

# Theoretische Ermittlung des günstigsten Neigungswinkels für die Erwärmung einer Berghalde.

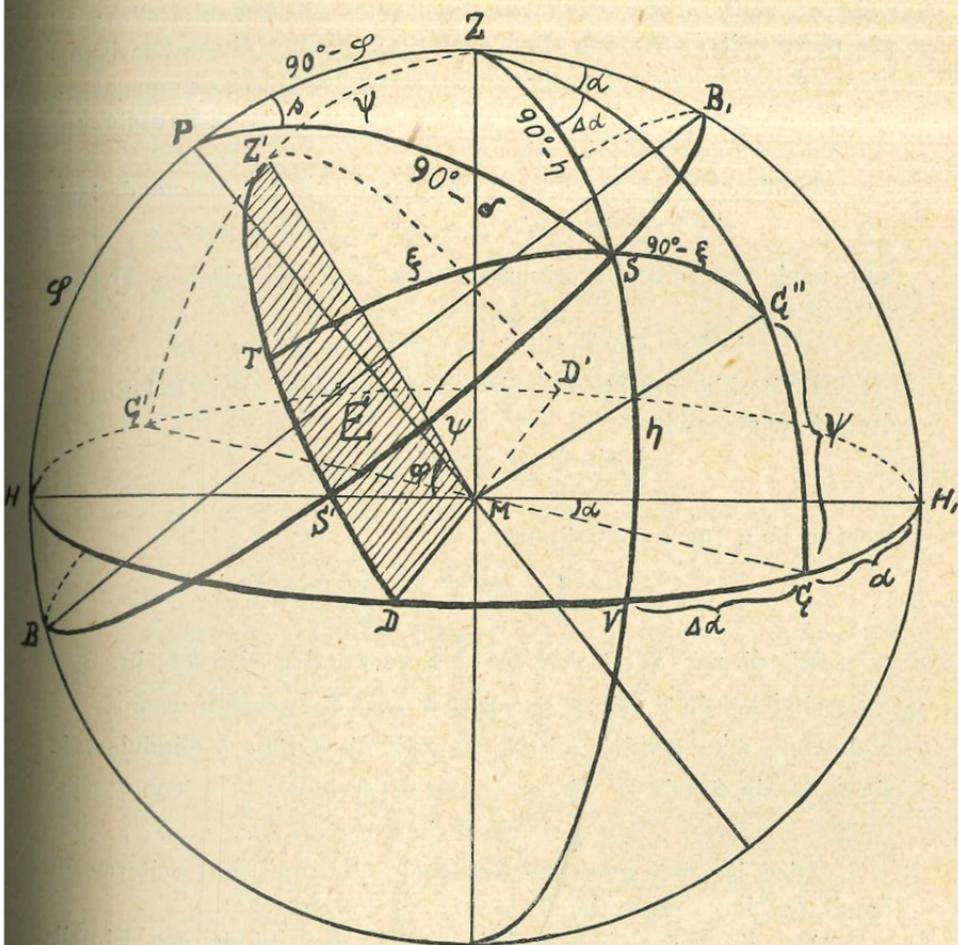
Von Dr.-Ing., Dr. phil. C. Schoy in Essen a. d. R.

(Mit 1 Textfigur.)

Wie man sofort ersieht, liegt unserer Aufgabe die Frage nach der günstigsten Lage eines Rebengeländes zugrunde, da die Güte des Weines bekanntlich von der Wärmemenge abhängt, deren der Rebstock während des Sommers teilhaftig wird. Bei Obstkulturen und dergleichen liegt der Fall natürlich ebenso. Da in unseren gemäßigten Breiten die Wintermonate einen vollständigen Stillstand der Vegetation bedingen, so betrachten wir nur die Zeit von Frühlingsanfang bis zum Beginn des Herbstes. Solche thermogeographischen Fragen sind bereits öfters Gegenstand eingehender mathematischer Behandlung gewesen, sogar unter Berücksichtigung der Absorption der Sonnenwärme durch die Erdatmosphäre und der Reflexion des besonnten Gesteins. Wir verweisen bezüglich der Literatur auf das Handbuch der Geophysik von S. Günther, (2. Band der 2. Aufl. S. 269 ff. Stuttgart 1899), wo sie erschöpfend gegeben ist. Wer sich jemals mit der rechnerischen Durchführung solcher Beleuchtungsaufgaben beschäftigt hat, weiß, daß sie, selbst wenn man die zwei vorhin erwähnten, den Erwärmungseffekt schwächenden Faktoren außer acht läßt,<sup>1)</sup> auf Schwierigkeiten in den Integrationen führt. Dies ist natürlich nicht minder der Fall für ein unter dem Neigungswinkel  $90^{\circ} - \psi$  zum Horizont ansteigendes und unter dem Azimut  $\alpha$  zur Ost-Westrichtung streichendes Gelände. Gerade die Berücksichtigung der letzteren Größe macht die Berechnung so verwickelt, daß wir im Verfolg unserer weiteren Betrachtung  $\alpha = 0^{\circ}$ , also nur Berghalden annehmen, die

<sup>1)</sup> Vgl. über alle das solare Klima modifizierenden Einflüsse das überaus instruktive Kapitel bei Hann: Handbuch der Klimatologie (Stuttgart 1908, I. Bd., S. 93 ff.).

direkt nach Mittag liegen. Sie genießen bei positiver Sonnen-  
 deklination erst Besonnung von dem Augenblick, da die Sonne  
 in den ersten Vertikal tritt; tiefe Sonnenstände, wo die Absorption  
 und Extinktion der Wärme und des Lichtes groß sind, kommen  
 dann für uns nicht in Betracht.



Zunächst gilt es nun, die Sonnenhöhe  $\xi$  zu berechnen, wie  
 sie sich während einer scheinbaren Umdrehung des Himmels-  
 gewölbes für eine schräg zum Horizont gelegene Ebene darstellt.  
 Dies ist eine Aufgabe der sphärischen Trigonometrie.

In beistehender Figur ist  $E$  die zum Horizont unter dem  
 Winkel  $90^\circ - \psi$  inklinierende und zur Äquinoktiale um  $\alpha^\circ$  deklinie-  
 rende Ebene.

Wenn die Sonne in ihrer Parallelkreisbahn  $BSS'$  in dem Punkte  $S$  angekommen ist, so sendet sie ihre Strahlen hinab nach  $T$ , so daß  $ST = \xi$  die gesuchte Sonnenhöhe ist. Der Scheitelpunkt (das Zenit) für unsere Ebene  $E$  ist  $G''$ , um welchen sich alle Höhenkreise (z. B.  $G''ST$ ) drehen. Man erkennt jetzt ohne weiteres, daß  $G''$  in bezug auf die Ebene  $E$  dieselbe Rolle spielt wie das Zenit  $Z$  für den Horizont  $HH_1$ . Eine weitere Klarlegung ist wohl durch die nebenstehende Figur überflüssig gemacht; es soll lediglich noch hervorgehoben werden, daß die Azimutdifferenz  $GV = \Delta\alpha$  ganz beliebig ist.

Zunächst folgt aus dem bekannten Zenit-Pol-Sonnendreieck:

$$\sin h = \sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos s \dots \dots \dots I$$

und nach demselben Kosinussatz aus dem sphärischen Dreieck  $SG''Z''$ :

$$\sin \xi = \sin h \cdot \sin \psi + \cos h \cdot \cos \psi \cdot \cos \Delta\alpha \dots \dots \dots II$$

Weiterhin ergibt der Sinussatz auf das Zenit-Pol-Sonnendreieck angewandt:

$$\frac{\sin \delta}{\cos h} = \frac{\sin (\alpha + \Delta\alpha)}{\sin s} \dots \dots \dots III$$

woraus man für  $\alpha = 0$  findet:

$$\cos \Delta\alpha = \sqrt{\frac{\cos^2 h - \cos^2 \delta \cdot \cos^2 s}{\cos h}}$$

Mit diesem Wert von  $\cos \Delta\alpha$  verwandelt sich  $II$ ) in:

$$\sin \xi = \sin h \cdot \sin \psi + \cos \psi \sqrt{\cos^2 h - \cos^2 \delta \cdot \cos^2 s},$$

und wenn man endlich mittels  $I$ ) noch die Größe  $h$  eliminiert, in:

$$\sin \xi = \sin \psi (\sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos s) + \cos \psi (\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos s) \dots \dots \dots IV$$

Dies ist der gesuchte Ausdruck, der uns zur weiteren Behandlung der Frage dient.

Da die Wärmemenge bekanntlich dem Sinus des Einfallswinkels proportional ist, so stellt offenbar die Summe der Doppelintegrale

$$W = 2 C \sin \psi \cdot \int_0^{\varepsilon+s_0} \int_0^{-s_0} (\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos s) ds \cdot d\delta +$$

$$+ 2 C \cdot \cos \psi \cdot \int_0^{\varepsilon+s_0} \int_0^{-s_0} (\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos s) ds \cdot d\delta \dots V$$

die halbjährliche Wärmemenge dar, wenn man unter  $C$  noch einen gewissen Proportionalitätsfaktor versteht, der von uns aber als konstant angesehen wird, folglich bei der Bestimmung des Maximums von  $W$  ja doch fortfällt.  $\varepsilon$  bedeutet die Ekliptikschiefe =  $23^{\circ}27'$ , bis zu welchem Betrag die Deklination  $\delta$  der Sonne anwachsen kann. Die Grenzen  $\pm s_0$  sind jene Stundenwinkel, bei denen die Beleuchtung der Bergwand durch die Sonne anfängt, resp. endet. Sie ergeben sich leicht aus der Überlegung, daß in diesen Augenblicken  $\xi = 0$  sein muß. Dann zeigt eine leichte Rechnung, daß aus IV) folgt:

$$\cos s_0 = -\operatorname{tang} \delta \frac{\cos(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)},$$

oder

$$s_0 = \operatorname{arc} \cos \left[ -\operatorname{tang} \delta \cdot \frac{\cos(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} \right].$$

Da ferner die Dauer der Besonnungszeit zum Mittag symmetrisch liegt, so kann man V) auch so schreiben:

$$W = 4 C \cdot \sin \psi \int_0^{+\varepsilon} \int_0^{s_0} (\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos s) ds \cdot d\delta +$$

$$4 C \cdot \cos \psi \int_0^{+\varepsilon} \int_0^{s_0} (\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos s) ds \cdot d\delta \dots \text{VI)}$$

Die Integration nach  $s$  läßt sich leicht vollziehen. Man hat nämlich:

$$W = C_1 \cdot \sin \psi \int_0^{+\varepsilon} \left( \sin \delta \cos \varphi \cdot \operatorname{arc} \cos \left[ -\operatorname{tg} \delta \frac{\cos(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} \right] + \right.$$

$$\left. + \cos \delta \cos \varphi \cdot \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \delta \frac{\cos^2(\varphi - \psi)}{\sin^2(\varphi + \psi)}} \right) d\delta$$

$$+ C_1 \cos \psi \int_0^{+\varepsilon} \left( \sin \delta \cos \varphi \cdot \operatorname{arc} \cos \left[ -\operatorname{tg} \delta \frac{\cos(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} \right] + \right.$$

$$\left. + \cos \delta \sin \varphi \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \delta \frac{\cos^2(\varphi - \psi)}{\sin^2(\varphi + \psi)}} \right) d\delta,$$

wenn man noch  $4 C = C_1$  setzt.

Zur Durchführung der zweiten Integration nach  $\delta$  entwickeln wir die zu integrierenden Ausdrücke in Potenzreihen,

deren Konvergenz bei der Kleinheit von  $\operatorname{tg} \delta$  außer Frage steht. Man hat:

$$\operatorname{arc} \cos x = \frac{\pi}{2} - \left( x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots \right),$$

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \dots$$

Bleibt man in beiden Reihenentwicklungen beim zweiten Gliede stehen, so ergibt sich nach gehöriger Zusammenfassung:

$$\begin{aligned} \frac{W}{C_1} &= \cos(\varphi - \psi) \int_0^{+\varepsilon} \left[ \sin \delta \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg} \delta \frac{\cos(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} \right) \right] d\delta \\ &+ \sin(\varphi + \psi) \int_0^{+\varepsilon} \left[ \cos \delta \left( 1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \delta \frac{\cos^2(\varphi - \psi)}{\sin^2(\varphi + \psi)} \right) \right] d\delta; \\ &= \cos(\varphi - \psi) \left\{ -\frac{\pi}{2} \left( \cos \delta \right)_0^{+\varepsilon} - \frac{\cos(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} \int_0^{+\varepsilon} \frac{\sin^2 \delta}{\cos \delta} d\delta \right\} \\ &+ \sin(\varphi + \psi) \left\{ \left( \sin \delta \right)_0^{+\varepsilon} - \frac{1}{2} \frac{\cos^2(\varphi - \psi)}{\sin^2(\varphi + \psi)} \int_0^{+\varepsilon} \frac{\sin^2 \delta}{\cos \delta} d\delta \right\}; \\ &= \frac{\pi}{2} \cos(\varphi - \psi) (1 - \cos \varepsilon) + \sin(\varphi + \psi) \sin \varepsilon - \\ &\quad - \frac{3}{2} \frac{\cos^2(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} \int_0^{+\varepsilon} \frac{1 - \cos^2 \delta}{\cos \delta} d\delta; \\ &= \pi \cdot \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos(\varphi - \psi) + 2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \cos \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sin(\varphi + \psi) - \\ &\quad - \frac{3}{2} \frac{\cos^2(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} \left\{ \int_0^{+\varepsilon} \frac{1}{\cos \delta} d\delta - \int_0^{+\varepsilon} \cos \delta d\delta \right\}; \\ &= \pi \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \cos(\varphi - \psi) + 2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \cos \frac{\varepsilon}{2} \sin(\varphi + \psi) \\ &\quad - \frac{3}{2} \frac{\cos^2(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} \left[ \log \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \sin \varepsilon \right] \dots \text{VII)} \end{aligned}$$

Gleichung VII) stellt einen angenäherten Wert dar für den Betrag der halbjährigen Erwärmung einer unter dem Böschungswinkel  $90^\circ - \psi$  zum Horizont ansteigenden Bergwand, die in der geographischen Breite  $\varphi$  liegt. Es entsteht also jetzt die Frage: Welches ist der Steilwinkel des Terrains, damit besagte

Erwärmung bei gegebener Breite  $\varphi$  ein Maximum wird? Dazu hat man VII) bei konstant gehaltenem  $\varphi$  nach der veränderlichen  $\psi$  zu differenzieren und den so gefundenen Ausdruck der Null gleichzusetzen. Indessen wird die hieraus resultierende Gleichung zur Berechnung von  $\psi$  schon so kompliziert, daß ihre Auflösung praktisch untunlich ist. Es bleibt uns nichts übrig, als zur Erlangung ganz roher Werte für  $\psi$  den ganzen Posten

$$-\frac{3}{2} \frac{\cos^2(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} \cdot \left[ \log \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \sin \varepsilon \right]$$

zu unterdrücken. Der Inhalt der eckigen Klammer ist freilich nicht groß. Man findet dafür:

$$\log \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \sin \varepsilon = -0.1282.$$

Also:

$$-\frac{3}{2} \left( \log \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \sin \varepsilon \right) = +0.1823.$$

Im Falle also  $\frac{\cos^2(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}$  wesentlich kleiner als 1 ist, wäre

die Annullierung des besagten Ausdruckes allenfalls angängig. Die so vereinfachte Gleichung VII) schreibt sich jetzt:

$$\frac{1}{C_1 \sin \frac{\varepsilon}{2}} W = \pi \cdot \sin \frac{\varepsilon}{2} \cos(\psi - \varphi) + 2 \cos \frac{\varepsilon}{2} \sin(\varphi + \psi).$$

Für ein Maximum von  $W$  wäre dann:

$$0 = -\pi \sin \frac{\varepsilon}{2} \sin(\psi - \varphi) + 2 \cos \frac{\varepsilon}{2} \cos(\varphi + \psi).$$

$$\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\cos(\varphi + \psi)}{\sin(\psi - \varphi)};$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \varphi}.$$

Die Ausrechnung nach  $\operatorname{tg} \psi$  liefert die Formel:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1 + \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi}{\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} + \operatorname{tg} \varphi} \dots \dots \dots \text{VIII)}$$

Ihre Auswertung ergibt folgende kleine Tabelle:

$\varphi$	$90^\circ - \psi$	$\varphi$	$90^\circ - \psi$
$0^\circ$	ca $17^\circ$	$45^\circ$	ca $45^\circ$
$10^\circ$	„ $26^\circ$	$50^\circ$	„ $48^\circ$
$20^\circ$	„ $32^\circ$	$60^\circ$	„ $55^\circ$
$30^\circ$	„ $37\frac{1}{2}^\circ$	$70^\circ$	„ $60^\circ$
$35^\circ$	„ $40^\circ$	$80^\circ$	„ $65^\circ$
$40^\circ$	„ $42^\circ$	$90^\circ$	„ $73^\circ$

Obgleich diese Zahlenwerte keinerlei Anspruch auf Genauigkeit erheben können, so zeigen sie doch deutlich die Tatsache, daß mit zunehmender Breite auch der Inklinationswinkel einer solchen Fläche zunehmen muß, soll sie durch Besonnung die größtmögliche Erwärmung erfahren. Bei welchen Winkelwerten der Quotient

$\frac{\cos^2(\psi - \varphi)}{\sin(\varphi + \psi)}$  am kleinsten wird, läßt sich bei der Ungenauigkeit von  $\psi$  auch nicht genau angeben, doch ist der Bruch sicherlich für niedrige Breiten bedeutend kleiner als die Einheit.

Mittels unserer Entwicklungen läßt sich nun auch die Frage nach der günstigsten Neigung der mattierten Glasfenster der Gewächshäuser beantworten, die im Winter die Treibhauswärme nicht ausstrahlen lassen (bei bedecktem Himmel keine nächtliche Ausstrahlung mit Frost) und gleichzeitig von der Wintersonne so belichtet werden, daß von ihnen auf die darunterliegenden Pflanzenbeete die größtmögliche Lichtfülle gelangt. Dazu hat man nur in der Formel VIII)  $+\varepsilon$  mit  $-\varepsilon$  zu vertauschen, wodurch sie übergeht in:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1 - \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi - \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}} \dots \dots \dots \text{IX)}$$

Wie zu erwarten, liefert ihre numerische Auswertung steilere Neigungswinkel, als sie das Sommerhalbjahr verlangt. In der Tat gab man besonders in früheren Zeiten den Fenstern unserer Glas-

häuser oft Neigungen von 70 und mehr Grad. Nach unserer Formel würde man erhalten:

Breite $\varphi$	Neigung zum Horizont
50°	56°
55°	64°
60°	72°

Die Erstellung von viel genaueren und ausführlicheren Tabellen für die rationellste Anlage von Gewächshäusern, wobei es auch besonders vorteilhaft sein wird, das Jahr in eine größere Anzahl Abschnitte zu zerlegen, behalten wir uns vor.

---

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Mitteilungen der Österreichischen Geographischen Gesellschaft](#)

Jahr/Year: 1912

Band/Volume: [56](#)

Autor(en)/Author(s): Schoy Carl

Artikel/Article: [Theoretische Ermittlung des günstigsten Neigungswinkels für die Erwärmung einer Berghalde. 298-305](#)