Walther L. Fischer

Die mathematischen Grundlagen der abendländischen Zahlen-Symbolik, der Zahlen-Mystik und der Zahlen-Magie bei den Pythagoreern

I. Einleitung

1.1. Die Zahl ist dem Menschen seit je nicht nur Werkzeug – Begriff und Ausdruck der Quantität. Zahlen haben auch Qualitäten. Jede Zahl ist für sich ein Eigenwesen, mit eigenem Gesicht, ein Wesen mit speziellen Eigenschaften, die sie von jeder der anderen unendlich vielen Zahlen signifikant unterscheidet.[1] Geben wir einige Beispiele:

1 ist die erste natürliche Zahl, die erste ungerade Zahl und zugleich die erste Quadratzahl. Aus der 1 lassen sich letztlich alle (zumindest rationalen Zahlen) konstruktiv gewinnen. 1 ist das neutrale Element der Multiplikation: $a \times 1 = a$.

2 ist die erste gerade Zahl, die erste Primzahl.[2]

3 ist die zweite Primzahl und die erste ungerade Zahl, die Primzahl ist.[3]

4 ist die erste zusammengesetzte Zahl, d.h. 4 läßt sich als Produkt von Primzahlen darstellen: $4 = 2 \times 2$. 4 ist dazu eine Quadratzahl: $4 = 2^2$.

5 ist die dritte Primzahl, außerdem ist sie darstellbar als Summe der beiden ersten Primzahlen: $5 = 2 + 3$.

6 ist das Produkt der beiden ersten Primzahlen: $6 = 2 \times 3$. 6 ist auch die Summe der ersten drei natürlichen Zahlen: $6 = 1+2+3$; 6 ist damit zugleich Summe ihrer echten Teiler, d.h. 6 ist die erste „vollkommene Zahl" (vgl. III.3.3.7.).

7 ist wieder eine Primzahl. Wie alle natürlichen Zahlen läßt sich auch die 7 in verschiedener Weise additiv darstellen, z.B. als Summe von 2-er Potenzen: $7 = 1 + 2 + 4 = 2^0 + 2^1 + 2^2$.

8 und **9** sind darstellbar als Potenzen der ersten Primzahlen: 8 ist nach der 1 die zweite Kubikzahl: $8 = 2^3$ und 9 ist die dritte Quadratzahl: $9 = 3^2$. Ferner ist : $8 = 1 + 7 = 3 + 5 = 2 + (1 + 2 + 3) = 2 + 2 + 2 + 2 = \ldots$. Ähnlich ist $9 = 1 + 8 = 4 + 5 = 1 + 3 + 5 = \ldots$.

10 ist die Basis des Dezimalsystems, $10 = 2 \times 5 = 2 \times (2 + 3)$ und $10 = 1 + 2 + 3 + 4, \ldots$.

Jede Zahl hat ihre besondere Individualität, ihr mathematisches Eigenleben.

Zahlen haben Qualitäten, ihre je eigenen Qualitäten – und Zahlen wurden und werden daher seit alters mit außermathematischen Qualitäten verknüpft.

Zahlen sind keine empirisch verfügbaren, greifbaren Gegenstände – sie sind Klassenbegriffe, sie sind verfügbar nur in und durch ihre Namen, in Zahlzeichen. Und doch scheint die Zahl „irgendwie" mit der greifbaren Realität verknüpft zu sein.[4]

Mehr noch: Zahlen scheinen im tief Inneren mit den Urgründen des Seins, mit dem Leben und Weben der Welt und des Menschen verbunden. Die Strukturierung der Gegenden im Raum, Periodizität und Kreislauf in der Zeit, all dies deutet auf Zahlbeziehungen und Zahlverhältnisse hin oder darauf, daß es möglich ist, die Erscheinungen der Innen- und Außenwelt mit Zahlen darstellen, deuten zu können.[5] Man kann Erscheinungen durch Zahlen codieren, man kann sie auf diese Weise zitieren und beschwören, ja sich durch Zahlen ihrer bemächtigen.
Das Wesen der Zahl erschien und erscheint auch heute noch dem Menschen geheimnisvoll. Die Zahl ist ein Mysterium, sie wird zumindest als eine undurchschaubare Wesenheit von arteigener Transzendenz empfunden. Im Mysterium der Zahl erfährt der Mensch einerseits eine wundersame Nähe des Geistigen, andererseits schlägt die Zahl eine Brücke zwischen den göttlichen und den irdischen Dimensionen der Welt.

So sind die Zahlen in komplexer Weise in der *Zahlenmystik* mit Glauben und Aberglauben verbunden, in der *Zahlenmagie* verbunden mit dem Weben der geistigen und materiellen Kräfte, und sie werden in der *Zahlensymbolik* integraler Bestandteil in Darstellung und Deutung der Welt und des Lebens.

1.2. Wir werden im folgenden nicht versuchen, das umfangreiche Quellen- und Beispielmaterial unseres Themenkreises im Kulturvergleich zu referieren. Wir werden uns vor allem mit einigen grundsätzlichen Überlegungen zum Wesen der im Titel angesprochenen Aspekte in ihrer Vereinzelung, wie in ihrem Zusammen befassen, wir werden uns mit dem Mysterium der Zahlen, mit den ihnen zugeschriebenen symbolischen, magischen und mystischen Qualitäten nur in einigen Beispielfällen beschäftigen. Wir würden uns anders in der Fülle des Materials verlieren.

II. Zahlensymbolik - Zahlenmystik - Zahlenmagie

1. Mystik – Magie – Symbolik

Fragen wir zunächst nach den Bestimmungen von Mystik, Magie und Symbolik, so haben wir festzustellen, daß diese drei Aspekte, der Welt und dem Leben zu begegnen, Welt und Leben zu meistern, völlig verschiedenen Seinsebenen zuzuordnen sind, daß sie in ihren Lexikonbedeutungen[6] zunächst nur nebeneinander stehen.

Mystik (von griech. mystikos – „geheimnisvoll") ist ursprünglich eine Bezeichnung für Geheimreligion bzw. für religiöse Geheimorganisationen, in die nur Auserwählte aufgenommen bzw. eingeweiht wurden, sodann eine Bezeichnung überhaupt für das Bestreben, das Übersinnliche, Transzendente, Göttliche durch Abkehr von der Sinnenwelt und Versenkung in die Tiefe des eigenen Seins (Meditation) zu erfassen, durch Aufgehen des eigenen Bewußtseins in Gott mit diesem eins zu werden: mystische Einigung (lat. unio mystica) (*Schmidt, H.* 1951, 398).

Magie (von griech. mageia – „Zauberei") ist die geheimnisvolle Fähigkeit, ohne Zuhilfenahme natürlicher Mittel auf Dinge und Menschen, ja auf Dämonen und Geister einwirken zu können[7] (*Schmidt, H.* 1951, 363).

Symbol (von griech. symbolon – „Erkennungszeichen, Zeichen, Sinnbild") ein optisches, seltener akustisches Gebilde, dem von einer bestimmten Gruppe von Menschen ein besonderer, durch das Wesen des Gebildes (im Gegensatz zur Allegorie) nicht nahegelegter Sinn verliehen worden ist. Jedes Symbol hat den Charakter eines Geheimzeichens, zum mindesten des Verabredeten, und ist in der Regel ein Hinweis auf oder eine Mahnung an etwas, das über oder hinter der sinnlich wahrnehmbaren Erscheinung liegt (*Schmidt, H.* 1951, 566).[8]

2. Zahlenmystik – Zahlenmagie – Zahlensymbolik

Zahlenmystik, Zahlenmagie und Zahlensymbolik sind seit alters mannigfach verschlungen – seit alters, und d.h. bis in die unmittelbare Gegenwart hinein.

Wir sprechen von *Zahlensymbolik*, im Falle einer Zuordnung von Zahlen zu Erscheinungen, im Falle einer Codierung von Dingen und Geschehnissen durch Zahlen. Dabei sollte man freilich genauer unterscheiden zwischen der Zuordnung der Erscheinungen zu Zahlen und der die Zahlen repräsentierenden Zahlzeichen.[9]

Wir sprechen von *Zahlenmagie* bei der Verwendung von Zahlen und von Zahlenschemata zur positiven oder negativen Einwirkung auf Menschen und Dinge. Entsprechend unterscheidet man bis heute die *weiße* von der *schwarzen Magie*. Beispiele sind die Praktiken des Zahlenzaubers im Zusammenhang mit der Abwehr oder der Bannung von bösen Einflüssen und Kräften, mit der Beschwörung auch guter Einflüsse und Kräfte – etwa im Heilmittel.

Wir sprechen von *Zahlenmystik*, wenn über Zahlen das eigene Bewußtsein mit der Transzendenz, mit dem Göttlichen in Verbindung gebracht wird.

Die Zahlensymbolik und mit ihr die kulturellen Erscheinungen der Zahlenmystik und Zahlenmagie sind höchst vielfältig ausgeformt, zeigen über die Kulturen hin und durch die Zeiten und Räume dennoch erstaunliche Ähnlichkeiten, Entsprechungen, ja Übereinstimmungen. Dennoch wäre es verfehlt, gewisse ihrer Formen und Deutungsweisen für universell zu halten - und eben aus einer solchen Annahme einen Beweis für einen höheren Grad an Gültigkeit bzw. Wirksamkeit der betreffenden Verfahrens- und Vorstellungsweisen abzuleiten. Es gibt neben allerlei Übereinstimmungen zwischen den Kulturen und über die Zeiträume hin auch gravierende Auffassungs- und Deutungsunterschiede, die belegen, daß sich hinter Zahlenmystik, Zahlenmagie und Zahlensymbolik weniger eine universelle Naturgesetzlichkeit als vielmehr kulturgeschichtlich bedingte Interpretationen von Welt und Leben verbergen.

Für unseren abendländischen Kulturbereich, und d.h. genauer für den griechisch-christlichen, jüdischen und islamischen Kulturbereich des Okzidents, sind die von den Pythagoreern geschaffenen Grundlagen der Zahlensymbolik und Zahlenmystik - in die zahlreiche altorientalische (babylonische und ägyptische) Gedankengänge eingegangen sind – prägend gewesen. Viele der zahlensymbolischen Repräsentationen und ihre Deutungen im Abendland sind eben deshalb von innerer Entsprechung, sind deshalb durchgängig, weil sie auf die Pythagoreer zurückgehen. Für die Pythagoreer waren die 3, vor allem die 4, die 7 und die 10 zentrale Zahlensymbole. Anders bei den Chinesen, bei denen die 4 eher mit negativer Bedeutung geladen ist, wird doch das Schriftzeichen für 4 mit der gleichen Silbe ausgesprochen wie das Schriftzeichen für „sterben“ und „Tod“. Natürlich gibt es auch in China die 4 Jahreszeiten, die 4 Himmelsrichtungen, . . . und doch hat die 5 für den Chinesen – wie generell im ostasiatischen und südostasiatischen Kulturbereich – eine größere Bedeutung als die 4.

III. Die Lehre der Pythagoreer als Grundlage der abendländischen Zahlensymbolik und Zahlenmystik

0. In unserem Kulturbereich geht die Beschäftigung mit Zahlen und ihren Eigenschaften und Gesetzen weitgehend auf die von *Pythagoras* geschaffenen Grundlagen zurück, über die wir freilich von *Pythagoras* selbst nichts wissen; sie sind über *Plato*, *Aristoteles* und über die „Elemente“ des *Euklid* auf uns gekommen.

1. Pythagoras

1.1. Auch über *Pythagoras*' Leben wissen wir nur aus späten Quellen – zum Beispiel von *Aristoteles* oder aus dem Werk des Pythagoreers *Jamblichos* (ca 283–330 n.Chr.), das freilich erst 800 Jahre nach *Pythagoras* verfaßt ist.

Pythagoras (etwa 580-500 v.Chr.) wurde im 6.Jahrhundert v. Chr. auf Samos geboren. Nach dem Bericht des *Jamblichos* weilte *Pythagoras* über zwanzig Jahre in Ägypten. Von dort kam er auch nach Kleinasien.

„In den allerheiligsten Gemächern bei Sternkunde und Geometrie empfing er – nicht nur oberflächlich und aufs Geratewohl – die Einweihung in alle Göttermysterien, bis ihn die Krieger des Kambyses gefangennahmen und nach Babylon führten; dort verkehrte er mit den Magiern, die an ihm dasselbe Wohlgefallen fanden wie er an ihnen. Er war genau unterrichtet in allem, was ihnen heilig war, erlernte die Götterverehrung in aller Vollkommenheit und gelangte bei ihnen in der Zahlenlehre, in der Musik und in den übrigen Wissenschaften ans höchste Ziel.“[10]

Mit 56 Jahren kehrte *Pythagoras* nach Samos zurück. Im Jahr 532 floh er vor dem Tyrannen Polykrates nach Kroton[11] in Süditalien. In Kroton scharte *Pythagoras* einen Kreis Jünger um sich, predigte die Unsterblichkeit der Seele, forderte eine Lebensführung der Enthaltsamkeit und Mäßigung und lehrte Astronomie, Mathematik, Musikwissenschaft und Philosophie. In Metapont soll er gestorben sein.[12]

1.2. Dem heutigen Schüler gilt *Pythagoras* als Mathematiker. Sein Name wird mit dem nach ihm genannten Lehrsatz verbunden. Dieser *Lehrsatz*,

das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist flächengleich der Summe der Kathetenquadrate,

stammt nachweislich nicht von *Pythagoras*. Ihn kannten die Babylonier lange vor *Pythagoras*[13,14] und auch den alten Chinesen muß nach neuerer Auffassung die Aussage, zumindest für Sonderfälle, schon lange bekannt gewesen sein.[15]

1.3. Im Altertum charakterisierte man *Pythagoras* nicht als Mathematiker.[16] *Herodot* sah in ihm einen „bedeutenden Sophisten“, für andere Autoren ist er der Gründer eines religiösen Ordens, über den seltsame Wundergeschichten verbreitet wurden. Für die Komödiendichter waren die Jünger des *Pythagoras* als arme, schmutzige Vegetarier Zielscheibe ihres Spotts.

Neuerdings schreibt man mindestens die Lehre von den geraden und ungeraden Zahlen („die Lehre vom Geraden und Ungeraden“) im IX. Buch der Elemente des *Euklid* den *Pythagoreern* zu.[17] Dabei vermischen sich bei den *Pythagoreern* – wie wir sehen werden – mathematische Forschung und Einsicht immer wieder mit magischer Spekulation und Zahlensymbolik, geht echte mathematische Forschung immer wieder in magische Spekulation über.

2. Der Kosmologische Aspekt der Zahl – Zahlenmystik

2.1. Die Gedanken des *Pythagoras* und seiner Schüler haben über die Jahrhunderte hin religiöse, literarische und magische Werke beeinflußt.

2.2. Wie die mathematischen Kenntnisse, so hat auch die Zahlenmystik der Pythagoreer ägyptische und babylonische Quellen und Ursprünge.

Wenn auch von einigen Forschern bestritten wird, daß die Ägypter und Babylonier eine Geheimwissenschaft besaßen, – u.a. weil wir in den bekannten Papyrustexten bislang nur Rechenexempel von Schülern besitzen – so scheint es doch zulässig, anzunehmen, daß die Ägypter die Zahlen nicht nur zur Lösung von Fragen der Verwaltungspraxis und des Bauwesens verwandten. Wir verweisen auf den Papyrus Rhind, der dem Leser das „kunstgerechte Eindringen in alle Dinge, Erkenntnis alles Seienden, aller Geheimnisse" verspricht.[18] Man könnte auch auf *Plutarch* verweisen, und seinen Bericht über den Isis-Kult, den wir an späterer Stelle zitieren werden. (III.3.3.7.)

2.3. Im Mittelpunkt des pythagoreischen Denkens stand die Idee der *Ordnung*: die musikalische Ordnung, die mathematische Ordnung, die Ordnung des Kosmos und schließlich die ethische und die soziale Ordnung.[19] Die Mathematik war den Pythagoreern ein Teil ihrer Religion.„Gott ist der Eine, und die Vielheit der Welt wird durchschaubar durch die Gesetze der Zahl" (*Meschkowski, H.* 1979, 23).

2.4. Um zu verstehen, wie es zur Universalität des Ordnungsbegriffs bei den *Pythagoreer*n kam, müssen wir zunächst die grundlegenden *musiktheoretischen Arbeiten* und Einsichten der *Pythagoreer* ansprechen. *Pythagoras* entdeckte, daß die *Intervalle der Tonleiter* durch die Längenabschnitte schwingender Saiten bestimmt sind, genauer: sie sind nicht durch deren absolute Länge bzw. ihre Längendifferenzen, sondern durch die Verhältnisse ihrer Längen charakterisiert. Diese Verhältnisse ließen sich aber durch Zahlenverhältnisse wiedergeben. Daß hinter dieser Einsicht ein allgemeines akustisches Gesetz verborgen ist, erschlossen die *Pythagoreer* aus der Tatsache, daß unabhängig davon wie lange die betr. Saite war, das gleiche Längenverhältnis stets das gleiche musikalische Intervall zum Tönen brachte. Weiter entdeckten sie, daß dieselben Zahlverhältnisse auch bei anderen Musikinstrumenten die Entstehung der gleichen Intervalle bestimmte. Aus solchen Einsichten kamen sie zur Überzeugung, daß das Wesen des Seins, des Kosmos, ja die Wesensform aller Dinge von der Zahl bestimmt sei.

Für die weitere inhaltliche Interpretation dieser Entdeckungen war es besonders bedeutsam, daß die entstehenden Zahlverhältnisse für Oktave, Quinte, Quarte durch die ersten vier natürlichen Zahlen gegeben waren: 1:2, 2:3, 3:4. Die *Pythagoreer* haben die grundlegende Bedeutung dieser Zahlen, der *Tetraktys (Tetrade)*, mehrfach hervorgehoben.

Aus der Betrachtung der Regelmäßigkeit der Planetenbewegungen erwuchs den *Pythagoreer*n schließlich die Idee und Vorstellung der tönenden Sphärenharmonie – eine Vorstellung, die in der abendländischen Astronomie und Physik im Grund bis in unsere Tage fortwirkt. *Kepler* hat seine „Weltharmonik" auf diese Idee gegründet, in *Goethe*s „Faust" „tönt die Sonne in Brudersphären Wettgesang" und das *Bohr-Sommerfeld*sche Atommodell, das Termschema der Elektronenhülle und das Schalenmodell des Atomkerns sind späte Varianten der Sphärenharmonie.[20]

Die Bahnen der Sterne, die Gesetze der musikalischen Harmonie und die der architektonischen Schönheit von Bauwerken (Tempeln) sind bestimmt durch einfache Verhältnisse ganzer Zahlen. „Die ganze Welt ist Harmonie und Zahl".

Der kosmologische Schluß der *Pythagoreer*, daß Sein und Zahl identisch sind, muß weiter dahin präzisiert werden, daß sie ganz allgemein glaubten, daß alles Sein und Geschehen im Universum durch ganze Zahlen meßbar sei. Die Entdeckung des *Hippasus*, daß die Länge der Diagonale im Quadrat mit der Seite 1 nicht durch ein Verhältnis von ganzen Zahlen ausgedrückt werden kann, daß, wie wir heute sagen: die $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist, hat das Weltbild der *Pythagoreer* ebenso erschüttert, wie die Entdeckung des fünften regelmäßigen Körpers, des Pentagondodekaeders.[21]

2.5. Für die Weltsicht der frühen Menschen, hier der Griechen, ist generell ein inniges Miteinander von Schönheit und Ordnung und dem Bau der Welt charakteristisch.

Indizien für die Einheit von mathematischen, ästhetischen und kosmologischen Aspekten finden wir auch in der *Sprache der alten Griechen*.[22]

Nehmen wir zunächst das Wort „*Kosmos*". Seine Lexikonbedeutungen sind: 1. a) Einrichtung; Bauart. b) Ordnung: α) Gebühr, Anstand; β) Regelmäßigkeit; γ) bestehendeVerfassung; δ) Weltall, Welt; Erde, Menschheit; jedermann. – 2. Schmuck, Zierde: a) Zierat, Putz. b) Lob, Ruhm, Ehre. – Wir müssen uns hier eine eingehende Interpretation des Bedeutungsfeldes unseres Beispiels versagen. Es genügt, wenn wir die Hauptbedeutungen beachten, um zu erkennen, daß im Wort „Kosmos“ mathematische Termini (Vorstellungen), nämlich „Ordnung“, „Regelhaftigkeit“, mit ästhetischen Termini (Vorstellungen, Qualitäten), wie „Schmuck“, „Zierde“, und kosmologischen Termini (Vorstellungen), wie „Bau“, „Weltall“, zusammengebunden sind. Dabei weist vor allem das Miteinander von Ordnung (auch im Sinne von „Anordnung“) und Schmuck (auch im Sinne von „Ausschmückung“) auf eine Koinzidenz hin, der wir im Formentyp der Ornamente und in der Erhellung ihrer mathematischen Struktur in der modernen Gruppentheorie wiederbegegnen.

Erwähnen wir noch zwei andere für unsere Diskussion bedeutsame Worte aus dem Alt-Griechischen. Da wäre das griechische Wort für „Gesetz“, nämlich „*Nomos*“; für dieses Wort führt das Wörterbuch als Bedeutungsfeld auf:
1. a) Brauch, Sitte, Herkommen, Art, Gewohnheit. b) Ordnung, Recht.
2. a) Grundsatz, Regel. b) Gesetz, Satzung, Vorschrift.
3. a) (Sang-)Weise, Melodie, Lied. b) Tonart.
Wieder finden wir den im Grunde mathematischen Begriff der „Ordnung“, der „Regel“ mit ästhetischen Begriffen zusammengebunden, hier mit denen der musikalischen Formen der „Melodie“, des „Liedes“, aber auch mit dem Begriff der „Tonart“.

Und schließlich das Wort „*Kanon*“, das der berühmte Bildhauer *Polyklet* im Titel seines ebenso berühmten Buches verwandte.[23] Es bedeutet: 1. Webeschaft. – 2. Schildgriff. – 3. Richtschnur, Richtscheit, Meßstab: a) Regel, Grundsatz, Vorschrift, Gesetz. b) Muster, Vorbild, Norm. – 4. Bezirk. Darüber hinaus bezeichnete das Wort ebenso die „Tonskala“, wie die sie bestimmenden Längenverhältnisse auf der durch Stege unterteilten schwingenden Saite.

Sehen wir unsere Beispiele und Beispielsworte zusammen, so erkennen wir ein weiteres Mal, daß die Möglichkeit der mathematischen Darstellbarkeit künstlerischer (z.B. musikalischer) und physikalischer (z.B. akustischer) Erscheinungen den Schluß nahelegte, allem Seienden als einem Geordneten seien mathematische Eigenschaften inhärent. Nach diesem kosmologischen Schluß besaßen die Dinge und Erscheinungen eine mathematische Struktur, waren sie von Mathematischem durchdrungen. Das Mathematische gehörte den Dingen und Erscheinungen wesensmäßig zu.

2.6. „Aus dem Satz, daß sich die Dinge wie Zahlen verhielten, mußte schließlich die Präzisierung werden, daß das eigentliche Wesen der Dinge in Zahlen bestehe; die Eigenschaft wurde zum Sein" (*Bense, M.* 1949, 185); und so lesen wir denn bei *Augustinus:* „Alles hat Formen, weil es Zahlen in sich hat; nimm ihnen diese und sie sind nichts mehr". Ähnlich sagt *Galilei*, daß das Buch der Natur in den Zeichen der Mathematik geschrieben sei und noch *Kepler* spricht von der „Weltharmonik".

Fast unnötig zu sagen, daß der genannte kosmologische Schluß mit der Hypostasierung eines metaphysischen Aprioris gleichwertig ist, etwa dem, daß das Sein rationale Struktur habe, und daß damit zugleich die Koinzidenz von mathematischem und ästhetischem Geist als ontologische Identität begriffen wurde.

2.7. Im Bedeutungsfeld des Wortes „Kosmos" fanden wir das Zusammen von „Gesetz–Weltall–Schmuck" thematisiert. Greifen wir eine Sonderform des Schmuckes, des Zierats heraus, eine Form, die für das griechische Altertum, wie vorher für Ägypten, zuvor für die Sumerer, ja schon für die Schnur- und Bandkeramiker, und nachher für die Künste aller Stile und Kulturen eine hervorragende Rolle spielte: das *Ornament*.

Das Ornament zeigt eine andernorts kaum in solcher Reinheit existierende Verschmolzenheit von ästhetischem und mathematischem Geist. Im Ornament sind ästhetischer Wille und mathematischer Wille zur Gestaltung von Formen eins, erscheint das ästhetische Formbewußtsein vom mathematischen Geist bestimmt. Denn: Bei der Gestaltung eines Ornaments ist ein formerzeugendes Bewußtsein am Werke, das sichtbar von abstrakt-formalen Intentionen und Methoden geprägt und getragen wird, nämlich vom formerzeugenden und formbeherrschenden Prinzip der Symmetriebildung.[24] Nicht umsonst sind viele magische Zeichen ornamental strukturiert.

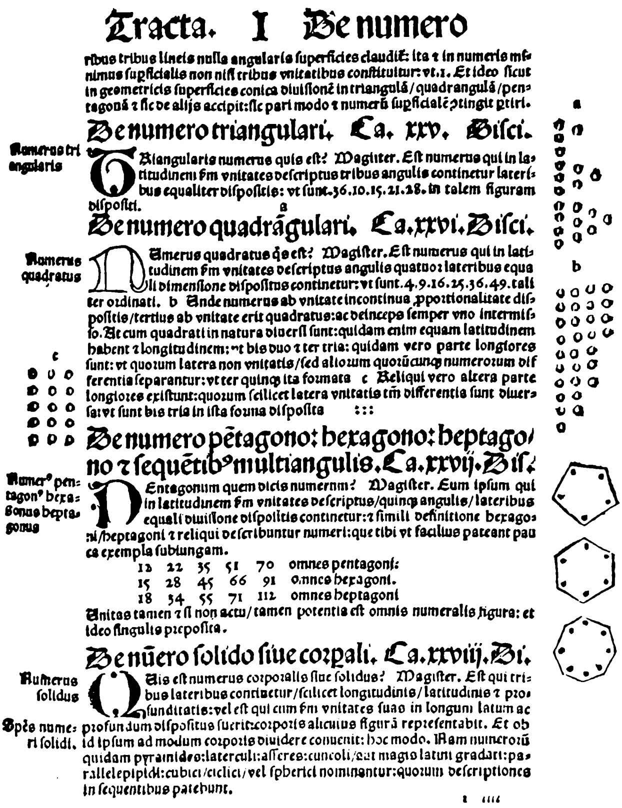
3. Die zahlentheoretischen Arbeiten der Pythagoreer

3.1. Um die Zahlensymbolik und die Zahlenmystik der *Pythagoreer* zu verstehen, muß man einige zahlentheoretische Zusammenhänge nachvollziehen. Wir gehen also von der *THESE* aus: *Zahlenmystik und Zahlenmagie liegen i.a. die Kenntnis bzw. die Einsicht in bestimmte zahlentheoretische Zusammenhänge zugrunde.*

Für unsere Überlegungen sind daher vor allem die *zahlentheoretischen Arbeiten* der *Pythagoreer* von Bedeutung. Als besondere mathematische

Leistung schreibt man heute – wie bereits gesagt – den *Pythagoreern* vor allem die Entdeckung des *Unterschieds zwischen den geraden und den ungeraden Zahlen* zu.

3.2. Die *Pythagoreer* stellten die *Zahlen in Form von Punktmustern* dar.[25,26] An ihnen ließen sich zahlentheoretische Gesetze – wenn auch nicht im strengen Sinne „beweisen“, so doch – gewinnen und paradigmatisch einsichtig machen. Diese Praxis hat sich übrigens über die Jahrhunderte hin erhalten. Wir finden sie z.B. in der „Margarita Philosophica“ des Kartäuserpriors *Gregor Reisch* (1517, 153–154), in der das Wissen am Anfang des 16. Jahrhunderts enzyklopädisch zusammengefaßt ist, und wir finden sie auch noch in unserem heutigen Schulunterricht. Die *„figurierten Zahlen“* sind so zugleich ein Anzeichen und ein Beleg dafür, was es bedeutet, wenn wir von einer „mathematica perennis“ sprechen.


Tracta. I De numero

ribus tribus lineis nullis angularis superficies claudit: ita & in numeris minimus superficialis non nisi tribus unitatibus constituitur: vt .3. Et ideo sicut in geometricis superficies conica diuisione in triangulã/quadrangulã/pentagonã & sic de aliis accipit: sic pari modo & numerus superficialis contingit ptiri.

De numero triangulari. Ca. xxv. Disci.

Numerus triangularis

Triangularis numerus quis est? Magister. Est numerus qui in latitudinem secundum unitates descriptus tribus angulis continetur lateribus equaliter dispositis: vt sunt .3.6.10.15.21.28. in talem figuram dispositi.

De numero quadrãgulari. Ca. xxvi. Disci.

Numerus quadratus

Numerus quadratus quis est? Magister. Est numerus qui in latitudinem secundum unitates descriptus angulis quatuor lateribus equali dimensione dispositus continetur: vt sunt .4.9.16.25.36.49. taliter ordinati. Unde numerus ab unitate incontinua proportionalitate dispositis/tertius ab unitate erit quadratus: ac deinceps semper vno intermisso. Et cum quadrati in natura diuersi sunt: quidam enim equam latitudinem habent & longitudinem: vt bis duo & ter tria: quidam vero parte longiores sunt: vt quorum latera non vnitatis/sed aliorum quorumcunque numerorum differentia separantur: vt ter quinque ita formata. Reliqui vero altera parte longiores existunt: quorum scilicet latera vnitatis tm differentia sunt diuersa: vt sunt bis tria in ista forma disposita

De numero pẽtagono: hexagono: heptagono & sequẽtibus multiangulis. Ca. xxvii. Disc.

Numerus pentagonus hexagonus heptagonus

Pentagonum quem dicis numerum? Magister. Eum ipsum qui in latitudinem secundum vnitates descriptus/quinque angulis/lateribus equali diuisione dispositis continetur: & simili definitione hexagoni/heptagoni & reliqui describuntur numeri: que tibi vt facilius pateant pauca exempla subiungam.

12	22	35	51	70	omnes pentagoni:
15	28	45	66	91	omnes hexagoni.
18	34	55	71	112	omnes heptagoni

Unitas tamen & si non actu/tamen potentia est omnis numeralis figura: et ideo singulis preposita.

De nũero solido siue corpali. Ca. xxviii. Di.

Numerus solidus

Species numeri solidi.

Quis est numerus corporalis siue solidus? Magister. Est qui tribus lateribus continetur/scilicet longitudinis/latitudinis & profunditatis: vel est qui cum secundum vnitates suas in longum latum ac profundum dispositus fuerit: corporis alicuius figurã representabit. Et ob id ipsum ad modum corporis diuidere conuenit: hoc modo. Nam numerorum quidam pyramides: laterculi: asseres: cuneoli/cuui magis latum gradati: paralelepipedi: cubici/circlici/vel sphericli nominantur: quorum descriptiones in sequentibus patebunt.

Fig. 1. Gregor Reisch (1517), Margarita Philosophien: Die Polygonalzahlen

3.3. Additive Zerlegung von natürlichen Zahlen / Dreieckszahlen:

3.3.1. Betrachten wir das folgende Punktmuster:

```
      o
     o o
    o o o
   o o o o
.   .   .   .   .   .
```

In diesem Punktmuster, das sich entsprechend fortsetzen läßt, finden sich in den einzelnen Zeilen jeweils ein Punkt mehr als in der vorausgehenden Zeile. Die Punkte erinnern in ihrer Anordnung an ein Dreieck.
Übertragen wir das Punktmuster in eine Musterfolge, so erhalten wir eine Folge von Dreiecksmustern und mit ihnen eine Darstellung der sogenannten *„Dreieckszahlen“*:

```
                          o
                 o        o o
         o       o o      o o o
o        o o     o o o    o o o o   ...
1        3       6        10        ...
```

Man erhält die Dreieckszahlen also dadurch, daß man *fortlaufend die Reihe der natürlichen Zahlen {1, 2, 3, 4, ...} zueinander addiert*. Genauso haben die *Pythagoreer* die Dreieckszahlen gewonnen.

```
                             x
                 x           o x
       x         o x         o o x
o      o x       o o x       o o o x        ...

1      3         6           10         15  ...
   +2       +3          +4          + 5     ...
```

1=1 1+2=3 1+2+3=6 1+2+3+4=10,...,

(1) Allgemein gilt: $1+2+3+4+ \ldots +n = \frac{1}{2}n(n+1)$.[27]

In anderen Worten haben wir den
Satz: *Die Anzahl der Punkte in einem n-zeiligen dreieckigen Punktgitter*

stellt die Summe der ersten n natürlichen Zahlen dar.
Oder:
Satz: *Die fortlaufende Addition natürlicher Zahlen führt auf die Dreieckszahlen.*

Nehmen wir zur Folge <1, 3, 6, 10, ...> noch die erzeugenden Zahlen (1), 2, (3), 4,... hinzu, so haben wir bereits den Grundstock an zahlentheoretischen Beziehungen, die vielen zahlensymbolischen, zahlenmystischen und zahlenmagischen Auffassungen zugrunde liegen.

3.3.2. Die „*Quadratzahlen*" sind – was man heute vielfach übersieht – ganz entsprechend und wörtlich diejenigen Zahlen, die durch quadratische Punktgitter repräsentiert werden:

			o o o o	
		o o o	o o o o	
	o o	o o o	o o o o	
o	o o	o o o	o o o o	...
1	4	9	16	... n^2

Bei näherer Betrachtung eines solchen Gitters und der Übersetzung der Punktfolgen in die entsprechenden Zahlen fällt auf: Man erhält die jeweils nächste Quadratzahl dadurch, daß man an das bestehende Punktmuster einen rechtwinkligen Haken (ein *Gnomon*) aus Punkten anfügt:

			x x x x	
		x x x	o o o x	
	x x	o o x	o o o x	
o	o x	o o x	o o o x	...
Das sind jeweils				
	3	5	7	...2n+1

Punkte. *Um von einem quadratischen Punktraster mit n^2 Punkten zu einem solchen mit $(n+1)^2$ zu kommen, muß man dem Quadratraster mit n^2 Punkten $n+1+n = 2n+1$ Punkte (in Form eines Winkelhakens) hinzufügen.*

Beispiel: $3^2 + (2 \cdot 3 + 1) = 9 + 7 = 4^2$

Allgemein gilt:

(2) $$n^2 + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Beachtet man, daß durch 2n + 1 jeweils ungerade Zahlen gegeben sind, so gilt der

Satz: *Die fortlaufende Addition der ungeraden Zahlen führt auf die Folge der Quadratzahlen.*

(3) $$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Durch einfache Umstellung der Beziehung (2) gewinnt man die bereits oben offenbare Einsicht:

(2) $$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1,$$

und d.h.:

Satz: *Die Differenzen aufeinanderfolgender Quadratzahlen bilden die Folge der ungeraden Zahlen.*

Oder anders gesagt: je zwei aufeinanderfolgende Quadratzahlen unterscheiden sich um eine ungerade Zahl:

1		4		9		16		25...
	3		5		7		9...	

Weiter beobachten wir:

3.3.3. Aus Gleichung (2) kann man Tripel von Zahlen a,b,c finden, die der *„pythagoreischen Gleichung“*

(4) $$a^2 + b^2 = c^2$$

genügen. Diese Beziehung ist das zahlentheoretische Gegenstück zur geometrischen Aussage des „Pythagoreischen Lehrsatzes“ und von diesem eigentlich zu unterscheiden. Macht man in (2) 2n+1 zu einer Quadratzahl indem man setzt

$$2n+1 = m^2,$$

so erhält man für n bzw. n+1 :

$$(5) \qquad n = \frac{m^2-1}{2}, \qquad n+1 = \frac{m^2+1}{2}.$$

Durch Einsetzen in (2) ergibt sich die Beziehung (4), falls man setzt a = m, b = n, c = n+1.

Für m = 3, 5, 7, 9, ... liefert die Beziehung fortlaufend „*pythagoreische Zahlentripel*" (a,b,c)[28] :

m	a	b	c
3	3	4	5
5	5	12	13
7	7	24	25
9	9	40	41.
...	...	...	...

Möglicherweise sind die *Pythagoreer* nicht ursprünglich durch Flächenvergleichung, sondern über solche zahlentheoretischen Überlegungen und Konstruktionen zum „Satz des *Pythagoras*" gekommen.[29]

3.3.4. Fassen wir zusammen:

Die fortlaufende Addition der natürlichen Zahlen führt auf Dreieckszahlen (3.3.1.), die fortlaufende Addition der ungeraden Zahlen auf die Quadratzahlen (3.3.2.), die Differenzen aufeinanderfolgender Quadratzahlen liefert die Folge der ungeraden Zahlen.

3.3.5. Als nächstes stellt sich die Frage: Welche Zahlenfolge wird durch eine fortgesetzte Addition der geraden Zahlen erhalten?

Ausgehend von

$$
\begin{aligned}
2 &= 2 &&= 2\cdot 1 &&= 1\cdot 2\\
2 + 4 &= 6 &&= 2\cdot 3 &&= 2\cdot 3\\
2 + 4 + 6 &= 12 &&= 2\cdot 6 &&= 3\cdot 4\\
2 + 4 + 6 + 8 &= 20 &&= 2\cdot 10 &&= 4\cdot 5\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

gewinnt man allgemein:

$$(6) \qquad 2 + 4 + 6 + 8 +\ldots+ 2n = 2(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots+n) = n(n+1).$$

Nun läßt sich der Ausdruck $n\cdot(n+1)$ als Fläche eines Rechtecks mit den Seiten n und n+1 deuten. Damit haben wir die Aussage:

Die Summe der geraden Zahlen entspricht einem Rechtecksraster mit n(n+1) Punkten. -

Oder:

Satz: *Die fortlaufende Addition der geraden Zahlen führt auf die sogenannten „Rechteckszahlen", d.h. auf die Folge:*

2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, ...

Rechteckszahlen (die sog. „oblongen" oder „heteromeken Zahlen") entsprechen also Anordnungen der Form

						o o o o		
				o o o		o o o o		
		o o		o o o		o o o o		
o		o o		o o o		o o o o		
o		o o		o o o		o o o o	...	
2		6		12		20		...
	4		6		8		10	...

Unmittelbar erkennt man weiter, daß die Rechteckszahlen auch dadurch entstehen, daß man zwei Dreieckszahlen zu einem Rechteck zusammensetzt.

			x x x x	
		x x x	o x x x	
	x x	o x x	o o x x	
x	o x	o o x	o o o x	
o	o o	o o o	o o o o	…

Ihre Reihe ist also:

	$2 \cdot 1$	$2 \cdot 3$	$2 \cdot 6$	$2 \cdot 10$	…
oder	$1 \cdot 2$	$2 \cdot 3$	$3 \cdot 4$	$4 \cdot 5$	… $n(n+1) = 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1)$

Damit ergibt sich auch der Beweis der Beziehung (6) unmittelbar aus (1), indem man berücksichtigt, daß die Zahlrechtecke durch Verdoppelung der in 3.3.1. gelegten Zahldreiecke entstehen.

3.3.6. Nach diesen zahlentheoretischen Vorbemerkungen sind wir für ein Verständnis der *Zahlensymbolik der Pythagoreer* vorbereitet.

In der geometrischen „Lehre von der Ähnlichkeit" sind zwei (konvexe) Vielecke „einander ähnlich" oder „von gleicher Form", wenn sie im Verhältnis der Längen entsprechender Seiten übereinstimmen. Danach sind alle Quadrate einander ähnlich, haben alle Quadrate die selbe Form. Wie wir gesehen haben, *führt die fortgesetzte Addition der ungeraden Zahlen auf die Quadratzahlen.* Deuten wir die Quadratzahlen geometrisch, so bedeutet das: Die ungeraden Zahlen erzeugen eine beschränkte Zahl von Formen, nämlich nur die Form des Quadrats.

Demgegenüber *führt die fortgesetzte Addition der geraden Zahlen auf die Rechteckszahlen.* Nachdem nun die Formen von Rechtecken bestimmt sind durch das Verhältnis ihrer Seitenlängen, bedeutet die letzte zahlentheoretische Aussage, daß die geraden Zahlen eine Vielzahl einander nicht ähnlicher Rechtecke erzeugen.

Aus dieser Tatsache leiteten die *Pythagoreer* die folgenden inhaltlichen Entsprechungen ab:

ungerade – beschränkt
gerade – unbeschränkt.[30]

Weitet man die mathematischen Schlüsse und Überlegungen durch solche und andere Zuordnungen und „Entsprechungen" aus, gelangt man einerseits zur *Zahlensymbolik*, d.h. zur Codierung bestimmter Qualitäten oder Erscheinungen durch Zahlen, durch Zahlenverhältnisse oder andere Zahlenbeziehungen, und weiter, falls die Entsprechungen sich auf religiöse Elemente beziehen zur *Zahlenmystik* bzw., falls man über gewisse Entsprechungen und Zuordnungen den Zahlen oder Zahlenbeziehungen eine geistige oder physische Kraft zuschreibt, zur *Zahlenmagie*.

So hielten die *Pythagoreer* im Gefolge zahlentheoretischer Einsichten und ihrer Interpretation die *ungeraden* Zahlen für „Glücksbringer", die *geraden* Zahlen für „Unglücksbringer" und schrieben ihnen zahlenmagisch eine heilsbringende bzw. eine unheilvolle Kraft zu. Nach pythagoreischer Auffassung zerfallen schließlich alle geschaffenen Dinge in zwei Kategorien, die den ungeraden Zahlen bzw. den geraden Zahlen entsprechen. Zugeordnet sind

die ungeraden Zahlen	die geraden Zahlen
der rechten Seite	der linken Seite
der Grenze	dem Unbegrenzten
dem Männlichen	dem Weiblichen
dem Ruhenden	dem Bewegten
dem Geraden	dem Gekrümmten
dem Licht	der Finsternis
dem Guten	dem Bösen
dem Quadrat	dem Rechteck[31]

3.3.7. Teilbarkeitsprobleme

Bei anderen Überlegungen der *Pythagoreer* spielten die zahlentheoretischen Eigenschaften der multiplikativen Zerlegung einer ganzen Zahl, insbesondere die *Teilbarkeitseigenschaften*, eine zentrale Rolle. Wieder unterscheiden sich die ungeraden von den geraden Zahlen, z.B. dadurch, daß die letzteren halbierbar sind, die ersteren aber nicht.

Seit den *Pythagoreern* bezeichnet man eine Zahl als *„vollkommen"*, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist. Beispiele: Die Zahl 6 hat die echten[32] Teiler : 1, 2, 3. Zugleich gilt: $6 = 1 + 2 + 3$.[33] Auch 28 ist eine vollkommene Zahl, denn: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Zwei Zahlen wurden von den *Pythagoreern* – und werden auch heute noch in der Zahlentheorie – „*befreundet*" genannt, wenn jede gleich der Summe der echten Teiler der anderen Zahl ist. Das kleinste Zahlenpaar mit dieser Eigenschaft ist das Paar 220 und 284, denn:

$$220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$$

$$284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 11 + 22 + 44 + 55 + 110.$$

Pythagoras soll diese Zahlen genannt haben als Antwort auf die Frage, was Freundschaft sei. Auch diese Begriffsbildung ist ein typisches Beispiel von Zahlensymbolik, eine Codierung von Eigenschaften nichtmathematischer Gegenstände durch Zahleigenschaften.

Andere Beispiele für die pythagoreische Zahlensymbolik und damit verbundene zahlenmagische Vorstellungen und Praktiken sind nicht so ohne weiteres nachvollziehbar. Als Beispielfeld nennen wir die Zahlen 16, 17, 18. Eine Zahl wurde „*sympathisch*" genannt, wenn sie zugleich Maßzahl von Inhalt und Umfang eines Rechtecks ist. Die Zahlen 16 und 18 sind solche sympathischen Zahlen, denn dem Quadrat mit der Seite 4 bzw. dem Rechteck mit den Seiten 3 und 6 ist gemeinsam, daß die Maßzahl ihres Inhalts gleich der Maßzahl ihres Umfangs ist.

$$16 = 4 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4$$

$$18 = 3 \times 6 = 3 + 6 + 3 + 6$$

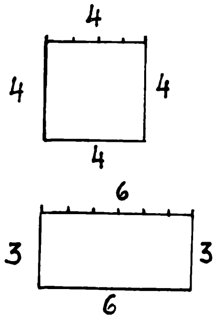


Fig. 2 *Geometrische Deutung der sympathischen Zahlen*

16 und 18 sind freilich die einzigen sympathischen Zahlen, die es gibt. (Beweis!) Die beiden sympathischen Zahlen 16 und 18 werden von der Zahl 17 „getrennt". Sie galt den *Pythagoreern* als eine „Unglückszahl", weil sie zwischen den sympathischen Zahlen 16 und 18 liegt. Wie sich mathematische Tatsachen mit magischen Vorstellungen vermischen, wird gerade

an diesem Beispiel deutlich. Wir zitieren dazu *Plutarchs* (40–120 n.Chr.) Beschreibung des altägyptischen Isis-Kults: „Die Ägypter fabeln, der Tod des Osiris trete ein am 17ten, wo die Abnahme des Vollmonds deutlich wird, deshalb nennen die *Pythagoreer* diesen Tag ‚Gegensperrung' und verabscheuen überhaupt diese Zahl: denn während das Quadrat 16 und das Rechteck 18 die einzigen Flächenzahlen sind, bei denen es sich trifft, daß die Teile ihres Umfangs an Zahl gleich sind den Feldern ihres Flächeninhalts, so fällt zwischen beide die Zahl 17 mitten hinein, sperrt und scheidet sie voneinander, und zerlegt das Epogdoos-Verhältnis[34], in ungleiche Intervalle." (v.d.*Waerden* (1966), 401).

IV. Das Erbe der Pythagoreer

0. Für unser Abendland ist bedeutsam, daß sich viele dieser Zuordnungen von Zahlen zu materiellen oder geistigen Erscheinungen auf verschiedenen Gebieten, insbesondere im *Volksglauben* und in der *Theologie*, erhalten haben.

1. Die Suche nach Gesetzen, nach der Erfassung von Seinszusammenhängen, insbesondere nach einer allumfassenden Harmonie blieb nicht auf die *Pythagoreer* beschränkt.

Dabei sollte man spätestens an dieser Stelle unserer Überlegungen über Zahlenmystik, Zahlenmagie und Zahlensymbolik betonen, daß sich die Mathematik nicht auf die Untersuchung der Welt der Zahlen beschränkt. Auch die Welt der *geometrischen Formen* gehört seit alters zum Interessen- und Theorienbereich der Mathematik. Wenn die Griechen und viele Völker und Menschen aller Zeiten – je auf ihre Weise – Sein und Ordnung zusammendachten, so spielten neben den Zahlen immer auch geometrische Gebilde und Strukturen eine zentrale Rolle. Das haben wir u.a. in III.3.3.6. und III.3.3.7. angesprochen im Zusammenhang von Zahlen und Zahlbeziehungen mit ihren geometrischen Interpretationen. Wenn wir also von Zahlenmystik, Zahlenmagie und Zahlensymbolik sprechen, sollten wir und müssen wir dabei zugleich und immer die Gesamtheit der verschiedenen Aspekte der mathematischen Gebilde im Blickfeld haben.

2. *Plato* sah in den Zahlen und Zahlbeziehungen einen Schlüssel zu den Geheimnissen der Natur. Wir erinnern an *Plato*s mathematische, d.h. geo-

metrische Auffassung von den *5 Elementen* (Atomen), denen er die 5 „regelmäßigen (*Plato*nischen) Körper“ zuordnete: Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Ikosaeder, Dodekaeder.[35]

Auch für *Plato* hatten alle geraden Zahlen eine üble Vorbedeutung. Bei *Vergil* heißt es „Numero deus impari gaudet“ („An der ungeraden Zahl freut sich Gott“). *Leibniz* hat der von ihm entdeckten Reihendarstellung für $\pi/4$

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - + \ldots$$

eben dieses Wort von *Vergil* angefügt.

3. Die Vorliebe für ungerade Zahlen ist auch heute noch vielfach erkennbar: Rituelle Handlungen, Gebete, Beschwörungen werden in ungerader Anzahl ausgeführt. Zauber und Gebete werden dreimal oder siebenmal wiederholt, das Amen wird dreimal gesprochen, der Zauberknoten dreimal geknüpft. Pillen wurden früher in ungerader Anzahl verordnet. Und auch heute schenken wir i.a. Blumen in einer ungeraden Anzahl.

4. Pythagoreische und platonische Gedanken und Vorstellungen wurden im *Neuplatonismus* und in der *Gnosis* weitergeführt. Nach *Endres/ Schimmel* kann man die sich entwickelnde *Zahlenmystik* durch die folgenden Aspekte kennzeichnen:

(1) „Die Zahl beeinflußt das Wesen der Dinge, die in ihr irgendwie angeordnet sind.

(2) Die Zahl wird dadurch zum Mittler zwischen Göttlichem und Irdischem.

(3) Wenn man also Operationen irgendwelcher Art mit Zahlen ausführt, so wirken diese Operationen auch auf Dinge, die mit den entsprechenden Zahlen zusammenhängen.“ (*Endres/ Schimmel* 1984, 30)

Mit der letztgenannten Eigenheit erhielt jede Zahl durch ihr Eigenwesen über ihre metaphysische Bedeutung hinaus zusätzlich eine Wirkkraft zugesprochen, wurde sie zum möglichen Instrument der *Magie*.

Geben wir noch ein Beispiel für Zahlensymbolik und zugleich ein Beispiel für ein späteres methodisches Vorgehen in diesem Bereich. Eine der Grundformen der Zahlensymbolik und eine der Methoden, deren sich die

Zahlenmystik bedient, ist die Kunst der *Gematria*[36]. Sie geht auf die Tatsache zurück, daß im Griechischen und im Hebräischen als Zahlzeichen zunächst die Buchstaben der klassischen Alphabete verwendet wurden[37]. Damit können umgekehrt auch den Buchstaben Zahlenwerte zugeordnet werden. In ihrer einfachsten Form setzt die Gematria Worte zunächst mit Zahlen (Zahlworten) gleich und interpretiert die verbalen Entsprechungen.

Als Beispiel zitieren wir: Dem Namen „*Innocentius* Papa" von Papst *Innozenz IV.* entspricht in dieser Codierung die Zahl 666. Das ist die „Zahl des Tieres" aus der Offenbarung 13:18 –... daher ist *Innozenz* der Antichrist.

5. Im Gefolge solcher Praktiken wurden später – z.B. durch *Philo von Alexandrien* (25v.Chr.–50 n.Chr.) – alttestamentliche und pythagoreische Ideen miteinander verschmolzen und damit die Grundlage für eine stark von Zahlenmystik geprägte *Bibelauslegung* geschaffen.

6. Pythagoreische Zahlenspekulationen prägten auch die *Mystik des Mittelalters* – die in der *Kabbala*, im hebräisch-jüdischen Gedankenkreis besonders zum Tragen kommt.[38]

7. Die *mittelalterliche islamische Mystik* übergehen wir, wie so viele andere Bereiche auch, zitieren für das *mittelalterliche Christentum* nur *Isidor von Sevilla* (um 600 n.Chr.), der ganz ähnlich wie *Augustinus* sagt: „Tolle numerum omnibus rebus et omnia pereunt" („Nimm die Zahl von allen Dingen, und sie werden verderben.") – Im mittelalterlichen Denken waren die Zahlensymbolik, die Zahlenallegorie und mit ihr die Zahlenmystik aufs engste verbunden mit astrologischen Vorstellungen und Praktiken.

8. Die Zahlenallegorie beherrschte aber nicht nur die Weltsicht und die Bibelauslegung. Die *Schriften* der Gelehrten und der Theologen, ihr inhaltlicher und formaler Aufbau selbst waren von der Macht der Zahl beherrscht. *Augustinus*' „Gottesstaat" ist in 22 Sektionen eingeteilt. Sie entsprechen den 22 hebräischen Buchstaben, sind weiter eingeteilt in 2 x 5 refutationes (Wiederlegungen) - 2 x 5 = 10, nämlich das 10-fache „Du sollst nicht...!" – in 3 x 4 positive Lehren, die mit den 12 Aposteln zusammenhängen, wie mit der Trinität und den 4 Evangelien (3 x 4 = 12).
Auch *Dantes* „Göttliche Komödie" ist von Zahlenallegorien beherrscht und von einem – wie *Galilei* nachgewiesen hat – konsistenten mathematischen Konstruktionsplan.[39] *Galilei* hat damit zugleich ein Modell für die spätere, die heutige Denkhaltung der theoretischen und d.h. der mathematischen Physik geliefert.[40]

9. Aber nicht nur mittelalterliche Werke der Literatur waren nach zahlensymbolischen Grundsätzen strukturiert. Das gleiche gilt für die Werke der *Malerei* und die *Architektur.* Die Konstruktionspläne von Bauwerken waren weitgehend von Zahlensymbolik und Zahlenmystik bestimmt. „Für das mittelalterliche Denken war eine Zahl, vor allem, wenn es eine heilige Zahl war, eine Manifestation der göttlichen und spirituellen Ordnung. Sie ließ sich als ästhetisches Prinzip anwenden." (*Davis, P.J./ Hersh, R.* 1985, 100). *Horn* hat den sog. „Plan von St. Gallen" analysiert, der 816 entstanden, den Gesamtplan einer Klostersiedlung wiedergibt. *Horn* konnte zeigen, daß der Entwurf auf den „heiligen" Zahlen 3, 4, 7, 10, 12 und 40 gründet.[41]

10. All dem lag der Glaube an eine geordnete, an *eine mathematisch geordnete Welt, an eine Harmonia Mundi*[42] zugrunde. Diese Harmonia Mundi fand in der *Musiktheorie* ebenso ihren Ausdruck wie in der *Naturforschung*. Sie hat schließlich Forscher wie *Kepler* zu ihren Ergebnissen geführt. In *Kepler*s Modell des „Mysterium Cosmographicum" (1591 bzw. 1621) werden den damals bekannten 6 Planeten 6 Kugelschalen zugeordnet, die von den 5 platonischen Körpern, ineinander liegend und einander berührend, bestimmt werden.

11. Es gibt *vielfältig andere Beispiele für Zahlensymbolik, Zahlenmagie und Zahlenmystik*. Erwähnen wir noch, daß zahlenmystische Zusammenhänge in der Literatur der *deutschen Klassik und Romantik* eine Rolle spielen – bei *Goethe, Schiller, Novalis. Goethe* wußte aus den Schriften der väterlichen Bibliothek einiges über die Denkweise der *Pythagoreer*. Sie fand u.a. in seinem „Faust" ihren Niederschlag. Im Monolog des Faust wird die uralte pythagoreische Vorstellung von der Sphärenharmonie beschworen, im „Hexeneinmaleins" sind Zahlensymbolik und Zahlenmagie die bestimmenden Elemente. Man sollte in diesem Zusammenhang freilich nicht unerwähnt lassen, daß *Goethe* selbst dieser Art von Zahldeutung nicht zugetan war. In einem Brief an *Zelter* (12. 12. 1812) meint er: Er habe „alle Zahlensymbolik, von der Pythagoreischen bis auf die letzten Mathematico-Mystiker, als etwas Gestaltloses und Untröstliches gemieden".

V. Zahlenspielereien

1. Der Zahlensymbolik, der Zahlenmystik und der Zahlenmagie aller Zeiten liegen auch viele unverstandene zahlentheoretische Zusammenhänge zugrunde. Es gibt viele und dabei amüsante *Zahlenspielereien*, die seit je das Interesse der Menschen fanden. In früher Zeit waren diese auch dem Denksport zuzurechnenden Aktivitäten in die Form von Rätselaufgaben gekleidet oder traten als Ein- oder Mehrpersonenspiele auf. Seit Jahrhunderten ist die sogenannte „Unterhaltungsmathematik" ein Zweig mathematischer Betätigung. Heute finden sich in populärwissenschaftlichen Zeitschriften, in Illustrierten und selbst in den Blättern der Regenbogenpresse mathematische Rätsel, Labyrinth-Aufgaben, Logeleien, Paradoxe, Alphamatics, und je nachdem auch anspruchsvolle mathematische Aufgabenstellungen in entsprechend vergnüglichen Einkleidungen. Die Unterhaltungsmathematik hat ihren Platz in der Mathematikgeschichte und sie hat zu vielen, auch tiefsinnigen mathematischen Erkenntnissen angeregt und geführt.

2. Leicht läßt sich freilich in arithmetische Strukturen allerlei hineindeuten und hineingeheimnissen. Diese Möglichkeit ergibt sich aus der Tatsache, daß sich Zahlen und arithmetische Verknüpfungen in vielfältiger Weise darstellen lassen.

I. $1989^2 = 1980^2 + 189^2 = 1836^2 + 765^2 = 1755^2 + 936^2 = 1539^2 + 1260^2$.

II. Die vier Zahlenpaare I. sind die ganzzahligen Lösungen der diophantischen Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1989^2.$$

Interpretiert man sie als Koordinaten x/y von Punkten in der Ebene, so liegen im ersten Quadranten des Kreises die acht Punkte

x	1980	189	1836	765	1755	936	1539	1260
y	189	1980	765	1836	936	1755	1260	1539

mit ganzzahligen Koordinaten, auf der ganzen Peripherie 32. Dazu kommen noch die vier Punkte, in denen die Koordinatenachsen die Peripherie des Kreises durchstoßen.

III. Läßt man statt ganzer auch rationale Zahlen x, y zu, so kann man für $x^2 + y^2 = 1989^2$ unendlich viele Lösungen angeben. Sind a, b, c pythagoreische Zahlen $a^2 + b^2 = c^2$:

a	3	4	5	12	8	15	9	40	11	60	...
b	4	3	12	5	15	8	40	9	60	11	...
c	5	5	13	13	17	17	41	41	61	61	...

so sind diese Lösungen:

$$x = \frac{a}{c}\,1989;\; y = \frac{b}{c}\,1989 \text{ und } x = \frac{b}{c}\,1989;\; y = \frac{a}{c}\,1989.$$

Die Menge dieser Zahlen enthält unendlich viele Elemente.

Beispiel: Mathematische Spielereien mit der Jahreszahl 1989. [43]

3. Im Rahmen unseres Themenkreises – aber auch in der Unterhaltungsmathematik – spielten in allen Kulturen seit je Zahlenkonfigurationen eine große Rolle. Die Sonderform der sog. *„magischen Quadrate“* fand dabei besonderes Interesse.

Auch in den magischen Quadraten finden sich Elemente der Zahlenlehre und der Geometrie miteinander verschmolzen: Flächenhaft-geometrisch ist die Anordnung der Zahlen, genauer: strukturiert durch ihre Verteilung auf die Gitterpunkte eines Quadrats; arithmetisch-algebraischer Natur sind nicht nur die die Punkte besetzenden Zahlen, diese sind in ihrer Anordnung zugleich in bestimmter Weise miteinander (additiv) verknüpft. In einem „magischen Quadrat“ sind nämlich (paarweise verschiedene natürliche) Zahlen in einem quadratischen Schema so angeordnet, daß die Summe der Zahlen in Zeilen, Spalten und Diagonalen konstant ist.[44]
Solche Zahlen-Quadrate hat man nicht umsonst „magische Quadrate“ genannt.

Das erste magische Quadrat im Abendland findet sich auf *Albrecht Dürer*s „Melancholie“ (1514). Es hat die Form

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Die Summe der Zahlen in den Zeilen, in den Spalten und in den Diagonalen ergibt jeweils 34.
Das älteste bekannte magische Quadrat ist das Luo-Shu in China:[45]

4	9	2
3	5	7
8	1	6

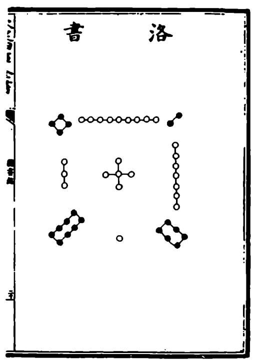


Fig. 3.
Das chinesische Luo-Shu „Zeilen und Spalten Diagramm“

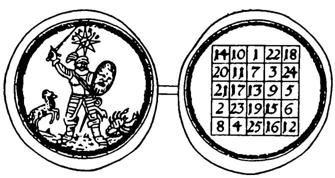


Fig. 4: Marsamulette. Die Tafel besteht aus dem Quadrat der Fünf; pro Reihe ergibt sich die Zahl 65, als Gesamtsumme 325.

Im Gebrauch der magischen Quadrate finden wir eine innige *Verflechtung von mathematischen Zusammenhängen, Strukturen bzw. Einsichten mit magischen Elementen.* Schon das Luo-Shu wurde zu heute nicht mehr genauer bekannten rituellen Zwecken verwendet.

Kunstvollen Verknüpfungen von Zahlen sprach man seit je eine heilsame Wirkung zu. So nimmt nicht Wunder, daß magische Quadrate auch als Heil-Amulette Verwendung fanden. Als Beispiele verweisen wir auf Amulette, die mit magischen Quadraten versehen waren. *Agrippa* von Nettersheim und *Paracelsus* haben sie zu Heilzwecken verordnet.

Wie ist eine solche Verwendung zu erklären?
Die Gelehrten des Mittelalters hatten einerseits zwischen den Himmelskörpern und Teilen des menschlichen Körpers Zuordnungen, im Sinne von Entsprechungen, hergestellt. Andererseits kannte man magische Quadrate mit 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 15 Zeilen und hatte gewisse dieser Quadrate den 7 Planeten zugeordnet. So war z.B. das 5-zeilige magische Quadrat das Symbol des Mars; Mars war seinerseits der Galle zugeordnet; also war das Amulett mit dem betreffenden magischen Quadrat folgerichtig ein Heilmittel für Krankheiten der Galle.

VI. Weitere Beispiele für Zahlensymbolik - Zahlenmagie - Zahlenmystik

1. Zahlreich sind die Deutungen, Bedeutungen und Wirkungen, die man Zahlen zugeschrieben und mit ihnen verknüpft hat. Umfangreich ist die Literatur. Wir verweisen z.B. auf das klassische Werk von *Franz Carl Endres* und *Annemarie Schimmel* (1984), eine lexikalisch geordnete Fundgrube für Informationen zu unserem Thema im Kulturvergleich.

2. Zur Abrundung geben wir (unter Verweis auf *Endres-Schimmel*) andeutend noch einige Beispiele.

2 ist die Zahl der Polarität oder Entzweiung. Sie steht für Zweifel, Zwist, für Zwietracht, Zwiespalt und Zwitter. In dem Gedicht „Weisheit des Brahmanen" formuliert der Dichter *Rückert* „Die Zwei ist Zwillingsfrucht am Zweige: süß und bitter." In den *geraden Zahlen* ist die Zwei als Faktor (Teiler) enthalten. Deshalb galten sie den *Pythagoreer*n als die *weiblichen* oder den *Dämonen* zugeordneten *bösen* Elemente. In der christlichen Kirche ist die Zwei die Zahl der Herätiker. Sie steht auch für Tag und Nacht, für Licht und Dunkel, in China für die beiden Prinzipien Yin und Yang.[46] ...

3 ist die Zahl der umfassenden Synthese. Die Zahl 3 überwindet die Zweiung, wird dadurch in manchen Kulturen zum Zeichen für „viel". Die Drei ist es, die aus Thesis und Antithesis zur Synthesis, zur neuen Stufe der Integration in der Dreiung führt. In China, bei *Laotzu* heißt es: „Das Tao erzeugt die Einheit, die Einheit erzeugt die Zweiheit, die Zweiheit erzeugt die Dreiheit - die Dreiheit erzeugt die 10000 Dinge" (d.h. die Welt). Wir erinnern an die Bedeutung der Trinität in der christlichen Kirche, für *Dante* wird sie so zum Prinzip der Liebe. In Philosophie und Psychologie wurde die Drei vielfach als Einteilungsprinzip verwendet. Raum, Zeit und Materie sind ein solches Tripel, ein anderes die Kategorien *Augustins:* Sein, Erkennen und Wollen. Im Doppeldreieck des Hermetismus, im Sechsstern, bedeutet die Doppel-Drei das Ineinander von Makrokosmos und Mikrokosmos. ...

4 ist die materielle Ordnungszahl, verbunden mit der erkenntnismäßigen Ordnung auf Erden. Wir erinnern an die Bedeutung der Tetrade bei den *Pythagoreer*n, an die fest gegründete Form des tetragons, gemeint ist das Rechteck. Für die *Pythagoreer* war die Zahl 4 ein Symbol für die *Gerechtigkeit*, denn „sie vergilt Gleiches mit Gleichem" oder „sie bringt gleich mit gleich zusammen". Sie ist die erste (von 1 verschiedene) Zahl, die aus zwei gleichen Faktoren besteht, sie ist die erste (von 1 verschiedene) Quadratzahl. 4 = 2 x 2. Im Mittelalter gilt die Vier als Zahl der vollendeten Ordnung; es gibt vier Evangelisten. Der Buddhismus kennt die vier edlen Wahrheiten. Wir teilen das Jahr in vier Jahreszeiten, das Leben in vier Lebensalter. ...

5 ist die Zahl des Lebendigen. 5 steht für die *Hochzeit*, weil sie Summe aus der (im Sinne der *Pythagoreer*) ersten geraden und der ersten ungeraden Zahl ist, also aus dem ersten „weiblichen" und dem ersten „männlichen" Element besteht: 5 = 2 + 3. ...

6 ist die vollkommene Welt-Zahl: 6 = 1 + 2 + 3 = 1 x 2 x 3...
7 symbolisiert die Säulen der Weisheit: 7 = 3 + 4...
8 ist die glückliche Zahl,...
9 die potenzierte heilige Drei,...
10 ist das abgerundete Ganze. ... Und so weiter, und so fort.

3. Wenden wir uns abschließend der Zahl 1 zu. Bei den Deutungen der Zahlen 4 und 5 fällt auf, daß die Zahl 1 nicht mit in die Überlegungen einbezogen wird. Es wäre ja sonst 1 = 1 x 1 die erste Quadratzahl, und ebenso müßte 3 = 1 + 2 als Symbol für die Hochzeit gewählt werden, weil ja (für uns) 1 die erste ungerade Zahl ist.

Die *Pythagoreer* betrachteten die 1 nicht als Zahl. Dies gilt freilich nicht nur für die *Pythagoreer*. Auch *Euklid* definiert im siebten Buch seiner Elemente (VII, 2) den Begriff der „*Zahl*" als „die aus Einheiten zusammengesetzte Menge". Die „Einheit" selbst, „ist das, wonach jedes Ding eines genannt wird" (VII,1.). Die 1 galt also nicht als Zahl, sondern als der „Ursprung aller Zahlen". „Gemeint ist (mit der 1) nicht das Einssein, die Idee der Einheit, die keinen Plural zuließe, sondern das gezählte Ding selbst als Maß, unter Absehen von seinen physischen Eigenschaften" (*Euklid/ Thaer* 1975, 439).[47]

Für den Neuplatoniker *Theon von Smyrna* (um 130 n.Chr.)[48] enthält die Zahl Eins „wie ein Samenkorn alle Eigenschaften des künftigen Lebewesens in sich" – sie hätte danach den Charakter einer potentiellen Wesenheit.

Plotin (205–270 n.Chr.) ging aus vom „All-Einen", er „erachtete Gott als die absolute Einheit und verwendete daher auch die Eins als Symbol Gottes" – damit wird die Zahlensymbolik der Eins mit Elementen des Glaubens gefüllt, also in den Bereich der Zahlenmystik gerückt. In der Auffassung der Zahlenmystik steht die *Eins* für *Gott*, sie ist das *Vollkommene*.

Was den Zahlcharakter der 1 angeht, so lesen wir noch im Rechenbuch von *Köbel* (1537):

> „Darauss verstehstu das I. kein zal ist / sonder es ist ein
> geberin / anfang/ vnd fundament aller anderen zalen."

Die Zahlnatur der Eins begründet erst 1585 *Stevin* durch die folgende Überlegung. Er sagt: Wenn man von der Zahl 3 eine Nicht-Zahl abzieht, so bleibt 3 bestehen; da aber, wie wir andererseits wissen, 3 - 1 = 2 ist, so ist 1 keine Nicht-Zahl, sondern eine Zahl. Zusammen mit anderen Errungenschaften auf dem Gebiet der Mathematik jener Zeit wird damit der Weg frei zum heutigen Verständnis der Zahlen, wird auch der Weg frei zum schriftlichen Rechnen, wie es uns Heutigen vertraut ist.

Daß auch heute noch – und dies mathematisch korrekt und zurecht – die Eins als „Keim" für das Zahlenreich gelten kann, macht ein Hinweis auf die

Aussage des Mathematikers *Kroneckers* (1821–1891) deutlich, nach dem „die Zahl 1 der liebe Gott erschuf, alles übrige ist Menschenwerk".[49] In der auf die Nachfolgerfunktion gegründeten Axiomatik der natürlichen Zahlen von *Peano* (1858-1932) lautet das Axiom (1): „Die 1 ist eine natürliche Zahl" und das Axiom (4): „1 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl."

VII. Zahlenaberglaube

Das Wissen um zahlentheoretische Zusammenhänge und der Glaube an einen Zusammenhang von Naturordnung und der Ordnung der Zahlen führte nicht immer zu wissenschaftlichen Entdeckungen. Zahlensymbolische Beziehungen und zahlenmystische Deutung führen i.a. zu magischen Manipulationen. Das ist in der Gegenwart nicht anders. In unseren Tagen feiert in gewissen Kreisen die Esoterik zunehmend fröhliche Urständ. Die Regale in den Buchläden füllen sich mit esoterischer Literatur. Zur Esoterik werden dabei auch die taoistischen und buddhistischen Klassiker gezählt, die in allerlei obskuren Interpretationen und Adaptionen angeboten werden. Und nicht genug, auch (ehemals) ernstzunehmende Wissenschaftler tragen dem sog. NEW AGE die Fahne voran. Aus einer Kombination (meist) unverstandener wissenschaftlicher Tatsachen entstehen dabei wohlklingende Texte. In großen Worten werden die unterschiedlichsten Erscheinungen in Zusammenhang gebracht, man bezieht sich auf Quantenmechanik, auf Kosmologie, auf mathematische und biologische Gesetze und versäumt dabei, den Forderungen des Satzes vom zureichenden Grund folgend, die aufgestellten Behauptungen mit entsprechender Methodologie nachprüfbar zu begründen.

VIII. Ramsey-Theorie

Der geniale Mathematiker *Frank Plumpton Ramsey* (1903–1930) bewies im Rahmen rein mathematischer Überlegungen, daß vollständige Unordnung unmöglich ist. Jede (endliche) hinreichend große Menge von Zahlen oder Punkten enthält zwangsläufig in mindestens einem Teilbereich eine regelmäßige Struktur.[50] Man bemühe sich selbst und fasse auf einem steinigen Wege irgend einen Ausschnitt vor dem Fuße ins Auge. Dabei wird man unschwer die verschiedensten Strukturmuster entdecken. Da bestimmen natürlich je zwei Steine eine Gerade, da bilden je drei Steine i.a. ein Dreieck, wir entdecken in der Steinkonfiguration gleichschenklige Dreiecke, gleichseitige Dreiecke, Vierecke aller Arten usf. Man denke auch an den gestirnten Nachthimmel und wie sich dort die Lichtpunkte zu Sternbildern zusammenfinden.

Die *Ramsey*-Theorie gehört heute mit zu den schwierigsten mathematischen Theorienbildungen. Um so erstaunlicher ist es – und das macht den eigenartigen Reiz dieserTheorie aus – daß sich viele ihrer wesentlichen Aussagen in der Umgangssprache formulieren lassen. Ihre zentrale Aussage lautet: Jede hinreichend große Struktur enthält eine geordnete Unterstruktur – totale Unordnung ist unmöglich. Das eigentliche Problem ist dabei die Präzisierung und Beantwortung der Frage: Was heißt bzw. wie groß ist für den jeweiligen Fall „hinreichend groß"? – Zur Verdeutlichung der Situation nennen wir eine einfache Aufgabenstellung, das „Party-Problem": Wieviele Leute müssen beisammen sein, damit garantiert vier unter ihnen einander kennen oder vier einander unbekannt sind. (Antwort: 18).

Fragen dieser Art nach der Anzahl der Möglichkeiten für bestimmte Komplexionen führen auf sehr große Zahlen, so groß, daß sie sich i.a. nur abschätzen lassen. Aber selbst diese Schranken sind gelegentlich so gigantisch, daß die übliche Zahlnotation es nicht erlaubt, sie anzuschreiben. So paradox es auch klingt: Der theoretische Umgang mit endlichen Strukturen gestaltet sich häufig „schwieriger" als der mit unendlichen Strukturen.

Das Hauptergebnis der *Ramsey*-Theorie hat – so scheint es uns – seine Konsequenzen für gewisse Züge unserer Weltsicht. Es ist vielleicht einer der Gründe dafür, daß und warum die Menschen aller Zeiten einen Zusammenhang von Sein und Zahl, von Zahl und Kraft, von Zahl und Symbolgehalt herstellten.

Mit der Konstitution von kombinatorischen Komplexionen werden unbeabsichtigt und naturgemäß andere Strukturen, gar Regelmäßigkeiten mitkonstituiert. Nicht jede dieser Teilstrukturen ist Ergebnis zielgerichteten Wollens, nicht jede dieser Teilstrukturen hat einen „tieferen Sinn". Ganz auf diese Weise entdecken Kunstkritiker in Werken der bildenden Kunst allerlei Strukturen, auch solche, die die betreffenden Künstler im Schöpfungsakt wohl nicht im Sinne hatten, sie zu realisieren, und die sich gleichwohl in die Konfigurationen hineinsehen, als Bildgedanken hineindeuten und entsprechend interpretieren lassen.[51]

Wie sagt der Dichter:

„Wirf irgend viele calculi
achtlos in den Sand,
Kombiniere was du willst
zu einem Mosaik,
und es wird dir einen
Sinn ergeben".

Anmerkungen

1 Im folgenden sprechen wir vornehmlich von den natürlichen Zahlen {1, 2, 3,...} oder den ganzen Zahlen {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}.
2 Für weitere Eigenschaften der Zahl 2 vgl. *Fischer, W.L.* (1989).
3 Alle unendlich vielen Primzahlen, ausgenommen die 2, sind ungerade.
4 Vgl. Anm. 40.
5 Man denke auch an die mathematische Darstellung physikalischer Erscheinungen im Rahmen der heutigen theoretischen Physik.
6 Vgl. *Schmidt, H.* (1951), Philosophisches Wörterbuch.
7 „Ein magisches Weltbild ist das der Kinder und der Primitiven, die sich die (als beseelt empfundenen) Gegenstände der Umwelt durch Beschwörung (also rein teleologisch und ohne Ingangsetzung kausaler Wirkungsreihen) glauben dienstbar machen zu können." (*Schmidt, H.* (1951), 363).
8 Der Begriff des Symbols wird in der modernen Zeichentheorie (Semiotik) in differenzierter Weise untersucht, in seine Bedeutungsvarianzen aufgefächert und von anderen Arten von Zeichen unterschieden.
9 Die Unterscheidung von Zahl und Zahlzeichen wird häufig nicht beachtet. Schon daraus resultieren zahlreiche Mißverständnisse und Scheinprobleme. Zahlen sind bestimmte (Klassen-)Begriffe; die Zahlzeichen sind sprachliche Elemente, die in den Sprachen der verschiedenen Zeiten und Kulturen verschieden gestaltet waren und sind. Vgl. *Menninger* (1958).
10 *Meschkowski, H.* (1979),22.
11 das heutige Crotone
12 Zu Leben und Werk des *Pythagoras* vgl. vor allem v.d. *Waerden* (1966), v.d. *Waerden* (1979), sodann *Meschkowski, H.* (1979), *Ekschmitt* (1989), *Gericke* (1992), *Gorman* (1979), *Heuser* (1992), *Jung* (1940).
13 Vgl. v.d. *Waerden* (1966), 164, 122; *Vogel* (1959), 67ff., 78.
14 Bezüglich des bekannten Lehrsatzes müssen wir eigentlich drei Personen unterscheiden: den Entdecker des Satzes, denjenigen, der den Satz erstmals bewies und den historischen griechischen Philosophen *Pythagoras*. Weiter gilt es zu unterscheiden zwischen der geometrischen Aussage über den Zusammenhang der Flächengrößen der Kathetenquadrate mit dem Hypotenusenquadrat im rechtwinkligen Dreieck und der zahlentheoretischen Entsprechung $a^2 + b^2 = c^2$, die von gewissen Tripeln

natürlicher Zahlen (a,b,c,) erfüllt wird. Solche Tripel sind z.B. (3,4,5), ...(Vgl.III. 3.3.3. und Anm. 28). Möglicherweise ist die zahlentheoretische Beziehung der geometrischen Fassung vorausgegangen.

15 Vgl. *Needham* (1959), *Swetz/Kao* (1977) und *Siu* (1992, 1993).

16 Zur Frage: War *Pythagoras* ein Mathematiker? bemerkt v.d. *Waerden:* „Zur Klärung der Frage wird es gut sein, zwischen Lernen und Übermitteln von Mathematik einerseits und Forschen andererseits zu unterscheiden. Es gibt heute zahlreiche Schüler und Studenten, die Mathematik lernen müssen, aber viel weniger zahlreich sind die Forscher im Gebiete der Mathematik. Nur diese sind Mathematiker im eigentlichen Sinne. Ebenso war es im Altertum. *Plato* und *Aristoteles* haben die Mathematik ihrer Zeit gut gelernt und verstanden, aber daß sie sich in der mathematischen Forschung betätigt hätten, ist nicht überliefert. Daß *Pythagoras* in der Mathematik, Astronomie und Harmonik allerhand gelernt und sein Wissen an seine Schüler vermittelt hat, das steht für mich fest. Daß er als Forscher tätig war, scheint mir eher unwahrscheinlich. Wenn er einen mathematischen Satz oder eine astronomische Rechenmethode gefunden hätte, dann würden seine Biographen doch höchst wahrscheinlich darüber berichten! ... Die *Pythagoreer*, ja das waren Forscher. Sie waren nach *Aristoteles* „die ersten, die die mathematischen Wissenschaften förderten"." (v.d. *Waerden* 1979, 42, 43).

17 „*Nikomachos von Gerasa* (um 100 n.Chr) hat in seiner Einleitung in die Zahlenlehre das Wissen der *Pythagoreer* über die Gesetze der ganzen Zahlen zusammengestellt. Es ist anzunehmen, daß in dieser um das Jahr 100 n.Chr. entstandenen Schrift solche Sätze zusammengefaßt sind, die tatsächlich auf *Pythagoras* selbst und seinen Kreis zurückgehen" (*Meschkowski, H.* 1979, 24). Vgl. insbesondere v.d. *Waerden* (1979), 392ff..

18 Vgl. *Robins/Shute* (1987).

19 „Ordnung" hier nicht verstanden im engeren Sinne einer „Ordnungsrelation", sondern einer von rationalen Gesetzmäßigkeiten bestimmten Struktur. Vgl. auch Anm. 42.

20 Pythagoreische Vorstellungen wirken in der theoretischen Physik (im Grunde unbewußt) fort in den gegenwärtigen Bemühungen um eine unified theory, um eine Theorie, in der die vier Grundkräfte der Natur auf eine einzige Urkraft zurückzuführen wären. Journalistisch wird dieses Forschungsziel gerne mit der „Suche nach der Weltformel" umschrieben. – Zahlenmystische Züge hatte und hat auch die Diskussion um die Natur und den Zusammenhang der sog. „universellen Naturkonstanten" in der Physik. Dabei handelt es sich um dimensionslose Naturkonstanten, die als Verhältnisse anderer Naturkonstanten darstellbar sind, z.B. Masse des Nukleons/Masse des Elektrons. *Dirac* war es 1937 aufgefallen, daß sich gewisse dieser Konstanten um den Zahlenwert 1, andere um den Zahlenwert 10^{40} gruppieren. Insbesondere die großen Zahlen beziehen sich auf numerische Querverbindungen zwischen Fundamentalkonstanten der Mikrophysik einerseits und den Fundamentalparametern des Kosmos andererseits. So hat z.B. das Verhältnis des Radius des Universums zum Elektronenradius die Größenordnung 10^{40}. Die Bemühungen um eine Deutung dieser „kosmischen Koinzidenzen" und ihrer Bedeutung für die Fragen der Kosmologie sind noch in vollem Gange. Vgl. *Breuer, R.* (1981), 49ff..

21 Ein „regelmäßiger" oder „*Plato*nischer Körper" ist ein ebenflächig begrenzter (konvexer) Körper, dessen Seitenflächen sämtlich zueinander kongruente Vielecke mit lauter

gleichen Seiten und gleichen Winkeln sind. Es gibt genau 5 solcher Körper: Regelmäßiges Tetraeder, Hexaeder (Würfel), Oktaeder, Ikosaeder, Dodekaeder.

22 vgl. *Menge* (1976).

23 Zu *Polyklet* vgl.: *Polyklet* - Der Bildhauer der griechischen Klassik. Mainz 1990.

24 Vgl. *Fischer, W.L.* (1987).

25 Vgl. „Am Anfang der griechischen Mathematik, vermutlich noch im 6. Jahrhundert (v.Chr.) beginnend, steht eine eigentümliche Betrachtungsweise, die man als halb arithmetisch, halb geometrisch bezeichnen kann. Sie benutzt Steinchen (psäphoi) von gleicher Gestalt und Form (rund und quadratisch), mit denen Figuren gelegt werden können" (*Becker, O.* 1954, 34). Mit den Rechensteinen legten die Griechen die Zahlen, und zwar in Gestalt von Dreiecken, Quadraten, Rechtecken, von Vielecken. Bei dieser Art der Darstellung der Zahlen spricht man von „figurierten Zahlen" oder von „Polygonalzahlen". Die Rechensteinchen wurden auch in der alltäglichen Rechenpraxis verwendet, beim Rechnen auf dem Rechenbrett (abakion). Das griechische Verbum für „rechnen" (psäphizein) heißt also wörtlich „steineln" (*Lefevre, W.* 1981, 134ff.).

26 Solche Muster konnte man – so heißt es – den Sternbildern vergleichen (?).

27 Diese und alle folgenden Beziehungen stellen jeweils die Summen endlicher arithmetischer Folgen dar.

28 Allgemein sind die „pythagoreischen Zahlentripel" die ganzzahligen Lösungen der diophantischen Gleichung $x^2+y^2=z^2$. Sie sind gegeben durch: $x = n\cdot(a^2-b^2)$, $y=2n\cdot a\cdot b$, $z=n\cdot(a^2\cdot b^2)$ (a,b,n ganze Zahlen). Diese Tatsache war bereits *Diophantos* von Alexandria (um 250 n.Chr.) bekannt. – Vgl. z.B. *Schubert/Fitting*, §15.

29 Die gleiche Vermutung könnte für das Auftreten das Satzes bei den Chinesen gelten.

30 In die gleiche interpretatorische Richtung weist die Einsicht, daß gerade Zahlen halbierbar sind, was für ungerade Zahlen nicht gilt. (Vgl.III.3.3.7.)

31 Merkwürdigerweise finden sich fast alle diese Unterscheidungen bzw. Zuordnungen auch in der Gedankenwelt der alten Chinesen. Vgl. auch *Fischer, W.L.* (1989).

32 Die Zahl 6 hat als „unechten" Teiler sich selbst, denn: 6:6 = 1.

33 Vgl. *Schubert/ Fitting* (1953), §14.

34 Das Epogdoos-Verhältnis ist das Verhältnis 18:16 = 9:8, das in der Musiklehre der *Pythagoreer* dem Ganzton entspricht.

35 *Heisenberg* (1945) und Anm 20 und 21.

36 Das Wort leitet sich von „Geometrie" her.

37 Vgl. *Fischer, W.L.* (1988).

38 Vgl. *Bischoff* (1990).

39 Vgl. *Walther* (1952).

40 Vgl. auch *Heisenberg* (1945).

41 Einzelheiten siehe *Davis/ Hersh* (1985), 100.

42 Man sollte besser sagen: der Glaube an eine strukturierte Welt... . Der Mathematiker versteht unter Ordnung einen speziellen Strukturtyp, nämlich den eines Relats mit einer bestimmten Ordnungsrelation. Neben Ordnungen gibt es noch andere Arten von Strukturen, z.B. algebraische, topologische, spezielle geometrische Strukturen. Vgl., auch Anm. 19.

43 Aus: Praxis der Mathematik (PdM) Jg.1989, H.1.

44 Die Literatur über die Konstruktion solcher Quadrate ist umfangreich. Vgl. z.B. *Schubert/ Fitting* (1953), §19.

45 Vgl. im einzelnen *Needham* (1959), 55f..
46 Vgl. auch *Fischer, W.L.* (1989).
47 Man denke in diesem Zusammenhang auch an den Zählzahl-Aspekt und an die frühen Strichlistendarstellungen der natürlichen Zahlen.
48 *Theon* berichtet in seiner „Darlegung der zum Studium *Platon*s nützlichen Dinge" über die Zahlentheorie der *Pythagoreer*, u.a. auch von den „befreundeten" und den „vollkommenen" Zahlen.
49 Genauer lautet das Zitat: „Die ganzen Zahlen schuf der liebe Gott, alles übrige ist Menschenwerk". - Vgl. *Meschkowski, H.* (1964), 147. Die übliche Formulierung rekurriert wohl auf die mögliche Begründung der natürlichen Zahlen durch die Axiome *Peanos*.
50 Zur Einführung: *Graham/Spencer* (1990) und *Jacobs* (1987), 82, 88. Weiterführend: *Graham/Rothschild/Spencer* (1990) und *Jacobs* (1983).
51 Das Ergebnis ist dann freilich vielfach ein hermeneutisches Gefasel.

Literaturverzeichnis

BECKER, O (1954): Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. Freiburg, München.

BENSE, M. (1949): Konturen einer Geistesgeschichte der Mathematik, Bd.II: Die Mathematik und Kunst. Hamburg.

BETZ, O. (1989): Das Geheimnis der Zahlen. Stuttgart.

BISCHOFF, E. (1990): Die Elemente der Kabalah. Wiesbaden.

BREUER, R. (1981): Das anthropische Prinzip. Wien, München.

DAMEROW, P./ LEFEVRE, W. (1981): Rechenstein, Experiment, Sprache. Stuttgart.

DAVIS, P.J./ HERSH, R. (1985): Erfahrung Mathematik. Basel, Boston, Stuttgart.

EKSCHMITT, W. (1989): Weltmodelle. Mainz..

ENDRES, F.C./ SCHIMMEL, A. (1984): Das Mysterium der Zahl - Zahlensymbolik im Kulturvergleich München.

EUKLID / THAER, C. (Hrsg.; 1975): Die Elemente. Darmstadt.

FISCHER, W.L. (1987): Koinzidenzen in Mathematik- und Kunstgeschichte. In Hohenzollern, J.G. Prinz v./ Liedtke, M.(Hrsg.): Vom Kritzeln zur Kunst. Schriftenreihe z. Bayr. Schulmuseum Ichenhausen, Bd.6. Bad Heilbrunn. 101–133. Fischer, W.L. (1988): Die Entwicklung der Sprache in der Mathematik. In: Hohenzollern, J.G. *Prinz v./Liedtke, M.* (Hrsg): Naturwissenschaftlicher Unterricht und Wissenskumulation. Schriftenreihe z. Bayr. Schulmuseum Ichenhausen, Bd.7. Bad Heilbrunn. 142–170.

FISCHER, W.L. (1989): Marginalien zur Zweiheit in Mathematik und Natur. In: Liedtke, M. (Hrsg.): Paarbildung und Ehe. Wien, München. 127–150.

GERICKE, H. (1992): Mathematik in Antike und Orient. Wiesbaden.

GORMAN, P. (1979): *Pythagoras* – A Life. London, Boston.

GOTTWALD, S. / Ilgauds, H.J. / Schlote, K.H. (Hrsg.; 1990): Lexikon bedeutender Mathematiker. Thun, Frankfurt.

GRAHAM, R.L./ Spencer, J.H. (1990): Ramsey-Theorie. Spektrum der Wissenschaft, Jg. 1990, H.9., 112–118.

GRAHAM, R.L. / Rothschild, B.L. / Spencer, J.H. (1990): Ramsey-Theorie. New York.

HEISENBERG, W. (1945): Gedanken der antiken Naturphilosophie in der modernen Physik. In: Heisenberg, W.: Wandlungen in den Grundlagen der Naturwissenschaft. Leipzig.
HESSENBRUCH, H. (1963): Geheimnisse und Wesen der Zahlen. Köln.
HEUSER, H. (1992): Als die Götter lachen lernten. München.
JACOBS, K. (1983): Einführung in die Kombinatorik. Berlin.
JACOBS, K. (1987): Resultate – Ideen und Entwicklungen in der Mathematik. Bd.1. Braunschweig, Wiesbaden.
JUNG, G. Die pythagoreische Zahlenlehre. Deutsche Math.Ver.,1940, 341-357.
LEFEVRE, W. (1981): Rechensteine und Sprache. Zur Begründung der wissenschaftlichen Mathematik durch die *Pythagoreer*. In: Damerow, P./ Lefevre, W. (1981): Rechenstein, Experiment, Sprache. Stuttgart. S.115–170.
MENGE, H. (1976): Langenscheidts Taschenwörterbuch/ Altgriechisch-Deutsch. Berlin, München,Zürich.
MENNINGER, K. (1958): Zahlwort und Ziffer. Göttingen
MESCHKOWSKI, H. (1979): Problemgeschichte der Mathematik I. Mannheim, Wien, Zürich.
MESCHKOWSKI, H. (1964): Mathematiker-Lexikon. Mannheim, Zürich.
MUSCHG, W. (Hrsg.) (1986): Mystische Texte aus dem Mittelalter.Zürich.
NEEDHAM, J.(1959): Science and Civilisation in Ancient China. Vol.III. Cambridge.
RADBRUCH, K. (1993): Philosophische Spuren in Geschichte und Didaktik der Mathematik. Mathem.Sem.Ber. Bd.40 (1993), H.1, 1–27.
REIDEMEISTER, K. (1949): Das exakte Denken der Griechen. Hamburg.
REISCH, G. (1517/1973): Margarita Philosophica. Düsseldorf.
ROBINS, G. / SHUTE, C. (1987): The Rhind Mathematical Papyrus. New York.
SCHMIDT, H. (1951): Philosophisches Wörterbuch. Stuttgart.
SCHUBERT-FITTING (1953): Mathematische Mußestunden. Berlin.
SIU, M.K. (1992): Proof: A Chinese (Ancient) View. Mscpt. of a talk: Intern. Congr. Math. Educ. (ISME 7), Quebec/Kanada.
SIU, M.K. (1993): Proof and Pedagogy in Ancient China. In: Educational Studies in Mathematics, Vol. 24, No. 4, 345–357.
SWETZ, F.J. / KAO, T.I. (1977): Was *Pythagoras* Chinese? – An Examination of Right Triangle Theory in Ancient China. The Pennsylvania State University Studies No.4. Pennsylvania, London.
v. d. WAERDEN, B.L. (1966): Erwachende Wissenschaft. Basel, Stuttgart.
v. d. WAERDEN, B.L. (1979): Die *Pythagoreer*. Zürich, München.
v. FRANZ, M.L. (1980): Zahl und Zeit. Stuttgart.
VOGEL, K. (1958): Vorgriechische Mathematik I – Vorgeschichte und Ägypten. Hannover, Paderborn.
VOGEL, K. (1959): Vorgriechische Mathematik II – Die Mathematik der Babylonier. Hannover, Paderborn.
WALTHER, E. (1952): *Galileis* Vorlesung über Dantes „Hölle". Archimedes, 4. Jg, H.5, 73–74.