

Gleichzeitige Mondphasen.

Von Dr. Max Möller.

(Mit 2 Textfiguren.)

In einem Aufsätze, betitelt: „Die Lage der Mondsichel am Himmelsgewölbe“ — Band 57 der „Mitteilungen der k. k. Geographischen Gesellschaft in Wien“ (1914) — habe ich auf S. 176 die Behauptung aufgestellt: „Wenn wir erstes Viertel haben, dann hat es die ganze Welt.“ Gleich nach dem Erscheinen begann ich zu zweifeln an der Richtigkeit dieser Aussage. Auf keinen Fall aber bin ich der einzig „Schuldige“. In der unlängst erschienenen vierten Auflage eines ausgezeichneten Elementarwerkes heißt es in gesperrter Schrift: „Auf der ganzen Erde ist es überall dasselbe Stück des Mondes, das man an demselben Tage beleuchtet sieht.“ „Tag“ ist freilich eine weite Zeitgrenze für eine Himmelserscheinung. Ganz explizit ist der „Astronomische Kalender der Wiener Sternwarte“. In den letzten fünf Jahrgängen, 1911—1915, ist auf der 13. Seite bemerkt: „Tautochrone Phänomene, die wirklich für alle Erdorte im gleichen Momente eintreten wie die Mondphasen . . .“ Das läßt an Deutlichkeit nichts zu wünschen übrig und veranlaßt mich, auf den Gegenstand näher einzugehen.

Der Anschaulichkeit halber und um Werte durch Überschlagsrechnungen zu erhalten, werden wir mit abgerundeten Zahlen rechnen und erlauben uns noch eine Reihe von Vereinfachungen, welche an der Größenordnung der Resultate nichts ändern werden. Diese Simplifikationen nebst einigen Worterklärungen seien zunächst angeführt.

Erde und Mond werden als vollständige Kugeln gedacht; die Mondbahn mit der Erdbahnebene zusammenfallend, beide Bahnen kreisförmig und mit gleichförmiger Geschwindigkeit beschrieben; die Sonne beleuchtet genau die Hälfte der Mondoberfläche, beide Hälften trennt ein größter Kreis: die „Schattengrenze“, sie liegt senkrecht zur Verbindungslinie der Mittelpunkte von Sonne und Mond; der Mond kann zu gleicher Zeit gesehen werden genau

von der Hälfte der Erdoberfläche aus, für Bewohner der anderen Hälfte liegt er unter den Horizonten, beide Hälften werden geschieden durch den „Grenzkreis“; die Verbindungslinie von einem Erdenorte zum Mondmittelpunkt ist „Visionsradius“ oder „Gesichtslinie“ jenes Beobachters, dessen Fußpunkt der Erdenort ist; wir nehmen an, daß nur die Lage des Mondes — über oder unter dem Horizont — maßgebend ist für dessen Sichtbarkeit, nebst einer genügend breiten Phase, Tag und Nacht hingegen ohne Einfluß sind; eine Kreisebene durch den Mondmittelpunkt senkrecht auf dem Visionsradius ist „Mondscheibe“. Alle noch möglichen Visionsradien liegen eingeschlossen vom Mantel eines Kegels, dessen Öffnungswinkel einen Grad beträgt; denn die Bewohner am Grenzkreise jener Erdhälfte, die den Mond sehen können oder könnten, sind Antipodenpaare; die zwei Gesichtslinien eines Paares haben je eine Länge von dreißig Erddurchmessern, der Abstand ihrer Fußpunkte beträgt einen solchen Durchmesser; der Winkel am Scheitel eines gleichschenkeligen Dreieckes, dessen Basis zum Schenkel sich wie 1:30 verhält, beträgt rund 2° . Die Gesichtslinien aller übrigen Beobachter füllen den Innenraum des Kegelmantels. Die Mondscheiben sind gegen einander geneigt um denselben Winkel, den ihre zugeordneten Visionsradien miteinander bilden. Alle Mondscheiben zusammen erfüllen einen Raum, welcher begrenzt ist von einer 2° breiten — durch einen größten Kreis halbierten — Kugelzone und von zwei sehr stumpfen Kegelmantelflächen, deren gemeinsamer Scheitel der Mondmittelpunkt ist, ihr Öffnungswinkel mißt je 89° . (Die Kegelachse steht senkrecht auf dem halbierenden Kreis.)

Mondphase ist jenes sphärische Zweieck, welches eine Mondscheibe von der beleuchteten Mondhälfte abschneidet. Von jenseits der Scheibe kann Mondlicht nicht ins Auge gelangen, auch nicht von solchen Teilen der Mondoberfläche, die von der Sonne beleuchtet sind. Begrenzt wird die Phase von je einer halben Peripherie der Mondscheibe und Schattengrenze. Die räumliche Lage der Schattengrenze ist von einem Erdenorte unabhängig, nicht aber die Lage der Mondscheibe: senkrecht auf dem Visionsradius stehend ist sie für jeden Beobachter eine andere, sie „wandert“ mit ihm, daher werden gleichzeitig gesehene Phasen im allgemeinen nicht übereinstimmen können. Zwei Beobachter *A* und *B* können gleichzeitig Phasen sehen, die an Breite bis 2° verschieden sind. *A* habe die größere Phase; wie lange

muß *B* noch warten, um dieselbe Phase zu sehen? Vom Neumond bis zum Vollmond wächst die Phase um 180° in rund 15 Tagen, auf einen Tag entfallen 12° ; 4 Stunden sind zu 2 Graden erforderlich; der Zeitunterschied im Eintritt einer bestimmten Phase kann für zwei Beobachter bis 4 Stunden ausmachen.

Jetzt wollen wir das Mondviertel genauer betrachten; eine interessante Phase nicht bloß für Wetter-„Propheten“. An einer Viertelphase wurde der erste Versuch gemacht, die Distanz Sonne — Erde zu bestimmen. Kepler hat diese Entfernung noch um das Siebenfache unterschätzt.

Ein Mondviertel tritt ein, wenn die Mondscheibe senkrecht steht auf der Ebene der Schattengrenze. In diesem Momente bilden die Mittelpunkte von Sonne, Mond und Erde Ecken eines rechtwinkligen Dreieites mit dem rechten Winkel am Mond. Die kleine Kathete dieses Dreieites schneidet die Erdoberfläche in einem Punkte, dem Fußpunkt des Beobachters, welcher den Mond im Zenite hat. (Im Zenit gesehen wird der Mond nur innerhalb der Breiten $\pm 28\frac{1}{2}^\circ$.) Die berechnete Zeit für den Eintritt des Viertels gilt zunächst für diesen Beobachter, die erweiterte Schattengrenzebene geht dann durch dessen Zenitlinie und auch durch den Erdmittelpunkt, schneidet die Erdoberfläche in einem größten Kreis. Zwei Quadranten dieses Kreises, sie stoßen aneinander dort, wo der Mond im Zenit gesehen wird, bilden den geometrischen Ort aller Punkte, von welchen aus das Viertel im selben absoluten Zeitmomente gesehen wird. Die Uhren der Beobachter zeigen sehr verschieden, weil die besagte Ortslinie nicht durch die Pole geht, nicht zusammenfällt mit einem Erdmeridian. Diese Ortslinie ist eine wahre Tautochrone. Durch den Mondmittelpunkt denken wir uns eine Gerade senkrecht zur Schattengrenzebene; alle zum tautochronen Halbkreis gehörender Mondscheiben gehen durch diese

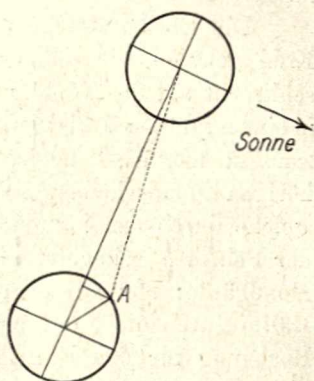


Fig. 1. *A* ist ein Ort auf der Erdoberfläche; die gestrichelte Linie ist Visionsradius des dortigen Beobachters: trifft den Mondmittelpunkt. Der Pfeil gibt die Richtung an, nach welcher die Sonne zu suchen ist; diese Richtung steht senkrecht auf der Zentrallinie Mond — Erde: Moment des Mondviertels für den Beobachter des zenitalen Mondes.

Gerade; in einem Winkel von zwei Graden sind sie alle eingeschlossen. Jede dieser Scheiben halbiert die beleuchtete Mondhälfte. Auch diese Beobachter sehen nicht alle dasselbe Viertel, strenge genommen nicht zwei von ihnen, aber alle sehen im gleichen Moment ein ganzes Viertel, zum größten Teil übereinstimmend, nur an den Spitzen von einander abweichend; die beleuchtet gesehenen Halbkreisflächen sind längs des begrenzenden Durchmessers über einander verschoben, im Maximum 2° .

Die Ebene, welche durch die Zentra von Sonne, Mond und Erde geht — wir können sie kurz mit E bezeichnen — steht senkrecht auf der Tautochronen. Sie schneidet die Erdoberfläche in einem größten Kreis; letzterer ist aber durchaus nicht tautochron, sondern möglichst heterochron. Alle den Visionsradien zugehörigen Mondscheiben schneiden sich in einer geraden Linie, welche durch den Mondmittelpunkt geht, senkrecht auf E . Jede der Scheiben schneidet ein anderes Stück aus der beleuchteten Mondhälfte; nur auf dem zenitalen Monde wird die beleuchtete Hälfte durch die Mondscheibe in dem Augenblicke, welchen die Rechnung für den Eintritt des Viertels ergeben hat, genau halbiert; für diesen Beobachter ist die Rechnung gemacht worden; die kleine Kathete des rechtwinkligen Dreieckes ist seine Zenitlinie. Seine Mondscheibe, sein scheinbarer und wahrer Horizont sind einander parallel und senkrecht auf der Zenitlinie, der wahre Horizont fällt zusammen mit dem Grenzkreis. Der eben genannte Parallelismus gilt für zenitale Phasen ganz allgemein.

Ein Beobachter A auf dem bereits als heterochron erkannten Halbkreis sei auf letzterem vom Halbierungspunkte ζ Grade entfernt. (ζ ist Zenitdistanz des Mondes.) Welchen Winkel bildet der Visionsradius des A mit der Gesichtslinie des Beobachters, der den Mond im Zenit hat? Der Erdradius sei 1. Ein Lot vom Fußpunkte des A auf die Zentrallinie Mond—Erde gefällt ist $\sin \zeta$. Der Fußpunkt des Lotes ist vom Erdzentrum entfernt $\cos \zeta$; der Abstand des Lotes vom Mondzentrum $60 - \cos \zeta$; $\sin \zeta$: $(60 - \cos \zeta)$ ist trigonometrische Tangente des gesuchten Winkels und auch des Winkels, den die Mondscheiben beider mit einander einschließen. Nach derselben Formel kann auch die Neigung der Mondscheiben auf der Tautochronen gerechnet werden. Man hat sich nur die Figur 1 90° gedreht zu denken um die Zentrallinie Erde—Mond, und die Formel gilt auch für alle Zwischenstationen. Auch ist sie nicht auf die Viertelphase beschränkt.

Auf dem genannten heterochronen Halbkreis kann die Breiten-differenz der gleichzeitig beleuchtet gesehenen Zweiecke — der Neigungswinkel der sie abschneidenden Mondscheiben — bis 2 Bogengrade ausmachen, die Zeitdifferenz bis 4 Stunden. Größere Unterschiede sind nicht möglich.

Durch den Schnittpunkt des tautochronen mit dem heterochronen Halbkreis — Standpunkt des Beobachters des zenitalen Mondes — lassen sich größte Kreise legen in beliebiger Anzahl; zu welcher Klasse gehören die Beobachter auf den dem Monde zugewendeten Hälften dieser Kreise? Da gar kein Grund für eine sprunghafte Änderung vorliegt, so läßt sich schließen, daß in den Halbkreisen, welche der Tautochronen nahe liegen, die Zeitdifferenz nicht Null, aber noch gering sein wird, und je mehr die Ortslinie von der Tautochronen sich entfernt, die Heterochronie sich stärker ausprägt, bis sie ihr Maximum in jenem Halbkreise erreicht, dessen Ebene auf der Tautochronen senkrecht steht (das ist die Ebene *E*). Jenseits dieser nimmt sie in derselben Weise ab, als sie bis dahin gewachsen war. Das zenitale Viertel trifft zur berechneten Zeit ein; je mehr der Zenit vom Monde absteht, desto größer wird die Zeitdifferenz. Sie wächst aber nicht in allen Azimuten in gleicher Weise; sie ist Null in der ganzen tautochronen Kurve, wächst am schnellsten senkrecht zu dieser. Nur ein Halbkreis ist tautochron, alle übrigen durch dessen Halbierungspunkt gehenden Hälften größter Kreise sind heterochron in ungleichem Maße; für jede Heterochrone kommt der größte Wert im Schnittpunkte mit dem Grenzkreis; das ist aber kein mathematisches Maximum, trotzdem die Differenz (im gemeinsamen Schnittpunkt aller Halbkreise) mit Null beginnt und dann immer größer wird, weil die Quadranten nur bis zum Grenzkreise reichen, nach dieser Richtung ein Übergang zu kleineren Werten nicht stattfindet. Im Grenzkreise selbst sind die maximalen Zeitdifferenzen arithmetisch angeordnet, von Null beginnend, und 90° davon entfernt liegt der größte Wert der Zeitdifferenz. Letzterer ist ein mathematisches Maximum, denn über 90° hinaus nehmen auf dem Grenzkreis die Werte wieder ab.

Denken wir uns parallel zum Grenzkreis Schnitte durch die mondbeleuchtete Erdhälfte gelegt, so sind in diesen Nebenkreisen die Werte der Zeitdifferenzen arithmetisch angeordnet, steigend in einem der vier Quadranten, fallend in den anschließenden.

Mit der Bewegung des Mondes ändert sich fortwährend die Lage der genannten Kurvensysteme.

Wenn wir statt Fußpunkte der Beobachter die Zenite setzen, so übertragen wir unsere Kurvensysteme auf das Himmelsgewölbe und erhalten die „Isoklinen“ und „Isohypsens“, von denen in der „Mondsichel“ p. 188, 189 die Rede war. Auch in der Anordnung der Werte wird sich manche Analogie finden.

Alle zu einer der Isohypsens gehörigen Visionsradien liegen in der Mantelfläche eines Kegels, dessen Achse die Zentrallinie Erde—Mond ist; doch schneiden nicht alle zugeordneten Mondscheiben gleich große Stücke aus der beleuchteten Mondhälfte.

Die Aufeinanderfolge der Zeitdifferenzen auf den Isoklinen und Isohypsens oder, was dasselbe ist, auf den Haupt- und Nebenkreisen wurde in heuristischer Weise erörtert, von der Analyse der Tautochronen und Maximal-Heterochronen auf den allgemeinen Fall übertragen und nur eine Vorstellung qualitativer Art von der Wertverteilung gewonnen. Strenger mathematisch kann das geschehen und auch quantitativ genauere Werte erreicht werden durch Anwendung des Satzes vom „Parallelogramm der Rotationen“. Je zwei Mondscheiben schneiden einander in einer geraden Linie, welche durch das Mondzentrum geht. Aus einer Lage der Mondscheibe in die andere gelangt man durch Drehung um diese Durchschnittslinie als Achse. Diese Drehung kann betrachtet werden als eine resultierende Drehung, deren Komponenten aus Drehungen bestehen um zwei rechtwinkelig gegen einander geneigte Achsen, wovon die eine senkrecht steht auf der Ebene der Tautochronen, die andere auf der Maximalheterochronen; die Achsen der Komponenten gehen ebenfalls durch den Mondmittelpunkt. Auf jede Komponente entfällt eine Drehung gleich der Projektion der Resultierenden auf diese Komponente. Von der Maximalheterochronen — also von der Ebene E — aus gerechnet sei das Azimut irgendeiner der vielen übrigen Heterochronen a . Als Drehungskomponente entfällt auf die Maximale das Produkt aus der Resultierenden in $\cos a$; auf die Tautochrone das Produkt aus Resultierender in $\sin a$. Erstere Komponente kommt bezüglich der Zeitdifferenz zur Wirkung in ihrem vollen Betrage, letztere verursacht gar keine Zeitdifferenz im Eintritt des Viertels. Nennen wir ζ den Abstand eines Zenites vom Monde, so ist der Eintritt des Viertels gegenüber dem zenitalen Mond verspätet oder verfrüht:

$$t = \cos a \left(\arctan \frac{\sin \zeta}{60 - \cos \zeta} \right) \dots \dots I).$$

Das ist der Bogen eines Kreises vom Radius 1; in Zeit umgewandelt kommen auf jeden Bogengrad zwei Stunden.

Für den Beobachter des zenitalen Mondes ist $\zeta = 0$ und der Ausdruck wird 0 für jeden Wert von a . $\zeta = 90^\circ$ ist ein Beobachter am Grenzkreis; aus I wird $\cos a$ ($\arctan \frac{1}{60}$), ein Maximum für jedes beliebige a . $a = 0$ ist die bereits als maximal erkannte Heterochrone; $a = 90^\circ$ ist die Tautochrone. —

Hier wie auch im folgenden bedeutet t immer den Zeitunterschied im Eintritt einer Mondphase verglichen mit derselben Phase des zenitalen Mondes.

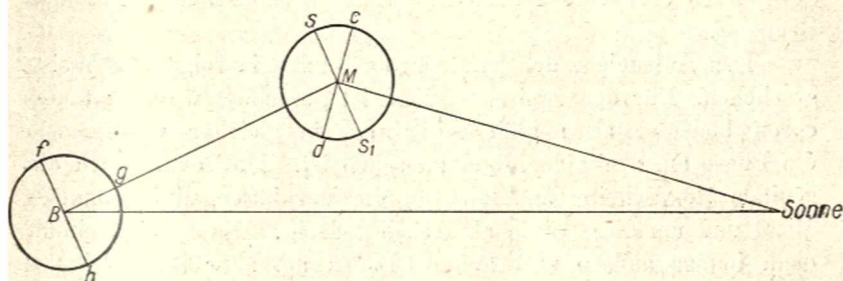


Fig. 2. B Erdmittelpunkt, M Mondmittelpunkt, Mds_1 das auf die Papierfläche — Ebene E — projizierte sphärische Zweieck; durch die „Scheibe“ ss_1 des Beobachters in g von der beleuchteten Mondhälfte abgeschnittene Phase von 40° Breite. fh Projektion des Grenzkreises auf E .

Für jede andere Phasengröße, z. B. 40° , läßt sich ein Näherungswert für die Zeit des Eintrittes finden. In der Fig. 2 ist die Schattengrenze cd senkrecht auf der Zentrallinie Sonne — Mond und die Mondscheibe ss_1 senkrecht auf Erde—Mond, beide schließen den Winkel 40° ein. Die Distanz Sonne—Erde muß bekannt sein; in Mondstrecken setzen wir sie $= 400$. Der Abstand Sonne—Mond liegt zwischen 399 und 401. Ist auch dieser bekannt, dann läßt sich der Winkel B an der Erde finden. Die Mondbahn als kreisförmig angenommen, gibt der Quotient aus B und 360, multipliziert mit der synodischen Umlaufszeit, den Eintritt der Phase 40° für den Beobachter des zenitalen Mondes; die Zeit gezählt vom Neumonde aus. All das wird zu korrigieren sein für die tatsächlich „gestörte“ Mondbahn. Die erweiterte Schattengrenzebene geht nicht mehr durch Zenitlinie und Erdmittelpunkt; schon bei Phasen bis 89° und wieder über 91° hinaus schneidet sie den Erdkörper gar nicht mehr. Eine im Punkte

B auf *BM* senkrechte Ebene schneidet die Erdoberfläche im Grenzkreis. Die Ebene *E* schneidet die Erdoberfläche in der maximalen Heterochrone; denn die Visionsradien am Rande dieses Schnittes sind gegeneinander geneigt und im selben Maße die zugehörigen Mondscheiben; und die von den Scheiben aus der beleuchteten Mondhälfte abgeschnittenen Zweiecke differieren ganz im selben Betrage wie die Winkel, welche die Visionsradien untereinander einschließen, ganz besonders mit dem Visionsradius des zenitalen Mondes. — — Die maximale Heterochrone wird also ganz allgemein in derselben Weise gefunden wie im Falle eines Mondviertels: Durchschnitt der Erdoberfläche mit der Ebene *E*.

Das Aufsuchen der Tautochronen kann in folgender Weise geschehen. Für den zenitalen Mond ist gerechnet worden; tautochron bedeutet also: gleichzeitig und in gleicher Größe, wie die Phase am zenitalen Mond zu sehen ist. Man denke sich die zenitale Mondscheibe angelötet an die Verbindungslinie Sonne—Mond und um diese Linie als Achse gedreht. Die Scheibe nimmt dann immer andere und andere Lagen an, aber ihre Neigung gegen die Schattengrenze bleibt ungeändert, in unserem Fall 40° ; wer eines dieser Zweiecke erblickt, sieht es 40° breit. Wo haussen aber die Leute, welche zu den verschiedenen Lagen der Mondscheibe gehören? Die Zentrallinie Erde—Mond ist das Lot auf der zenitalen Scheibe; während der Drehung um die Verbindungslinie Sonne—Mond dreht sich dieses Lot mit; das Lot ist gegen die Verlängerung der Geraden Sonne—Mond (über den Mond hinaus) 40° geneigt, beschreibt also während einer vollen Umdrehung einen Kegelmantel, dessen Achse die genannte Verlängerung, dessen Öffnungswinkel daher 40° beträgt. Die Erde schneidet nur ein kleiner Teil dieses Kegelmantels. Die „Seiten“ dieses Mantelteiles sind die Gesichtslinien jener Beobachter, welche gleichzeitig eine Phase von derselben Größe sehen wie der Beobachter des zenitalen Mondes. Die Tautochrone ist also im allgemeinen die Linie, in welcher die Erdoberfläche von einem Kegelmantel geschnitten wird, dessen Öffnung die Winkelgröße der Mondphase ist, dessen eine Seite durch das Erdzentrum geht und Visionsradius des Beobachters ist, welcher den Mond im Zenit hat; sie ist im allgemeinen eine Kurve doppelter Krümmung. Je größer die Phase, desto stumpfer der Kegel, ein desto kleinerer Teil des Mantels durchdringt die Erde, kann mit desto

größeren Rechte als eben angesehen werden, dann aber auch als größter Kreis, weil er unter allen Umständen durch den Erdmittelpunkt geht. Im Spezialfalle des Mondviertels wird der Kegelmantel selbst eben und schneidet die Erdoberfläche in der S. 517, 518 geschilderten Tautochrone.

Dasselbe beleuchtete Stück des Mondes wird an zwei Orten nicht im selben Moment gesehen. Gleichgroße Phasen werden in jedem Augenblicke nur von einem Halbkreise aus gesehen, dessen Ebene in der Richtung der Zentrallinie Erde—Mond senkrecht steht auf jener Ebene E , welche die Mittelpunkte von Sonne, Mond und Erde in sich enthält.

Wird Sonnenort und Mondort auf einem Globus verzeichnet, dann ist die Lage von E bestimmt. Der Globus wird so postiert, daß der „Horizont“ des Gestelles mit dem Grenzkreis (S. 516) zusammenfällt. Die geographischen Koordinaten Länge und Breite irgendeines Beobachtungsortes werden mechanisch — mit Hilfe der nach Bogengraden geteilten Metallstreifen — in Azimut a und Zenitdistanz ζ transformiert, oder rechnerisch; dann kann die Zeit des Eintrittes einer Phase im Vergleiche zum Beobachter des zenitalen Mondes nach Formel I bestimmt werden.

Ein negatives t wird in der Algebra gedeutet als die Zeit, welche seit dem Eintritt eines Ereignisses verflossen ist, ein positives t als Zeit, nach welcher das Ereignis eintreten soll. Dem können wir hier gerecht werden durch Wahl des Ausgangspunktes, von welchem a gezählt werden soll. In Fig. 2 ist fBh Projektion des Grenzkreises auf E ; fgh ist der maximal-heterochrone Halbkreis, er liegt ja in E ; in g wird er vom tautochronen geschnitten; Bg ist Projektion des letzteren. Denken wir uns den Beobachter von g nach f hin wandern, dann dreht sich seine Mondscheibe von der Lage ss_1 aus so, daß sie kleinere Zweiecke ausschneidet; an den (im Nu) erreichten Punkten ist die Phase immer kleiner. Alle zwischen g und h stehenden Beobachter sehen kleinere Phasen als der Beobachter des zenitalen Mondes. In f geben wir dem Azimut den Wert Null. Die Azimute werden auf dem Grenzkreis oder auf einem Nebenkreis abgezählt; beim Azimut 90° haben wir die Tautochrone erreicht; über 90° bis 180° ist $\cos a$ negativ und t kommt als negative Größe heraus; man sieht gleichzeitig größere Zweiecke als in g , die dortige Phase ist schon überholt.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Mitteilungen der Österreichischen Geographischen Gesellschaft](#)

Jahr/Year: 1914

Band/Volume: [58](#)

Autor(en)/Author(s): Möller Max

Artikel/Article: [Gleichzeitige Mondphasen. 515-523](#)