

Die Lage der Mondsichel am Himmelsgewölbe.

Von Dr. Max Möller.

O, swear not by the moon, th'inconstant moon,

Bekannt ist die Regel, nach welcher aus der Stellung der Mondsichel angegeben werden kann, ob der Mond in Zunahme oder in Abnahme begriffen ist: Zunahme, wenn die Sichel — ihre Konkavität nach Osten kehrend — zu einem $\jmath$ ergänzt werden kann, Abnahme, wenn sie sich zu a komplettieren läßt. Das gibt eine direkte Antwort auf die Frage nach Zu- oder Abnahme; die Römer dachten sich die erstgenannte Sichel zu einem D ergänzt, dem Anfangsbuchstaben von Decrescit; die Sichel mit nach Westen gerichteter Konkavität deuteten sie als den Buchstaben C, den Anlaut von Crescit. Weil aber die Lichtgestalten der Mondscheibe sich gerade umgekehrt verhalten, wie diese Buchstaben D und C anlauten, so gaben sie der Luna den Beinamen: *fallax* = täuschend; *decrescit* und *crescit* müssen in ihr Gegenteil verwandelt werden, um zu wissen, ob Vollmond oder Neumond folgen wird.

Die Giltigkeit der mnemotechnischen Regel ist auf unsere mittleren und nördlichen Breiten beschränkt. In Littrows 'Wunder des Himmels' (6. Aufl. pag. 231) ist auch ein Korollar zur Regel enthalten: „Gegen den Äquator hin und in südlichen Parallelkreisen erfährt die Lage der Sichel gegen den Horizont solche Änderungen, daß jene Bezeichnungen nicht mehr passen, was zuerst Marco Polo auf seinen Reisen bemerkt haben soll, ohne damit wie mit anderen Entdeckungen Glauben zu finden.“ — Das ist alles, was ich in acht astronomischen Werken, die meine Bibliothek zieren, über die Mondphasenregel gefunden habe. — Die Schweigsamkeit der Autoren veranlaßte mich, über die Lage der Mondsichel nachfolgende Betrachtungen anzustellen.

Der geneigte Leser wolle sich durch mathematische Formeln nicht abschrecken lassen; sie können ruhig überschlagen werden; ich habe mich nach Kräften bemüht, das Wesentliche auch ohne Mithilfe der Algebra klarzustellen.

Es soll versucht werden, die beschränkte Geltung jener Regel in anschaulicher Weise zu erörtern. Die Verbindungslinie der beiden Sichelenden werden wir kurz als Sehne bezeichnen und halten uns zunächst an einen sehr speziellen Fall. Ein paar Tage nach dem Neumond stehe unser Trabant im Äquator dort, wo der Gleicher von der Ekliptik geschnitten wird, u. zw. im Herbstpunkt. Gleichzeitig stehe die Sonne ebenfalls in der Ekliptik, nämlich dort, wo ihre Jahresbahn von der Tagesbahn geschnitten wird. Wir denken uns einen Beobachter auf dem nördlichen Polarkreis und wählen den Moment, in welchem der Herbstpunkt im Gesichtskreise dieses Beobachters eben untergeht, als Zeit des Mondunterganges; das ist 18^h Sternzeit, denn gleichzeitig mit dem Untergange des Herbstpunktes geht der Frühlingspunkt auf, und sechs Stunden später kulminiert letzterer, was 24^h oder nach gewöhnlicher Angabe 0^h Sternzeit sein wird. Um die 18. Sternstunde kulminiert der nördliche Ekliptikpol genau im Zenit unseres Hyperboräers. Wir nehmen an, daß um 18^h die gerade untergehende Mondsichel gesehen werden kann, wenn auch nicht mit unbewaffnetem Auge, doch mit einem Fernrohr, welches sogar Fixsterne bei Tageslicht wahrnehmen läßt. Der Horizont eines Beobachters, dessen Zenit mit dem eben kulminierenden Nordpol der Ekliptik zusammenfällt, deckt sich in diesem Augenblick mit der Ekliptik, denn die Zenitlinie — sie ist die Achse des Horizontes — und die Achse der Ekliptik haben jetzt zwei Punkte gemeinsam: den Sphärenmittelpunkt und die sich deckenden Punkte Zenit und Ekliptikpol, folglich decken sich beide Achsen und ebenso die ihnen zugeordneten Ebenen: Horizont und Ekliptik. — Unter Gesichtskreis und Horizont schlechtweg sei hier immer der wahre Horizont gemeint. Wohl vergeht einige Zeit, bis der Mond aus dem scheinbaren Horizont in den wahren gelangt, aber auf Subtilitäten wollen wir uns bei einer mehr summarischen Betrachtung nicht einlassen, und durch die atmosphärische Strahlenbrechung können wir uns den erforderlichen Weg zum Teil kompensiert denken.

Befindet sich ein Planet oder ein Trabant gleichzeitig mit der Sonne in der Ekliptik, dann steht die Grenzlinie zwischen

seiner beleuchteten und unbeleuchteten Seite senkrecht auf der Ekliptikebene, und das gilt auch für unseren Mond, wenn er einen Knoten passiert, und hat die Lichtgestalt des Mondes die Form einer Sichel, so wird deren Sehne auf der Ekliptik senkrecht stehen; senkrecht zu seinem Gesichtskreis erblickt unser Hyperobäer die Mondsichel im Westpunkte seines Horizontes. Das obere Ende der Sichel wollen wir mit einem X , das untere mit Y markiert denken. Beim erwähnten Stande der Mondsichel wird es nicht angehen, ihre Ränder als östliche und westliche zu unterscheiden; richtiger ist es, die Konvexität als nach Norden, Konkavität nach Süden gerichtet zu bezeichnen, oder die Grenzlinien als rechte und linke auseinander zu halten, wobei der Blick des Beobachters nach Westen gerichtet zu denken ist.

Da der Mond voraussetzungsgemäß im Äquator steht, ein kleiner Teil eines Äquatorbogens zu beiden Seiten des Nachtgleichenpunktes als Teil seiner Tagesbahn angesehen werden kann, so wird es sich so verhalten wie mit Sonnenauf- oder Untergang zur Zeit der Nachtgleichen; allen Bewohnern längs eines Meridianes geht sie im selben Momente auf und unter, und zwar um die sechste Stunde mittlerer Zeit; auch in unserem Falle werden alle Beobachter, welche mit dem genannten Arktiker auf demselben Meridian wohnen, und infolge dessen deren Ost-Westlinie für den besagten Moment des Mondunterganges mit der Verbindungslinie der Nachtgleichenpunkte zusammenfällt, alle werden die Mondsichel gleichzeitig im Westpunkte ihrer Horizonte erblicken, aber die Neigung der Sehne gegen diese Horizonte wird nicht dieselbe, sondern für jeden Beobachter je nach dessen geographischer Breite eine andere sein. Für die nördliche Breite 67° liegt der Zenit $0^{\circ}50'$ nördlich vom himmlischen Polarkreis, der Nordpunkt seines Horizontes $0^{\circ}50'$ tiefer wie für den Polarkreis; beide Horizonte sind $\frac{1}{2}^{\circ}$ gegen einander geneigt, so wie ihre Achsen, nämlich die zu ihnen gehörigen Zenitlinien, und die Sehne der untergehenden Mondsichel steht auf dem Gesichtskreis des mehr nördlichen Beobachters nicht senkrecht, sondern gegen das Lot um $\frac{1}{2}^{\circ}$ nach Süden geneigt, X liegt weiter nach Süden als Y , und für jeden weiter nach Norden gelegenen Meridiangrad nimmt die Neigung um je einen Bogengrad ab; am Nordpol wird der Neigungswinkel der Sehne gegen den Horizont $66^{\circ}50'$ betragen.

Nun gehen wir wieder auf demselben Meridian vom Nordpolarkreis nach Süden hin; mit jedem zurückgelegten Meridian-

grad neigt sich die Sehne um einen Bogengrad nach Norden, *X* liegt nördlicher als *Y*, die Konvexität der Sichel nach rechts von der Blickrichtung. Am südlichen Wendekreis angelangt, ist die Abnahme der Neigung nach Norden auf 90° angewachsen, die Sehne liegt nun völlig horizontal, *X* und *Y* in gleicher Höhe, das Ende *X* nach Norden, die Konvexität der Sichel nach unten gerichtet. Bei dieser Horizontallage wird es unmöglich sein zu unterscheiden, ob zu α oder β zu ergänzen, resp. *C* oder *D* zu lesen ist, da beides gleich berechtigt ist, und schon innerhalb der Tropen kann die mnemotechnische Regel zu einem Irrtum führen, weil das Auge eine schwach geneigte von einer horizontalen Lage nicht sicher unterscheiden kann. Südlich vom Wendekreis des Steinbockes nimmt die Neigung der Sehne gegen den Horizont wieder zu, sie wächst von Null aus bogengradweise mit dem weiteren Vorwärtsschreiten, jetzt aber steht *X* tiefer als *Y*, die Konvexität kehrt sich immer deutlicher nach links von der Blickrichtung, bis es gar nicht mehr zweifelhaft wird, daß die Sichel zu einem α ergänzbar ist; nach römischer Weise hat sie die Form eines *C* und mit der Wahrheit übereinstimmend ist *Crescens* zu lesen, aus *Luna fallax* ist *Luna verax* geworden und bleibt es bis zum irdischen Südpol; dort erscheint die Sehne um 66.5° gegen den Horizont geneigt, *Y* bedeutend höher als *X* und der Sichelrücken nach links, genauer nach links-unten. — Weil die Stellung der Sehne südlich vom Wendekreis des Steinbockes vollständig umgeschlagen hat, die Sichel bis dahin notwendig zu einem β und weiter südlich zu einem α ergänzt werden mußte, so muß im Grenzfalle der Horizontalstellung, in unserem Beispiel am südlichen Wendekreis, unentschieden bleiben, ob β oder α zu lesen ist: *fallax* geht via *Luna anceps* über in *verax*.

Um das bisherige Ergebnis in Kürze zu wiederholen, stellen wir uns vor, ein Flieger steige nach einem Neumond vom Nordpol auf und fahre in der Richtung eines Meridianes durch die Luft zur Zeit, wenn allen seinen südlichen Nachbarn der nördliche Ekliptikpol kulminiert und die im Herbstpunkte stehende Mondsichel eben untergeht. Den Flug denken wir uns bis zum Südpol ausgedehnt und in einem Nu vollendet. Bei der Abfahrt erscheint dem Piloten die Sichelsehne nach Süden geneigt und immer steiler gestellt, unter dem nördlichen Polarkreis steht sie senkrecht auf dem Horizont, neigt sich von da ab nach Norden, unter dem Äquator ist die Neigung auf 23.5° zurückgegangen,

die Konvexität der Sichel immer nach rechts; unter dem südlichen Wendekreis hat sich die Sichel horizontal gelegt mit der Konvexität direkt nach unten, von da ab hebt sich das linke — mit Y markierte — Ende der Sichel, die Konvexität kehrt sich nach links; unter dem südlichen Polarkreis beträgt die Neigung der Sehne 43° , Y nach Süden gerichtet; am Südpol bildet die Sehne mit dem Horizont einen Winkel von 66.5° , und vom südlichen Wendekreis bis zum Südpol gibt die lateinische Mnemotechnik direkt eine richtige Antwort auf die Frage nach der Mondphasenfolge, ohne erst ein *decrescit* in sein Gegenteil umwerten zu müssen. Auf dem durchflogenen Wege hat sich die Sehne relativ zur Horizontlage um 180° gedreht, und einen ebenso großen Winkel hat der Horizont beschrieben um die Ost-Westlinie als Drehachse, welche während dieses Momentanfluges auch Nachtgleichenlinie geblieben ist. Der Horizont des Nordpols hat sein Nadir im Südpol des Himmelsgewölbes und muß sich um einen seiner Durchmesser 180° drehen, um den Südpol des Firmamentes in seinem Zenit zu haben.

Der wahre Horizont eines Beobachters ist auch Horizont seines Antipoden; die am Rande stehende Sichel ist beiden sichtbar, nur bezüglich rechts und links ist ihre Stellung vertauscht. Wenn der Pilot seinen Flug über den Südpol hinaus im selben Meridian bis zum Nordpol fortsetzt, so folgen Bogengradweise die Neigungen in ungestörter Ordnung wieder, wieder eine 'arithmetische Reihe' bildend. Es ist leicht begreiflich, daß die im Raume tatsächlich ruhende Sichel gegen den bewegten Horizont nacheinander alle jene Lagen annimmt, welche eine sukzessive um 360° gedrehte Sichel gegen einen ruhenden Horizont einnehmen würde. Drehachse ist die Ost-Westlinie.

Am Frühstückstische mit einem Wiener 'Kipfel' und einem Teebrett kann man sich diese Verhältnisse ganz klar machen. — Auch ein Ankleidespiegel, um eine horizontale Achse in seinem Gestelle drehbar, ändert seine Neigung gegen die 'Gabel' des fixen Gestelles in derselben Weise wie unsere Mondsichel gegen den Horizont, in arithmetischer Reihenfolge zur gleichförmigen Drehung der Spiegelscheibe.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß *mutatis mutandis* für die aufgehende Sichel — Sichtbarkeit vorausgesetzt — das Gesagte gleichfalls gilt; ebenso für die Sichel kurz vor dem Neumond und für die Sichel im Frühlingspunkt wie im Herbst-

punkt. Auch braucht die Sichel nicht schmal zu sein; bis zum vollen Mondviertel und sogar darüber hinaus wird sich eine Sehne konstruieren lassen, weil die Begrenzung der Lichtgestalt einerseits ein halber Kreis ist, auf der anderen Seite ein flacher Ellipsenbogen, welche beide deutlich gegen einander abgeknickt sind; die Verbindungslinie der Knickungen ist unsere Sehne. Solche Fälle wie: 'Mond in einem Nachtgleichenpunkt' werden nicht ganz extrem selten eintreten, da die Mondknoten selbst in einem Zeitraum von 18.6 Jahren die Ekliptik ganz durchlaufen, welcher Umstand ein viermaliges Zusammentreffen von Knoten mit Nachtgleichenpunkten bedingt, und es ist nicht ausgeschlossen, daß der Mond in irgendeiner günstigen Phase gerade im Nachtgleichenpunkte steht, und ein Polarkreisbewohner muß die Sternzeit 18^h haben, so wie alle Bewohner desselben Erdmeridians. —

Wir haben also, wenn auch nur in einem Spezialfalle, untersucht, welche Lage die Sichelsehne im selben Zeitmomente unter verschiedenen Breiten hat. Wie wir gesehen haben, ändert sich dabei die Lage der Sehne kontinuierlich mit der geographischen Breite, nirgends erfolgt ein Lagewechsel sprunghaft, und daraus können wir schließen, daß in geringer Höhe über dem Horizont oder in einem Knoten, welcher vom Nachtgleichenpunkt nur wenig absteht, bloß ein geringer Neigungsunterschied wahrgenommen werden kann. Wie aber in größerer Erhebung des Mondes über dem Horizont oder bei Mondorten, die vom Knoten weit abstehen, die Lage der Sehne sich gestaltet, soll noch gezeigt werden.

Sonne und Mond wollen wir uns als vollkommen kugelförmig denken und bedienen uns des in der sphärischen Astronomie so bequemen geozentrischen Systemes. Die Tagesbahnen von Sonne und Mond denken wir uns als vollständig kreisförmig; ebenso ihre Jahres-, resp. Monatsbahn. Beide Himmelskörper versetzen wir auf dieselbe Sphäre, auf das sichtbare Himmelsgewölbe, trotzdem die Entfernung der Sonne von der Erde das 400 fache der Mondstanz ausmacht; die Richtung der 'Sehne' hängt nicht ab vom Winkelabstande zwischen Sonne und Mond, gesehen von der Erde aus, vom Winkel, den ihre Visionsradien einschließen, und ebensowenig von der Länge dieser Radien. Hingegen ist die Größe der Lichtgestalt in hohem Grade abhängig vom wahren Distanzverhältnisse beider, von der Länge der Visionsradien. Denken wir uns Sonne und Mond im Horizonte 90° von einander entfernt, so würde bei gleichem linearen Ab-

stande von der Erde etwa $\frac{3}{4}$ der Mondscheibe beleuchtet gesehen; beim tatsächlichen Distanzverhältnisse 1 : 400 ist kaum mehr als die Hälfte der Scheibe beleuchtet zu sehen, aber in beiden Fällen steht die Sehne senkrecht auf dem Horizont, und senkrecht stünde sie auch bei jedem anderen Winkelabstande. Ganz derselbe Unterschied in der Phasengröße ergibt sich, wenn z. B. die Sonne 45° unter dem Horizont und der Mond im selben Höhenkreis 45° über dem Horizont steht, die Sehne aber ist parallel dem Horizont, seien die linearen Abstände von der Erde gleich oder — wie in Wahrheit — der Sonnenabstand das 400 fache von dem des Mondes. Dasselbe gilt von jeder Lage, welche die durch Sonne, Erde und Mond bestimmte Ebene gegen einen Horizont annimmt.

Der Mond kehrt, wie jede Kugel, dem beobachtenden Auge eine Hälfte zu. Die zugewendete wird von der abgewendeten Hälfte durch eine Kreisfläche geschieden, welche auf der Gesichtslinie — Verbindungslinie: Mondmittelpunkt-Auge, für uns gleichbedeutend mit: Mondzentrum-Erdzentrum, weil wir das Auge in den Mittelpunkt des wahren Horizontes verlegen — senkrecht steht. Die Peripherie dieser Kreisfläche wollen wir kurz den Mondrand nennen. — Das Auge übersieht nicht die ganze ihm zugewendete Mondhälfte. Denken wir uns die Gesichtslinie als Achse eines Kegels, dessen Spitze der Horizontmittelpunkt ist, dessen Mantel die Mondoberfläche berührt; diese Berührung geschieht in einem Kreise, der parallel jener scheidenden Ebene und dessen Mittelpunkt, auf der Gesichtslinie liegend, dem Auge näher ist als der Mondmittelpunkt. Es wird aber für die weitere Betrachtung keinen Fehler bringen, wenn wir diesen Kreis als Mondrand betrachten. Die Blickrichtung ist ein Radius des Himmelsgewölbes, und der vom Radius getroffene Teil der Himmelsgewölbeffläche ist ebenfalls senkrecht zur Blicklinie, weil jedes sphärische Flächenelement auf dem zugehörigen Kugelradius senkrecht steht; und auf diesen Gewölbeteil, welcher dem Mondrand parallel ist, erscheint uns die Mondscheibe projiziert als Kreis, denn jede ebene Figur, auf eine ihr parallele Fläche projiziert, behält die Verhältnisse ihrer Dimensionen unverändert bei. — Die Mondscheibe ist vom Mondrand begrenzt; die Scheibe kann ganz dunkel sein (Neumond), ganz erleuchtet (Vollmond) oder irgendeine der Lichtgestalten zeigen.

Die Sonne beleuchtet mehr als die Hälfte der Mondkugel wegen der außerordentlichen Größe ihres Durchmessers. Ein

Kegelmantel, dessen Achse die Zentrallinie Sonne-Mond ist und dessen Oberfläche beide Himmelskörper berührt, tangiert die Mondoerfläche in einem Kreis, dessen Mittelpunkt im Vergleiche zum Mondzentrum von der Sonne abgewendet ist, und dessen Ebene auf der genannten Zentrallinie senkrecht steht; dieser Kreis scheidet die beleuchtete von der dunkeln Mondoerfläche; wir werden sie kurz die Schattengrenze nennen und wieder keinen Fehler begehen, wenn wir sie uns, sich selbst parallel, gegen die Sonne hin bis zum Mondmittelpunkte verschoben denken. Mondscheibe und Schattengrenze decken einander im allgemeinen nicht; auch liegt die Schattengrenze nicht senkrecht zur Gesichtslinie; deshalb erscheint uns die Projektion der Schattengrenze auf das Himmelsgewölbe nicht als Kreis, sondern als Ellipse. Jener Teil der beleuchteten Mondoerfläche, welche durch den Mondrand abgeschnitten wird, bildet ein sphärisches Zweieck: die 'Lichtgestalt'; begrenzt ist sie in Wirklichkeit von zwei Halbkreisen, aber der Halbkreis der Schattengrenze erscheint uns als halbe Ellipse, der Mondrand als Halbkreis. Die konvexe Begrenzung einer Mondsichel gehört also dem Mondrande an, die konkave der Schattengrenze. Die Sehne ist Durchmesser des Mondes, der Schattengrenze und des Mondrandes und wird unverkürzt projiziert.

Eine Ebene, welche durch die Mittelpunkte von Sonne, Erde und Mond geht, wollen wir kurz mit E bezeichnen. E ist ganz unabhängig von einem Horizont. Auch die Lichtgestalt ist unabhängig vom Horizont; wenn wir erstes Viertel haben, hat es die ganze Welt. — Auf der Ebene E senkrecht stehen Mondscheibe und Schattengrenze, weil sie auf je einer in E enthaltenen Geraden senkrecht stehen: Blickrichtung resp. Verbindungslinie Sonne—Mond. Der Durchschnitt von Mondscheibe und Schattengrenze — die 'Sehne' — steht senkrecht auf E , denn wenn zwei Ebenen auf einer dritten Ebene senkrecht stehen, dann steht ihre Durchschnittslinie auf dieser dritten Ebene senkrecht. (Legen wir eine Ebene durch den Mondmittelpunkt senkrecht zur Sehne, dann geht diese Ebene durch Sonnen- und Erdmittelpunkt.) Kennen wir den Winkel, welchen E mit dem durch den Mondmittelpunkt gelegten Höhenkreis einschließt, dann gibt uns das Komplement — n — dieses Winkels die Lage der Sehne gegen den Höhenkreis. Unter Höhenkreis sei nicht bloß die Kreislinie, sondern auch deren Ebene verstanden. Im allgemeinen bestimmt der

Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene nur den Kegelmantel, von welchem jede Seite dieselbe Neigung gegen die Ebene hat. Da jedoch die Mondscheibe auf dem Visionsradius und auf dem Höhenkreise senkrecht steht, ist die Lage der Sehne im Raume durch den Winkel n ganz eindeutig bestimmt. — Welche von den zwei Durchschnittslinien des Kegelmantels mit der Mondscheibe zu wählen ist, wird in speziellen Fällen zu entscheiden sein; es ist jene, welche auf E senkrecht steht. — E geht durch den Fußpunkt des Beobachters; die Sonne ist in einer Hälfte von E zu suchen, gegen welche die halbkreisförmige Begrenzung der Lichtgestalt hinweist. — —

Zunächst sollen einige Fragen anschaulich beantwortet werden.

1. Wann liegt die Sehne in der Ebene des Höhenkreises? Mit der Forderung: 'Sehne im Höhenkreis' ist die Lage der Ebene E , in welcher auch die Sonne liegen muß, schon vollkommen bestimmt. Diese Ebene enthält immer den Visionsradius in sich und die Sehne steht senkrecht zu ihr. E könnte aber um den Visionsradius ausgiebigst gedreht werden; durch die Bedingung, daß die Sehne im Höhenkreise liegen soll, wird E wie in einer Lage senkrecht zum Höhenkreis festgenagelt; denn eine Ebene, welche auf einer Geraden in einer zweiten Ebene senkrecht stehen soll, steht auch zur (zweiten) Ebene, welche diese Gerade enthält, senkrecht. Die Mondscheibe wird vom Höhenkreis in einem Durchmesser geschnitten, welcher im Höhenkreis liegt, und wo immer in E die Sonne stehen mag, wird die Schattengrenze durch denselben Monddurchmesser gehen müssen; dieser Durchmesser ist 'Sehne'. Wenn also die Sehne im Höhenkreise des Mondes liegen soll, dann muß E auf dem Höhenkreise des Mondes senkrecht stehen. Gegen den Horizont ist eine solche Sehne unter einem Winkel geneigt, welcher die Mondhöhe zu einem Rechten ergänzt; nur am Horizontrande kann eine Sehne auf dem Horizont senkrecht stehen; jedes andere Bogenelement des Höhenkreises liegt schief gegen den Horizont. — Der Horizont ist zu jedem Höhenkreis senkrecht; befinden sich also Sonne und Mond im Horizonte, dann ist die Sehne notwendig senkrecht auf dem Horizont, wie weit auch beide Himmelskörper von einander abstehen.

2. Wann steht die Sehne senkrecht zum Höhenkreis? Notwendig senkrecht zu E , soll die Sehne auch auf dem Höhenkreise

senkrecht stehen; dann muß E mit der Ebene des Höhenkreises sich decken. In diesem Falle liegt die Sehne dem Horizont parallel.

Wenn Sonne und Mond in gleicher, von Null verschiedener Höhe über dem Horizonte stehen, dann liegen sie symmetrisch zu einem Höhenkreis, der ihren Abstand halbiert, und die Sehne liegt nicht im Höhenkreis des Mondes. E liegt in diesem Falle senkrecht auf dem halbierenden Höhenkreis, aber nicht senkrecht auf dem des Mondes.

3. Sonnenort S und Mondort M seien für einen Zeitmoment gegeben; man suche den Horizont, für welchen zur selben Zeit die Sichelsehne unter einem ganz bestimmten Winkel n gegen den Höhenkreis des Mondes geneigt ist? Durch S und M ist E gegeben. E ist der Horizont, auf welchem die Sehne senkrecht steht, im Fußpunkte des Höhenkreises in die Ebene dieses Kreises hinein fällt. Durch M und den Erdmittelpunkt denke man sich eine Gerade (es ist der Visionsradius) und um diese als Achse werde E um einen Winkel $90^\circ - n$ gedreht, das ist der gesuchte Horizont. Eine Normalebene, durch die genannte Drehachse gelegt, ist der Höhenkreis des Mondes. Im Horizonte stehend ist die Sehne um den Winkel n gegen den Höhenkreis geneigt, und jeder Punkt dieses Höhenkreises ist ein Zenit, dessen Träger den Mond um denselben Winkel n gegen den Höhenkreis geneigt erblickt. Die gestellte Frage kann also auf unzählige Arten beantwortet werden, so viele als ein Quadrant des Höhenkreises Punkte hat, und die Aufgabe kann noch dahin spezialisiert werden: Welches ist der Horizont, von welchem aus die Sichel in der gegebenen Höhe h_2 unter der ganz bestimmten Neigung n gegen den Höhenkreis gesehen wird? Aber auch in diesem Fall wird man zuerst den Horizont suchen, an dessen Rand die Sichel die vorgeschriebene Neigung hat, und durch Drehung um die Achse des Höhenkreises im Betrage h_2 Bogengerade jenen Horizont erreichen, über welchem die Sichel in der vorgeschriebenen Höhe gesehen wird. — Die Operationen können auf den Globus übertragen werden, der Horizont durch eine zweite, der Höhenkreis durch eine dritte Gummischleife versinnlicht werden, wie aus dem unmittelbar Folgenden zu entnehmen ist. —

Deckt E nicht den Höhenkreis des Mondes und steht auch nicht senkrecht auf demselben, dann kann der Winkel n durch ein mechanisches Verfahren oder durch Rechnung gefunden werden. Für ersteres dient ein Globus. Nach dem astronomischen Kalender bestimmt man den Sonnenort S und den Mondort M für die gegebene Zeit nach Rektaszension und Deklination, markiert diese Orte auf dem Globus durch Punkte mit dem Bleistift oder durch aufgeklebte ganz kleine Wachskügelchen, nimmt den Globus aus seinem Gestelle, legt durch die markierten Punkte eine genügend feine Gummischleife um den Globus, so daß die Kreisebene der Schleife durch den Kugelmittelpunkt

geht; das ist daran zu merken, daß die ausgezogene Schleife nach keiner Seite hin leicht abrutscht. Der gespannte Gummifaden stellt den Durchschnitt von E mit der Kugel vor.

Nun wird der Globus wieder zurückgelegt und nach Polhöhe eingestellt. Ein jedem Globus beigegebener, biegsamer, nach Graden geteilter Messingstreifen wird im Zenit des Meridiankreises befestigt, daß er durch M durchgeht, somit den Höhenkreis des Mondes vorstellt. Ein rechtwinkeliges Dreieck, aus einer biegsamen Kautschuklamelle geschnitten, wird mit dem Scheitel seines rechten Winkels an M so angelegt, daß seine Kathete längs des Gummifadens zu liegen kommt; der Winkel, den die zweite Kathete mit dem Höhenkreis bildet, ist der gesuchte Winkel n , unter welchem die Sehne gegen den Höhenkreis geneigt ist. n kann abgeschätzt werden oder genauer gemessen, wenn man sich statt des Dreieckes einer gläsernen Kalotte bedient, welche nach dem Kugelradius gekrümmt und mit geätzter Gradteilung versehen ist.

Zur Rechnung des Winkels n benützen wir Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Raumes. Als eine Koordinatenebene gelte der Horizont, als Anfangspunkt dessen Mittelpunkt O ; die Mittagslinie sei x -Achse, die Ost-Westlinie Achse der y , die Zenitlinie sei z -Achse. Die Gleichung einer Ebene ist ganz allgemein: $Ax + By + Cz = D$. D wird Null, wenn die Ebene durch den Anfangspunkt der Koordinaten geht, und nur mit solchen Ebenen werden wir es zu tun haben. Die Lage von E ist durch drei Punkte bestimmt: S, M, O , nämlich: Sonnenort, Mondort, Koordinatenanfang (vorausgesetzt ist, daß diese drei Punkte nicht in einer Geraden liegen). h_1 ist die Höhe der Sonne über oder unter dem Horizont, h_2 die des Mondes, ω_1 respektive ω_2 sind die Azimute, sie werden übereinkunftsgemäß vom Südpunkte aus gezählt. Radius des sichtbaren Himmelsgewölbes sei 1. Die Verbindungslinie OS auf den Horizont projiziert ist $\cos h_1$; das Lot von der Sonne auf den Horizont gefällt ist $\sin h_1 = z_1$; $x_1 = \cos \omega_1 \cos h_1$; $y_1 = \sin \omega_1 \cos h_1$. Ganz analog haben wir für den Mondmittelpunkt M $x_2 = \cos \omega_2 \cos h_2$; $y_2 = \sin \omega_2 \cos h_2$; $z_2 = \sin h_2$ und für den Koordinatenmittelpunkt O $x_3 = y_3 = z_3 = 0$. Diese speziellen Koordinatenwerte nacheinander in die Gleichung $Ax + By + Cz = 0$ eingeführt, liefern drei Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten A, B und C , und durch Elimination erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} A &= \sin \omega_1 \cos h_1 \sin h_2 & - \sin \omega_2 \cos h_2 \sin h_1 \\ B &= \cos \omega_2 \sin h_1 \cos h_2 & - \cos \omega_1 \cos h_1 \sin h_2 \\ C &= \cos \omega_1 \sin \omega_2 \cos h_1 \cos h_2 & - \sin \omega_1 \cos \omega_2 \cos h_1 \cos h_2 \end{aligned} \right\} 1)$$

Die letzte Gleichung kann auch geschrieben werden:

$$C = \cos h_1 \cos h_2 \sin (\omega_2 - \omega_1).$$

Die Ebene des Höhenkreises, in welchem der Mondmittelpunkt M liegt, geht durch folgende Punkte: 1. Fußpunkt des Höhenkreises, 2. Zenit, 3. Koordinatenanfang.

$$\begin{array}{lll} x_1 = \cos \omega_2 & x_2 = 0 & x_3 = 0 \\ y_1 = \sin \omega_2 & y_2 = 0 & y_3 = 0 \\ z_1 = 0 & z_2 = 1 & z_3 = 0. \end{array}$$

Die Koeffizienten der Gleichung: $A'x + B'y + C'z = 0$ sind: $A' = \sin \omega_2$, $B' = -\cos \omega_2$, $C' = 0$; $x \sin \omega_2 - y \cos \omega_2 = 0$ ist die Gleichung des Höhenkreises, in welchem der Mond steht; als Vertikalebene bezeichnen wir ihn mit V . Den Neigungs- (oder Flächen-)winkel beider Ebenen gegen einander, welche Ebenen durch Gleichungen charakterisiert sind, bezeichnen wir mit (E, V) ; im allgemeinen Werte von

$$\cos (E, V) = \pm \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

entfällt für uns das CC' im Zähler, im Nenner gibt der zweite Wurzel Ausdruck die Einheit. Für das Komplement $-n$ des Flächenwinkels erhalten wir die Formel:

$$\sin n = \pm \frac{AA' + BB'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \dots \dots \dots 2)$$

durch Substitution kommt für den Zähler nach leicht auszuführender Reduktion:

$$AA' + BB' = \cos h_1 \sin h_2 \cos (\omega_2 - \omega_1) - \sin h_1 \cos h_2 \dots \dots 3)$$

Es ist begreiflich, daß ω_1 und ω_2 nur als Differenz vorkommen. Wir haben die Azimute vom Südpunkt aus gezählt; das ist willkürlich, wir hätten auch von jedem anderen Punkte des Horizontes zählen können; das ändert die Einzelwerte der Azimute, aber nicht ihre Differenz. Bei der Angabe der Höhen h_1 und h_2 ist jede Willkür ausgeschlossen; sie können nur vom Horizonte aus gerechnet sein; wenn Höhen über dem Horizont als $+$ zählen, werden die Tiefen unter dem Horizont als negative Höhen zu rechnen sein, die Basis für die Zählung ist aber immer der Horizont. Zu erwarten ist, daß auch im Nenner nach

Substitution aus 1) in den Argumenten der Winkelfunktionen Azimute nur in Differenzen erscheinen; der Wert des n kann nicht davon abhängen, von welchem Punkte aus Azimute gezählt werden.

Nach leicht auszuführenden Reduktionen kommt:

$$\left. \begin{aligned} A^2 + B^2 &= \sin^2 h_2 \cos^2 h_1 + \sin^2 h_1 \cos^2 h_2 - 2 \sin h_1 \sin h_2 \cos h_1 \cos h_2 \cos (\omega_2 - \omega_1) \\ C^2 &= \cos^2 h_1 \cos^2 h_2 \sin^2 (\omega_2 - \omega_1) \end{aligned} \right\} 4)$$

Die Azimute erscheinen auch hier nur als Differenzen. Der Sinus des Azimutunterschiedes kommt im Quadrate; auch das hat seinen guten Grund. Wenn $\omega_2 - \omega_1$ vom Südpunkt oder von irgendher nach rechts herum — im Drehsinne des Uhrzeigers — gezählt, + ist, dann ist es im umgekehrten Sinne gezählt negativ, und wieder kann die Größe des Winkels n nicht davon abhängen, nach welcher — doch ganz willkürlichen — Drehrichtung die Azimute gezählt wurden; deshalb mußte der Sinus in einer geraden Potenz erscheinen; sein Quadrat ist in jedem Falle positiv. In $\cos (\omega_2 - \omega_1)$ ist das Vorzeichen der Azimutdifferenz gleichgültig, weil es am Zeichen des Cosinus nichts ändert; es genügt also beim Cosinus die erste Potenz sowie beim Sinus der kleinste geradzahlige Exponent: auch Rechnungsformeln beobachten eine gewisse Ökonomie. (Der Grund dieser Sparsamkeit ist hier, daß einer zweiten Potenz zwei Wurzelwerte entsprechen, nicht mehr und nicht weniger, so wie dem Cosinus zwei Kreisbogen, ein positiver und ein negativer.)

Die Gleichungen sollen an speziellen Fällen geprüft werden. Wann liegt die Sehne im Höhenkreise des Mondes? Das heißt, $\sin n$ soll gleich Null sein:

$$\begin{aligned} AA' + BB' &= \sin h_2 \cos h_1 \cos (\omega_2 - \omega_1) - \sin h_2 \cos h_2 = 0 \\ \text{oder} \quad \cot h_2 &= \cot h_1 \cos (\omega_2 - \omega_1) \end{aligned}$$

Zur Höhe h_1 gehört die Zenitdistanz ζ_1 und ζ_2 zu h_2 . Die Cotangente der Höhe ist Tangente der Zenitdistanz; daher

$$\tan \zeta_2 = \tan \zeta_1 \cos (\omega_2 - \omega_1) \dots \dots \dots 5)$$

Die trigonometrische Tangente vom Zenitabstande des Mondes ist gleich dem Produkte aus Tangente des Sonnenzenitabstandes in den Cosinus der Azimutdifferenz. Das erinnert an einen Satz der sphärischen Trigonometrie: Im rechtwinkligen sphärischen Dreieck ist die Tangente einer Kathete gleich dem Produkte aus Tangente der Hypotenuse und Cosinus des der Kathete anliegenden schiefen Winkels. Besteht die Gleichung 5), dann ist das sphärische Dreieck ein rechtwinkeliges; $(\omega_2 - \omega_1)$ ist der schiefe

Winkel, ζ_1 ist Hypotenuse, ζ_2 Kathete; der rechte Winkel hat seinen Scheitel im Mondmittelpunkt M , der Höhenkreis des Mondes steht senkrecht auf E , dann liegt die Sehne im Höhenkreis. Die Neigung der Sehne gegen den Horizont ist in diesem Falle $90^\circ - h_2$. Nur wenn $h_2 = 0$ ist, steht die Sehne senkrecht auf dem Horizont.

Wann liegt die Sehne dem Horizonte parallel? Dann steht die Sehne auf dem Höhenkreis des Mondes senkrecht; $n = 90^\circ$ $\sin n = 1$, $\sin^2 n = 1$; $(AA' + BB')^2 = A^2 + B^2 + C^2$. Durch Substitution der Koeffizientenwerte gelangen wir zur Bedingungs-gleichung:

$$\sin^2 (\omega_2 - \omega_1) = 0; \quad \omega_2 - \omega_1 = 0, 180^\circ.$$

Sonne und Mond stehen im selben Höhenkreis oder in zwei einander gegenüberliegenden Höhenkreisen, dann liegt die Sehne parallel dem Horizont.

Der auf S. 178 erwähnte Fall: Sonne und Mond in gleicher Höhe über den Horizont, gestaltet sich rechnerisch in der folgenden Weise:

$$h_1 = h_2 = h$$

$$A = \sin h \cos h (\sin \omega_1 - \sin \omega_2)$$

$$A' = \sin \omega_2$$

$$B = \sin h \cos h (\cos \omega_2 - \cos \omega_1)$$

$$B' = -\cos \omega_2$$

$$C = \cos^2 h \sin (\omega_2 - \omega_1)$$

$$AA' = \sin h \cos h \sin \omega_2 (\sin \omega_1 - \sin \omega_2)$$

$$BB' = -\sin h \cos h \cos \omega_2 (\cos \omega_2 - \cos \omega_1)$$

$$AA' + BB' = \sin h \cos h [\cos \omega_2 (\omega_2 - \omega_1) - 1].$$

Aus diesem Zähler des Bruches von $\sin n$ ist zu entnehmen, daß die Sehne nicht in den Höhenkreis hineinfällt, denn der Ausdruck wird Null nur, wenn $\omega_2 = \omega_1$ — Sonne und Mond bei gleicher Höhe im selben Höhenkreis; dann wird auch der Nenner von $\sin n$ zu Null, die Richtung der Sehne ganz unbestimmt; wir haben den Fall einer totalen Sonnenfinsternis. Zweitens wird dieses $\sin n = 0$, wenn $h = 0$, Sonne und Mond bei ungleichen Azimuten beide im Horizonte stehen, was auf S. 177 schon besprochen wurde.

n ist die Neigung der Sichelsehne gegen den Höhenkreis des Mondes; der Höhenkreis steht auf dem Horizont senkrecht

— $(V, H) = 90^\circ$ —; es entsteht die Frage: Läßt sich die räumliche Lage der Sehne auch durch deren Neigung gegen den Horizont bestimmen, etwa als Komplement von n ?

Die Ebene des Horizontes heiße H ; sie ist Basis unseres Koordinatensystemes und ihre Gleichung lautet $z = 0$. Die Koeffizienten A, B, C in der allgemeinen Gleichung einer Ebene werden für den Horizont $A'' = 0, B'' = 0, C'' = 1$. (E, H) ist das Zeichen für den Winkel, unter welchem E gegen H geneigt ist.

$$\cos (E, H) = \frac{CC''}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

ν sei der Winkel, welcher (E, H) zu 90° ergänzt. C ist $\cos h_1 \cos h_2 \sin (\omega_2 - \omega_1)$ und dasselbe ist CC'' .

$$\sin^2 \nu = \frac{\cos^2 h_1 \cos^2 h_2 \sin^2 (\omega_2 - \omega_1)}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Der Zähler dieses Bruches ist noch einfacher als jener für $\sin^2 n$, aber ν ist nicht das Komplement des Winkels n und gibt keinen Aufschluß über die Richtung der Sehne.

E, H und V sind die drei Seiten einer rechtwinkligen Körperecke, (H, V) ist der rechte Winkel; die Summe der beiden schiefen Winkel: $(E, H) + (E, V) > 90^\circ$; die Summe ihrer Komplemente: $n + \nu$ ist unbestimmt, aber stets kleiner als 90° .

Die genannten Seiten und Winkel sind nicht besonders leicht vorstellbar. Eine perspektivische Zeichnung würde von geringem Nutzen sein; die räumliche Deutung dieser ebenen Figur würde noch schwieriger sein als die direkte Vorstellung und noch weniger sicher; es soll daher die Buchstabenrechnung zur Kontrolle herangezogen werden:

Wenn ν das Komplement von n sein sollte, dann müßten die Quadrate ihrer Sinus die Einheit zur Summe geben. Da die Nenner beider gleich sind, nämlich $A^2 + B^2 + C^2$, so müßten die Zähler addiert dieselbe Summe bringen:

$$(AA' + BB')^2 + CC''^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

Nach Substitution aus 3) und 4) kommen links und rechts vom Gleichheitszeichen je vier Glieder, von denen drei identisch sind. Damit $\nu = 90^\circ - n$ werde, ist erforderlich, daß auch die vierten Glieder einander gleich werden, nämlich

$$\sin^2 h_2 \cos^2 h_1 = \sin^2 h_2 \cos^2 h_1 \cos^2 (\omega_2 - \omega_1) \quad 6)$$

Diese Gleichung ist erfüllt erstens, wenn $\omega_2 = \omega_1$, Mond und Sonne im selben Höhenkreise liegen oder in einander diametral gegenüberstehenden. Wir wissen bereits, daß die Sehne dann dem Horizont parallel ist und senkrecht steht auf dem Höhenkreis; $n = 90^\circ$, $\nu = 0$.

2. Wenn $h_2 = 0$, der Mond also im Horizont steht; dann steht die Mondscheibe senkrecht auf dem Horizont, in ihrer Ebene liegt die Sehne, und wie immer diese gerichtet sein mag, ist ihre Neigung gegen den Horizont komplementär ihrer Neigung gegen den Höhenkreis, $\nu + n = 90^\circ$; h_1 und $\omega_2 - \omega_1$ erleiden keinerlei Einschränkung.

3. Wenn $h_1 = \pm 90^\circ$; die Sonne steht im Zenit oder im Nadir; ω_1 ist dann unbestimmbar, da alle Höhenkreise diese zwei Punkte gemeinsam haben und eben deshalb stehen dann Sonne und Mond im selben Höhenkreis; die Sehne ist dem Horizonte parallel, also senkrecht auf dem Höhenkreis des Mondes.

Hätten wir die Gleichung 6) durch $\sin^2 h_2 \cos^2 h_1$ beiderseits dividiert, so wären die — doch ganz berechtigten — Lösungen 2) und 3) gar nicht zum Vorschein gekommen.

Durch die Neigung der Sehne gegen den Horizont ist die räumliche Richtung dieser Sehne nicht hinreichend bestimmt; das ist aus einem Grenzfall leicht zu ersehen: der Mond befinde sich im Zenit, dann ist die Sehne, wenn sie existiert, unbedingt horizontal, kann aber von Ost nach West, von Süd nach Nord verlaufen, und keine Zwischenrichtung ist ausgeschlossen. Eine Uhr sei an der Zimmerdecke angebracht, so, daß das Zifferblatt horizontal ist; der Zeiger bleibt immer dem Fußboden parallel, nimmt aber, während er die Stunden durchläuft, ungezählt verschiedene Richtungen an. — $A^2 + B^2 + C^2$ wird für den zenitalen Mond $\cos^2 h_1$, aus $(AA' + BB')^2$ wird $\cos^2 h_1 \cos^2 (\omega_2 - \omega_1)$;

$$\sin n = \cos (\omega_2 - \omega_1),$$

das ist nicht bestimmbar, weil ω_2 alle Werte haben kann; die Gleichung genügt also jedem zwischen 0 und 1 gelegenen Wert von $\sin n$.

Die Neigung der Sehne gegen den Horizont bestimmt nur einen geometrischen Ort, einen Kegelmantel, welcher die Sehne als eine Seite enthält. Steht der Mond im Horizont, dann gibt der Durchschnitt des Mantels mit der auf dem Horizont senkrecht stehenden Mondscheibe die Lage der Sehne. Nehmen wir

hier das Wort „Horizont“ nicht gar zu wörtlich, dann können wir behaupten: bei Tiefstand des Mondes kann die Lage der Sehne richtig beurteilt werden sowohl im Vergleich zur wagrechten Ebene, als auch nach dem Höhenkreis; beim Hochstande werden wir diese Lage, wenn auch unbewußt, nach der Ebene jenes Höhenkreises bemessen, in welcher der Mond steht.

Um n zu rechnen, müssen die Horizontkoordinaten Azimut und Höhe für Sonne und Mond bekannt sein. Im astronomischen Kalender sind nur Äquatorkoordinaten angegeben, aus diesen müßten h und ω für Sonne und Mond gerechnet werden nach den Formeln:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos s \quad 7)$$

und

$$\cos \omega = \frac{\sin \varphi \cos \delta \cos s - \cos \varphi \sin \delta}{\sqrt{1 - \sin^2 h}} \quad 8)$$

(das $\sin h$ hinter dem Quadratwurzelzeichen im Nenner ist schon bekannt aus 7).

φ bedeutet geographische Breite, δ Deklination, s Stundenwinkel; letzterer kann aus Rektaszension und Sternzeit gefunden werden. Mechanisch kann die Umwertung von Rektaszension und Deklination in Azimut und Höhe mit Hilfe des Himmelsglobus ausgeführt werden.

Die Gleichung für $\sin n$ zeigt nicht unmittelbar, in welcher Weise die Lage der Sichel abhängig ist von Ort, Tag und Stunde. Die Einführung der Winkelfunktionen von h und ω aus 7, 8) würde zu ganz unhandlichen Ausdrücken führen; es wird daher besser sein, h und ω von Fall zu Fall aus 7) und 8) numerisch zu bestimmen oder den Globus zu verwenden.

Schon die geometrischen Betrachtungen sowie die Formel für $\sin n$ lassen darauf schließen, daß jede Lage der Sehne überall vorkommen kann, auch die Extreme $n = 0$ und $n = 90^\circ$. Wohl ist h_1 nur innerhalb der Grenzen $\pm (90^\circ - \varphi + e)$, d. i. Äquatורהöhe + Ekliptikschiefe, eingeschlossen; h_2 muß unbedingt positiv sein, sonst ist der Mond unsichtbar, aber der Grenzwert liegt bis 5° höher als für h_1 , nämlich um die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik; hingegen hindert nichts, daß Mond und Sonne im selben Höhenkreis liegen, oder daß die Ebene, welche durch Sonnen-, Erd- und Mondmittelpunkt geht, senkrecht stehe auf

dem Höhenkreis des Mondes. Jede aufgegebene Stellung der Sehne hat eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit für sich, auch tatsächlich einzutreffen, aber eine jede ist möglich.

Nur der Fall $n = 90^\circ$ soll auch in Äquatorkoordinaten behandelt werden.

$\sin(\omega_2 - \omega_1) = 0$, weil Sonne und Mond im selben Höhenkreise stehen müssen.

$$\sin \omega_2 \cos \omega_1 = \cos \omega_2 \sin \omega_1 \quad \text{oder}$$

$$\tan \omega_2 = \tan \omega_1.$$

Für $\cos \omega$ aus der Formel 8) eingeführt und für $\sqrt{1 - \cos^2 \omega}$ aus derselben Formel erhalten wir:

$$\frac{\cos \delta_1 \sin s_1}{\sin \varphi \cos \delta_1 \cos s_1 - \cos \varphi \sin \delta_1} = \frac{\cos \delta_2 \sin s_2}{\sin \varphi \cos \delta_2 \cos s_2 - \cos \varphi \sin \delta_2}$$

$$\tan \varphi = \frac{\tan \delta_2 \sin s_1 - \tan \delta_1 \sin s_2}{\sin(s_2 - s_1)}.$$

Für jede Angabe von Deklination und Stundenwinkel wird sich ein Erdenort finden, wo die Sehne dem dortigen Horizonte parallel liegt.

Für $\varphi = 0$ ist $\sin s_1 : \sin s_2 = \tan \delta_1 : \tan \delta_2$; bei horizontaler Mondsichellage unter dem Erdäquator verhalten sich die Sinus der Stundenwinkel von Sonne und Mond wie die trigonometrischen Tangenten ihrer Deklinationen.

$$\text{Für } \delta_1 = \delta_2 = 0 \text{ ist } \sin s_1 : \sin s_2 = \frac{0}{0}.$$

Für jedes beliebige Stundenwinkelverhältnis ist die Sehne dem Horizont parallel. Unter dem Erdäquator und Sonne und Mond im Himmelsäquator besteht dieser Parallelismus, weil für den Horizont des Äquators der Himmelsäquator Höhenkreis ist.

Für $\varphi = 90^\circ$, $\tan \varphi = \infty$ ist $s_2 - s_1 = 0, 180^\circ$; am Pol sind die Höhenkreise zugleich Stunden(oder Deklinations)kreise; wenn Sonne und Mond im selben Stundenkreise stehen, so befinden sie sich auch im selben Höhenkreise und die Sehne ist dem Horizont — hier der Äquator — parallel.

Auf Grundlage der Ebene E können allgemeine Schlußfolgerungen gezogen werden. In E liegen die Mittelpunkte von Sonne, Erde und Mond, auf E steht die Mondsichel senkrecht; E ist wahrer Horizont zweier Erdbewohner, deren Zenitlinie —

die Senkrechte im Mittelpunkt — die Achse von E ist, und die Pole dieser Achse — ihre Durchschnittspunkte mit dem Himmelsgewölbe — sind die Zenite zweier Antipoden. Diese beiden sehen im selben Zeitmomente die Sichel am Rande ihres Horizontes in vertikaler Stellung, sonst aber sieht sie niemand in gleicher Stellung. Im nächsten Zeitmoment ist die Lage von E eine andere infolge der Ortsveränderung von Sonne und Mond; jetzt sind es zwei andere, welche die Sichel vertikal am Rande ihres Horizontes erblicken; und so wird sich dies nacheinander bei immer anderen Antipoden ereignen. Zu jeder Ebene, welche auf E senkrecht steht, liegt die Sichel parallel, und solche Ebenen gibt es unzählige. E schneidet das Himmelsgewölbe in einem größten Kreis; jeder von den unzähligen Durchmessern dieses Kreises ist Zenitlinie zweier Erdbewohner, zu deren Horizonten parallel liegt dieselbe Sichelsehne, welche die Vorgenannten als senkrecht erblicken. Auf allen von den zahllosen Horizonten, für welche im selben Momente die Mondhöhe positiv ist, wird die Sichel horizontal gesehen, wenn auch in verschiedener Höhe. Während also nur zwei die Sichel senkrecht sehen, sieht eine enorm große Anzahl die Sichel wagrecht; der Vertikalstand ist somit außerordentlich viel seltener zu beobachten als die Horizontallage der Sehne. Der Gummifaden, um den Globus gespannt (S. 178), versinnlicht die Ortslinie der Zenite, zu deren Horizonten die Sehne parallel liegt. Diese Ortslinie ist gegen den Äquator geneigt; die verschiedenen Abstände ihrer einzelnen Punkte vom Äquator zeigen die Mannigfaltigkeit in der geographischen Breite der einzelnen Horizonte. Denkt man sich den Globus um die Achse der Fadenschleife herumgedreht, dann beschreibt die 'Weltachse' einen (Doppel-) Kegelmantel, welcher diese Verschiedenheit in den Polhöhen in sich begreift, da jede Seite von der einen Hälfte dieses Kegels eine andere Neigung gegen den — als 'Horizont' bezeichneten — Rand des Globusgestelles hat.

Der senkrechte Stand der Sichel ist wohl ein isolierter Fall, ist aber doch nur ein spezieller Fall von 'Sehne im Höhenkreis', und Sehne im Höhenkreis, also $n=0$, ist nicht weniger wahrscheinlich als jeder andere Wert von n , aber nur eine dieser Sehnen steht auf dem Horizont senkrecht.

Die Zenitdistanz des Mondortes M sei ζ . Durch M und den Erdmittelpunkt denken wir uns eine Gerade gelegt und um diese Gerade als Achse eine volle Drehung der Himmelskugel

ausgeführt; oder wir denken uns ζ zwischen zwei Zirkelspitzen gefaßt, setzen in M ein und beschreiben mit ζ als sphärischem Radius einen vollen Kreis auf der Himmelskugel. Dieser Kreis ist die Ortslinie aller Zenite, von welchen der Mondort den gleichen Abstand, ζ , besitzt; über den zugeordneten Horizonten steht der Mond in gleicher Höhe, h_2 ; man könnte solche Kreise 'Isohypsen' nennen. Den erwähnten Kreis am Himmelsgewölbe denken wir uns als Basis eines Kegels, dessen Scheitel der Erdmittelpunkt ist; der Mantel schneidet die Erdoberfläche in einem Kreise, den Fußpunkten der Beobachter in jenen Horizonten, und in diesem Fußpunktekreis fortschreitend, ihn im Nu durchfliegend, wird die Sehne nacheinander in allen möglichen Lagen erblickt, und die Winkelwerte ihrer Neigung gegen den Höhenkreis folgen in einer arithmetischen Reihe, was am leichtesten durch die erwähnte Drehung um die Achse Mond—Erde vorstellbar ist: für jeden Grad der Drehung ändert sich die Neigung gegen den Höhenkreis um einen Grad. Gehen wir von der Horizontallage aus; nachdem ein Viertelkreis durchmessen ist, liegt die Sehne im Höhenkreis, nach weiteren 90° steht sie wieder senkrecht auf ihrem Höhenkreis oder parallel zum dortigen Horizont usw. Die Reihe der Neigungswinkel ist eine periodische; wir hätten auch von einem beliebigen n ausgehen können. Für jeden Punkt des Himmelsgewölbes als Zenit kann ein solcher Ortslinienkreis konstruiert werden.

Die Sichtbarkeit der Sehne ist an die Bedingung geknüpft: Mond nicht unter dem Horizont. Der Kreis mit dem Radius ζ ist im allgemeinen kein größter Kreis der Sphäre. Wenn, wie im eingangs angeführten Beispiel (S. 170), der Mond im Westpunkte des Horizontes steht, $h_2 = 0$, $\zeta = 90^\circ$ ist, dann deckt der vom Mittelpunkte der Horizontalsehne aus mit dem Radius $\zeta = 90^\circ$ beschriebene Kreis den Meridian; die vertikale Sehne ist von der horizontalen 90° entfernt und die aufeinanderfolgenden Neigungswinkel bilden eine arithmetische Reihe, ebenso deren Komplemente, welche letztere die Neigungswinkel gegen die Höhenkreise vorstellen; im Horizont wird ja durch beide Neigungswinkel die räumliche Lage der Sehne eindeutig bestimmt.

Für $h_2 = 90^\circ$, $\zeta = 0$ schrumpft der mit Zenitdistanz Null beschriebene Kreis auf einen Punkt zusammen: steht die Mondichel im Zenit, dann liegt die Sehne zu einem der Höhenkreise senkrecht; der Beobachter blicke diesen an; er hat keinen Flug zu

vollführen, hat sich nur um seinen Absatz zu drehen, um die Höhenkreise nacheinander vis-à-vis zu haben; der Winkel α ändert sich gegen die übrigen Höhenkreise in arithmetischer Aufeinanderfolge.

ζ kann alle beliebigen Werte haben von 0 bis 90° ; wir erhalten eine Schar von Isohypsen. Ein System größter Kreise, welche alle den Mondort M gemeinsam haben, schneidet die Isohypsen rechtwinkelig, sie sind orthogonale Trajektorien der Isohypsen und könnten 'Isoklinen' genannt werden: jeder von diesen größten Kreisen ist Ortslinie aller Zenite, von deren zugeordneten Horizonten die Sehne in derselben Neigung gegen den Höhenkreis des Mondes gesehen wird. Wohl ist der Ausdruck 'Isoklinen' schon vergeben, aber es wird erlaubt sein, ihn dem Vokabular des Erdmagnetismus zu entlehnen, nur temporär, als schwebende Schuld mit kurzer Laufzeit.

M ist 'Pol' der genannten Kreissysteme; mit dem Monde ändern sie ihre Lage am Himmelsgewölbe fortwährend.

Von der Lage der Ebene E im Himmelsgewölbe hängt es ab, wie die Lage der Sichelsehne in verschiedenen Horizonten gegen ihren zum Horizont gehörigen Höhenkreis sich gestaltet. E kann jede Lage haben: die Ebene kann mit dem Äquator zusammenfallen, wenn Mond und Sonne im Äquator stehen, was doch ganz gut möglich ist. E kann auch durch die Himmelspole gehen: wenn Mond und Sonne im gleichen Stundenkreise liegen, und die Ebene kann auch alle Zwischenlagen annehmen. Am häufigsten wird E das Himmelsgewölbe in dem breiten Gürtel zu beiden Seiten des Äquators bis über die Wendekreise hinaus schneiden. Ganz außerhalb des Gürtels kann dieser Schnitt nicht liegen, er ist Ortslinie der Zenite, zu deren zugeordneten Horizonten die Sehne parallel liegt, gleichbedeutend mit: senkrecht auf dem Höhenkreis; dieser Schnitt ist die 'Umschlagsstelle' für die Neigung der Sehne gegen den Höhenkreis; hier erfährt die Mondphasenregel ihre Ausnahmen und hier schlägt sie um in ihr Gegenteil; dies geschieht „gegen den Äquator hin und in südlichen Parallelkreisen“, wie oben S. 169 zitiert. Die Regel wird dort unverläßlich wegen öfterer Horizontallage der Sehne; dies tritt häufiger ein aus zwei Gründen: erstens, daß die Ebene Sonne—Erde—Mond vorzugsweise im Tropengürtel liegt und mit ihrem großen Anteil immer in diesem Gürtel liegen muß; zweitens kann dort der Mond in den Zenit gelangen oder in dessen große

Nähe, was ebenfalls eine Horizontalsehne zur Folge hat. In südlichen Breiten hingegen, welche unseren „mittleren und nördlichen“ numerisch gleich sind, ist die Regel der Luna verax stets anwendbar: Der Mond ist in Zunahme, wenn die Sichel wie ein C aussieht, in Abnahme, wenn sie zu D ergänzbar ist.

Stehen Sonne, Mond und Erde in einer geraden Linie, dann wird die Lage von *E* unbestimmt; das ist aber auch der Moment einer zentralen Finsternis, Vollmond oder Neumond im Knoten, und weder an der vollbeleuchteten, noch an der gänzlich dunkeln Mondscheibe kann eine Sichel bemerkt werden.

Mekka und Medina, die Vaterstädte des Islamismus, liegen am Wendekreis; somit sind ihre Horizonte einer wagrechten (oder ihr angenäherten) Lage der Sichel günstig. Durch freundliche Mitteilung erfuhr ich, daß die Türken den Halbmond wagrecht abbilden. Später sah ich ein Bild von Enver Bey: auf dem Tarbusch war eine horizontale Sichel aufgenäht. Die „Flaggenkarte“ in „Meyers Lexikon“ zeigt auf der türkischen Fahne den Halbmond parallel zur Fahnenstange und als vertikal anzusehen; es ist aber möglich, daß die Normallage einer Flaggenstange nicht die vertikale ist.

Orte unter einem Wendekreise oder in dessen Nähe sind für Horizontalsehnen noch günstiger gelegen als mehr Äquatorwärts oder am Äquator selbst. Überall dort kann die Sichel in den Zenit kommen und bei diesem Stand erscheint die Sichel stets horizontal. Für den Horizont des Wendekreises bleibt der Mond länger in der Nähe des Zenites als über dem Horizont eines Äquatorbewohners, weil sich die Deklination hier sehr rasch, dort viel langsamer ändert, wenig über 20 Bogenminuten pro Tag, nur so viel, als die Deklinationsänderung der Sonne im Tage während der Nachtgleiche, trotzdem der Mond den Gürtel mehr als zwölfmal schneller durchmißt im Vergleiche zur Sonne. In der Nähe des Himmelsäquators ändert sich die Monddeklination im Tage mehr als um 5° . Für den nördlichen Wendekreis kann es sich ereignen, daß der Mond fünf Nächte hintereinander in der Nähe des himmlischen Wendekreises verweilt, 1. südlich vom Wendekreis, 2. im Wendekreis, 3. nördlich vom selben und 4. wieder zurück in den Wendekreis, 5. nahe in dessen Süden.

Gerne hätte ich die Richtigkeit der Formel für $\sin n$ (S. 180) durch direkte Messung der Mondsichellage kontrolliert und bestätigt; doch ist es mir versagt, Messungen anzustellen aus mehreren Gründen — darunter recht schmerzliche. An der Richtigkeit der Gleichung kann ich kaum zweifeln, da sie in nicht wenigen, ja sogar heikeln Fällen Resultate gibt, die auch einer anschaulichen Begründung fähig sind.

Im 13. Jahrhundert war die analytische Geometrie noch nicht gekannt; erst René Descartes (1596—1650) hat diesen Zweig der Meßkunde entdeckt. Die Anfänge der Trigonometrie existierten schon im Zeitalter Marco Polos (1256—1323); Globen, Astrolabien, Armillarsphären kannten schon die alten Griechen; eine räumlich-anschauliche Demonstration war leicht zu führen, und merkwürdig ist, wäre die Richtigkeit der Angabe des großen Venezianers tatsächlich angezweifelt worden. Schon der eingangs ausführlich behandelte Spezialfall: Mondsichel im Westpunkte — auch rein theoretisch konstruierbar — ist geeignet, Bresche zu legen in die vermeintliche Allgemeingültigkeit der Mondphasenregel.

Im Text vorkommende Abkürzungen für Raumelemente: S , O , M Mittelpunkte von Sonne, Erde, Mond; E eine Ebene durch die genannten drei Punkte; h Höhe — über oder unter dem Horizont; ω Azimut; Index 1 bezieht sich auf die Sonne, 2 auf den Mond; ζ ist Zenitdistanz; n Neigungswinkel der 'Sehne' gegen die Höhenkreisebene; ν die Neigung der Sehne gegen den Horizont.

Definiert sind: Sehne pag. 170, 174; Horizont 170, Mondrand, Mondscheibe 175; Schattengrenze 176; 'Isohypsen' 188, 'Isoklinen' 189.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Mitteilungen der Österreichischen Geographischen Gesellschaft](#)

Jahr/Year: 1913

Band/Volume: [57](#)

Autor(en)/Author(s): Möller Max

Artikel/Article: [Die Lage der Mondsichel am Himmelsgewölbe. 169-191](#)