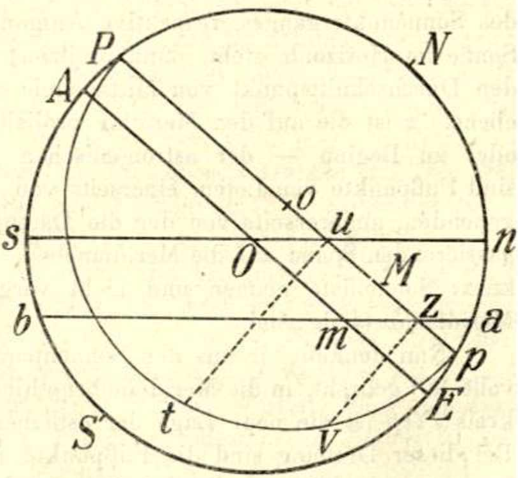
Dauer des Zwielichtes

Von **Dr. Max Möller**

(Mit 1 Textfigur)

Mit Hilfe der im Jahrgang 1909 dieser „Mitteilungen" p. 150ff. angegebenen Methode kann auch die Frage nach der Dämmerungszeit auf graphischem Wege beantwortet werden. — Das Wort Zwielicht wird im folgenden sowohl von der astronomischen als auch von der bürgerlichen Dämmerung gebraucht.

In der Figur ist der große Kreis ein Meridianschnitt durch das Himmelsgewölbe; ns sei die Mittagslinie im (wahren) Horizont unter 48° nördlicher Breite; ns ist auch die Projektion des Horizontes auf die Meridianebene; AE ist Durchschnitt des Himmelsäquators mit derselben Meridianebene und zugleich auch Projektion des Himmelsäquators auf die genannte Ebene, schneidet die Mittagslinie im Weltmittelpunkte O; Winkel $AOs = 42°$, das ist die zur Polhöhe 48° gehörige Äquatorhöhe; N ist der astronomische Nordpol, S Südpol. Der Bogen na mißt 18°. Durch a wird eine Ebene gelegt parallel zum Horizont; ab ist die Projektion dieser Ebene auf den Meridian. Hat die Sonne jene Ebene erreicht — sie soll kurz: Dämmerungsebene heißen — dann endet die astronomische Abenddämmerung, respektive beginnt die Morgendämmerung. — Jene Sonnendepression von 18° ist gemessen in einem Höhenkreis. Um



wieviel Grade muß die Sonne, in ihrer Tagesbahn gezählt, unter den Horizont hinabsinken, um die „Dämmerungsebene“ zu erreichen? Die Anzahl dieser Bogengrade dividiert durch 15 gibt die Dauer des Zwielichtes in mittleren Stunden, das ist die Zeit, während welcher trotz Abwesenheit der Sonne — und auch des Mondes — kleinere Sterne noch nicht, oder auch nicht mehr, gesehen werden können.

Die Zeitdauer, nach welcher gefragt wird, hängt ab von der geographischen Breite und vom Kalendertag; letzterer wird durch die Sonnendeklination ausgedrückt. Der Kreisbogen AP bezeichnet die hier als nördlich vorausgesetzte Deklination an einem bestimmten Kalendertag. Die Ebene des Sonnenparalleles, senkrecht auf dem Meridian, schneidet letzteren in der Geraden Pp, deren Mittelpunkt o in der Weltachse NS liegt. Pp ist auch Projektion des Sonnenparalleles auf die Meridianebene, enthält also die Sonnenprojektionen für den ganzen Kalendertag, ist deren geometrischer Ort. Auf den Punkt u fällt die Projektion im Momente des Sonnenunterganges, respektive Aufganges; wenn nämlich die Sonne im Horizonte steht, dann projiziert sie sich notwendig auf den Durchschnittspunkt von Mittagslinie mit der Sonnenparallelebene. z ist die auf den Meridian projizierte Sonne zu Ende — oder zu Beginn — der astronomischen Dämmerung. u und z sind Fußpunkte von Loten, einerseits von der durch den Horizont gehenden, andererseits von der die Dämmerungsebene momentan passierenden Sonne auf die Meridianebene gefällt; wir werden sie kurz: Sonnenlote nennen und nicht vergessen, daß es diesmal Meridianabstände sind.

Nun denken wir uns den Sonnenparallel um die Gerade Pp volle 90^0 gedreht, in die Meridianebene hineingeklappt. Der Halbkreis $Ptvp$ ist die neue Lage der östlichen Hälfte des Paralleles. Bei dieser Drehung sind die Fußpunkte u und z der Sonnenlote unverrückt geblieben, die Scheitel der beiden Lote nach t, respektive v gelangt, denn der Konstruktion nach ist: $tu \mid vz \perp Pp$; auch o hat seinen Platz behalten; vt ist also der Bogen, den die Sonne in ihrem Parallel während der astronomischen Dämmerung durchläuft; o ist der Scheitel des zugehörigen Zentriwinkels, welcher mit dem Transporteur ausgemessen und durch 15 dividiert die gesuchte Zeit gibt. — Arcus Pt ist der halbe Tagbogen und darin liegt eine Variante der auf S. 152 des vorigen Jahrg. dieser „Mitteilungen“ gegebenen Bestimmung der Tageslänge.

Wäre die Dämmerungsebene 6^0 unter dem Horizonte gelegen, so erhielten wir durch vollständig analoge Konstruktion die „bürgerliche" Dämmerung, die Zeit nämlich, während welcher man beim Verweilen der Sonne unterhalb des Horizontes im Freien oder in der Nähe eines Fensters Gedrucktes noch lesen kann.

Was wir astronomische Dämmerung genannt haben, faßt auch die bürgerliche Dämmerung in sich.

Aus der Betrachtung der Figur lassen sich allgemeine Beziehungen herleiten zwischen geographischer Breite, Kalendertag und Zwielichtsdauer.

Denken wir uns durch a eine Gerade gleichlaufend pP; auf diese Parallele projiziert sich eine Tagesbahn, welche die Peripherie der Dämmerungsebene im Punkte a berührt: Für eine nördliche Deklination $= Ea$ oder noch darüber hinaus erlischt die Dämmerung während der ganzen Nacht gar nicht. Der Bogen Ea ist Äquatorhöhe vermindert um α^0; der Subtrahend ist 18^0 oder 6^0, je nachdem astronomische oder bürgerliche Dämmerung gemeint ist. $90^0 - \varphi - \alpha$ ist der Grenzwert der Sonnendeklination, für welche die Dämmerung im Laufe der Nacht erlischt. Aus der Bedingung $\delta = 90^0 - \varphi - \alpha$ folgt $\varphi = 90^0 - (\alpha + \delta)$; der eingeklammerte Subtrahend hat zur oberen Grenze $23^1/_2{}^0 + 18^0$, respektive $23^1/_2{}^0 + 6^0$: Bis zum Breitegrad $48^1/_2$, respektive $60^1/_2$ gibt es auch im Sommerhalbjahre keine „helle Nacht".

Links von AE ist in Breiten bis über den Polarkreis hinaus keine Parallele möglich, welche ab nicht schneiden würde; die Sonne kommt im Laufe der Nacht unter die Dämmerungsebene: Im Winterhalbjahre gibt es nirgends helle Nächte bis zur Breite 72^0, respektive 84^0; wir nennen diesen Gürtel: Zone dunkler Winternächte, was besagen will, daß mindestens um die winterliche Mitternacht volle Dunkelheit herrscht.

Für diese Betrachtungen ist es anschaulicher, die Äquatorhöhe als Ortsbestimmung zu wählen. Beträgt diese Höhe 18^0, dann repräsentiert die Verbindungslinie Oa den ganz in der „Dämmerungszone" liegenden Nachtbogen des Äquinoktiums; alle übrigen winterlichen Sonnenparallele werden von ab geschnitten, liegen also zum Teil in totaler Dunkelheit. Für geringere Äquatorhöhen rückt eine wachsende Anzahl von Nachtbogen winterlicher Parallele ganz in die Dämmerungszone.

In den höchsten Breiten kommen auch ganz dämmerhelle Winternächte vor von je 24stündiger Dauer, wenn einer oder mehrere Parallele innerhalb der Dämmerungszone liegen. (Diese Zone ist die Oberfläche der Kugelschichte zwischen wahrem Horizont und Dämmerungsebene.) Damit dies möglich sei, muß der Sonnenparallel entweder der Dämmerungsebene parallel sein — was für den Pol zutrifft, wo es zwischen $\delta = 0^0$ und $\delta = -18^0$ unausgesetzt dämmert —, oder die Tagesbahn ist gegen die Dämmerungsebene (auch gegen den Horizont) geneigt, aber höchstens so, daß $P'p'$ mit dem Horizont 9^0 einschließt; $\sphericalangle asn$ ist ein Peripheriewinkel auf dem Bogen von 18^0, er mißt daher 9^0, und ebensoviel beträgt die Grenze der Äquatorhöhe; die Polhöhe ist das Komplement der letzteren. — Für bürgerliche Dämmerung hätten wir 6^0 statt 18^0 und 3^0 statt 9^0 zu setzen. — Tagesbahnen, die ganz unterhalb der Dämmerungsebene liegen, entsprechen totaldunkle Winternächte von 24 Stunden Dauer — ein Gegenstück zur Mitternachtssonne.

Den Kreisbogen vt wollen wir den Dämmerungsbogen nennen und nachsehen, wie er sich am selben Tage mit der geographischen Breite ändert. — Die Größe des Bogens, welchen zwei Kreisordinaten aus der Peripherie herausschneiden, hängt ab außer vom Kreisradius noch erstens vom gegenseitigen Abstand dieser Ordinaten, welcher d_1 heißen soll, in der Figur gleich uz, und zweitens davon, wieweit der Mittelpunkt M des d_1 entfernt ist von o, dem Zentrum des Sonnenparalleles. Die Entfernung Mo soll d_2 genannt werden. Im selben Parallel hat der Bogen vt seinen kleinsten Wert, wenn die Mittelpunkte M und o übereinander fallen, und wächst mit dem Abstande beider Zentra voneinander, denn es wächst dann die Kreissehne, welche von den Punkten t und v begrenzt wird; diese Sehne ist Hypotenuse in einem Dreieck, dessen eine Kathete — man denke sich durch v eine Parallele zu uz — ihre Größe beibehält, während die zweite wächst, und mit dieser Sehne wächst auch der (mehr und mehr steilgestellte) Bogen. Denkt man sich die Äquatorhöhe verringert, den Winkel AOs verkleinert, dann wächst der Dämmerungsbogen aus zwei Gründen: d_1 nimmt zu mit der wachsenden Breite und M entfernt sich von der Weltachse, d_2 wächst also gleichfalls: Für denselben Sommertag nimmt die Dauer des Zwielichtes zu mit der geographischen Breite; sie ist ein Minimum am Erdäquator und wächst bis zum Gebiete der hellen Nächte, bis p den Punkt a erreicht hat. Das Wachstum ist ein ziemlich rasches, weil zwei Ursachen dazu beitragen.

Unter dem Äquator ist uz (oder d_1) der Abstand des Horizontes von der Dämmerungsebene, d_1 hat seinen kleinsten Wert, u fällt auf o, M liegt näher der Weltachse als — bei Sommerdeklinationen — sonst irgendwo.

Kann der Sonnenparallel den Punkt a erreichen und noch überschreiten, dann nimmt der Dämmerungsbogen wieder ab bis zum Sommersolstitium; denn Tagbogenhälfte + Dämmerungsbogen (wir dürfen diese Summe kurz als „leuchtenden Bogen“ bezeichnen) können zusammen höchstens 180° ausmachen. Für nördlicher als *a* gelegene Sonnenparallele wächst der Tagbogen weiter und um ebensoviel nimmt dann der Dämmerungsbogen ab. Die Abnahme erfolgt langsam, weil nur die wachsende Länge des Tagbogens darauf Einfluß nimmt und besonders gegen das Solstitium hin langsam erfolgt. In der Zone dunkler Sommernächte hat der Dämmerungsbogen — eigentlich dessen Zentriwinkel, auf den allein es hier ankommt — seinen größten Wert am 21. Juni.

Geachtet sei noch auf folgenden Umstand: Unter der Breite Null stehen *AE* und *Pp* senkrecht auf *ns*; während wir die Breite allmählich wachsen lassen, nimmt d_1 allmählich zu, wächst nicht sprungweise, sondern mit der Breite kontinuierlich bis zur Kalotte der hellen Nächte. Gleichfalls kontinuierlich wächst d_2.

Während des Sommerhalbjahres (21. März bis 23. September) ändern sich d_1 und d_2, beide mit der Breite gleichsinnig; anders während der zweiten Jahreshälfte. Denken wir uns in der Mitte zwischen *ns* und *ab* eine Linie *xy* parallel gelegt.[1]) Auf dieser Geraden muß *M* wandern, wenn wir zu geänderten Breiten übergehen, im Sommer mit wachsender Breite nach rechts hin (gegen *y*), bis wir zur Kalotte heller Nächte gelangt sind; dabei entfernt sich *M* immer mehr von der Weltachse. Im Winter ist die Wanderung des *M* keine einheitliche. — *xy* schneide die Weltachse in einem Punkte *i*; zur mitbestimmten Lage des Äquators wird durch *i* eine Parallele zu *AE* gelegt; sie ist Durchmesser eines Sonnenparalleles, an dessen zugehörigem Tage *M* genau auf der Weltachse liegt; d_2 ist Null, welcher Umstand für sich allein den Zentriwinkel des Dämmerungsbogens zu einem Minimum machen würde. Wir setzen voraus, daß die Sonnendeklination den Wert noch erreichen kann, welchen die Lage des *i* erfordert. Gehen wir von der erwähnten Breite über zu einer größeren oder zu einer kleineren, so entfernt sich *M* von der Weltachse, das eine Mal nach links hin, das andere Mal nach rechts, was für sich allein den Dämmerungsbogen vergrößert. Aber mit der Breite

[1] Auch diese Linie ist in der Figur nicht ausgeführt, um die Zeichnung nicht zu überladen. Der Leser möge *xy* mittels Bleistift markieren, um es erforderlichenfalls wieder weglöschen zu können. Dasselbe gilt für die übrigen, in der Zeichnung nicht angebrachten Linien und Punkte.

ändert sich auch die Größe des d_1. Es kommt darauf an, in welchem Grade beide Umstände, nämlich die Änderung des d_1 und jene des d_2, einander beeinflussen, wofür aus einer Zeichnung eine bindende Regel, leicht in Worten ausdrückbar, nicht abzuleiten sein dürfte.

Ein vielleicht noch leidlich gutes Anschauungsbild erhält man durch Fortwälzen einer Tangente auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt O unserer Figur und dessen Radius $= \sin \delta$; wie gezeigt werden soll.

Mit dem Radius $\sin \delta$ beschreibe man von O aus einen Kreis, welcher xy schneidet; dazu ist nötig, daß der gewählte Halbmesser größer sei als $0{\cdot}5 \sin 18^{\circ}$, und von den Durchschnittspunkten interessiert uns auf der nördlichen Halbkugel nur der links gelegene; i soll er heißen. Eine Tangente durch i an den Kreis gelegt entspricht dem Wintersonnenparallel, für welchen $d_2 = 0$ wird. Die geographische Breite ist durch O und i bestimmt. Für Variationen des φ hat man sich bloß diese Tangente auf dem linken unteren Viertel des Kreises gewälzt zu denken und bemerkt, wie M wandert und während dessen seine Lage gegen die — auf der Tangente (in deren Berührungspunkt) immer senkrechten — Weltachse ändert.

Beschreiben wir einen Kreis mit dem Radius $\sin \delta$, wobei $\delta > 18^{\circ}$, so bestimmt sein links gelegener Schnittpunkt mit ab, verbunden mit O, jene Lage der Weltachse gegen den Horizont, also jene nördliche Polhöhe, für welche bei dieser südlichen Deklination der leuchtende Bogen (Pv) genau 90° ausmacht; das Lot vz fällt dann im umgeklappten Sonnenparallel auf die Weltachse; die astronomische Dämmerung endet um 6^{h} abends und beginnt wieder morgens 6^{h}; die Dämmerungsdauer ist in diesem Falle kleiner als 6 Stunden. Unter dem Äquator beträgt der Lichtbogen (S) mindestens 108°; in höheren Breiten kann er bedeutend anwachsen und wegen der Kürze des (winterlichen) Tagbogens (s) kann die Dauer des Zwielichtes $(S-s)$ einen großen Wert erreichen. Wenn vom Äquator nach Norden hin ausgezeichnete Werte des Lichtbogens existieren, können dies nur mathematische Minima sein. Von diesem Minimum ab muß die Dämmerungsdauer mit weiterwachsender Breite zunehmen, weil der Tagbogen abnimmt. Die Dämmerung kann aber schon vorher — von weit geringeren Breiten aus — in Zunahme gewesen sein, wenn der Tagbogen mehr abnimmt als der Lichtbogen.

Wie ändert sich die Dämmerungsdauer an einem und demselben Orte im Laufe des Jahres?

Denken wir uns südlich von AE eine (in der Figur nicht ausgeführte) Gerade $P'p' \parallel Pp$ und im selben Abstande vom Äquator; beide entsprechen Deklinationswerten, welche absolut gleich, aber dem Zeichen nach verschieden sind. Tage mit entgegengesetzt-gleicher Sonnendeklination sollen G e g e n t a g e heißen. Die Länge der Geraden uz ist für dieselbe Breite mit der Deklination nicht veränderlich, sie ist als Parallelogrammseite immer gleich Om;

auch $u'z'$, welches durch Horizont und Dämmerungsebene aus $P'p'$ herausgeschnitten wird, ist $= Om$, somit der Abstand der Sonnenlote unverändert geblieben beim Übergang von $+\delta$ auf $-\delta$; aber M ist der Weltachse weit näher gerückt; die Scheitel der Lote schneiden aus der Kreisperipherie ein kleineres Bogenstück: An Gegentagen gehört am selben Orte zur positiven Sonnendeklination der größere Dämmerungsbogen. Eine Ausnahme macht bloß der Horizont des Erdäquators; dort ist der Dämmerungsbogen für ein $+\delta$ genau gleich jenem für $-\delta$.

Werden in zwei Punkten einer geraden Linie Lote errichtet, hernach von einem Punkte dieser Geraden als Zentrum Kreise geschlagen mit ungleichen Radien, dann ist der Bogen, welcher von den beiden Loten begrenzt wird, nach Graden gemessen, desto größer, je kleiner der Kreisradius. Das ist sofort einleuchtend und gilt auch dann, wenn die Kreise nicht konzentrisch sind, sondern ihre Mittelpunkte senkrecht untereinander liegen. Auf den Erdäquator angewendet ergibt sich, daß während der Äquinoktien die Dämmerungszeit ein Minimum ist; AE steht senkrecht auf NS, welches dort mit ns zusammenfällt; während der Nachtgleichen deckt der in den Meridian hineingeklappte Sonnenparallel den Meridian selbst, d_1 ist der senkrechte Abstand der Geraden ns von ab und ändert sich nicht während des ganzen Jahres; ebenso bleibt d_2 konstant gleich $0{\cdot}5\, d_1$. Zur Zeit der Äquinoktien schneiden die Lote einen Bogen aus $= 18^\circ$, so groß ist damals der Dämmerungsbogen in der Breite 0°; alle übrigen Sonnenparallele haben kleineren Radius; der Zentriwinkel des von den Sonnenloten abgetrennten Kreisbogens nimmt kontinuierlich zu bis zu den Solstitien, der Dämmerungsbogen erreicht dann seinen Maximalwert.

In mäßigen Breiten wird der Dämmerungsbogen während des Äquinoktiums einen sehr großen Wert nicht erreichen können, aber es ist nicht notwendig ein kleinster Jahreswert. Gehen wir aus vom 23. September; die Sonnenlote müssen bis zum Randkreis verlängert werden, um den Dämmerungsbogen abzutrennen; dessen Zentriwinkel gibt die Dämmerungsdauer. An einem nächsten Tage ist der Radius des Sonnenparalleles kleiner geworden, was für sich allein dazu beiträgt, den Zentriwinkel des Bogens zu vergrößern; gleichzeitig ist aber M näher an die Weltachse gerückt, was eine Abnahme jenes Zentriwinkels verursacht. Die zweite Ursache kann die erste kompensieren und überkompensieren, so daß die Zwielichtsdauer nach der Herbstnachtgleiche noch weiter abnimmt und erst später ihr Minimum erreicht.

Ein Minimum, welches kleiner ist als alle anderen Jahreswerte, muß notwendig in das Winterhalbjahr fallen; denn an den Gegentagen ist die Dämmerungsdauer eine größere.

Daß der Dämmerungsbogen — eigentlich dessen Zentriwinkel — nach der Herbstnachtgleiche noch abnimmt, davon wird man sich durch eine Zeichnung überzeugen können. Das zum Minimum gehörige $-\delta$ könnte nur durch sehr vieles Probieren herausgefunden werden. Dem Minimum eines Winterquartals (23. September bis 21. Dezember) entspricht ein gleiches im anderen Quartal (21. Dezember bis 21. März). — Bei der Mannigfaltigkeit in den Beziehungen zwischen d_1 und d_2 ist es nicht ausgeschlossen, daß im Laufe eines Winters noch Minima vorkommen; wenn es auch nicht allerkleinste Jahreswerte sind, werden sie doch beiderseits von größeren Dämmerungsbogen flankiert.

Jener Dämmerungsbogen ist ein Minimum, welcher vom ersten Vertikal halbiert wird (E. Wetzel, Allgemeine Himmelskunde, 1870, pag. 27).

Für die südliche Halbkugel hat man nur Sommer und Winter zu vertauschen und sonst behält alles Gesagte seine Geltung. —

Vorausgesetzt ist hier, daß die für das Erlöschen der Dämmerung nötige Sonnendepression von 18^0, respektive 6^0 durch Beobachtung festgestellt worden ist; dann sind die abgeleiteten Regeln ganz unabhängig von einer Theorie der Dämmerung.

Die genaue Ermittelung des Dämmerungsminimums ist eine bekannte Aufgabe der Differentialrechnung; sie hat die großen Mathematiker des 17. und 18. Jahrhunderts viel beschäftigt. Als Formel für die Deklination, mit welcher ein Minimum verknüpft ist, wurde gefunden:

$$1)\ \sin\delta = -\sin\varphi \tan 9^0 \text{ und}$$
$$2)\ \sin\delta = -\sin\varphi \tan 81^0$$

(Israel-Holtzwart, Elemente der sphärischen Astronomie, p. 87); das sind vier Wintertage mit kürzester Dämmerung. Für den Äquator geben beide Gleichungen das Äquinoktium. Gleichung 1) gibt für jedes beliebige φ einen Wert für δ; weil $\tan 9^0 = 0{\cdot}16$, kommt für $\sin\delta$ ein echter Bruch. Gleichung 2) hingegen bringt das (zweite) Minimum nur für einen schmalen Erdgürtel; weil $\tan 81^0 = 6{\cdot}31$, $\sin\delta$ höchstens $0{\cdot}40$ ist, kann $\sin\varphi$ den Wert $0{\cdot}06$ nicht übersteigen: nur innerhalb der Breite 4^0 gibt es zwei Dämmerungsminima oder vier Wintertage mit kürzester Dämmerungsdauer.

Werden die Gleichungen 1) und 2) als bekannt vorausgesetzt, dann läßt sich der zum Dämmerungsminimum gehörige Deklinationswert graphisch bestimmen. Setzen wir $\tan 9^0 = \sin 9^0 : \cos 9^0$, so kommt aus 1) absolut

$$\sin \delta : \sin \varphi = \sin 9^0 : \cos 9^0.$$

Die goniometrischen Funktionen der Winkel φ und 9^0 lassen sich durch gerade Linien ausdrücken und mittels Parallelenzuges die Proportion lösen. Das erhaltene $\sin \delta$ wird von O aus auf die Südhälfte der Weltachse aufgetragen; eine durch den erreichten Punkt o' zu AE parallel gelegte Linie ist Durchmesser des gesuchten Winterdeklinationskreises. — Wird mit Gleichung 2) ebenso verfahren, dann merkt man bald, daß nur innerhalb eines schmalen Äquatorgürtels noch ein brauchbarer Durchschnitt mittels Parallelenzuges erreichbar ist.

In voller Übereinstimmung mit der Formel:

$$\sin \delta = -\sin \varphi \tan 9^0; \qquad \sin \delta' = -\sin \varphi \tan 81^0$$

kann die Konstruktion in nachfolgender Weise ausgeführt werden; die erforderlichen Punkte und Hilfslinien sind in die Figur auf S. 267 einzutragen. x' halbiere den Bogen sb.

O wird mit dem x' genannten Punkte verbunden; $\sphericalangle sOx' = 9^0$; von s wird ein Lot herabgelassen, welches die Verlängerung von Ox' in q schneidet. Wählen wir Os als Einheit, dann ist $sq = \tan 9^0$. Von A (dem Stundenpunkt) wird ein Lot gefällt auf Os, es treffe in r, Or ist $\sin \varphi$. Das Lot wird verlängert, bis es Ox' in c schneidet; rc ist $\sin(-\delta)$, denn im rechtwinkeligen Dreieck Osq ist eine Parallele zu sq gelegt worden; $\tan 9^0 : 1 = rc : \sin \varphi$. Der gefundene Sinus wird von O aus auf die Südhälfte der Weltachse aufgetragen; am Endpunkte schneidet die Ebene jenes Sonnenparalleles, für welchen die Dämmerungsdauer ein Minimum ist. — Aus der Konstruktion ist auch zu ersehen, daß für den Äquator $\delta = 0$ ist, mit wachsender Breite ins Negative wächst, aber -9^0 nicht überschreiten kann, denn auf zwei Dezimalstellen ist $\sin 9^0 = 0{\cdot}16 = \tan 9^0$. Auf der nördlichen Halbkugel fällt das Minimum zwischen 23. September und 16. Oktober, dann wieder zwischen 25. Februar und 21. März, je nach der geographischen Breite.

Um $\sin(-\delta')$ zu finden, wird $\sin \varphi$ von s aus auf sq aufgetragen; durch den erreichten Punkt h eine Gerade gelegt parallel Os; diese schneide Ox' in k; von hier aus eine Parallele zu qs schneide Os in l; Ol ist $\sin(-\delta')$.

Während für jedes beliebige φ ein Wert für δ gefunden wird, ist dies bei δ' nicht mehr der Fall; $\sin \varphi$ kann auf sq nur dann aufgetragen werden, wenn $\varphi < 9^0$, und sogar das setzt voraus, daß δ' auch großer Werte fähig ist, sein Sinus die Einheit erreichen kann. $\sin\delta$ kann aber höchstens 0·4 betragen; soviel wird von O aus auf Os abgetragen; der erreichte Punkt heiße w; von w ein Lot herabgelassen schneide Ox' in y; durch y eine Parallele zu Os schneide sq in y'; ein Winkel sOy' ist Grenzwert der geographischen Breite, für welche es zwei Dämmerungsminima gibt. Etwa $3^1/_2{}^0$ breit ist der nördliche Äquatorgürtel, für welchen δ' noch möglich ist. Zeichnet man für geringe Äquatorabstände δ und δ', so fallen am Äquator selbst beide auf das Äquinoktium, von da ab entfernen sie sich von der Nachtgleiche gegen das Wintersolstitium, δ viel weniger rasch als δ', was auch aus den Formeln ..... ersichtlich ist; $\tan 81^0$ ist etwa vierzigmal so groß wie $\tan 9^0$.

Die lineare Tangente sq kann man sich ganz ersparen und den Satz anwenden: Das Produkt aus Kathete und trigonometrischer Tangente des gegenüberliegenden Winkels ist gleich der zweiten Kathete. — Wird durch O ein Radius Ox'' gelegt, 81^0 gegen Os geneigt, und das Lot rc verlängert bis zum Durchschnitt — c' — mit diesem Radius, dann ist (wieder nach dem erwähnten Satz) $rc' = \sin\delta'$; sichtlich ist letzterer weit größer als $\sin\delta$; eine leicht zu erratende Konstruktion zeigt den schmalen Äquatorgürtel, für welchen zwei Jahresminima der Dämmerung existieren.

Ist δ die Sonnendeklination und wird der Radius des Himmelsgewölbes $= 1$ angenommen, dann ist der Radius eines Sonnenparallels $\cos\delta$, der senkrechte Abstand des Paralleles von der Äquatorebene ist $\sin\delta$. Den halben Tagbogen nennen wir s. In der Fig. auf S. 267 ist dann $ou = -\cos s$. Die drei Punkte O, o und u bestimmen ein rechtwinkeliges Dreieck; Oo ist $\sin\delta$, der Winkel bei O ist geographische Breite φ, somit $ou = \sin\delta \tan\varphi$ und $\cos s = -\tan\varphi \tan\delta$. So erreicht man die Formel für den halben Tagbogen mit Hilfe einfachster Sätze aus der ebenen Trigonometrie.

Der Kreisbogen $Ptv = S$ ist „leuchtender Bogen" = Tagbogenhälfte vermehrt um Dämmerungsbogen; $oz : \cos\delta = -\cos S$. Ein Lot aus o auf ab gefällt ist $oz \cos\varphi$. Durch sn wird dieses Lot geschnitten; dessen oberer Teil $= ou \cos\varphi = -\cos s \cos\varphi$; der untere Lotabschnitt ist $\sin 18^0$ und es folgt:

$$\cos S = -\tan\varphi \tan\delta - \frac{\sin 18^0}{\cos\varphi \cos\delta} = -\frac{\sin 18^0 + \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta};$$

auch $\cos S$ kann aus einer ebenen Figur hergeleitet werden; $S - s$ ist die Dämmerungsdauer. Für Wintertage ist δ negativ zu setzen.

Werden die Gleichungen 1) und 2) auf S. 274 nach $\sin\varphi$ aufgelöst, dann erhält man die geographische Breite, unter welcher bei gegebener Sonnendeklination die Dauer des astronomischen Zwielichtes ein Minimum wird:

$$\sin\varphi_1 = \frac{\sin(-\delta)}{\tan 9^0} \qquad \sin\varphi_2 = \frac{\sin(-\delta)}{\tan 81^0}$$

φ_1 ist nur möglich, wenn $\sin\delta$ numerisch kleiner ist als $\tan 9^0$; ein φ_2 gibt es für jeden Wintertag. Graphisch kann die verlangte Breite durch einen Parallelenzug gefunden werden.

Einem aparten Wert des Cosinus entspricht auch ein ausgezeichneter Wert des zugehörigen Bogens.

Der Differentialquotient des cos S, genommen nach φ und $= 0$ gesetzt, gibt als Bedingung für ein S-Minimum: $\sin \varphi = \sin (-\delta) : \sin 18^\circ$; setzt voraus eine Winterdeklination unter 18°. Nördlich und südlich von der gefundenen Breite ist der Lichtbogen größer.

Der Differentialquotient nach δ gleich Null gesetzt, bringt als Bedingung für ein Minimum des S $\sin \delta = -\sin \varphi : \sin 18^\circ$; die Breite muß kleiner sein als 18° und weil δ nicht größer sein kann als $23^1/_2{}^\circ$, ist $\varphi = 7^\circ\, 4'\, 41''$ die größte Breite, unter welcher es noch ein mathematisches Minimum bezüglich δ gibt; für größere und kleinere Winterdeklinationen als die nach der Formel gerechneten ist der Lichtbogen S größer.