\frac{4}{3}}{2}$

Fig. 171 $\frac{2O}{2} . \frac{2O2}{2}$

Fig. 172 $\frac{2O}{2} . \frac{mOm}{2}$

Fig. 173 $\frac{2O}{2} . -\frac{4O4}{2}$

Fig. 174 $\frac{2O}{2} . -\frac{mOm}{2}$

Fig. 175 $\frac{2O}{2} . -\frac{2O2}{2}$

Fig. 176 $\frac{2O}{2} . \infty O$

Fig. 177 $\frac{2O}{2} . \infty O \infty$

Fig. 178 $\frac{2O}{2} . \frac{O}{2}$

Fig. 179 $\frac{2O}{2} . -\frac{O}{2}$

Fig. 180 $\frac{O}{2} . \frac{3O\frac{3}{2}}{2}$

Fig. 181 $\frac{O}{2} \cdot \frac{2O}{2}$

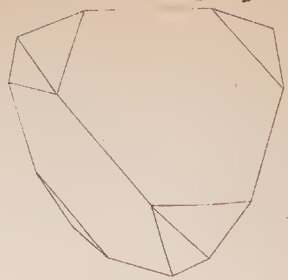


Fig. 182 $\frac{O}{2} \cdot -\frac{2O}{2}$

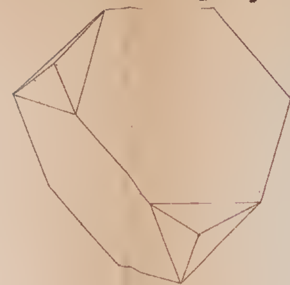


Fig. 183 $\frac{O}{2} \cdot \frac{2O2}{2}$

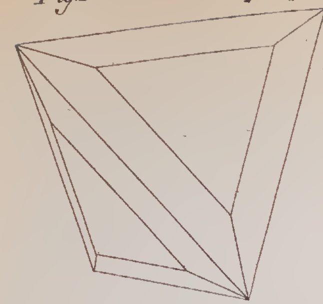


Fig. 184 $\frac{O}{2} \cdot -\frac{2O2}{2}$

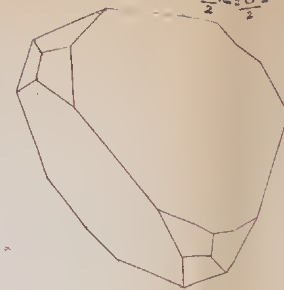


Fig. 185 $\frac{O}{2} - \frac{O}{2}$

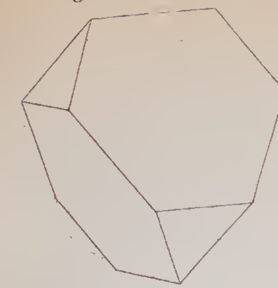


Fig. 186 $\frac{O}{2} \cdot \infty O$

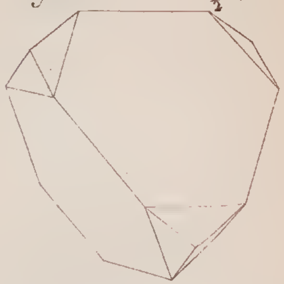


Fig. 187 $\frac{O}{2} \cdot \infty O \infty$

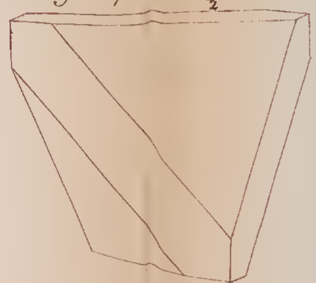


Fig. 188 $\infty O \cdot \frac{3O\frac{3}{2}}{2}$

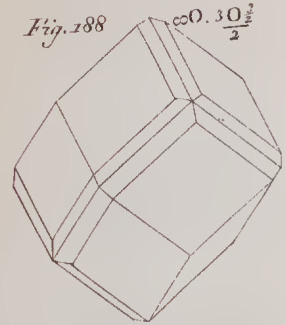


Fig. 189 $\infty O \cdot \frac{2O2}{2}$

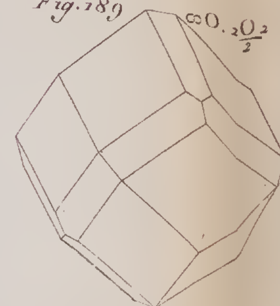


Fig. 190 $\infty O \cdot \frac{3O3}{2}$

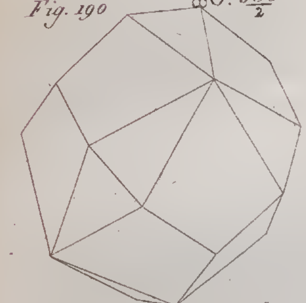


Fig. 191 $3O\frac{3}{2} \cdot 4O\frac{4}{3}$

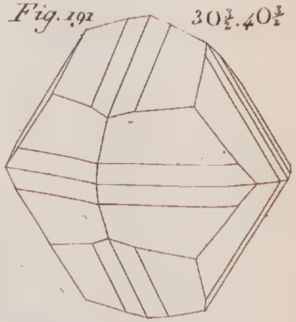


Fig. 192 $3O\frac{3}{2} \cdot 3O3$

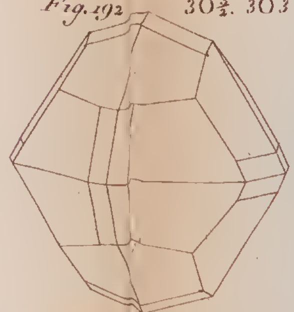


Fig. 193 $3O\frac{3}{2} \cdot mOn$

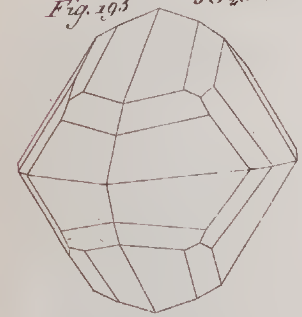


Fig. 194 $4O2 \cdot 3O\frac{3}{2}$

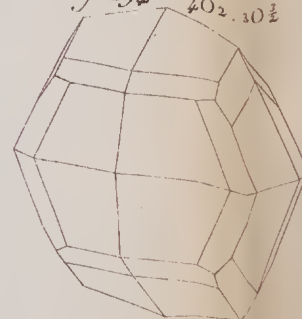


Fig. 195 $3O\frac{3}{2} \cdot 5O\frac{5}{3}$

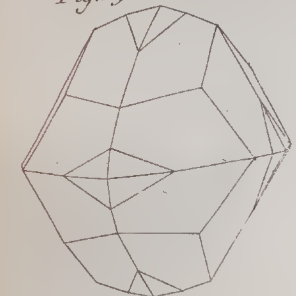


Fig. 196 $3O\frac{3}{2} \cdot -\frac{3}{2}On$

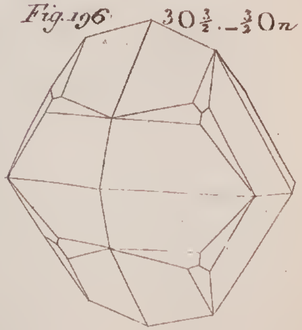


Fig. 197 $5O\frac{5}{3} \cdot 3O\frac{3}{2}$

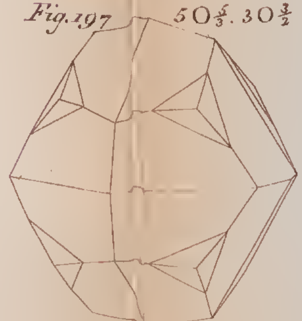


Fig. 198 $5O\frac{5}{3} \cdot 4O2$

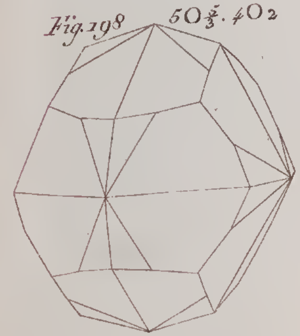


Fig. 199 $3O\frac{3}{2} \cdot 3O$

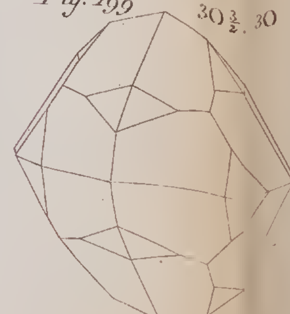


Fig. 200 $3O\frac{3}{2} \cdot 2O$

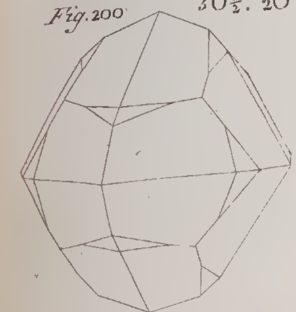


Fig. 201 $\left[\frac{4O2}{2}\right]$

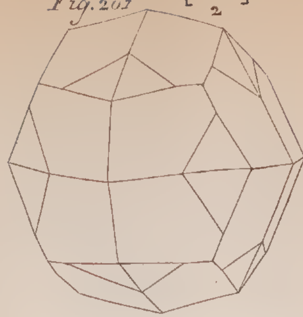


Fig. 202 $\left[\frac{4O2}{2}\right] . \frac{\infty O2}{2}$

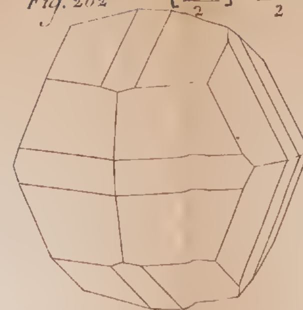


Fig. 203 $\left[\frac{3O\frac{3}{2}}{2}\right] . \frac{\infty O2}{2}$

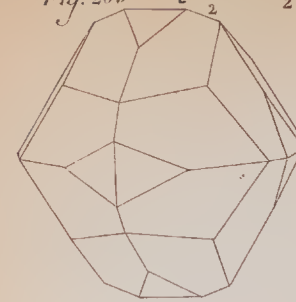


Fig. 204 $\left[\frac{5O\frac{5}{3}}{2}\right] . \frac{\infty O\frac{5}{3}}{2}$

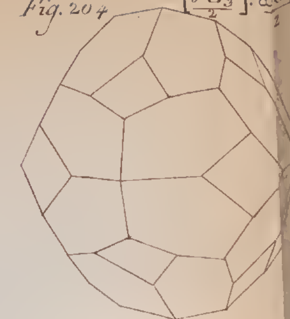


Fig. 205 $\left[\frac{3O\frac{3}{2}}{2}\right] . -\frac{\infty O3}{2}$

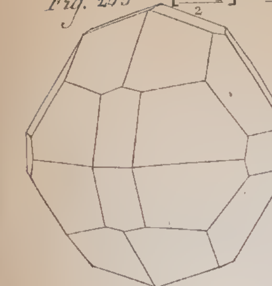


Fig. 206 $\left[\frac{3O\frac{3}{2}}{2}\right] . -\frac{\infty O4}{2}$

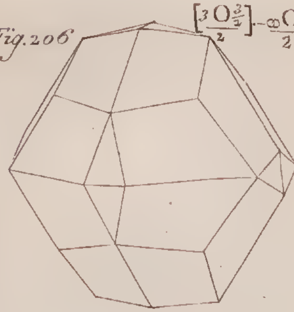


Fig. 207 $\left[\frac{3O\frac{3}{2}}{2}\right] . -\frac{\infty O2}{2}$

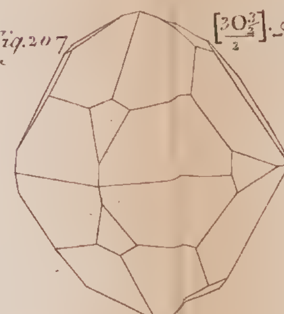


Fig. 208 $\left[\frac{3O\frac{3}{2}}{2}\right] . \infty O$

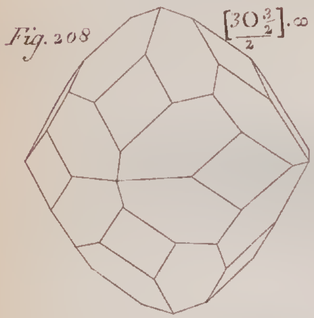


Fig. 209 $\left[\frac{3O\frac{3}{2}}{2}\right]$ O

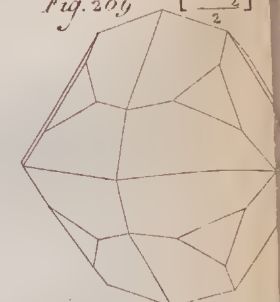


Fig. 210 $\left[\frac{3O\frac{3}{2}}{2}\right] . \infty O \infty$

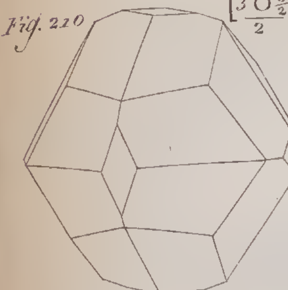


Fig. 211 $\left[\frac{3O\frac{3}{2}}{2}\right] \infty O \infty$

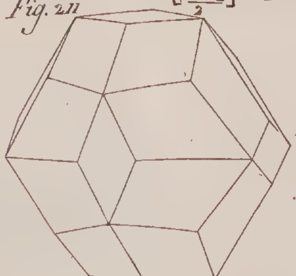


Fig. 212 $\left[\frac{4O2}{2}\right] . \infty O \infty$

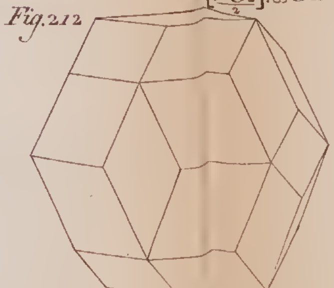


Fig. 213 $\frac{\infty O2}{2} . \left[\frac{4O2}{2}\right]$

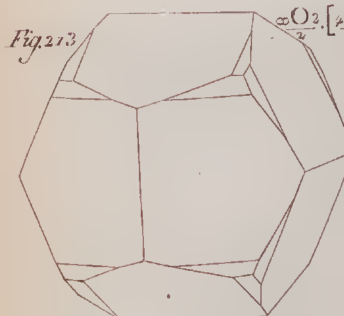


Fig. 214 $\frac{\infty O\frac{3}{2}}{2} \left[\frac{3O\frac{3}{2}}{2}\right]$

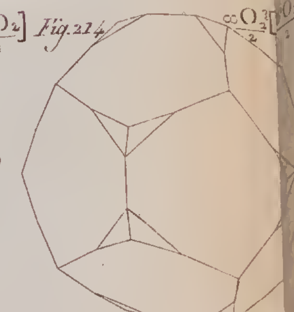


Fig. 215 $\frac{\infty O2}{2} \left[\frac{3O\frac{3}{2}}{2}\right]$

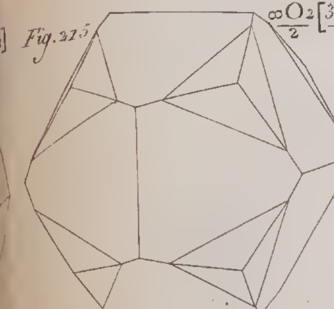


Fig. 216 $\frac{\infty O\frac{3}{2}}{2} . \left[\frac{mOn}{2}\right]$

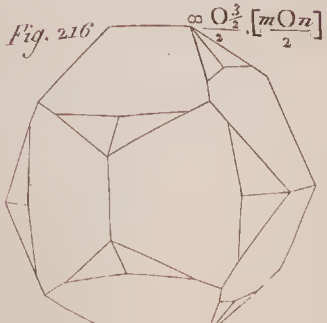


Fig. 217 $\frac{\infty O2}{2} \left[\frac{3O\frac{3}{2}}{2}\right]$

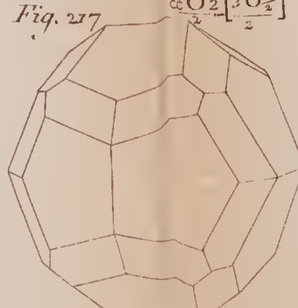


Fig. 218 $\frac{\infty O\frac{3}{2}}{2} \; \frac{\infty O2}{2}$

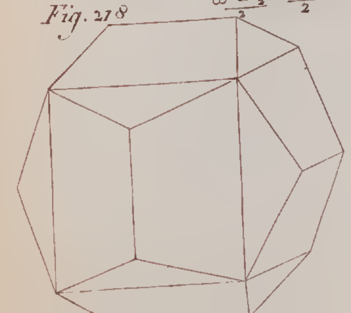


Fig. 219 $\frac{\infty O2}{2} . -\frac{\infty O\frac{3}{2}}{2}$

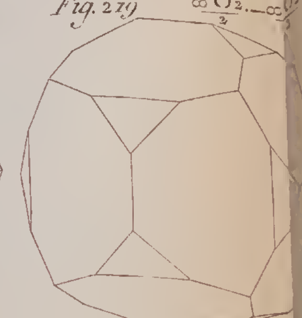


Fig. 220 $\frac{\infty O2}{2} . \infty O$

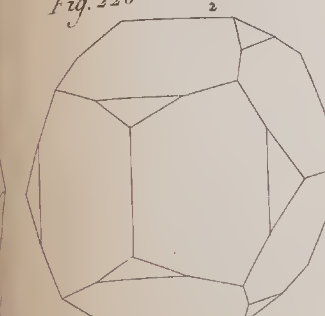


Fig. 221 $\frac{\infty O 2}{2} . \frac{\infty O 3}{2}$

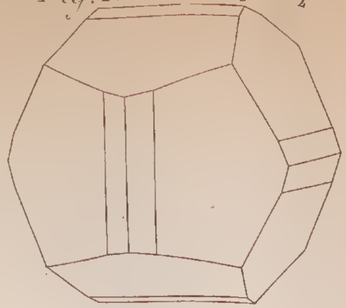


Fig. 222 $\frac{\infty O 2}{2} . O$

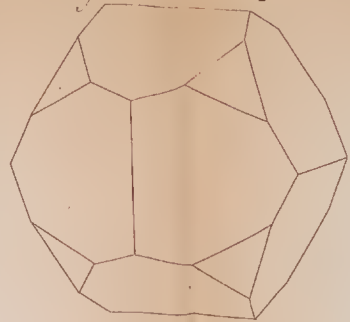


Fig. 223 $\frac{\infty O 2}{2} . O$

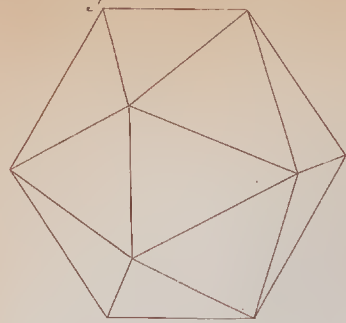


Fig. 224 $\frac{\infty O 2}{2} . \infty O \infty$

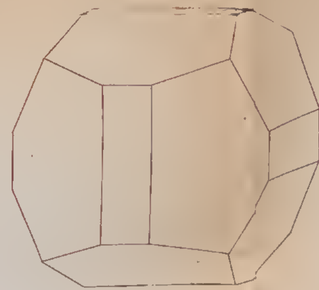


Fig. 225 $\frac{\infty O 2}{2} . \infty O \infty$

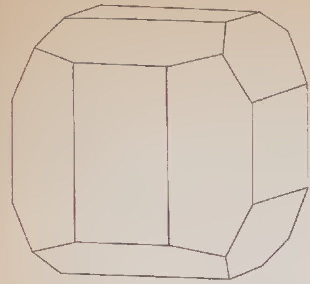


Fig. 226 $\infty O . \frac{\infty O 2}{2}$

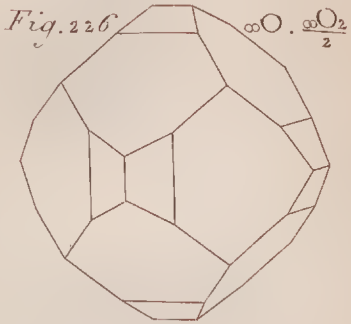


Fig. 227 $\infty O \infty . \frac{\infty O 2}{2}$

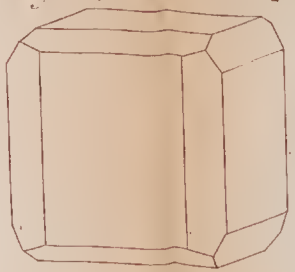


Fig. 228 $\infty O \infty . \left[\frac{3 O \frac{3}{2}}{2}\right]$

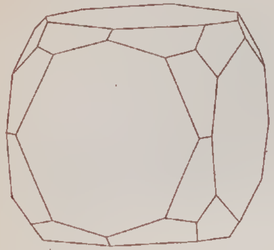


Fig. 229 $O . \left[\frac{3 O \frac{3}{2}}{2}\right]$

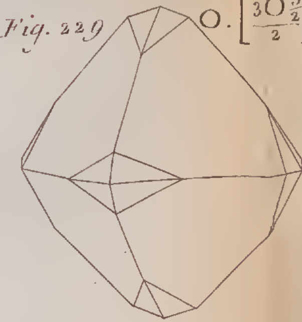


Fig. 230 $O . \frac{\infty O 2}{2}$

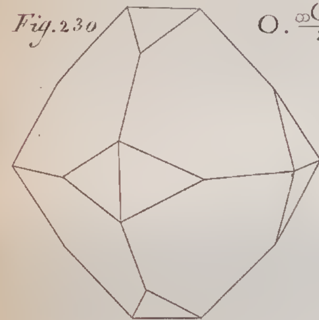


Fig. 231

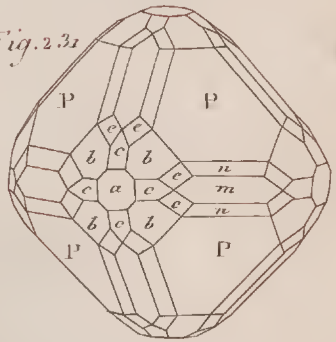


Fig. 232

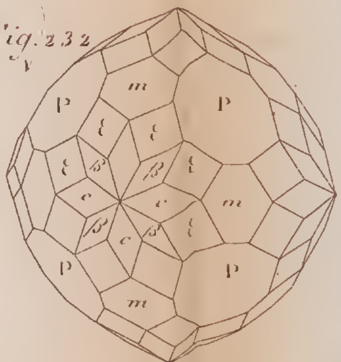


Fig. 233

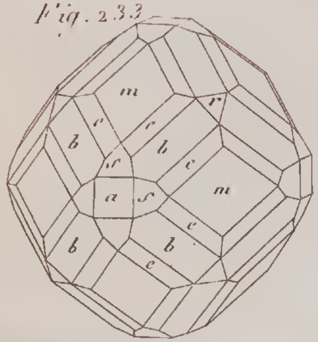


Fig. 237

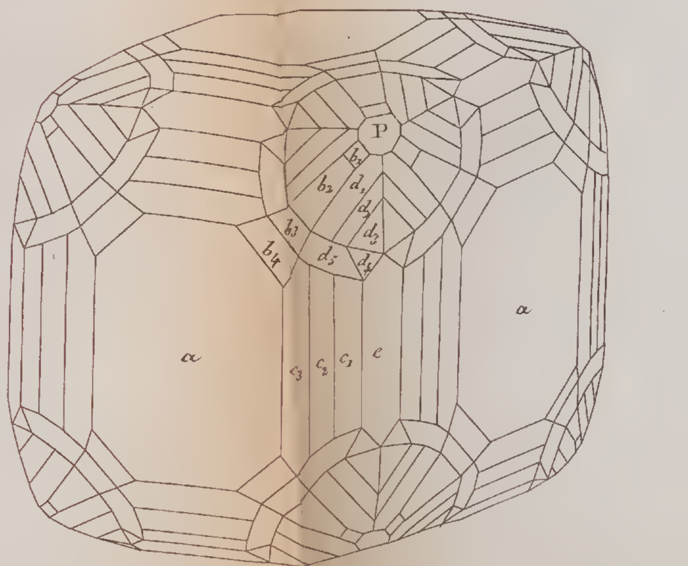


Fig. 234

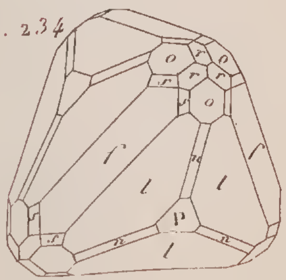


Fig. 235

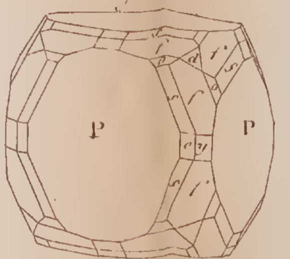
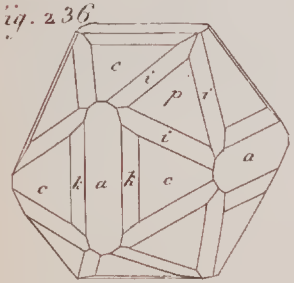


Fig. 236



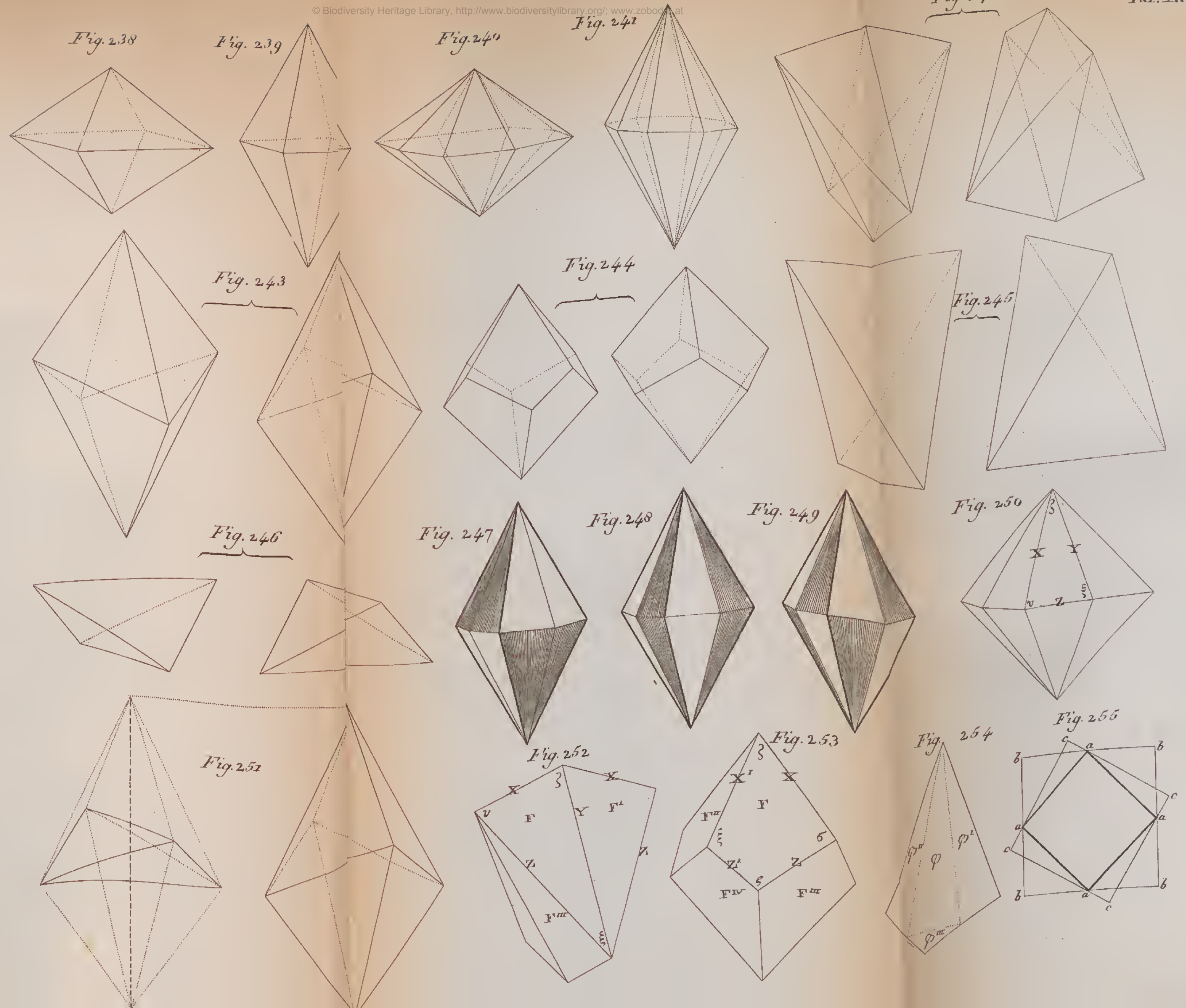


Fig. 238
Fig. 239
Fig. 240
Fig. 241
Fig. 242
Fig. 243
Fig. 244
Fig. 245
Fig. 246
Fig. 247
Fig. 248
Fig. 249
Fig. 250
Fig. 251
Fig. 252
Fig. 253
Fig. 254
Fig. 255

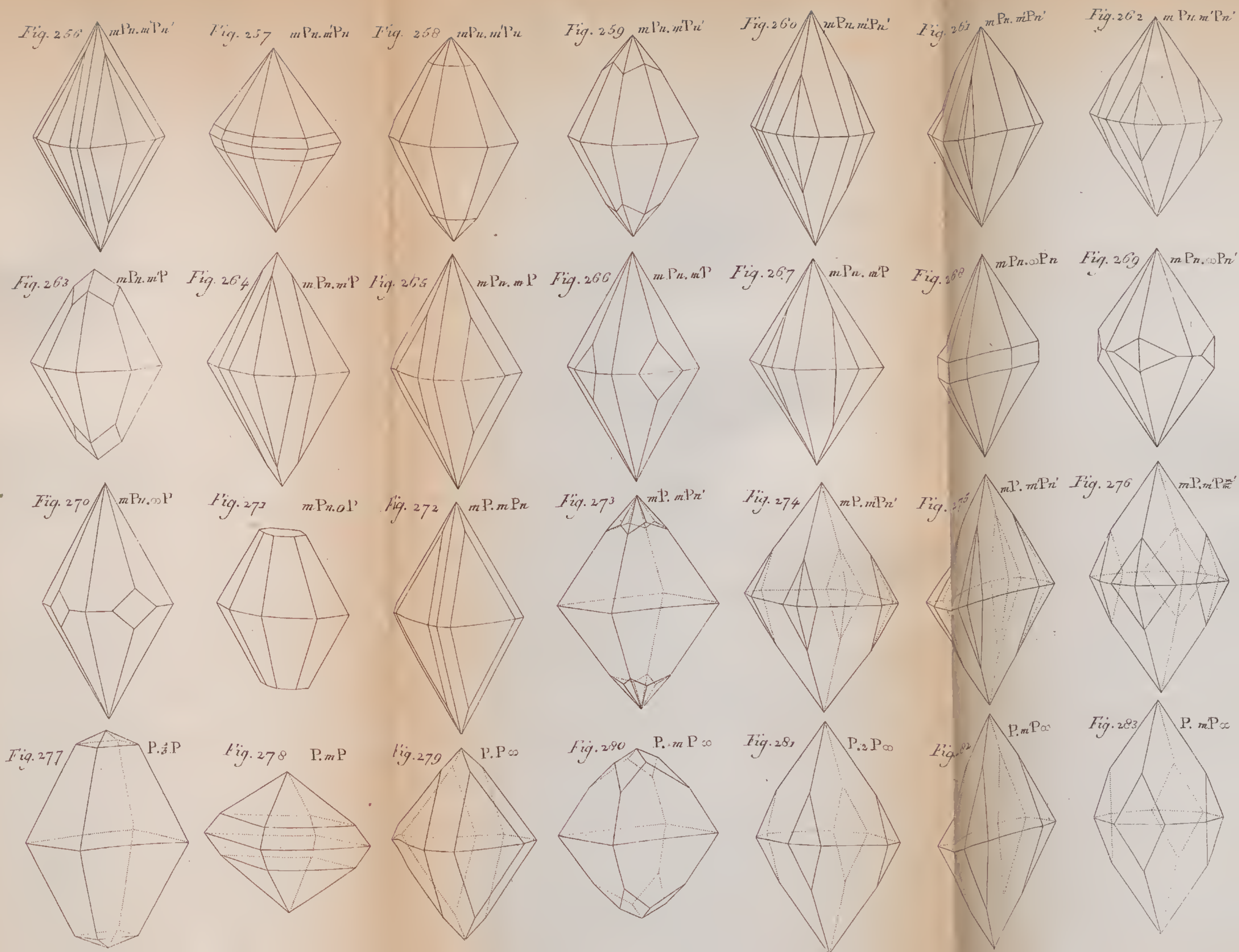


Fig. 256 mPn.m'Pn'
Fig. 257 mPn.m'Pn
Fig. 258 mPn.m'Pn
Fig. 259 mPn.m'Pn'
Fig. 260 mPn.m'Pn'
Fig. 261 mPn.m'Pn'
Fig. 262 mPn.m'Pn'
Fig. 263 mPn.m'P
Fig. 264 mPn.m'P
Fig. 265 mPn.mP
Fig. 266 mPn.mP
Fig. 267 mPn.m'P
Fig. 268 mPn.∞Pn
Fig. 269 mPn.∞Pn'
Fig. 270 mPn.∞P
Fig. 271 mPn.oP
Fig. 272 mP.mPn
Fig. 273 mP.m'Pn'
Fig. 274 mP.m'Pn'
Fig. 275 mP.m'Pn'
Fig. 276 mP.m'P$\frac{n'}{n}$
Fig. 277 P.$\frac{1}{3}$P
Fig. 278 P.mP
Fig. 279 P.P∞
Fig. 280 P.mP∞
Fig. 281 P.2P∞
Fig. 282 P.mP∞
Fig. 283 P.mP∞

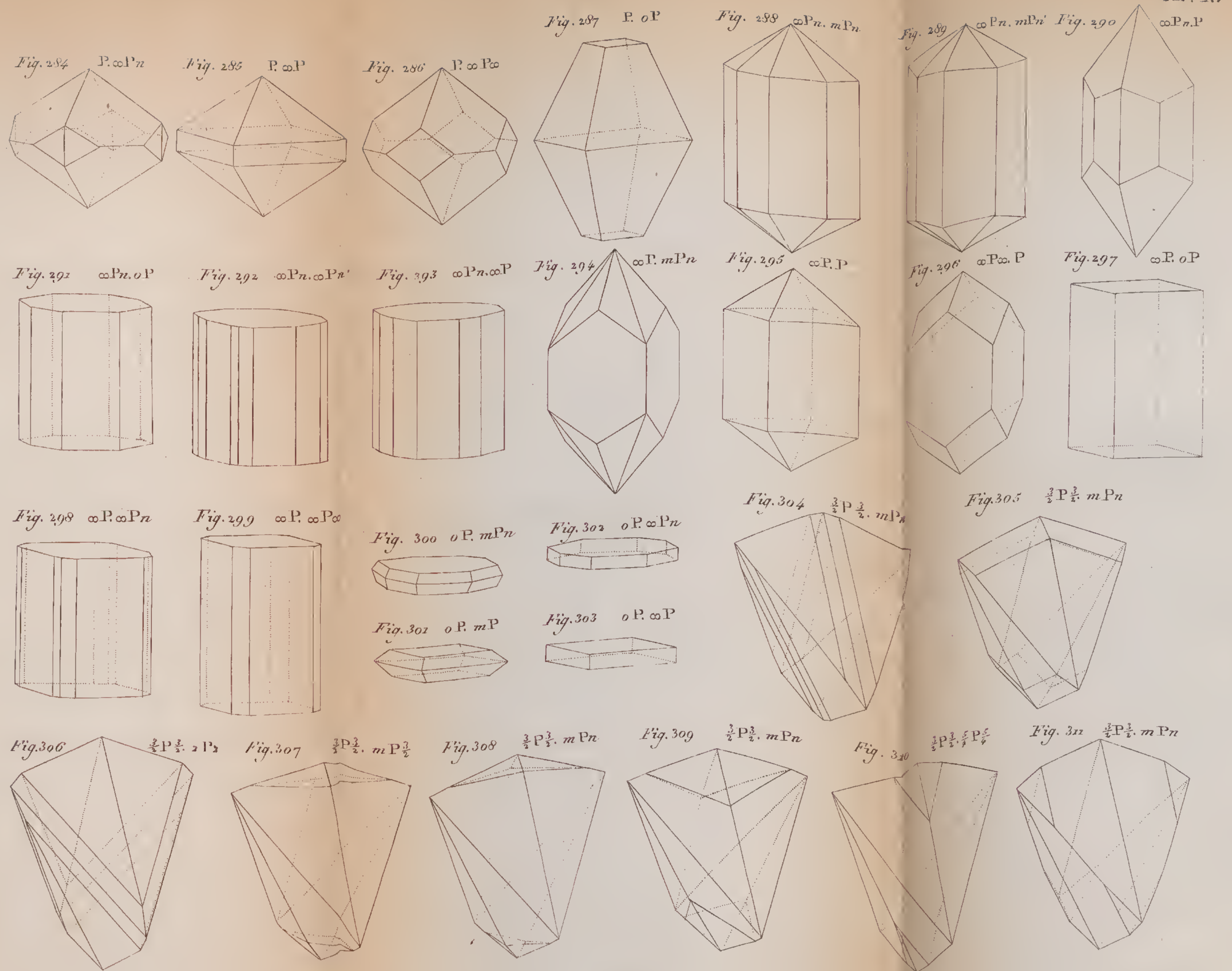


Fig. 284 $P.\infty Pn$
Fig. 285 $P.\infty P$
Fig. 286 $P.\infty P\infty$
Fig. 287 $P.\ oP$
Fig. 288 $\infty Pn.\ mPn$
Fig. 289 $\infty Pn.\ mPn'$
Fig. 290 $\infty Pn.P$
Fig. 291 $\infty Pn.oP$
Fig. 292 $\infty Pn.\infty Pn'$
Fig. 293 $\infty Pn.\infty P$
Fig. 294 $\infty P.\ mPn$
Fig. 295 $\infty P.P$
Fig. 296 $\infty P\infty.\ P$
Fig. 297 $\infty P.\ oP$
Fig. 298 $oP.\infty Pn$
Fig. 299 $\infty P.\ \infty P\infty$
Fig. 300 $oP.\ mPn$
Fig. 301 $oP.\ mP$
Fig. 302 $oP.\infty Pn$
Fig. 303 $oP.\infty P$
Fig. 304 $\frac{3}{2}P\frac{3}{2}.\ mPn$
Fig. 305 $\frac{3}{2}P\frac{3}{2}.\ mPn$
Fig. 306 $\frac{3}{2}P\frac{3}{2}.\ 2P2$
Fig. 307 $\frac{3}{2}P\frac{3}{2}.\ mP\frac{3}{2}$
Fig. 308 $\frac{3}{2}P\frac{3}{2}.\ mPn$
Fig. 309 $\frac{3}{2}P\frac{3}{2}.\ mPn$
Fig. 310 $\frac{3}{2}P\frac{3}{2}.\frac{5}{4}P\frac{5}{4}$
Fig. 311 $\frac{3}{2}P\frac{3}{2}.\ mPn$

Fig. 312 $\frac{3}{2}P\frac{3}{2}.\ mPn$

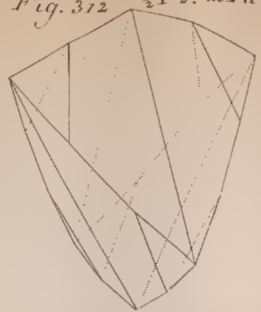


Fig. 313 $\frac{3}{2}P\frac{3}{2}.\ mPn$

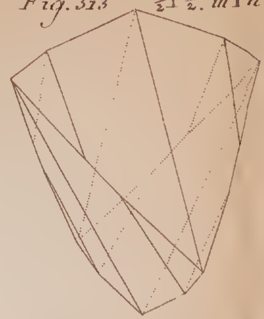


Fig. 314 $\frac{3}{2}P\frac{3}{2}.\ 3P\frac{3}{2}$

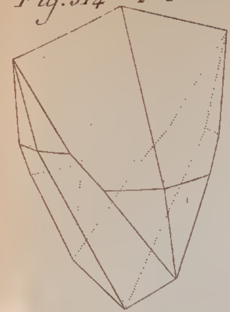


Fig. 315 $\frac{3}{2}P\frac{3}{2}.\ mPn$

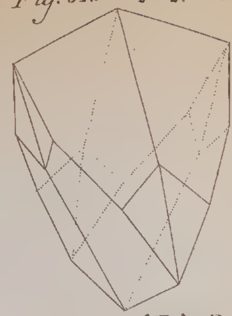


Fig. 316 $\frac{3}{2}P\frac{3}{2}.\ mPn$

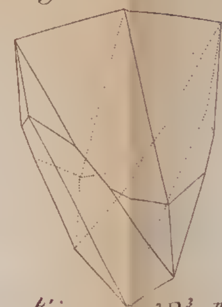


Fig. 317 $\frac{3}{2}P\frac{3}{2}.\ mPn$

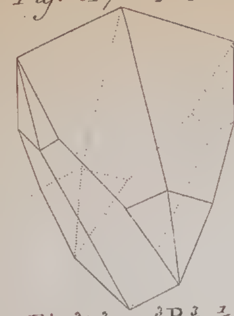


Fig. 318 $\frac{3}{2}P\frac{3}{2}.\ \frac{5}{4}P$

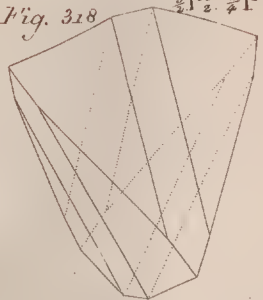


Fig. 319 $\frac{3}{2}P\frac{3}{2}.\ mP$

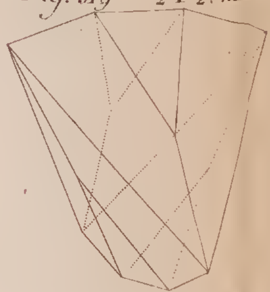


Fig. 320 $\frac{3}{2}P\frac{3}{2}.\ mP$

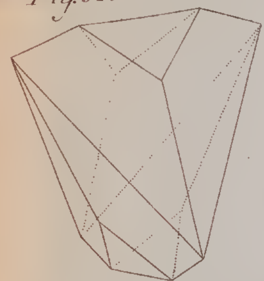


Fig. 321 $\frac{3}{2}P\frac{3}{2}.\ P$

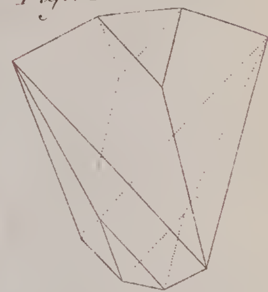


Fig. 322 $\frac{3}{2}P\frac{3}{2}.\ mP$

Fig. 323 $\frac{3}{2}P\frac{3}{2} - \frac{1}{4}P$

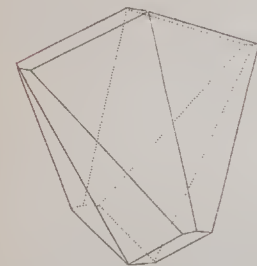


Fig. 324 $\frac{3}{2}P\frac{3}{2}.\ -mP$

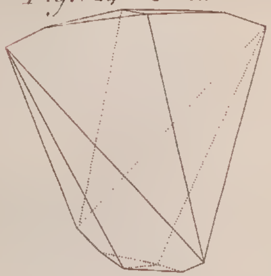


Fig. 325.a $\frac{3}{2}P\frac{3}{2}.\ -mP$

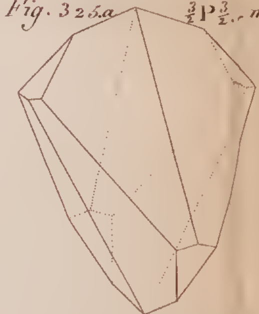


Fig. 325.b $\frac{3}{2}P\frac{3}{2}.\ \infty P$

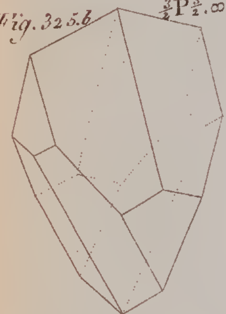


Fig. 326 $\frac{3}{2}P\frac{3}{2}.\ \infty P\infty$

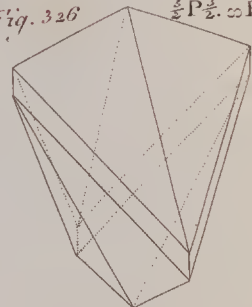


Fig. 327 $\frac{3}{2}P\frac{3}{2}.\ 0P$

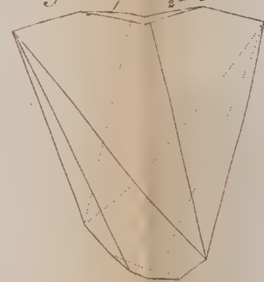


Fig. 328 $\frac{P}{2}.\ \frac{5P5}{2}$

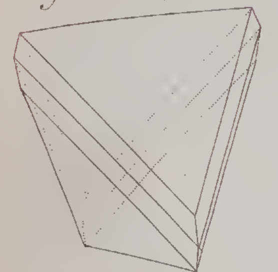


Fig. 329 $\frac{P}{2}.\ \frac{mPn}{2}$

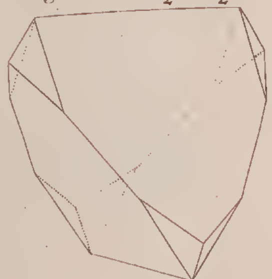


Fig. 330 $\frac{P}{2}.\ \frac{mPn}{2}$

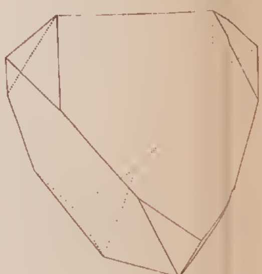


Fig. 331 $\frac{P}{2}.\ \frac{mPn}{2}$

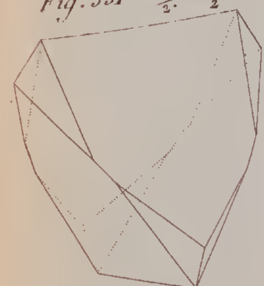


Fig. 332 $\frac{P}{2}.\ \frac{mPn}{2}$

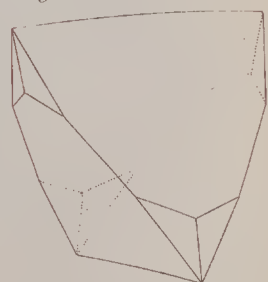


Fig. 333 $\frac{P}{2}.\ \frac{\frac{3}{2}P}{2}$

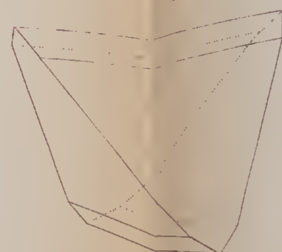


Fig. 334 $\frac{P}{2}.\ \frac{3P}{2}$

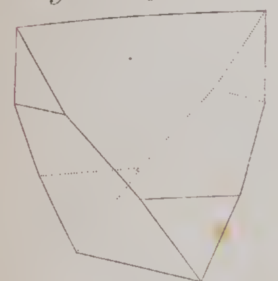


Fig. 335 $\frac{P}{2}.-\frac{mP}{2}$

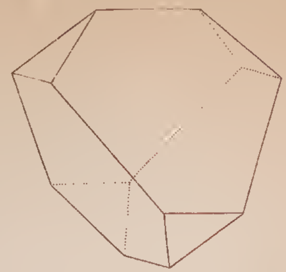


Fig. 336 $\frac{P}{2}.-\frac{P}{2}$

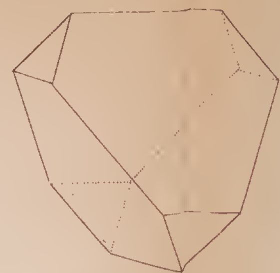


Fig. 337 $\frac{P}{2}.\infty Pn$

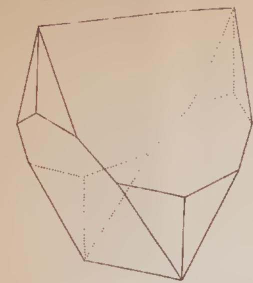


Fig. 338 $\frac{P}{2}.\infty P$

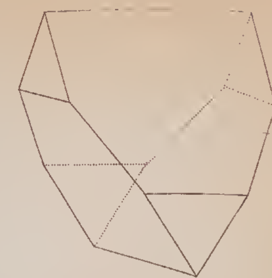


Fig. 339 $\frac{P}{2}.\infty P\infty$

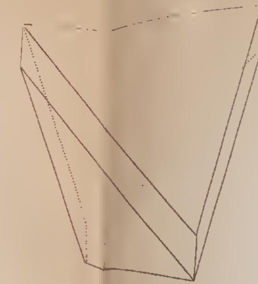


Fig. 340 $\frac{P}{2}.0P$

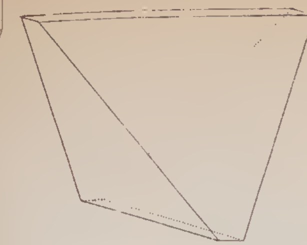


Fig. 341 $P\infty.\frac{mPn}{2}$

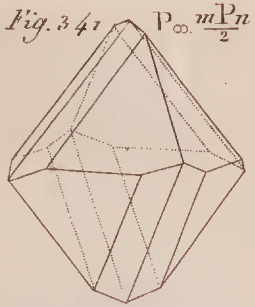


Fig. 342 $P\infty.\frac{mPn}{2}$

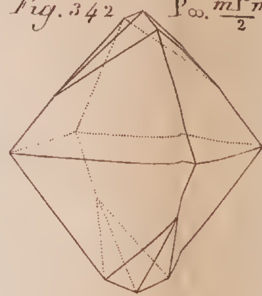


Fig. 343 $P\infty.\frac{mPn}{2}$

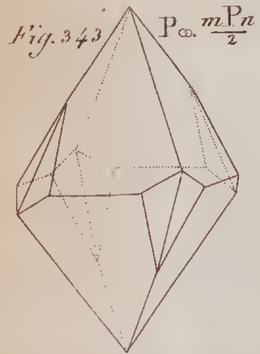


Fig. 344 $P\infty.\frac{\frac{1}{2}P}{2}$

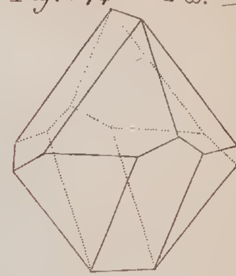


Fig. 345 $P\infty.\frac{mP}{2}$

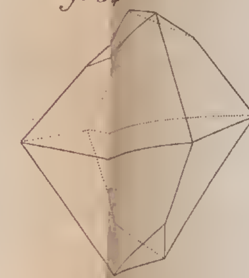


Fig. 346 $P\infty.\frac{mP}{2}$

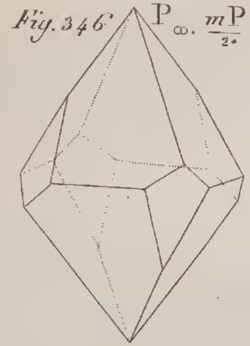


Fig. 344 a

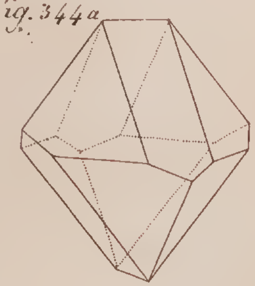


Fig. 345 a

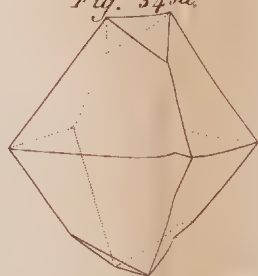


Fig. 346 a

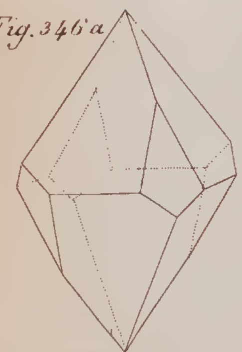


Fig. 347

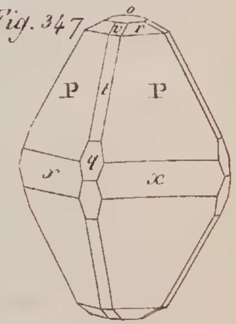


Fig. 348

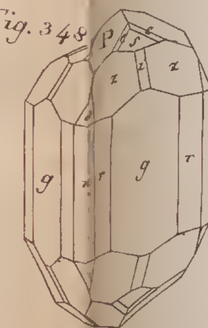


Fig. 349

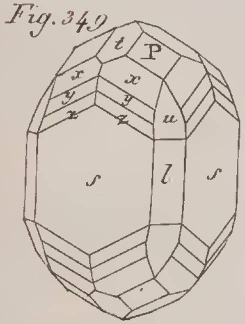


Fig. 350

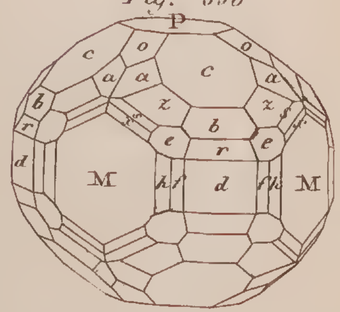


Fig. 351

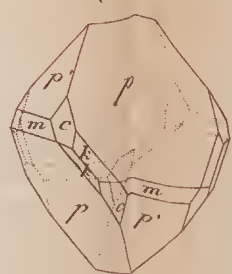


Fig. 352

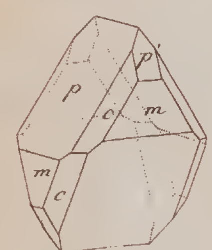


Fig. 353

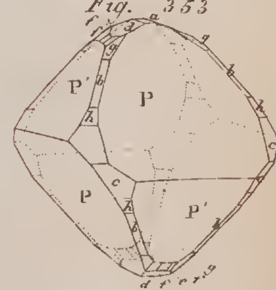
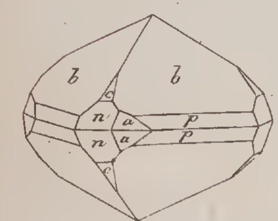


Fig. 354

Fig. 355



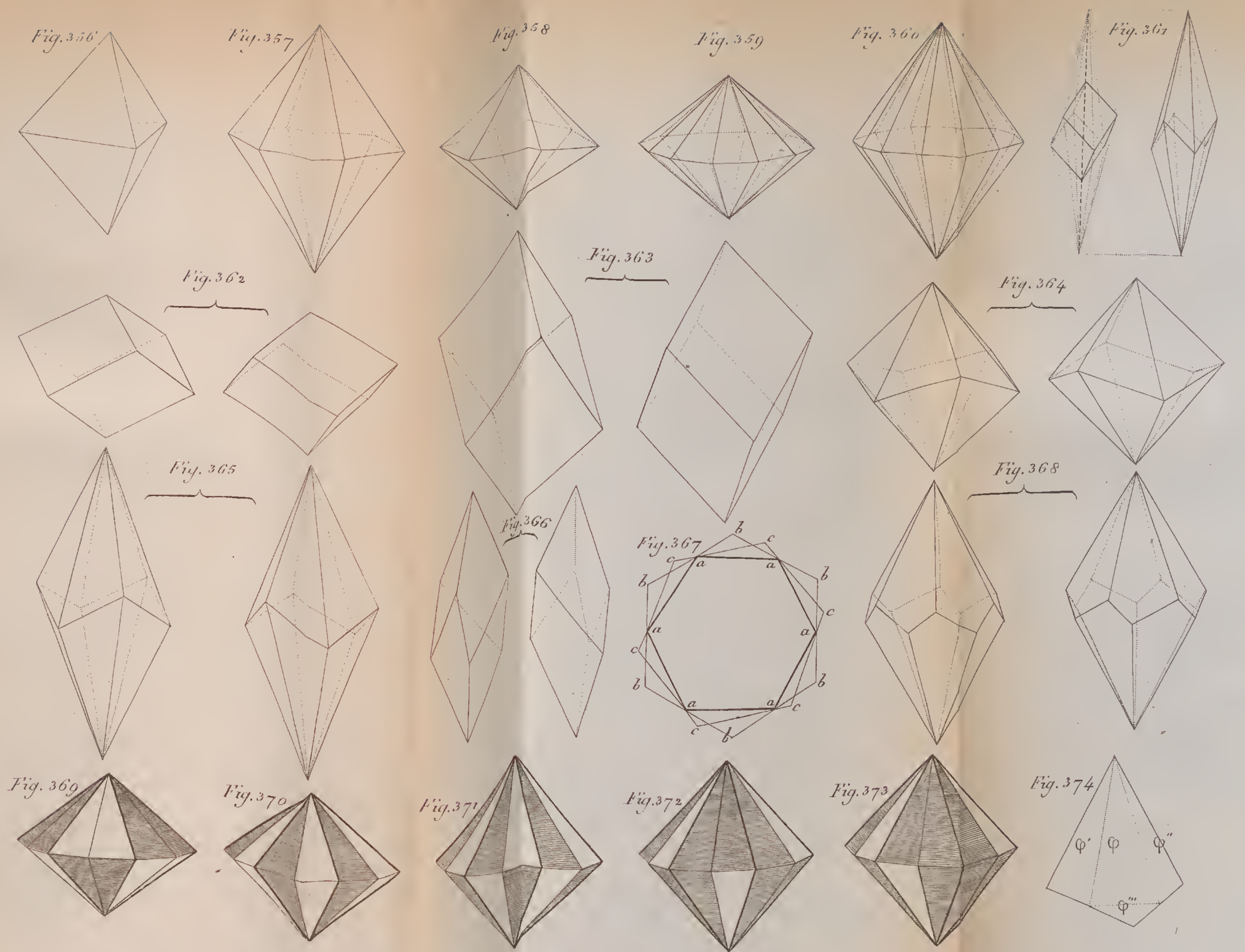


Fig. 356
Fig. 357
Fig. 358
Fig. 359
Fig. 360
Fig. 361
Fig. 362
Fig. 363
Fig. 364
Fig. 365
Fig. 366
Fig. 367
a
b
c
Fig. 368
Fig. 369
Fig. 370
Fig. 371
Fig. 372
Fig. 373
Fig. 374
φ'
φ
φ''
φ'''

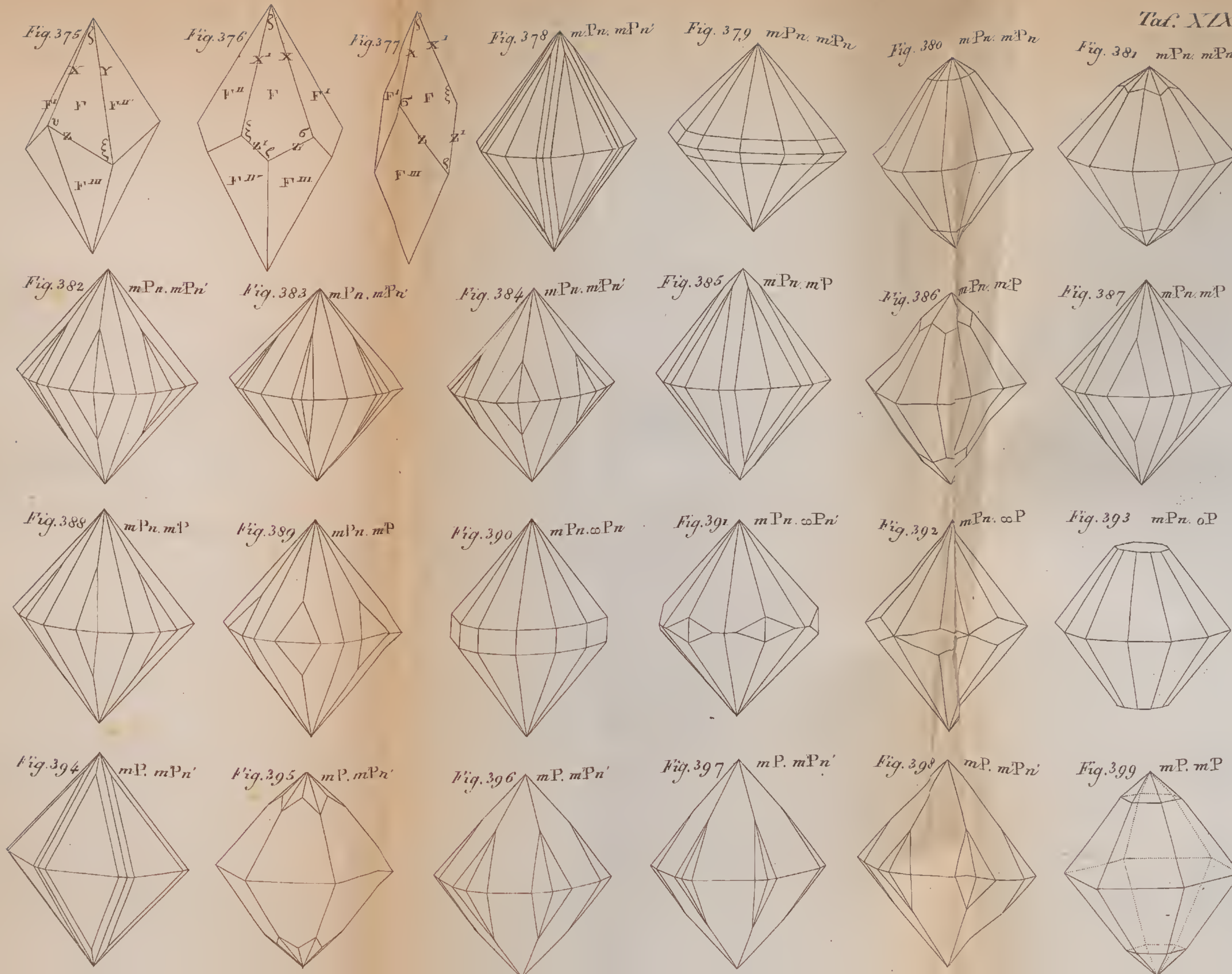


Fig. 375
Fig. 376
Fig. 377
Fig. 378 mPn. mPn'
Fig. 379 mPn. mPn
Fig. 380 mPn. mPn
Fig. 381 mPn. mPn'
Fig. 382 mPn. mPn'
Fig. 383 mPn. mPn'
Fig. 384 mPn. mPn'
Fig. 385 mPn. mP
Fig. 386 mPn. mP
Fig. 387 mPn. mP
Fig. 388 mPn. mP
Fig. 389 mPn. mP
Fig. 390 mPn. ∞Pn
Fig. 391 mPn. ∞Pn'
Fig. 392 mPn. ∞P
Fig. 393 mPn. oP
Fig. 394 mP. mPn'
Fig. 395 mP. mPn'
Fig. 396 mP. mPn'
Fig. 397 mP. mPn'
Fig. 398 mP. mPn'
Fig. 399 mP. mP

Fig. 400 P. mP

Fig. 401 P. P2

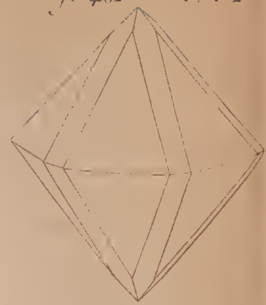


Fig. 402 P. mP2

Fig. 403 P. 3P2

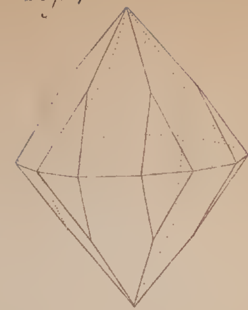


Fig. 404 P. mP2

Fig. 405 P. 2P2

Fig. 406 P. ∞Pn

Fig. 407 P. ∞P

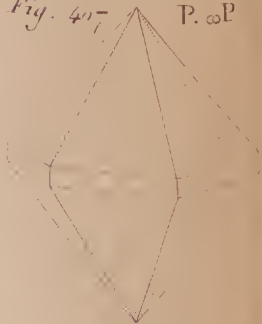


Fig. 408 P. ∞P2

Fig. 409 P. 0P

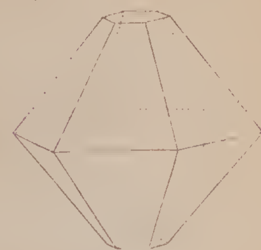


Fig. 410 ∞P. P

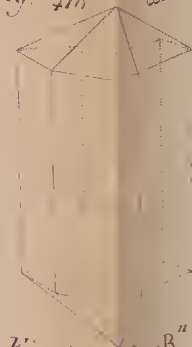


Fig. 411 ∞P. P2

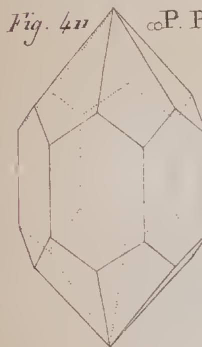


Fig. 412 2R. mR^n

Fig. 413 2R. mR^n

Fig. 414 R. R^5

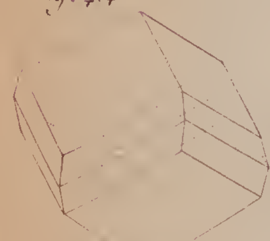


Fig. 415 2R. mR^n

Fig. 416 R. mR^n

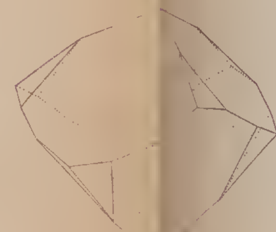


Fig. 417 2R. $\frac{3}{4}$R

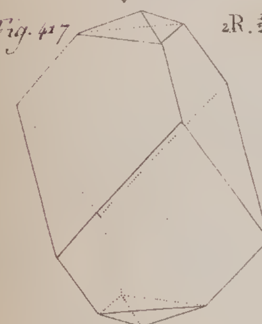


Fig. 418 R. 2R

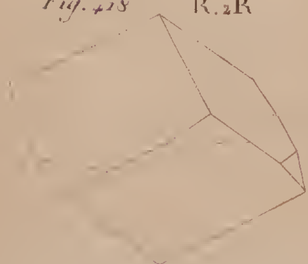


Fig. 419 2R. –R

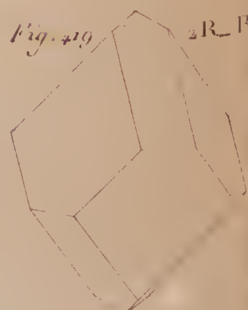


Fig. 420 2R. – mR

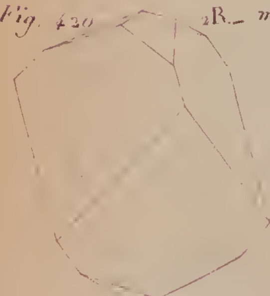


Fig. 421 R. – mR

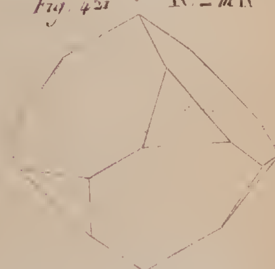


Fig. 422 R. ∞P2

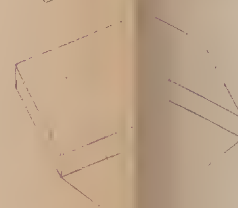


Fig. 423 2R. 0R