Walther L. Fischer

Marginalien über die Beziehungen von Spiel und Mathematik

1. Die Chiffre „Spiel und Mathematik"

1.1. Die Zusammenstellung von *„Spiel und Mathematik"* ist nicht neu. Sie ist eine vertraute Chiffre für den Mathematiker, eine vertraute Zusammenstellung auch für den, der sich mit dem Spiel, mit dem Spielen von Spielen beschäftigt – eine vertraute Chiffre für den, der über Mathematik und für den, der über Spiele reflektiert.

„Mathematik und Spiel" – eine gängige Zusammenstellung, freilich ebenso leicht ausgesprochen wie schwer zu präzisieren.

Wir sprechen einerseits vom Spielerischen in der Mathematik und andererseits vom mathematischen Element im Spiel, einerseits von der Mathematik als Gedanken-Spiel und andererseits vom Spiel als konkretisierte Mathematik, und finden beide Elemente gar untrennbar und unentwirrbar verwoben in Chiffren wie: mathematische Spielerei, mathematisches (Denk-)Spiel, zum Spiel geronnene Mathematik ...

Wie wörtlich sind solche Nennungen zu nehmen?
Lassen sie sich über den oberflächlichen metaphorischen Gebrauch hinaus bei näherem Zusehen halten, schließlich differenzierter erfassen?

1.2. Mathematik und Spiel: Das Konstruieren einer geometrischen Figur, das Lösen einer Gleichung, die logische Schlußkette eines Beweises – wie sollte sich die in ihrer Struktur und in der Abfolge ihrer Aussagen strengste aller Wissenschaften mit der Ungebundenheit, ja mit dem vom chaotischen Zufall beherrschten Spielgeschehen in einem Atemzug nennen lassen, wie sollte man die Leichtfüßigkeit des Spiels mit der Gesetzesstrenge der Mathematik vergleichen können?
Gibt es auf den ersten Blick nicht eher mehr Trennendes als Vereinendes zwischen Spiel und Mathematik?

1.3. Die genannte Zusammenstellung bezeichnet sicher nicht die beiden Seiten einer Gleichung. Sie signalisiert und behauptet wohl eine irgendwie

geartete Vergleichbarkeit der beiden Tätigkeitsbereiche, eine Wechselbeziehung zwischen Mathematik und Spiel, wenn nicht gar eine innere Verwandtschaft. Dies angenommen, scheint es angemessen, wenn wir unser Thema konkretisieren, wenn wir nicht den Inhalt der reichlich unbestimmten Wendung ‚Spiel und Mathematik' zu erhellen suchen, sondern bestimmter nach dem ‚Verhältnis von Spiel und Mathematik', nach den ‚Beziehungen zwischen Spiel und Mathematik' fragen. Wir entgehen damit zugleich der Gefahr, die Erscheinungsformen und Bereiche von Spiel und Mathematik zu vermengen.
Mit der Frage nach den ‚Beziehungen zwischen Spiel und Mathematik' signalisieren wir, daß es sich um eine Relation zwischen zwei eigenständigen Konstituenten handelt, um zwei Konstituenten mit je spezifischer Seinsweise und Eigengesetzlichkeit.

2. Zwei mögliche Grundantworten

Auf die Frage nach dem Verhältnis von Spiel und Mathematik kann man grob gesprochen zwei einander ausschließende Antworten geben:

1. Die Zusammenstellung von Spiel und Mathematik ist eine Chiffre, eine obenhin gesprochene Metapher für vermeintliche Gemeinsamkeiten, die sich bei näherem Zusehen nicht halten läßt. Spiel und Mathematik haben nichts gemein, sie sind wesensfremd, entspringen wesensfremden Tätigkeiten, schließen einander aus.

2. Die Zusammenstellung von Spiel und Mathematik sagt eine eher positive Beziehung zwischen Spiel und Mathematik aus; beide sind durch eine innere Wesensverwandtschaft miteinander verbunden.

Tragen wir zunächst einige Beobachtungen und Fakten zusammen und beleuchten aus ihrer Sicht die in der ersten Antwort enthaltene These.

3. Spiel und Mathematik: ein antithetisches Begriffspaar

3.1. Versuchen wir uns in einem ersten Schritt an das zu erinnern, was wir von der Wissenschaft der Mathematik und der Tätigkeit des Mathematikers aus irgendwelchen Quellen – z.B. aus unserer Schulzeit – wissen oder zumindest zu wissen glauben, und besinnen wir uns andererseits auf unsere Erlebnisse, Erfahrungen im Umgang mit Spielen und Spielern, so scheint

es fürwahr zwischen dem Tätigkeitsbereich der Mathematiker und dem Geschehensbereich der Spiele zunächst mehr Trennendes als Vereinendes zu geben, scheint die Zusammenstellung von ‚Spiel und Mathematik' ein antithetisches Begriffspaar zu enthalten, das einander ausschließende Absichten, Tätigkeiten und Strukturen zusammenbindet – die tote, abstrakte und statische Theorienbildung der Mathematik mit dem lebendigen, konkreten und dynamischen Handlungsgeschehen des Spiels, die Realisierung der Wahrheit mit der Realisierung des Gewinns.

3.2. Sehen wir nicht den Mathematiker in einsamer Stube sitzen, ein Urbild des Gelehrten im Elfenbeinturm, lebensfern und kalt nach den ehernen Gesetzen eines logischen Systems die Folgerungen reihend?

Da beschäftigt sich *Euklid* um 300 v.Chr. mit den Primzahlen[1]. Er geht die Zahlenreihe durch und wie weit er auch vordringt, immer wieder findet er eine solche Zahl und so vermutet er zunächst, behauptet dann und schließlich gelingt ihm der Beweis: „Es gibt unendlich viele Primzahlen".
Man bedenke: „unendlich viele", mehr als je ein Mensch in seiner Lebenszeit, ja mehr als die Menschheit je wird niederschreiben können.

So also sieht der Laie den Mathematiker: trocken, als kühlen Rechner, überkorrekt, pedantisch bedacht auf logische Strenge, abgeschieden, weltfremd und an seiner Umwelt uninteressiert, in sich zurückgezogen und versponnen.

Auf der anderen Seite sehen wir den Spieler: Emotionen begleiten seine Aktionen, gespannt verfolgt er das Geschehen, Zug und Gegenzug ist er hingespannt auf den möglichen Gewinn. Zuweilen erfreut er sich an seinem Spiel, frohlockt, steigert er sich in Begeisterung, reagiert auch gereizt, wenn die Gegner dem Gewinne näher stehen als er selbst, setzt am Ende der Verzweiflung nahe gar Hab und Gut „aufs Spiel", um sich den Sieg doch noch zu retten.

Der Spieler: wie im prallen Leben sieht er sich immer neuen Situationen gegenüber, überrascht ihn der Gegner mit einer unerwarteten Reaktion, ist er zur raschen Abschätzung der Lage und zu sofortiger Entscheidung gezwungen, bedürfen seine Züge der Intuition, des Einfallsreichtum, muß er flexibel sein, wendig, ja pfiffig, muß er sich der Täuschung und des Bluffs bedienen, der Ablenkung und der Prahlerei, gilt es allerlei Manöver und Strategien ins Werk zu setzen, um den Gewinn zu realisieren oder wenigstens den Verlust möglichst gering zu halten.

Aus solcher Sicht erscheinen Spiel und Mathematik fürwahr wesensfremd, ja unvergleichbar.

3.3. Dennoch, so müssen wir uns fragen, sind die vorgetragenen Beobachtungen und Vorstellungen auch hinreichend abgesichert, sind sie nicht vielleicht in größerem Umfange zu einseitig oder schief oder gar unzutreffend?

Wir werden sehen: die vorgetragenen Meinungen vergröbern zumindest das Bild des Mathematikers und damit auch der Mathematik zu sehr zur Karikatur. Nur bei oberflächlicher Betrachtung schließen Spiel und Mathematik einander gänzlich aus und auch nur bei dem Beobachter, dem die Mathematik und die Tätigkeit des Mathematikers weniger vertraut ist als die Eigenheiten des Spielgeschehens.

3.4. Wir vermeinen, daß die zweite Grundantwort das Verhältnis von Spiel und Mathematik zutreffend beschreibt. Diese Antwort gilt es im folgenden als These zu diskutieren und zu verteidigen, auch dann, wenn wir mit dem Laien darin übereinstimmen, daß die obigen Charakterisierungen von Mathematiker und Spieler trotz ihrer Unzulänglichkeit und ihrer Einseitigkeit das berühmte Quentchen an Wahrheit enthalten.

4. Die Beziehungen zwischen Mathematik und Spiel

Wenden wir uns zunächst dem ersten Teil unserer zweiten Grundantwort zu. In ihr sprechen wir von den Wechselbeziehungen von Mathematik und Spiel. Wie steht es um den Nachweis solcher Beziehungen, gibt es Indizien für sie? – Halten wir uns weiter an die Fakten, tragen wir weitere Beobachtungen zusammen, so werden wir unschwer belegen können, daß Mathematik und Spiel im Verlauf der Geistesgeschichte tatsächlich vielfältige Wechselbeziehungen eingegangen sind.

4.1. Die Beziehungen der Mathematik zum Spiel
(a) Unterhaltungsmathematik: Mathematiker aller Zeiten haben das Element des Spiels, der Scherzaufgabe, der zur Unterhaltung geeigneten Geduld- und Denkspiele gepflegt, haben neue solcher Spiele erfunden, wurden darüber hinaus durch Aufgabenstellungen aus dem Bereich der Unterhaltungs-, Gesellschafts- und Glücksspiele zu mathematischen Untersuchungen, ja zu neuen Theorien angeregt.
So gesehen, wird es den Laien nicht verwundern, zu hören, daß sich im Rahmen der Mathematik eine eigene „Unterhaltungsmathematik“ ent-

wickelt und schließlich, wenn auch nicht als eigene Disziplin, so doch als eigener Zweig etabliert hat. Die diesbezügliche Literatur ist umfangreich. Sie reicht weit zurück in der Geschichte der Mathematik[2]. Wir wissen von berühmten Mathematikern, daß sie sich mit Fragen der Unterhaltungsmathematik eingehend beschäftigt haben. Nennen wir zwei von ihnen stellvertretend für viele andere: *Cardano* hat in seinem Werk ‚De subtilitate libri XXI' Nürnberg 1550, Unterhaltungsaufgaben behandelt und *Tartaglia* in ‚Questi et inventioni diversi' Venedig 1554.

Heute pflegen die verschiedensten Zeitschriften in einer eigenen ‚Ecke' das mathematische Spiel beziehungsweise die spielerische Mathematik in Form von Aufgabenstellungen, in denen Mathematisches und Spielerisches in seltsamer Einheit verschmolzen sind. Als Beispiele nennen wir: „Scientific American" (deutsche Ausgabe: „Spektrum des Geistes"), „Bild der Wissenschaft", „Kosmos", „Die Zeit". Daneben gibt es weit verbreitet „Rätselschriften" voll mathematischer Unterhaltung.

(b) Das spielerische Element in der Mathematik: Der Mathematiker weiß auch um das spielerische Element in mancher seiner Theorienbildungen, in mancher seiner Aktivitäten. Er nennt manche seiner Schlußweisen ‚trickreich', er kennt – wie der Spieler – die Spannung in der Erwartung auf ein noch unbekanntes Ergebnis seiner Bemühungen, im Hinblick auf die Frage, wann oder gar ob er überhaupt die Lösung einer Problemstellung finden wird, empfindet am Ende die Lösung eines Problems als Selbstbestätigung seiner Fähigkeiten, als „Gewinn" im Ein-Personen-Spiel gegen sich.

Und nicht anders erscheint dem Laien die Arbeit des Mathematikers durch die Jahrhunderte und bis heute vielfach als „Gedankenspielerei". *Euklids* Beweis für die Behauptung, daß es unendlich viele Primzahlen gibt, mag ein Beispiel sein, ein anderes die Bemühungen um den seit *Euklid* ausstehenden Beweis, daß es neben 3 und 5, 5 und 7, 11 und 13, 17 und 19, 29 und 31 noch unendlich viele andere „Primzahlzwillinge" gibt, die in der Zahlenreihe nur um eine (gerade) Zahl getrennt erscheinen.

Von „Gedankenspielerei" spricht der Laie und meint damit zugleich: Bloße Geistesakrobatik ohne eigentlichen Nutzen, ohne sichtbaren Verwendungszweck in unserer Alltagswelt, zur Lebensbewältigung, Geistesakrobatik nur zum Zeitvertreib, zur Selbstbefriedigung des Mathematikers und seinesgleichen.
Nun wohl: Immerhin spricht der Laie damit Charakteristika an, die tatsächlich dem Spiele eigen sind. Weil er freilich eine solche Arbeit für

müßig hält, spricht der Laie – ihm wohl selbst nicht ganz bewußt – häufig nicht vom „Gedankenspiel", er spricht abwertend von „Gedankenspielerei".

4.2. Die Beziehungen des Spiels zur Mathematik
(a) Die mathematische Struktur des Spiels: Umgekehrt der Spieler, nicht minder gespannt auf den Ausgang seines Spiels, versucht er bestimmte – natürlich „zulässige" – Züge zu realisieren, um möglichst rasch eine Gewinnstellung zu erzielen. Dabei ist er nicht frei – er ist gebunden an die „Regeln", gebunden auch an das „Spielfeld", die er beide mit dem Spielen des Spiels als Gesetzesmacht anerkannt hat und für die Dauer seines Spiels respektieren muß, will er nicht von den Mitspielern als Spielverderber oder als Falschspieler aus dem Kreis ausgeschlossen werden[3]. Er ist nicht nur fasziniert von der Vielfalt der Alternativen, die wenige „Regeln" und wenige „Spielfiguren" ermöglichen, hat nicht nur den Gegner „gegen sich", sondern auch die Anonymität des Ordnungsgefüges seines Spieles. Darin gleicht der Spieler dem Mathematiker, darin gleicht das Spiel dem mathematischen Gebilde.

Die Beschäftigung mit Spielen und das Bestreben, die jeweiligen Gewinnchancen zu erhöhen, haben immer wieder dazu angeregt, Spielsituationen in ihrer formalen Struktur aufzuklären. Genau diese Absicht war der unmittelbare Anlaß zur Entstehung so bedeutsamer mathematischer Theorien wie der „Kombinatorik", der „Wahrscheinlichkeitstheorie", von Teilen der „kombinatorischen Topologie" und in unserem Jahrhundert der „Theorie der strategischen Spiele" und der „Entscheidungstheorie"[4]. Der Versuch, Programme zu entwerfen, die ein Spiel ‚Mensch gegen Maschine' ermöglichen (z.B. der für Schach programmierte Computer) haben der „Informatik" wichtige Impulse gegeben.

(b) Mathematische Modelle für Spiele: Ein weiteres Faktum für die Wechselbeziehungen zwischen Spiel und Mathematik ist die Tatsache, daß eine ganze Reihe von mathematischen Theorien in ihren Gebilden und Strukturen den mathematischen Hintergrund, mathematische Modelle für Spiele, Spielsituationen, Spielabläufe abgeben. Ohne Vollständigkeit und Differenziertheit anzustreben, können wir u.a. folgende Disziplinen nennen: Mathematische Logik, Mengenlehre, Boolesche Algebra, Zahlentheorie, Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitstheorie, Statistik, Kombinatorische Topologie, Endliche Geometrie, metrische Geometrie, die Theorien verschiedenster algebraischer Verknüpfungsgebilde, die Theorie der strategischen Spiele, Lineares Optimieren ...

Brechen wir hier unsere Sammlung von Indizien für eine Wechselbeziehung zwischen Mathematik und Spiel ab.

5. Wesensverwandtschaft als Strukturverwandtschaft von Formen und Prozessen

5.1. In Abschnitt 4 haben wir andeutend die These, daß ‚Mathematik und Spiel' wesensfremde Tätigkeitsbereiche seien, widerlegt. Im folgenden werden wir versuchen, die weitergehende These einer Wesensverwandtschaft von Mathematik und Spiel eingehender zu begründen. Hierzu reicht freilich eine bloße Aufzählung von Fakten und Beobachtungen nicht aus.

Die Beziehungen von Mathematik und Spiel sind vielfältig. Gewiß – und dennoch: so leicht und einsichtig es ist, geistesgeschichtliche Indizien für solche Beziehungen aufzuspüren, so schwer ist doch bei näherem Zusehen, über bloß metaphorische Redeweisen hinauszukommen und die aufgeführten Beziehungen zu präzisieren und zu charakterisieren.

Wenn wir im folgenden unsere Frage nach dem Verhältnis von Mathematik und Spiel mit der These von der Wesensverwandtschaft der beiden Tätigkeitsbereiche beantworten wollen, so müßte man zu deren Begründung

1. das Wesen des Spiels genauer charakterisiert haben,
2. auch um das Wesen der Mathematik Detaillierteres wissen.

Man müßte weiter

3. einen vermittelnden Standpunkt besitzen, unter dem sowohl über Spiel wie über Mathematik vergleichend gesprochen werden kann,

und man müßte schießlich

4. den Begriff der Wesensverwandtschaft näher umrissen haben.

Der Umfang eines Aufsatzes läßt eine systematische und detaillierte Diskussion dieser Forderungen und Aspekte nicht zu. Sie führte uns in jedem Falle sehr rasch in philosophische Tiefen. Bleiben wir also auch jetzt exemplarisch.

5.2. Reduzieren wir unsere Ansprüche an begriffliche Allgemeinheit und philosophische Tiefe, so werden wir bemerken müssen, daß schon die Wendung „Wesensverwandtschaft von Mathematik und Spiel" zu allgemein gehalten ist.

Als ‚wesensverwandt' lassen sich zunächst nur einzelne, spezielle Vorkommnisse aus der Mathematik und dem Bereich der Spiele erweisen,

i) einzelne Spiele mit einzelnen mathematischen Gebilden – oder/und
ii) gewisse Prozesse, die in Spielen ablaufen und zur Realisierung von Gewinn- (oder Verlust-)Stellungen führen, mit Prozessen, die in mathematischen Theorien den Nachweis der Wahrheit (bzw. Falschheit) von Aussagen (Figurenkonstruktionen) erbringen.

Wir unterscheiden damit zwischen der abstrakten Gestalt eines Spiels bzw. der (mathematischen) Theorie eines mathematischen Gebildes und dem konkreten Vollzug, der konkreten Ereignisfolge, dem Spielen eines Spiels bzw. dem Betreiben von Mathematik; wir unterscheiden also zwischen statischer Form und dynamischem Handlungsgeschehen.
So haben wir etwa auf der einen Seite das Schach-Spiel und ein ihm in dieser oder jener Hinsicht entsprechendes mathematisches Gebilde – und auf der anderen Seite das Handlungsgeschehen beim Spielen einer Partie Schach bzw. die ihm entsprechenden geometrischen Bewegungen von Figuren in einem abgegrenzten Feld der Ebene.

Unsere These von der Wesensverwandtschaft von Spiel und Mathematik kann sich also beziehen
i) auf die Wesensverwandtschaft von (idealen) Formen,
ii) auf die Wesensverwandtschaft von Raum und Zeit sich ereignenden (konkreten) Handlungsketten.
Wir reduzieren damit unsere Frage nach der Wesensverwandtschaft von Spiel und Mathematik zunächst auf die Frage nach der Strukturverwandtschaft von i) Gebilden (Formen) und ii) von Prozessen.

Wenden wir uns zunächst dem Vergleich von abstrakter Spielgestalt und mathematischen Gebilden zu. Fragen wir also zunächst WAS ist ein Spiel? – WAS ist ein mathematisches Gebilde? – Ehe wir später fragen: WIE spielen wir? – WIE betreiben wir Mathematik? – und: WARUM spielen wir? – WARUM betreiben wir Mathematik?

6. Zum Wesen des Spiels

Was also ist ein Spiel? – Was ist unseren Gesellschaftsspielen, was ist Dame, Mühle, Schach und Schafkopf, was Roulette, Fußball und Autorennen, blinde Kuh, Theater und Musik, gemeinsam, daß wir bei ihnen allen

von „Spiel“ sprechen? Und warum nehmen wir das Spiel in gewisser Weise ernst und sprechen häufig verächtlich von der Spielerei?

Gesellschafts-, Glücks- und Geschicklichkeitsspielen ist gemeinsam, daß in ihnen allen kurzzeitig eine kleine künstliche Welt in der Welt aufgerichtet wird – ein künstlicher Ablauf von Geschehnissen, von uns geplant, in Gang gesetzt und von uns in seiner Gesetzmäßigkeit aus freien Stücken anerkannt.

Auch Tiere spielen. Aber sie wissen nicht um die Mannigfaltigkeit und um die Endlichkeit der Anzahl der Kombinationen – sie spielen – ohne Verlangen nach Begrenzung und ohne den Willen zur Konsequenz, d.h. aber: sie bedürfen nicht des Spiel-Feldes und nicht der Spiel-Regel.
Jedes Spiel ist erklärt durch den Inbegriff seiner Regeln[5]. Sie müssen nicht notwendig deterministisch sein!
Das reale Spielen eines Spiels – eine Partie, ein Satz – besteht aus Bewegungen von Figuren in einem Raumgebiet und in der Zeit:

a) von materiellen Realitäten im Realraum (von Menschen, Bällen, Steinen, Holzfiguren, Karten, ... auf Plätzen, in Sälen, auf Tischen, Brettern ...),
b) oder von ideellen Realitäten im Idealraum (bei Spielen, in denen z.B. Worte oder Zahlen zu erraten sind oder für den späteren Verlauf im Gedächtnis behalten werden müssen ...),
c) oder von beiden zugleich (bei Lotto, Toto ...).

Zu Spiel-Feld und Spiel-Regel, zu Spiel-Figur und Figuren-Zug kommt noch ein Fünftes: Der Spiel-Plan, die Strategie. Sie freilich beziehen sich schon auf das Spielen, gehören zum Fragenkreis: WIE spielen wir ein Spiel?

7. Mathematische Gebilde

7.1. Fragen wir uns jetzt: WAS ist eine mathematische Theorie, WAS ein mathematisches Gebilde?
Die Mathematik ist eine Wissenschaft, die in ihrem Wesen, ihren Methoden und Ergebnissen dem Laien besondere Verständnisschwierigkeiten aufgibt und die ihm daher besonders ferne steht. Dementsprechend sind die Vorstellungen des Laien von der Mathematik entsprechend unzulänglich, meist bestimmt von Vorurteilen, die durch die Erlebnisse im Mathematikunterricht geprägt wurden. Wie in der Kürze eines Aufsatzes die vielfältig möglichen Vorurteile zurechtrücken? – Versuchen wir es immerhin, versuchen

wir eine Ahnung von dem, was die Mathematik ist, wie sie sich heute selber sieht, zu induzieren. Wie jede andere Wissenschaft, so haben auch die Disziplinen der Mathematik ihren jeweiligen Gegenstandsbereich, bezüglich dessen sie sich um die Gewinnung wahrer Aussagen mühen.

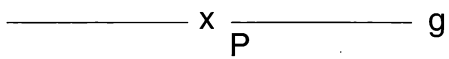
7.2. Was aber sind die Gegenstände der Mathematik? – Nun, z.B. Punkte, Geraden, Kreise, Kurven, Ebenen, Flächen und Raumstücke ..., natürliche Zahlen, ganze Zahlen, rationale und irrationale Zahlen, komplexe Zahlen, und weiter Ordnungsverhältnisse, ... (algebraische) Verknüpfungen, Umgebungsbeziehungen und Funktionen zwischen diesen begrifflichen Gegenständen und vieles andere mehr. Lassen wir die philosophische Frage offen, welche Seinsart den mathematischen Gegenständen zukommt, diesen Gegenständen, die letztlich nicht vorzeigbar, sondern nur denkbar sind: ob sie erst durch menschliches Denken in die Welt kommen, also „erfunden" werden, wie es die Position des „Konstruktivismus" will, oder ob sie unabhängig von denkenden Menschen in der Welt des Geistes anwesend, und daher nur „entdeckt" werden müssen, wie es die „Formalisten" meinen *(Fischer* 1988).
Es mag uns genügen, wenn wir aus der Sicht der heutigen Mathematik erklären: Die eigentlichen Gegenstände der Mathematik sind mathematische Gebilde und Strukturen *(Fischer* 1995). Mathematische Theorien sind dementsprechend durch den Einsatz formallogischer Methoden und durch die Angabe von Grundvoraussetzungen, von Grundbegriffen und Grundsätzen (Axiomen) systematisierte Mengen von Aussagen über mathematische Gebilde und Strukturen.

7.3. Was ist nun ein mathematisches Gebilde, was eine mathematische Struktur?
Ein solches „Gebilde" (auch Relat oder konkrete Struktur genannt) besteht aus einer Menge T von (mathematischen) Gegenständen (Elementen), der sog. „Trägermenge", und aus einer Menge S von Eigenschaften, Beziehungen, Operationen, die man für die Elemente der Trägermenge gerade in Betracht zieht, dem „Strukturdatum". Ein System der Form (T; σ), bestehend aus der Trägermenge T und dem Strukturdatum σ konstituiert also ein Gebilde. Gewisse 2-stellige Relationen zwischen den Elementen der Trägermenge, nennt man „Ordnungsrelationen" (z.B. ‚2 ist kleiner als 3', 'Punkt P liegt auf der Geraden g links von Punkt Q', ‚Hans ist jünger als Karl'). Gewisse 3-stellige Relationen nennen wir „algebraische Operationen" („Verknüpfungen") (z.B. 3 + 4 = 7, 3 x 4 = 12). Gewisse Beziehungen zwischen den Elementen einer Trägermenge und Teilmengen dieser Menge nennen wir „topologisch", nämlich solche, die einem Element die benach-

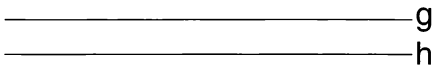
barten Elemente zuordnen, die seine Umgebung betreffen. Je nachdem nun welche Relationen in einer Trägermenge obwalten, sprechen wir von „Ordnungsgebilden", „algebraischen Gebilden", von „topologischen Gebilden" bzw. wenn wir von der speziellen Natur der Elemente absehen, von „Ordnungsstrukturen", „algebraischen" oder „topologischen Strukturen". In den einzelnen mathematischen Disziplinen schließen sich im Strukturdatum i.a. mehrere solcher Relationen zusammen; sie erscheinen damit als Schichtenaufbau aus den verschiedensten Gebilden bzw. Strukturen.

7.4. Beispiele:
7.4.1. Ein Beispiel für ein mathematisches Relat wäre der Bereich der elementaren Arithmetik (N ; < ; + ; x), d.h. die Menge der natürlichen Zahlen N = {1,2,3,4,...}, mit der Relation „ < „ : „kleiner-größer" (3 < 4 : ‚3 ist kleiner als 4') und den Grundrechnungsarten der Addition „+" und der Multiplikation „x".

7.4.2. Ein anderes Relat wäre das einer einfachen Geometrie, nämlich der „affinen Ebene": (P, G; I, ||). Als Träger haben wir jetzt eine Menge P von „Punkten" und eine Menge G von „Geraden". Das Strukturdatum enthält die beiden Relationen I und ||. I bezeichnet die „Inzidenzrelation" zwischen Punkten und Geraden, die Relation der „vereinigten Lage" von Punkt und Gerade: P I g heißt „Punkt P liegt auf der Geraden g", „Die Gerade g geht durch den Punkt P" oder kürzer: „P und g inzidieren".



|| bezeichnet die Relation der „Parallelität" zwischen Geraden: g || h heißt „Gerade g ist parallel zur Geraden h".



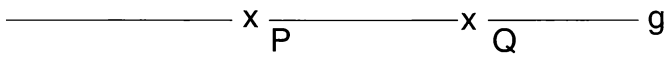
7.4.3. Will man Aussagen über ein solches Gebilde gewinnen, muß man Näheres über die Elemente der Trägermenge und die des Strukturdatums wissen, muß man ihre Bedeutung kennen. Diese Bedeutung legt man nun nicht so fest, daß man – etwa in unserem letzten Beispiel – explizit definiert: „Ein Punkt ist ...", „Eine Gerade ist ..." usw. Man legt den Sinn und die Bedeutung der im Gebilde auftretenden Gegenstände, Eigenschaften

und Relationen vielmehr implizit fest, d.h. dadurch, daß man angibt, WIE die Gegenstände vermittels ihrer Eigenschaften und Relationen im System fungieren. Dazu gibt es im Bereich der Regelspiele eine enge Entsprechung in der Festlegung der Bedeutung der Spielfiguren.

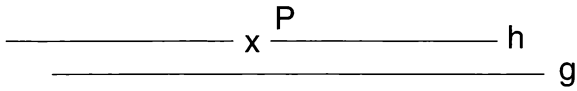
Das Vorgehen des Mathematikers bei der Konstitution eines mathematischen Gebildes oder einer mathematischen Struktur gleicht darin ganz demjenigen, der ein Spiel vorlegt und erläutert. Im Schachspiel ist es im Grunde nicht wesentlich, wie z.B. die Figur eines Turmes „aussieht". Der Turm wird dort nicht definiert dadurch, daß man sagt: „Die Figur des ‚Turms' ist diejenige Spielfigur, die einem Festungsturm ähnelt"; man sagt vielmehr: „Jede Figur, die nur parallel zu den Kanten des Spielbretts ziehen darf, ist ein Turm". Geht uns ein Turm verloren, so können wir ihn durch irgendeinen anderen Gegenstand, z.B. einen Hosenknopf, ersetzen, und dieser Gegenstand „ist" ein Turm im Spiel, wenn und solange er der Regel gehorcht, die für die Bewegung einer Turmfigur im Schachspiel festgesetzt ist. Ganz so verfahren wir ja auch, wenn wir durch Umwandlung eines Bauern eine „zweite Dame" gewinnen. Wir setzen irgendeinen Gegenstand, z.B. einen schon geschlagenen Turm etwa auf dem Kopf stehend, ein und lassen ihn nach den, einer Dame zugestandenen Zugmöglichkeiten fungieren.
Im Spiel wie im mathematischen System werden also die Grundfiguren/ Grundbegriffe implizit definiert durch die Gesamtheit der Regeln/Axiome, die den Umgang mit den Grundelementen festlegen.

7.4.4. Im Falle unserer affinen Geometrie (P, G; I, ||) lauten die Axiome (Spielregeln):

(A1): Zu je zwei verschiedenen Punkten P und Q gibt es genau eine Gerade g, auf der P und Q liegen.
M.a.W.: Zu P und Q gibt es genau eine Gerade g mit P I g und Q I g.



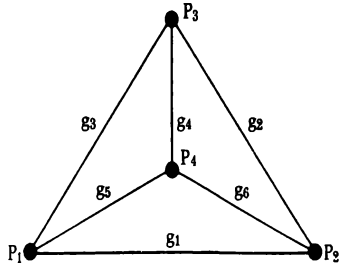
(A2): Parallelenaxiom: Zu jeder Geraden g und jedem Punkt P, der nicht auf g liegt, gibt es genau eine Gerade h, auf der P liegt und die mit g keinen Punkt gemeinsam hat.
M.a.W.: Zu jeder Geraden g und jedem Punkt P für den nicht gilt P I g, gibt es genau eine Gerade h so, daß P I h und es gibt keinen Punkt Q mit Q I g und Q I h.



Jede solche Gerade h heißt „Parallele zu g durch P", in Zeichen: h ∥ g und Q I h.

(A3) : Zu jeder Geraden g gibt es (mindestens) einen Punkt P, der nicht auf g liegt, d.h. für den nicht gilt: P I g .

Jedes System von zwei Sorten von Dingen – genannt „Punkte" und „Geraden" – , das diesen Eigenschaften genügt, nennen wir eine „ebene affine Geometrie" *(Pickert* 1958). Unter diesen Systemen gibt es auch solche, die nicht die nach allen Seiten ausgedehnte Ebene mit ihren unendlich vielen Punkten und Geraden benötigen, die vielmehr nur aus endlich vielen Punkten und endlich vielen Geraden bestehen. Das einfachste solcher Systeme, die einfachste endliche affine ebene Geometrie, die sog. „affine Minimalebene" hat 4 Punkte und 6 Geraden und hat die Form:



Dabei besteht hier – entgegen den üblichen Vorstellungen – eine Gerade nur aus zwei (einander zugeordneten) Punkten und die durch die Punkte C und D bestimmte Gerade h ist eine Parallele zu g, denn g und h haben keinen Punkt gemeinsam. Man prüft leicht nach, daß die oben angegebenen Axiome (A1) – (A3) sämtlich in unserem Minimalmodell erfüllt sind.

Ausgehend von den Grundbegriffen und den Grundaussagen über die Grundbegriffe werden mit Hilfe der 2-wertigen *Aristotelischen* Logik weite-

re Begriffe und Sätze abgeleitet. Die mathematischen Theorien entwickeln sich auf diese Weise von Satz zu Satz deduktiv zum Gerüst der Theoreme. Wir wollen die Situation der affinen Geometrie nicht weiter verfolgen und versagen es uns, die im Anschluß an die Axiome ableitbaren, und das heißt: beweisbaren Lehrsätze vorzuführen. Es genügt uns, angedeutet zu haben, wie schon von der Konstitution her mathematische Gebilde und Spiele in ihrer Form strukturverwandt sind.

Diese Verwandtschaft wird noch deutlicher, wenn wir uns nun der Kalküldarstellung mathematischer Gebilde zuwenden.

8. Mathematische Kalküle und Spiele

8.1. Das Betreiben von Mathematik ist zunächst nicht notwendig an die Verwendung einer bestimmten Sprache gebunden. Mathematisches Denken kann sich auch unter ausschließlicher Verwendung der Umgangssprache verwirklichen – viele Denksportaufgaben und deren Lösung sind dafür ein beredtes Beispiel. Dennoch machen es die Eigenart und Komplexität vieler mathematischer Überlegungen am Ende doch nötig, eine den Begriffen eindeutig zugeordnete und besonders übersichtliche Sprachform zu suchen und zu verwenden, in der zudem die verwendeten logischen Schlußweisen durchsichtig werden. Mathematische Gebilde und Strukturen werden daher sprachlich meist in der Form von Kalkülen dargestellt.

Was sind Kalküle?

8.2. Kalküle sind formalisierte Kunstsprachen, d.h. Sprachen, in denen der Aufbau einer künstlichen Symbolik mit Formalismen zu einem sprachlichen System verbunden sind (*Fischer* 1988, 1995).

Von Kunstsprachen sprechen wir in diesem Zusammenhang deshalb, weil die betreffenden Sprachen von den natürlichen Umgangssprachen in Form und Entwicklung erheblich abweichen. Sie sind ad hoc geschaffene, von Regeln beherrschte Zeichensysteme.

Diese Sprachen sind formalisiert, weil in ihnen bestimmte Schemata den genauen Umgang mit den Zeichen und Zeichenketten regeln. Sie machen z.B. das Rechnen möglich. Formalismen sind genauer gesagt Schemata, d.h. Gesamtheiten von Konventionen (Regeln), die unzweideutig angeben, „Wie man etwas machen muß, wenn ...“, die also nicht festlegen „WAS“ man

machen muß, sondern „WIE". Die besondere Natur der Objekte, auf die ein solches Verfahren angewendet wird, ist bedeutungslos. Jeder Formalismus beruht auf der Abtrennung des Zeichens bzw. seiner graphischen Struktur von seiner Bedeutung – er ist ein Rechenskelett, das durch Anordnungs-, Verknüpfungs- und Umformungsregeln für Zeichen gegeben ist.

Die Anwendung von Formalismen erleichtert das Denken ungemein, ja es macht die meisten Überlegungen erst möglich, die sich unter Bezugnahme auf die Bedeutung der Zeichen unentwirrbar komplizierten. Man denke nur an die Formalismen, die uns in den Regeln zum Multiplizieren und Dividieren zweier Zahlen im Verein mit ihrer Darstellung im dezimalen Stellenwertsystem vorliegen. Wir verwenden sie, ohne über das Wesen der zu verknüpfenden Zahlen nachzudenken, rein mechanisch. Und man denke nochmals an unsere obigen Bemerkungen über das durch Spielregeln kanalisierte Umgehen mit Spielfiguren, etwa im Schachspiel. Auch dort kommt es nicht auf die Bedeutung der Figur des „Turms" an, sondern nur darauf, WIE die Figur im Einklang mit den Regeln ziehen darf (vgl.7.4.3.).

8.3. Die Konstitution eines Kalküls hebt an (I) mit der Angabe einer „Zeichenmenge", eines „Alphabets". Aus den Elementen dieser Menge kann man durch einfaches Aneinanderreihen „Zeichenketten" bilden. Wie in den Umgangssprachen ist nun auch im Kalkül nicht jede solche Zeichenkette sinnvoll, bedeutungsvoll, „zulässig". Mit einer Anzahl von „Term-Regeln" sondern wir daher aus der Menge der Zeichenketten (II) die „Menge der zulässigen Zeichenketten" (Terme) aus. Entsprechend unseren Erfahrungen mit den Umgangssprachen ist auch im Kalkül nicht jede Folge von Termen ein sinnvoller Satz. Eine Anzahl von „Satz-Bestimmungen" legt fest, wann (III) eine Folge von Termen ein „Satz" („Lehrsatz") genannt werden darf. In der heutigen Mathematik sind die Satzbestimmungen meist durch Axiome, d.h. durch als wahr vorausgesetzte Grundsätze, gegeben. Zusätzlich braucht man noch Ableitungs- und Umformungsregeln, um eine Theorie zu erhalten, d.h. um aus den Axiomen die Menge aller (ableitbaren) Sätze gewinnen zu können. Der Nachweis der Gültigkeit einer „Satz" (oder „Lehrsatz") genannten Aussage aus den Grundsätzen mit Hilfe der (logischen) Regeln wird dabei ein „Beweis" (in der Geometrie oft: „Konstruktion") genannt. Er besteht formal letztlich in einer Kette von (Zeichen-)Umformungen, die von einer Ausgangs-Zeichenkette zu einer End-Zeichenkette führen.

8.4. Wir haben die Geduld des Lesers etwas strapazieren müssen. Immerhin können wir jetzt die Strukturverwandtschaft der Formen von mathe-

matischen Systemen und von Spielen auch in den folgenden Gegenüberstellungen der Konstituenten von Kalkülen und Spielen verdeutlichen. Es entsprechen einander im einzelnen:

im Kalkül	*im Spiel*
Grundzeichen	
Grundfiguren Grundbegriffe Trägermenge	Spiel-Figuren Spiel-Feld
logische und sonstige Kalkülregeln	Spielregeln
Axiome (Grundsätze)	Ausgangsstellungen der Figuren
Deduktionsschritte	Züge
Abgeleitete Aussagen	Abgeleitete Figurenkomplexionen (Stellungen)
Ziel:	*Ziel:*
Ausgezeichnete Aussagen: Sätze	Ausgezeichnete Figurenkomplexionen: Endfiguren
Bewertung:	*Bewertung:*
wahr	Gewinn
falsch	Verlust

9. Weitere Beispiele

9.1. Die Strukturverwandtschaft von Mathematik und Spiel, d.h. von mathematischen Gebilden und Spielen, von mathematischen Prozessen und Spielabläufen wird besonders deutlich, wenn wir uns konkreten Einzelfällen von Spielen und mathematischen Gebilden zuwenden. Je nachdem, welchen Aspekt wir dabei besonders favorisieren, je nachdem werden andere Strukturverwandtschaften offenbar werden.

So kann man Schach, Mühle, Dame, Go als geometrische Figurenbewegungen in Koordinatensystemen interpretieren und diskutieren. Man kann aber auch – wie wir das im folgenden andeuten werden – das Mühle-Spiel als strukturverwandt mit einer endlichen Inzidenzgeometrie sehen.

Zahlenrätsel, Mensch-Ärgere-Dich-Nicht, das Pferderennspiel und gewisse Befehlsspiele lassen sich in gewissen ihrer Eigenschaften durch Gesetzmäßigkeiten von algebraischen Systemen erklären.

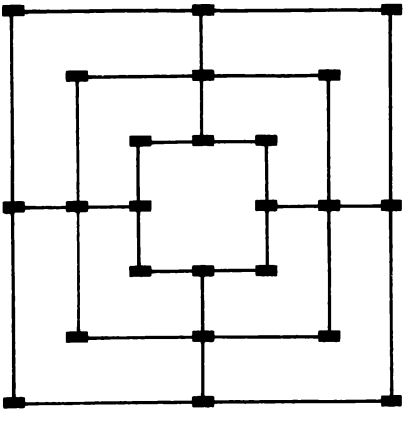
Gesetze der Topologie beherrschen das Knüpfen von Schnüren (wie auch das Stricken und Häkeln) und das Entflechten von Drahtstücken.

Das Superhirn läßt sich aufklären mit den Mitteln der Kombinatorik – und Kombinatorik, Wahrscheinlichkeit und Statistik spielen bei allen Würfelspielen (also auch z.B. beim Mensch-ärgere-dich-nicht und beim Pferderennspiel), bei Kartenspielen, bei Spielautomaten eine zentrale Rolle.

Im folgenden werden wir noch spezieller werden. Wir werden zwei weitere Beispielfälle diskutieren, sie werden von der Mühlegeometrie handeln und von den glücklichen Zahlen. Die Mühlegeometrie liefert ein Beispiel für den mathematischen Hintergrund von Spielen, die Siebmethoden eines für den spielerischen Charakter im Umgang mit mathematischen Fragestellungen.

9.2. Die Geometrie der Mühlefiguren

In unserem ersten Beispiel beschäftigen wir uns mit dem bekannten ‚Mühlespiel' – nicht mit der Abfolge der zulässigen Züge, auch nicht mit der Frage nach den günstigen Spielstrategien, sondern mit der Geometrie, der aus Punkten und Geradenstücken bestehenden Konfiguration seines Spielfeldes, der Mühlefigur.



Die besondere Gestalt der Mühlefigur und die Spielregeln unseres Spiels legen fest, wie die mit Spielsteinen besetzbaren Stellen der Figur untereinander in Beziehung stehen.

Sind 3 durch ein Geradenstück verbundene Stellen der Mühlefigur mit Spielsteinen besetzt, so sprechen wir bekanntlich von einer „Mühle". Diese Spielregel ergibt eine erste Grundtatsache zur Charakterisierung der Mühlefigur:

(M1): Jede Mühle besteht aus der Besetzung von genau 3 Stellen.
Betrachten wir die Mühlefigur weiter, so fällt auf, daß jede Stelle genau zwei Mühlen angehören kann, daß die Besetzung jeder Stelle zu genau 2 Mühlen gehört; also:

(M2): Jede Stelle gehört zu genau zwei Mühlen.
Der Sinn dieser Festsetzung besteht darin, daß sie die prinzipielle Gleichwertigkeit aller Stellen beim Setzen sichert.
Und weiter stellen wir fest: Zwei verschiedene besetzbare Stellen gehören entweder zu genau einer Mühle oder zu verschiedenen Mühlen, d.h.:

(M3): Je 2 verschiedene Stellen gehören höchstens zu einer Mühle.
Diese Festsetzung garantiert, daß das Mühlespiel ein faires Spiel ist, daß auch der zweite Spieler eine echte Gewinnchance hat.

Die genannten drei Grundtatsachen können wir als Grundgesetze der Geometrie der Konfiguration der Mühlefigur ansehen. Nennen wir die mit Spielsteinen besetzbaren Stellen „Punkte", nennen wir die möglichen Mühlen „Gerade", so lauten die obigen Grundsätze:

(M1): Jede Gerade besitzt genau drei Punkte.
(M2): Jeder Punkt liegt auf genau zwei Geraden.
(M3): Zwei verschiedene Punkte gehören höchstens einer (gemeinsamen) Geraden an.

Diese Grundsätze beschreiben (als Axiome betrachtet) eine Geometrie, die von den uns vertrauten Verhältnissen der ebenen Geometrie, wie wir sie auf unserer Zeichenebene realisieren, in mancher Hinsicht abweicht. Sie bestimmen aber nichtsdestoweniger eine Geometrie, d.h. ein System von Aussagen über die Eigenschaften von zusammengehörigen Punkten und Geraden, nämlich die der uns wohl vertrauten Mühlefigur. Wir werden diese Geometrie im folgenden „Mühlegeometrie" nennen, und entsprechend jede Figur, die den Grundsätzen (M1), (M2) und (M3) genügt, eine „Mühlefigur". Die „Mühlegeometrie", so können wir damit auch sagen, untersucht die Eigenschaften der (möglichen) Mühlefiguren.

Der für den Laien vielleicht gravierendste Unterschied der Mühlegeometrie zur üblichen (euklidischen) Geometrie der Zeichenebene ist der, daß unsere Geometrie nur aus endlich vielen Punkten und aus endlich vielen Geraden besteht: sie besitzt nur 24 Punkte und 16 Geraden. Dazu sind die Geraden nicht nach beiden Seiten ins Unendliche ausgedehnt – die Geraden bestehen nach (M1) nur aus je 3 Punkten (– die die Punkte verbindenden „Striche" sollen ja nur andeuten, welche Punkte (Stellen) zu einer Geraden

(einer möglichen Mühle) zusammengeschlossen sind und, was für das Spielen des Spiels bedeutsam ist, wie sich demzufolge die Spielsteine bewegen dürfen). Die Situation der endlichen Geometrie ist uns freilich nicht ganz fremd. Schon in 7.4.4. haben wir ein endliches Modell für die Geometrie der affinen Ebene kennengelernt.

Nun könnten wir schwerlich von (einer) Geometrie sprechen, wenn es mit diesem Versuch einer Kennzeichnung der Mühlefigur sein Bewenden hätte. Von einer „Geometrie" sprechen wir überlicherweise erst dann, wenn aus (als wahr angenommenen) Grundsätzen (Axiomen) Folgerungen („Lehrsätze") gezogen werden, d.h. wenn wir mit Hilfe der Logik aus den Axiomen ein System von Aussagen ableiten können.

H. Schupp hat 1974 in einem ‚Mathematik-Lernprogramm' für Schüler einige einfache Eigenschaften der Mühlefiguren, der Mühlegeometrie, behandelt.

Geben wir einige solcher Eigenschaften an: Zunächst können wir uns fragen: Ist die bekannte Mühlefigur durch die angegebenen Grundsätze (M1), (M2), (M3) eindeutig bestimmt – oder gibt es noch andere Figuren, die gleichfalls den genannten Axiomen genügen? M.a.W. Sind alle geometrischen Diagramme (Modelle) einer Mühlegeometrie im Prinzip vom selben Typ? Oder gibt es verschiedene nicht-isomorphe Modelle für unsere Mühlegeometrie?

Zur Beantwortung dieser Frage gehen wir aus von der Betrachtung der üblichen Mühlefigur. Wir stellen fest: Die Mühlefigur hat 24 = 3.8 Punkte und 16 = 2.8 Geraden – also: Die Anzahl der Punkte ist 1 1/2 mal so groß wie die der Geraden – oder umgekehrt: Die Anzahl der Geraden der Mühlefigur ist gleich 2/3 der Anzahl der Punkte.

Tatsächlich kann man aus den obigen Grundsätzen folgendes beweisen:

SATZ 1: *Bezeichnet p die Anzahl der Punkte und g die Anzahl der Geraden irgendeiner Mühlefigur, so ergibt sich aus den Grundsätzen (M1) – (M3), daß*

$$p = 3/2 \bullet g,$$

d.h. die Anzahl der Punkte ist stets 1 1/2 mal so groß wie die der Geraden.

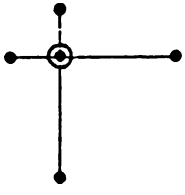
Zahlenpaare p und g, die in dieser Weise aufeinander bezogen sind, gibt es unendlich viele. Stellen wir einige dieser Zahlenpaare (p, g) in einer Tabelle zusammen:

p	0	3	6	9	12	15	18	21	24	30	33 ...
g	0	2	4	6	8	10	12	14	16	20	22 ...

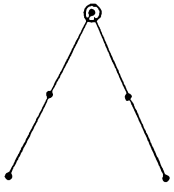
Der Fall p = 0, g = 0 bedeutet die leere Fläche, die Figur ohne Punkt und ohne Gerade. Wir schließen diesen Fall tunlichst aus, indem wir von vorneherein fordern:

(M4): Es gibt mindestens einen Punkt.

Ist uns nun in unserer Mühlegeometrie ein Punkt gegeben, so gehören zu ihm nach dem Grundsatz (M2) auch 2 Geraden und nach Grundsatz (M1) hat jede dieser Geraden 3 Punkte. Aus der Vorgabe eines Punktes folgt also bei Beachtung von (M2) und (M1), daß unsere Figur (Geometrie) mindestens 5 Punkte und 2 Geraden haben muß. Ein entsprechendes geometrisches Diagramm hat dann etwa die Gestalt

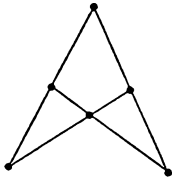


oder



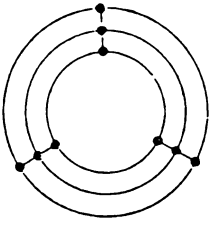
Noch haben wir damit keine Mühlefigur im Sinne der Grundsätze unserer Mühlegeometrie konstruiert. Keiner der beiden Figurentypen erfüllt (M2) für alle Punkte. Nur unser vorgegebener Punkt gehört in ihnen 2 Geraden an. Wir müssen also unsere Figuren unter Beachtung von (M1), (M2) und (M3) so ergänzen, daß jeder Punkt zu genau 2 Geraden gehört. Auf diese Weise erhalten wir aus beiden Figurentypen z.B. die Gestalt

Damit haben wir die einfachste Mühlefigur gewonnen, das Minimalmodell unserer Mühlegeometrie. Die Figur hat p = 6 Punkte und g = 4 Geraden. Aus den Grundsätzen (Axiomen) unserer Mühlegeometrie haben wir also m.a.W. einen weiteren Satz gefolgert, nämlich:

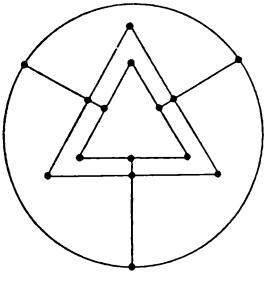


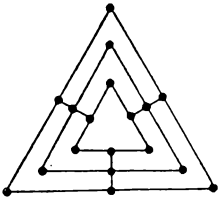
SATZ 2: *Eine Mühlefigur hat mindestens 6 Punkte und 4 Geraden.*

Kehren wir zu unserer Tabelle für die in einer Mühlefigur möglichen Zahlenpaare (p, g) der Anzahl der Punkte und der der Geraden zurück, so stellen wir nunmehr fest: Neben p = 0, g = 0 ist auch das Paar p = 3, g = 2 auszuschließen. Mühlefiguren gibt es erst für p = 6, g = 4. Für alle größeren Werte unserer Tabelle kann man dann aber auch tatsächlich jeweils eine Konfiguration angeben, die eine Mühlefigur ist. Die (9,6)-Mühlefigur hat z.B. die Gestalt:



Die (15,10)-Mühlefigur und die (18,12)-Mühlefigur haben z.B. die Formen:





SATZ 3: *Zu jedem Zahlenpaar (p, g) mit $p \geq 6$ und $p = 3/2 \bullet g$ gibt es eine Mühlefigur.*

Auf allen diesen Figuren und auch auf jenen, die mehr Punkte als die übliche Mühlefigur besitzen, kann man Mühle spielen. Man hat sich nur zu überlegen, wieviele Spielsteine man den Spielern günstigerweise zu Anfang zubilligt. Diese Frage soll uns hier nicht weiter beschäftigen, sie kann dem Leser Anreiz sein, zum Überlegen, zum Gedankenspiel mit der Struktur des Mühlespiels.

Wir wollen vielmehr unsere Betrachtungen zum Thema der Geometrie des Mühlespiels mit zwei Bemerkungen abrunden, die dem Leser einen Ausblick auf größere und weitere Zusammenhänge im Bereich der Geometrie andeuten sollen.

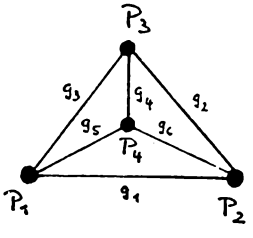
Da beobachten wir zuerst, daß unsere minimale Mühlefigur mit 6 Punkten und 4 Geraden im Minimalmodell der affinen Geometrie ein duales Analogon hat.

Was heißt das? – Aus 7.4.4. wissen wir, daß die einfachste Struktur einer ebenen affinen Geometrie aus 4 Punkten und aus 6 Geraden besteht und wie eine entsprechende Figur gestaltet ist.

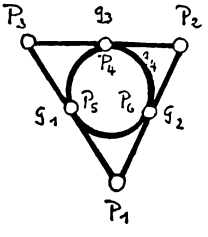
Nun kann man Strukturen in endlichen Geometrien – das gilt für die genannte affine Geometrie ebenso wie für unsere Mühlegeometrie – nicht nur darstellen durch geometrische Diagramme in der Zeichenebene, man kann sie auch beschreiben durch Tabellen (Inzidenzmatrizen), in denen die vereinigte Lage (Inzidenz I) von Punkten und Geraden (etwa durch ein „+") markiert ist. Die eine Figur, „duale Figur", erhalten wir nun dadurch, daß wir im Diagramm bzw. in der Tabelle die Rolle von „Punkt" und „Gerade" vertauschen: den „Punkten" bzw. „Geraden" der einen Geometrie entsprechen „Geraden" bzw. „Punkte" der anderen Geometrie. So entsprechen z.B. in unserem Beispielfall 3 drei Geraden in der affinen Figur, die in einem Punkt zusammenstoßen, in der Mühlefigur 3 Punkte, die auf einer Geraden liegen. Dabei muß man allerdings die dem Punkt P4 der affinen Figur entsprechende Strecke g4 in der Mühlefigur zu einem Kreis krümmen, um sie in der dualen (Mühle-)Figur unterzubringen.

Minimalmodell

Affine Ebene



Mühlegeometrie

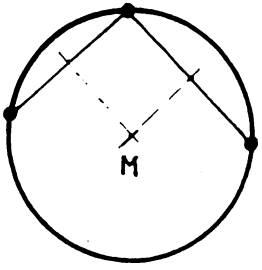


I	g1	g2	g3	g4	g5	g6
p1	+	.	+	.	+	.
p2	+	+	.	.	.	+
p3	.	+	+	+	.	.
p4	.	.	.	+	+	+

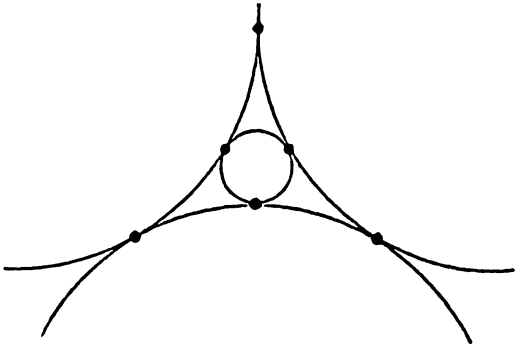
I	p1	p2	p3	p4	p5	p6
g1	+	.	+	.	+	.
g2	+	+	.	.	.	+
g3	.	+	+	+	.	.
g4	.	.	.	+	+	+

Wir haben damit eine weitere Darstellungsform für die minimale Mühlefigur gewonnen. Die Kreislinie stört dabei nur insoferne, als in unseren Grundsätzen der Mühlegeometrie nur von Geraden die Rede war. Eine Besinnung auf den Ablauf des Mühlespiels lehrt freilich unmittelbar, daß die Gestalt der die Punkte (Stellen) verbindenden Linienstücke (Mühlen) für das Spiel selbst ohne Belang ist. Diese Linien können durchaus – wie in unseren Beispielen für die (9,6) – und die (15,10)-Figuren – als krummlinige Verbindungen der je 3 einander zugeordneten Mühlepunkte ausgebildet sein, so daß unsere verschiedenen Formen für die minimale Mühlefigur im wesentlichen nicht unterschieden sind.

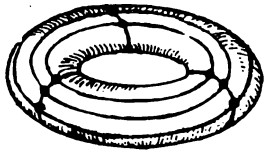
Mit den letzten Beobachtungen kommen wir zu unserer zweiten Bemerkung: in der üblichen (affinen oder euklidischen) Geometrie ist stets durch zwei verschiedene Punkte eindeutig eine Gerade bestimmt. Drei verschiedene Punkte bestimmen dort im allgemeinen nicht eine Gerade, sondern eindeutig einen Kreis.



Eigentlich, so sehen wir jetzt, verweist der Grundsatz (M1) unserer Mühlegeometrie auf eine Art von Kreisgeometrie, d.h. nicht auf eine Geometrie mit „Punkten“ und „Geraden“ als Grundelementen, sondern auf eine Geometrie mit „Punkten“ und „Kreisen“. Der Mühle entspricht also nicht notwendig eine Gerade, sondern allgemeiner ein Kreis und dementsprechend erhielte unsere minimale Mühlefigur jetzt die Gestalt:



Die (9,6)-Mühlefigur ließe sich als Kreisfigur günstig auf der Oberfläche eines Torus (einer Ringfläche) unterbringen:



Mit dieser Interpretation unserer Mühlefiguren sind wir unversehens in einem aktuellen Forschungsbereich der Theorie der endlichen Geometrien gelandet, dem der sog. „taktischen Konfigurationen". Als Grundelemente fungieren in ihnen „Punkte" und „Blöcke". Axiomatisch ist jeder Block durch k Punkte bestimmt und jeder Punkt liegt voraussetzungsgemäß auf r Blöcken. Die Mühlefiguren sind Beispiele für solche taktische Konfigurationen. Auch sie bestehen aus „Punkten" und „Blöcken" („Mühlen"). Jeder Block ist nach (M1) durch k = 3 Punkte bestimmt und jeder Punkt liegt nach (M2) auf r = 2 Blöcken.

9.3. Das „Sieb des *Eratosthenes*" – Primzahlen und glückliche Zahlen

In unserem zweiten Beispiel wollen wir das spielerische Element beim Betreiben von Mathematik verdeutlichen. Unsere Fragestellungen entstammen jetzt dem Bereich der Zahlentheorie.

Die Primzahlen eines fest vorgegebenen Zahlenbereichs – z.B. im Bereich von 1 bis 100 – kann man nach dem folgenden Verfahren bestimmen, das von *Eratosthenes von Kyrene* (276 ? – 194 ? v. Chr.) stammt.

Man beginnt mit der ersten Primzahl: 2, läßt diese stehen und streicht alle ihre Vielfachen. Die (nach 2) nächste nicht gestrichene Zahl ist 3, sie bleibt stehen, sie ist die nächste Primzahl. Nunmehr streicht man im 2. Schritt alle (noch nicht gestrichenen) Vielfachen von 3. Das nächste nicht getilgte Element ist die 5. 5 bleibt stehen. Im 3. Schritt werden alle (noch vorhandenen) Vielfachen von 5 gestrichen – usf. Jeder Primzahl kleiner oder gleich 10 = $\sqrt{100}$ entspricht also ein Streichvorgang. Diese Streichvorgänge reichen aber auch, um alle Primzahlen im genannten Bereich zu erhalten.

Die Primzahlen im Zahlbereich von 1 – 100 sind:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97

Das „Siebverfahren“ läßt sich übersichtlicher darstellen, und zwar in Form eines organisierten Schemas von Vorgaben und Handlungsanweisungen.

Aufgabe: Bestimme die Primzahlen mit dem „Sieb des Eratosthenes“ im folgenden Bereich.

0 Angabe: BEREICH: 1 – 100

1. BEGINN: Beginne das folgende Verfahren mit einem 1. Element

2. Angabe: ERSTES ELEMENT: 2

3. VERFAHREN: Wende das folgende Verfahren an:

   (a) Lasse das ausgewählte Element stehen!
   (b) Streiche alle (noch nicht gestrichenen) Vielfachen des ausgewählten Elements!

4. (a) Wähle zum Fortgang des Verfahrens das nächstgrößere unter den nicht getilgten Elementen!
   (b) Verfahre wie unter Anweisung 3!

Diese Art der Darstellung des Verfahrens von *Eratosthenes* erinnert stark an die Form, in der man das Verfahren als Programm einem Computer vorsetzen könnte.

Bei näherem Zusehen zeigt sich freilich, daß unsere Verfahrensregeln 0 bis 4 (b) weder den Computer, noch den Mathematiker, noch auch den Spieler voll befriedigen werden. Die Sequenz ist noch nicht vollständig: man hat in jedem Falle noch anzugeben, wann das Verfahre „abbrechen“ soll (für den Computer), wann die gestellte Aufgabe als „gelöst“ zu betrachten ist (für den Spieler); es fehlt m.a.W. ein Kriterium für den Abschluß der Handlungsfolge. Man kann das Verfahren z.B. stoppen, wenn man auf ein Element stößt, dessen Vielfache bereits alle getilgt sind. Man überlegt sich nämlich leicht, daß in einem solchen Falle auch für jedes größere Element im angegebenen Bereich alle Vielfache schon gestrichen sind. Man könnte also unser „Programm“ für das „Sieb des Eratosthenes“ so erweitern, daß man unter Programm-Punkt 3 eine „logische Entscheidung“ einführt:

3. (c) Ist in (b) kein Element mehr gestrichen worden, so sind alle Primzahlen des vorgegebenen Bereichs gefunden. Verfahren : STOP !

(d) Ist in (b) mindestens ein Element gestrichen worden, so fahre fort mit Anweisung 4!

Jetzt wird ein Computer mit einem Programm, das im Prinzip nach den genannten Schritten verfährt, die Primzahlen im Bereich von 1 bis 10 000 in Sekundenschnelle bestimmen und ausdrucken.

Typisch für den Arbeitsstil des Mathematikers und die mathematische Denkweise ist es nun, daß mit der Lösung der Aufgabe, die „Sache nicht erledigt ist". Der Mathematiker setzt im Gegensatz zum Computer sein Gedankenspiel fort und fragt etwa weiter: Wie weit muß man in der Zahlenreihe gehen, bis der Fall eintritt, daß bereits alle Vielfache der betreffenden Zahl getilgt sind? – Oder – was in anderen Worten das gleiche ist: Wieviele Tilgungsschritte muß man mindestens ausführen, wieviele Schritte genügen, um im vorgegebenen Bereich alle Primzahlen zu erhalten? – Und er würde die Frage selbstverständlich erweitern zur Frage: Gibt es ein allgemeines Gesetz zur Beantwortung dieser Frage – ein allgemeines Gesetz und d.h. eine Regel, die die Schrittzahl in Abhängigkeit von der größten Zahl des Bereiches liefert ?

Die Antwort lautet in unserem Sonderfall des Zahlenbereichs von 1 bis 100: Es genügt bis zur Zahl 7 voranzuschreiten – oder m.a.W.: Nach 4 Schritten (nach Tilgung der Vielfachen von 2, von 3, von 5 und von 7) kann das Verfahren abgebrochen werden. Beweis: $7 \times 7 = 49$, also kleiner als 100, aber für die nächste Primzahl 11 haben wir bereits: $11 \times 11 = 121$, also größer als 100. M.a.W. genügt es, die Vielfachen der größten in $10 = \sqrt{100}$ enthaltenen Primzahl, nämlich die Vielfachen von 7, auszusieben.

Typisch auch für die Mathematik und die Mathematiker ist, daß das Verfahren (in der sog. „Zahlentheorie") nicht nur über die Jahrtausende hinweg seine Gültigkeit behält, sondern mit einem Male wieder aufgegriffen, verallgemeinert bzw. in Abänderung angewendet wird. So hat in unseren Tagen (1960) eine Gruppe amerikanischer Wissenschaftler unter Leitung des bekannten Mathematikers *S. Ulam* mit einer Variante der Siebmethode eine neue Art von Zahlen gefunden, denen man den Namen „glückliche Zahlen" gab. Die amerikanischen Mathematiker beginnen mit der Zahl 1, lassen diese stehen und streichen dann alle geraden Zahlen, d.h. mit der 1 beginnend jede 2. Zahl; 3 bleibt stehen. Nunmehr streichen sie jede 3. Zahl unter den verbliebenen Zahlen. Die nächste nicht getilgte Zahl ist 7; diese bleibt im nächsten Schritt stehen und wiederum mit 1 beginnend wird jede 7. Zahl gestrichen usw.

Im Zahlenbereich von 1 bis 100 erhalten wir schließlich nach 7 Schritten:

1	3	7	9	13	15	21	25	31	33	37	43
49	51	63	67	69	73	75	79	87	93	99	

Es ist bemerkenswert, daß sich viele Eigenschaften der Primzahlen bei den glücklichen Zahlen wieder finden. So gibt es ein Analogon zu der bis heute unbewiesenen Vermutung von *Goldbach:* „Jede gerade Zahl n, die größer als 4 ist, läßt sich als Summe zweier ungerader Primzahlen darstellen", nämlich: „Jede gerade Zahl läßt sich als Summe zweier glücklicher Zahlen darstellen".

73.	74	75.	76	77	78	79.	80	81	82
72	43.	44	45	46	47	48	49.	50	83
71	42	21.	22	23	24	25.	26	51.	84
70	41	20	7.	8	9.	10	27	52	85
69.	40	19	6	1.	2	11	28	53	86
68	39	18	5	4	3.	12	29	54	87.
67.	38	17	16	15.	14	13.	30	55	88
66	37.	36	35	34	33.	32	31.	56	89
65	64	63.	62	61	60	59	58	57	90
100	99.	98	97	96	95	94	93.	92	91

Andere Analogien zu den Primzahlen ergeben sich, wenn man, was *S. Ulam* 1963 im spielerischen Umgang mit den glücklichen Zahlen „zufällig" entdeckte, die natürlichen Zahlen 1,2,3,4,5... ausgehend von der 1 spiralig notiert.

Auf der einen Diagonalen des Zahlenquadrates finden wir dann eine Folge von glücklichen Zahlen, die sich als Werte des Ausdrucks $x^2 + x + 1$ bei Einsetzung von $x = 0,1,2,3,4,5,6,8$ ergeben. Auf der anderen Diagonalen liegen Quadratzahlen; von ihnen sind $1^2 = 1$, $3^2 = 9$, $5^2 = 25$ und $7^2 = 49$ glückliche Zahlen.

Brechen wir hier ab – wir haben versucht, an einem weiteren Beispiel einen Einblick in die Arbeits- und Denkweise des Mathematikers zu geben und haben dabei zugleich den spielerischen Umgang mit den mathematischen Gegenständen zeigen wollen. Dabei fiel es dem Autor an eben dieser Stelle des Manuskripts auf, daß mit den letztgenannten Einsichten von *Ulam* mathematische Beziehungen aufgedeckt sind, die bei der spiraligen Anordnung der Zahlen im „Fünfzehner-Spiel" auftreten. Von der Frage nach den Beziehungen der Zahlen in anderen Anordnungen im „Fünfzehner-Spiel" ist es nur ein kleiner Schritt zu den mathematischen und spielerischen Möglichkeiten z.B. der „magischen Zahlenquadrate", in denen alle Zeilen, alle Spalten, alle Diagonalen jeweils den gleichen Summenwert ihrer Glieder haben.

10. Wesensverwandtschaft als Strukturverwandtschaft, als Verwandtschaft auch der Handlungsfelder

10.1. Ausgehend von den Fragen: WAS ist ein Spiel ? – WAS ist ein mathematisches Gebilde? – haben wir bislang die Wesensverwandtschaft von Spiel und Mathematik reduziert auf die Strukturverwandtschaft von Formen und Prozessen in Spielen und in mathematischen Systemen.

Diese Strukturverwandtschaft läßt sich in der Sprache der Methodologie der heutigen Mathematik beschreiben als Homomorphie bzw. Isomorphie der betreffenden Relate, d.h. als die Möglichkeit einer relationentreuen Zuordnung der Gebilde. Den Elementen, ihren Eigenschaften und Beziehungen auf der einen Seite sind Elemente, ihre Eigenschaften und Beziehungen auf der anderen Seite so zuordenbar, daß entsprechende Elemente auch entsprechende Eigenschaften besitzen, daß zwischen entsprechenden Elementen entsprechende Beziehungen obwalten[6].

10.2. Mit dem Nachweis einer Strukturverwandtschaft ist die Wesensverwandtschaft zweier Gebilde oder Geschehensbereiche freilich nur zu einem Teil erfaßt. Wesensverwandtschaft betrifft Ähnlichkeiten bzw. Entsprechungen in mehr als nur der formalen Seite des Aufbaus und in den Wechselbeziehungen der Aufbauteile. Wesensverwandtschaft betrifft Entsprechungen in nicht nur aufzeigbaren, sondern auch in erlebbaren sinn- und wertbezogenen Gestaltqualitäten, nicht nur in immanenter syntaktischer Strukturiertheit, sondern auch in der Ladung mit Bedeutungen, im Bezug der Gebilde auf das Leben derer, die sie „erfinden“ und mit ihrem Handeln „ins Werk setzen“ und „ins Leben rufen“.

So gibt es zwischen Spiel und Mathematik, zwischen konkreten Spielen und mathematischen Gebilden neben Entsprechungen in der Form und in den immanenten Prozessen Entsprechungen auch in den Handlungsfeldern und ihrem menschlichen Kontext, im Gesamt des Handlungsgeschehens, in den Tätigkeitsbereichen, in denen Mathematik bzw. Spiele verwirklicht werden: in der Realisierungsart von Spielen und mathematischen Systemen, im menschlichen Verhalten beim Umgang mit Spielfiguren und mathematischen Gegenständen, in der menschlichen Haltung zu und bei Spiel und Mathematik, den Gestimmtheiten, in den Hintergründen und Anlässen, in den Zwecken und Zielen der betreffenden Aktivitäten. Manches ist von dem in unseren bisherigen Betrachtungen schon angeklungen. Suchen wir also – ohne Vollständigkeit in der Aufzählung und ohne den Versuch erschöpfender Erörterung anzustreben – nach weiteren Entspre-

chungen zwischen Spiel und Mathematik, wobei wir den Fragenkreis: WAS ist Spiel bzw. Mathematik? – verschränken mit den Fragen „WIE spielen wir? – WIE verwirklichen wir die mathematischen Gehalte?“

11. Spiel und Mathematik eine künstliche Welt

11.1. Das Spiel ist häufig ein verkleinertes Abbild einer Lebenssituation, ein Modell für Umweltsituationen – in jedem Falle eine kleine künstliche Welt in der Welt, ein künstlicher Ablauf von Geschehnissen, von uns aus freien Stücken geplant, in Gang gesetzt und in seiner von uns eingesetzten Gesetzmäßigkeit anerkannt.

Damit ist das Spiel überschaubarer als das Leben: überschaubar durch die Beschränkung der Spielwelt und ihrer Abläufe auf den Rahmen eines Spielfeldes – eines Feldes von der Größe eines Tisches, eines Fußballplatzes, auf den Rundkurs eines Motocrosses – überschaubar auch durch die Beschränkung auf wenige Regeln oder Schemata, die die künstliche Welt als Metagesetze neben den Naturgesetzen beherrschen, überschaubar durch Anfangsstellung und Endstellung, durch die Freiheit in der Wahl von Anfang und Ende.

Und dennoch und andererseits sind Spiele ebenso unüberschaubar wie das Leben: unüberschaubar durch die kombinatorische Vielfalt der Komplexionen, die Vielzahl der möglichen Figurenstellungen, die Vielzahl der möglichen Verhaltensalternativen, unüberschaubar in vielen Spielen durch das zulässige Dazwischentreten des Zufalls – in der anfänglichen Verteilung des Blattes, die möglichen Ausgänge von Würfelwürfen – unüberschaubar auch dadurch, daß uns häufig die vollkommene Information über die Spielsituation versagt ist, weil verdeckte Züge uns den Einblick wehren, weil uns – wie beim Kartenspiel und beim Flottenmanöver des „Schiffversenkens“ – schon die Anfangsstellung nicht bekannt ist, unüberschaubar auch, weil wir allzu oft die Gedanken, und d.h. die Absichten des Gegenspielers nicht erschließen noch erraten können, weil er uns bluffen, bewußt in die Irre führen kann (*Fischer* 1992).

11.2. In alledem sind mathematische Systeme den Spielen sehr verwandt. Die Geistesgeschichte der Mathematik kennt viele Beispiele, die zeigen, daß und wie mathematische Begriffs- und Theorienbildungen häufig durch die Mathematisierung und d.h. durch die mathematische Modellierung von außermathematischen Situationen angeregt wurden, angeregt durch Pro-

blemstellungen, die dem Menschen im Gegenüber mit der Naturwirklichkeit, der Welt der menschlichen Gesellschaft, der Wirtschaft, der Technik... erwuchsen. In jedem Falle aber sind auch mathematische Systeme künstliche Gebilde, dargestellt in „künstlichen Präzisionssprachen" (Kalkülen – vgl. 8.2. und 8.3.), von uns aus freien Stücken als Systeme konzipiert, auf die Lösung von Problemen angesetzt und in ihrer von uns eingesetzten Gesetzmäßigkeit anerkannt.

Auch mathematische Systeme sind überschaubarer als das Leben: überschaubar durch die Festlegung eines Grundbereichs (Trägermenge), durch die Beschränkung der möglichen Bewertungen der Variablen auf die Elemente dieses Grundbereichs, durch die Festlegung der Prädikate ihres Strukturdatums, die Festlegung der Grundbegriffe und die Beschränkung auf eine bestimmte Anzahl von Grundaussagen (Axiomen), von Grundregeln, durch die Auszeichnung von Anfangs- und Randbedingungen.

Andererseits ist auch das mathematische System ebenso unüberschaubar wie das Leben: unüberschaubar in der sukzessiven Entfaltung des Gebäudes der Theorie, in den Inhalten und in der Abfolge der Aussagen, unüberschaubar im vorhinein und überraschend für den Forscher häufig die Ergebnisse, die Hindernisse auch, die sich der Lösung einer Frage entgegenstellen, unüberschaubar die sich anbahnenden Vermutungen, die Querverbindungen zu anderen mathematischen Theorienbildungen oder zu außermathematischen Anwendungsbereichen. Unüberschaubar ist also häufig die Vielfalt der möglichen Ergebnisse, die Komplexität der mathematischen Situationen.

12. Spiel und Mathematik reduzierbar auf die Manipulation von Zeichen

12.1. Im Spiel wie im mathematischen System wird nach dem Selbstverständnis vieler Spieler und vieler Mathematiker der Naturwirklichkeit eine ideale Welt entgegengestellt bzw. eine ideale Welt über die materiale Naturwirklichkeit gesetzt. Es ist hier nicht unsere Aufgabe, diese Meinung eingehend zu erörtern. Ohne philosophischen Tiefgang ist die Frage nach der besonderen Seinsweise von Spielen und mathematischen Systemen ohnehin nicht faßbar, lassen sich auch die menschlichen Haltungen und weltanschaulichen Vor-Urteile, die der genannten Meinung zugrundeliegen, nicht herauskristallisieren. Die Ansicht von der Idealität von Spiel und Mathematik wird schon nahegelegt durch Erfahrungen, wie z.B. der, daß man in vie-

len Fällen zum Spielen eines Spieles des konkreten Spielbretts und der konkreten Figuren entraten kann; man benützt sie vornehmlich als Gedächtnisstütze, bedarf ihrer nur zur bequemeren Übersicht über die Situation. Schach kann man auch „im Kopf spielen", „blind", gleichzeitig auf mehreren Brettern gegen verschiedene Partner, ohne vom Wesen des Spieles irgendetwas einzubüßen. – Und man betreibt Mathematik sehr häufig ohne Bezug zu konkreten Situationen unserer Außenwelt, kann man z.B. geometrische Konstruktionen ohne Verwendung von Zirkel und Lineal, von Bleistift und Papier bloß im Innenraum unseres Kopfes, auf dem Bildschirm unserer Vorstellungswelt vollführen[7]. Mehr noch: Die Gegenstandswelt der Mathematik sind bestimmte Formen (abstrakter) Begriffe. Sie lassen sich letztlich nur denken[8].

12.2. Das Spielen von Spielen wie das Betreiben von Mathematik läßt sich damit letztlich reduzieren auf die Manipulation von Formen, von bedeutungsgeladenen Formen, läßt sich reduzieren auf die Manipulation von Zeichen – am Ende von Denkzeichen in unserem Kopf. Mit dieser Bemerkung tangieren wir zugleich die Frage nach einem vermittelnden semiotischen Standpunkt, von dem aus Spiel und Mathematik vergleichbar sind. Auch seine Diskussion ist freilich nur philosophisch auszuloten.

13. Weitere Übereinstimmungen

13.1. Manche Übereinstimmung, manch verwandten Zug zwischen Spiel und Mathematik gälte es noch aufzuzeigen.

Fragen wir danach, WIE wir Spiele, WIE wir Mathematik verwirklichen, WIE wir spielen, WIE wir Mathematik betreiben, so fällt auf, daß uns in beiden Fällen „Aufgaben gestellt" sind, die es „zu lösen" gilt. Im Spiel wie in der Mathematik kommt damit zu Spielfeld bzw. Trägermenge, zu den Grundfiguren bzw. Grundbegriffen, den Regeln und den Axiomen noch ein weiteres Element hinzu: Das Lösen einer Aufgabe bedeutet im Spiel wie in der Mathematik das Entdecken und Durchlaufen von bestimmten Handlungsketten von einem Anfang bis zu einem ganz bestimmten Ende: bis zur Sicherung des Gewinns oder der Versicherungen einer Wahrheit in der „Probe". In beiden Fällen sind wir zugleich getrieben, einen Zustand seelischer Unrast, der Ungeduld, der Spannung in uns abzubauen und in Befriedigung und Freude aufzulösen[9].
Die Absicht, unsere (eine) Aufgabe „zu lösen", zwingt uns in jedem Falle zu Konsequenzen, in unserer Vorgehensweise dazu, konsequent zu handeln,

stellt uns vor Entscheidungen, zwingt uns, bei jedem Zuge eine bestimmte Figurenbewegung (einen bestimmten Deduktionsschritt) unter einer Vielzahl möglicher Alternativen auszuwählen, zwingt uns dazu, nicht willkürlich vorzugehen, sondern uns einen „Lösungs-Plan" zurechtzulegen. Das Problem, den besten Spiel-Plan, die beste Strategie zu finden, ist das Problem des Spiels schlechthin – und es ist letzten Endes auch das Problem des schöpferischen Mathematikers im Ringen um neue Erkenntnis, wie des Schülers im Bemühen um das Ergebnis einer Übungs- und Prüfungsaufgabe. Rationales Verhalten ist uns im Spiel und bei der Gewinnung eines mathematischen Satzes aufgegeben, Spielwitz und begriffliche Phantasie werden uns hilfreich sein.

13.2. Verwandt sind die Kriterien zur Auswahl der Regeln bei der Konstitution eines Spiels, zur Auswahl der Axiome bei der Konstitution einer mathematischen Theorie. Frei sind wir auch hier nur in gewissen Grenzen. Eingeschränkt wird unsere Wahl durch die Forderungen, daß die Spiel-Regeln wie die Axiome einander in ihren Folgen nicht widersprechen dürfen (Widerspruchsfreiheit). Die Wahl soll überdies so getroffen werden, daß wir nicht mehr als nötig fordern, daß Regeln und Axiome zu streichen sind, deren Forderungen und deren Folgen sich aus anderen Regeln und Axiomen schon ergeben (Unabhängigkeit). Und am Ende legen wir noch Wert darauf, daß sich alle Züge bzw. Folgerungen gewinnen lassen, die wir gerne verwirklicht sähen (Vollständigkeit).

14. Grenzen und Unterschiede der Vergleichbarkeit

14.1. Halten wir inne – zu sehr droht sich unser Thema auszuweiten, forderte jeder der angeführten Aspekte eingehende Dissoziation und Diskussion.

Immerhin scheint es angezeigt, ein weiteres Mal hervorzuheben, daß wir bei alledem nicht von Übereinstimmungen im Wesen, von Wesensidentität gesprochen haben, daß wir immer nur die Verwandtschaft im Wesen von Spiel und Mathematik zu belegen suchten. Das bedeutet aber, daß wir uns der Grenzen der möglichen Vereinbarkeit und auch der Unterschiede von Spiel und Mathematik durchaus und im vollen Umfang bewußt sind.

14.2. Nicht jedes mathematische Problem läßt sich algorithmisch, durch bloße Anwendungen von (Rechen-)Regeln lösen[10]. Die Verwandtschaft von Spiel und Mathematik im Hinblick auf die Bestimmtheit durch ein System von Regeln hat also ihre Grenzen. Die Unterscheidung von syntaktischen

und semantischen Kalkülen, von Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit in mathematischen Systemen (*Fischer* 1988) ließe diese Grenzen der Vergleichbarkeit und der Verwandtschaft von Spiel und mathematischen Theorien präzisieren.

14.3. Unterschiede lassen sich auch finden, ausgehend von den Fragen: WARUM spielen wir? – WARUM betreiben wir denn Mathematik? – Verwandt und doch verschieden sind Spieltrieb und Erkenntnistrieb. Nicht immer ist zudem die Arbeit des professionellen Mathematikers losgelöst von äußeren Zwecken denkbar, so wie die des Spielers. Genau besehen müssen wir an dieser Stelle der Erwägungen den Glücksspieler aus der Schar der Spieler lösen, müssen wir den Hobby-Mathematiker in seiner Eigenart vom professionellen Mathematiker unterscheiden. Die Mathematik ist letztlich nicht nur Spiel mit den sprachlichen Repräsentanten mathematischer Gegenstände, wie es der vermeinen könnte, dem Sie Hobby ist und Zeitvertreib. Die Mathematik ist auch Wissenschaft, getragen von Streben nach Erkenntnis, am Ende eingebunden in einen sozialen Kontext, steht in der Verantwortung auch vor der Mitwelt, bezieht einen Teil ihrer Rechtfertigung auch im Blick auf sie.

14.4. Unterschiedlich ist auch die Rolle der Zeit im Spielen eines Spiels und in der Verwirklichung einer mathematischen Theorie. Zu gewinnen heißt häufig nicht nur an ein bestimmtes Ziel zu kommen, es heißt „vor" dem Partner die Ziellinie zu passieren. „Vor den anderen anzukommen" ist in der Mathematik eigentlich nicht von Belang. Das Bestreben, als Erster die Wahrheit eines Satzes zu beweisen, eine mathematische Entdeckung gemacht zu haben, dient nicht der Wahrheit, sondern nur der Eitelkeit des Mathematikers als Einzelwesen. Und doch: auch Mathematiker sind Menschen!
Spiele verlaufen, werden sie wiederholt, in der Zeit „immer anders", mathematische Wahrheiten sind dagegen zeitunabhängig gültig[11]. Es gibt zuweilen mehrere Beweise für einen Lehrsatz, aber auch sie sind, einmal gefunden, feste Wegkomplexe (Zugfolgen) die Voraussetzung und Behauptung miteinander verbinden.

14.5. Unterschiedlich sind Mathematik und Spiel auch in den Graden und der Höhe ihres Abstraktions- bzw. Konkretionsniveaus. Spiele als konkrete Relate werden in ihrer Struktur beschrieben durch abstraktere Gebilde, z.B. durch mathematische Systeme – mathematische Systeme als abstrakte Relate werden in ihrer Struktur exemplifiziert durch konkretere Gebilde, z.B. durch die Spiele.

15. Ausblick

15.1. Am Ende kommen uns Weiterungen unseres Themas in den Sinn: Zum Beispiel die Frage nach der Urlogik von Mathematik und Spiel, wie sie sich in allgemeinen Schematismen menschlichen und rationalen Verhaltens manifestieren, im zielgerichteten Handeln äußern mögen, wie wir sie auch in der Geschichte der Mathematik und des Spiels erfahren.

15.2. Viel zu wenig ist bislang die Frage nach den Funktionen und nach den Möglichkeiten einer Hilfestellung des Spiels im Unterricht, speziell im Unterricht in Mathematik, bedacht und untersucht.(*Fischer* 1982, 1987b)

15.3. Auch die Beziehungen von Mathematik und Spiel zur Kunst gälte es in den Kreis der Betrachtungen einzubeziehen.(*Fischer* 1987a)

In Mathematik, Spiel und Kunst manifestiert sich die Seinsweise des Menschen im Spannungsfeld der koexistentiellen Pole Freiheit und Bindung in besonderer Weise. Frei sind wir in den Betätigungsformen unserer Phantasie, im Aufspüren von Ideen, in unseren Konzeptionen, frei sind wir in der Wahl der Regeln und Gesetze, der Konventionen, frei häufig in der Wahl zwischen verschiedenen Alternativen, frei in der Setzung von Anfang und Ende. Haben wir freilich die Wahl getroffen und die Übereinkünfte gegenseitig angenommen, sind wir in unserem Handeln, in unseren Zügen gebunden an die Regeln und Gesetze, an die Folgerungen und ihre Wertungen.

In der Zusammenstellung „Mathematik und Spiel" thematisiert die Mathematik am Spiel die Bindung an die Gesetze, thematisiert die Mathematik am Spiel den durch die Regeln bestimmten Ordnungscharakter von Form und von Geschehen – das Spiel thematisiert am mathematischen Geschehen die Freizügigkeit und die Rolle unserer Phantasie, die Freizügigkeit in der Wahl der Voraussetzungen. Beide, Mathematik und Spiel, thematisieren zusammen ein Chrakteristikum des Menschen, das nur aus der Tatsache der Koexistenz von Freiheit und Bindung verstanden werden kann: „die grenzüberschreitende Tendenz des Menschen" (*Berggrav* 1929), sein Verlangen und sein Bestreben, sich selbst zu steigern, sein Gefangensein in der Endlichkeit der Zeit und im Umkreis seines Lebensraums in der Idealität geistiger Konstruktionen zu übersteigen. Spiel und Mathematik thematisieren den Versuch des Menschen, sich gegen die Anonymität der kombinatorischen Vielfalt der Komplexionen im 2-Personenspiel des Ich gegen das Nicht-Ich, ja auch im 1-Personenspiel des Ich gegen das Ich selbst zu bewähren, sie thematisieren letzten Endes die Nöte und Hoffnungen, die ihm aus seiner rationalen Existenz erwachsen.

Anmerkungen

1. Unter einer „Primzahl" versteht man eine ganze positive Zahl verschieden von 1, die nur durch sich selbst und durch 1 teilbar ist. Die Reihe beginnt mit: 2,3,5,7,11, 13,17,19,23 ...
2. Literaturauswahl: AHRENS (1901), ROUSE BALL (1892,1931), SCHUBERT/FITTING (1853), SMITH (1925, 532–599) und zahlreiche Bücher von Martin GARDNER. – Themen der Unterhaltungsmathematik finden sich schon in den ältesten Zeugnissen der Mathematik in Babylon, in Ägypten, in China und Indien.
3. Der Begriff des ‚Spiels' ist komplex. (vgl. EINSIEDLER 1991 und den Aufsatz von EINSIEDLER in diesem Band). – In der Vielfalt der Typen von Spielen denken wir im Rahmen dieser Arbeit vornehmlich an den Typ des „strategischen Regelspiels" (vgl. FISCHER 1992).
4. Die (mathematische) Theorie der strategischen Spiele hat in den Wirtschaftswissenschaften große Bedeutung gewonnen (FISCHER 1992).
5. Die genannte Bestimmung gilt zunächst für „Regelspiele". In einem gewissen Sinne bestimmt sie aber auch das Wesen vieler anderer Spielarten.
6. Dabei ist die Zuordnung der Trägermengen der beiden Relate im Falle der Homomorphie eindeutig, im Falle der Isomorphie umkehrbar eindeutig ...
7. Jakob STEINER (1796–1863) sagte, man könne geometrische Konstruktonen „bloß mittels der Zunge ausführen".
8. Viele mathematische Gebilde lassen sich als Ganzes „anschaulich" nicht vorstellen, nicht durch Modelle, die Elemente unserer mesokosmischen Welt enthalten, vollständig repräsentieren. Sie lassen sich aber denken. – Beispiel: Der unendlich-dimensionale Hilbert-Raum.
9. Das Wort „Lösung" im Zusammenhang mit Aufgabenstellungen wird erst verständlich, wenn wir es psychologisch verstehen.
10. Nicht jede mathematische Theorie ist axiomatisch-deduktiv durchstrukturiert bzw. konstituiert, nicht jedes Spiel ist ein Regel-Spiel, sollten wir ergänzen. Es gäbe Parallelen zwischen naiv-mathematischen Überlegungen und Verhaltensweisen in anderen Spielformen, z.B. in Phantasiespielen.
11. Mathematik ist die einzige Wissenschaft deren Wahrheiten nicht „veralten" (vgl. FISCHER 1990a).

Literatur

AHRENS, W. (1901): Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Leipzig.

BERGGRAV, E. (1929): Der Durchbruch der Religion im menschlichen Seelenleben. Göttingen.

EINSIEDLER, W. (1991): Das Spiel der Kinder. Bad Heilbrunn

FISCHER, W.L. (1982): Educational Mathematics on the Road to Mathematics: The Role of Paradigmatic and of Expansive Examples and Problems in School-Mathematics. Bulletin for Mathematics Education Study, Mathematic Education Society of Japan, Vol.23 (1982), Nr.3/4; 56–81, 82–84 (japanisch) – In: FISCHER (1996).

FISCHER, W.L. (1987a): Koinzidenzen in Kunst- und Mathematikgeschichte. In: HOHENZOLLERN, J.G.Prinz von/LIEDTKE, M. (Hrsg.): Vom Kritzeln zur Kunst. (Schriftenreihe zum Bayerischen Schulmuseum Ichenhausen, Bd.6). Bad Heilbrunn; S. 101–133.

FISCHER, W.L. (1987b): Concept and Role of Games in Mathematical Instruction. In: „Mathematical Education in the 1990's" – Proceedings of 4.Southeast Asian Conference on Mathematical Education – ICMI-SEAMS 4. Institute of Education, Singapore 1987; 35–41. – In: FISCHER (1996).

FISCHER, W.L. (1988): Zur Entwicklung der Sprache in der Mathematik. In: HOHENZOLLERN, J.G. Prinz v./LIEDTKE, M. (Hrsg.): Naturwissenschaftlicher Unterricht und Wissenskumulation. (Schriftenreihe z. Bayer. Schulmuseum Ichenhausen, Bd. 7). Bad Heilbrunn; S. 142–170. - In:FISCHER (1996).

FISCHER, W.L. (1990a): Sind klassische Inhalte im modernen Mathematikunterricht überholt. In: BECKMANN, H.K./FISCHER, W.L (Hrsg.): Herausforderung der Didaktik. (Beiträge zur Fachdidaktik und Schulpädagogik, Bd.1.). Bad Heilbrunn; S. 163–182. – In: FISCHER (1996).

FISCHER, W.L. (1990b): Some Fundamentals in Mathematical Education. In: Proceedings: 5. Southeast Asian Conference on Mathematical Education /ICMI-SEAMS 5. University Brunei Darussalam, Bandar Seri Begawan/Brunei; S. 133–137.

FISCHER, W.L. (1992): Zur Mathematisierung des Verhaltens in Konfliktsituationen – Die mathematische Theorie der Spiele. In: KOENIG, O. (Hrsg.): Krieg – Friede – Konflikt. Matreier Gespräche/Kulturwissenschaftliche Beiträge zur Verhaltensforschung. Wien; S. 27–68.

FISCHER, W.L. (1995): Der Einsatz mathematischer Methoden bei der Beschreibung, Formalisierung und Modellierung von anthropologischen Datenstrukturen. In: UHER, J. (Hrsg.) Pädagogische Anthropologie und Evolution. Beiträge der Humanwissenschaften zur Analyse pädagogischer Probleme. Erlanger Forschungen: Reihe A, Bd.73. Erlangen; S. 33–71.

FISCHER, W.L. (1996): Mathematikdidaktik zwischen Forschung und Lehre. München.

PICKERT, G. (1958): Ebene Inzidenzgeometrie. Frankfurt.

ROUSE BALL, W.W. (1892, 1931): Mathematical Recreations and Essays. London.

SCHUBERT, H./FITTING, F. (1953): Mathematische Mußestunden. Berlin.

SCHUPP, H. (1974): Mühlegeometrie. Paderborn.

SMITH, D.E. (1925, 1958): History of Mathematics, Vol. II. New York.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Matreier Gespräche - Schriftenreihe der Forschungsgemeinschaft Wilheminenberg

Jahr/Year: 1966

Band/Volume: 1996

Autor(en)/Author(s): Fischer Walther L.

Artikel/Article: Marginalien über die Beziehungen von Spiel und Mathematik 84-119