Ueber die scheinbare Entfernung zweier Punkte.

(Tafeln III und IV, Fig. 1, 2, 3, 4.)

Von

Dr. A. Kiefer, Institut Concordia, Zürich.

Wenn zwei Punkte A, B von einem dritten Punkte C aus betrachtet werden,[1] so nennt man den Winkel $ACB = \gamma$ unter welchem die zwei Punkte erscheinen, die *scheinbare Entfernung* derselben. Der Winkel γ ist von der Lage des Punktes C abhängig und es lassen sich leicht einige hierauf bezügliche Fragen beantworten; dabei soll zunächst die Lage von C auf eine durch AB gehende Ebene beschränkt bleiben.

I.

(Fig. 1.)

Man lege durch A, B und den beliebig gewählten Punkt C einen Kreis; bewegt sich jetzt C auf dem Bogen ACB des Kreises, so bleibt der Winkel ACB konstant, gleich γ, und wenn C sich auf dem Bogen $AC'B$ bewegt, so bleibt der Winkel $AC'B$ ebenfalls konstant, gleich $180—\gamma$. Denkt man sich durch A, B noch den zu diesem Kreis symmetrischen Kreis gelegt, so liegen auf diesen zwei Kreisen alle Punkte C, für welche die scheinbare Entfernung der Punkte A, B gleich γ resp. $180—\gamma$ ist.

II.

(Fig. 2.)

g sei eine beliebige Gerade der Ebene; wie viel Punkte C liegen auf derselben, für welche die scheinbare Entfernung

[1] Z. B. zwei Bergspitzen von dem idyllischen Weiningen aus.

der Punkte A, B die vorgeschriebene Größe γ hat? Die gesuchten Punkte sind die 4 Schnittpunkte C, C', C'', C''' der Geraden g mit den 2 vorhin erwähnten Kreisen. Wenn g den einen Kreis berührt, so fallen von den 4 Punkten 2 zusammen; wenn g beide Kreise berührt, so fallen zweimal je 2 Punkte zusammen und wenn g außerhalb beider Kreise liegt, so werden die 4 Punkte imaginär. Geht g zwischen A, B hindurch, so beträgt der Winkel bei den äußern Schnittpunkten γ und bei den 2 innern $180-\gamma$. Enthält g einen der Punkte A oder B, z. B. A, so fallen von den 4 Punkten 2 in denselben; die beiden andern Schnittpunkte sind dann immer reell und es kann noch ein weiterer derselben nach A fallen, nämlich wenn g den einen oder den andern der 2 Kreise in A berührt. (Die 4 Tangenten der beiden Kreise in A und B haben die Eigenschaft, daß es auf jeder einen einzigen Punkt gibt, für den die scheinbare Entfernung der Punkte A, B die Größe γ hat). Wenn $\gamma = 90^0$ ist, so fallen die beiden Kreise in einen einzigen zusammen, der $A\,B$ zum Durchmesser hat und auf einer beliebigen Geraden gibt es 2 Punkte, für welche die scheinbare Entfernung der beiden Punkte A, B gleich 90^0 ist.

III.

(Fig. 3.)

g sei wieder eine beliebige Gerade der Ebene und der Punkt C bewege sich auf g; wie ändert sich dabei der Winkel $A\,C\,B$? Wenn sich C in dem unendlich fernen Punkte von g befindet, so ist $\sphericalangle\, A\,C\,B = 0$; kommt C ins Endliche, so nimmt der Winkel zu, erreicht aber im Schnittpunkt S von g mit der Geraden $A\,B$ wieder den Wert Null. Folglich müssen beidseitig von S zwischen S und dem unendlich fernen Punkte von g solche Punkte C liegen, für welche $\sphericalangle\, A\,C\,B$ ein Maximum wird. Diese Punkte sind leicht zu finden. Nach einem allgemeinen Prinzip über Maxima und Minima muß nämlich an einer solchen Stelle eine unendlich kleine Verschiebung des Punktes C die Größe des Winkels $A\,C\,B$ nicht ändern; folglich muß der gesuchte Punkt auf g und sein unendlich benachbarter auf einem Kreis durch A, B gelegen sein. Legt man daher durch A, B diejenigen Kreise, welche g berühren, so sind die Berührungspunkte diejenigen Punkte auf g, für welche die scheinbare Entfernung $A\,C\,B$ der Punkte

A, B möglichst groß ist. Bekanntlich gibt es durch A, B zwei Kreise, welche die Gerade g berühren; bezeichnet man die Berührungspunkte mit C_1, C_2, so ist $SC_1 = SC_2$ die mittlere geometrische Proportionale zwischen SA und SB; $SC_1 = SC_2 = \sqrt{SA . SB}$. Man kann auch direkt zeigen, daß für die Punkte C_1, C_2 auf g der Winkel ACB ein Maximum ist. C sei ein Punkt zwischen S und C_1 oder auf der Verlängerung über C_1 hinaus; man ziehe CB, CA und DB, wobei D der Schnittpunkt von CA mit dem Kreis ist, der g in C_1 berührt. Nun ist $\sphericalangle\, AC_1B = ADB$, aber ADB ist als Außenwinkel des Dreieckes DCB größer als ACB, folglich ist auch $\sphericalangle\, AC_1B > ACB$; ähnlich bei C_2. Was die Größe der beiden Maximalwinkel AC_1B und AC_2B anbetrifft, so kann man dieselben folgendermaßen berechnen. Es sei $\sphericalangle\, C_1SB = \alpha$, $SA = a$, $SB = b$; dann ist $SC_1 = \sqrt{a . b}$. Der Sehnentangentenwinkel SC_1A ist gleich dem Peripheriewinkel SBC_1. Auf das Dreieck SBC_1 kann man den Tangentensatz anwenden und erhält:

$$\frac{b - \sqrt{ab}}{b + \sqrt{ab}} = \frac{tg\, \frac{1}{2}\, (SC_1B - SBC_1)}{tg\, \frac{1}{2}\, (SC_1B + SBC_1)},$$

aber

$$\frac{1}{2}\,(SC_1B - SBC_1) = \frac{1}{2}\, AC_1B = \frac{1}{2}\,\gamma_1,$$

$$\frac{1}{2}\,(SC_1B + SBC_1) = \frac{1}{2}(180 - \alpha) = 90 - \frac{\alpha}{2};$$

also, indem man auf der linken Seite noch Zähler und Nenner mit $\sqrt{b}$ dividiert

$$\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{tg\frac{\gamma_1}{2}}{cotg\frac{\alpha}{2}},$$

woraus folgt

$$tg\frac{\gamma_1}{2} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}\, cotg\, \frac{\alpha}{2}.$$

Setzt man hierin an Stelle von α den Wert $180 - \alpha$, so liefert die Formel für den Winkel $AC_2B = \gamma_2$

$$tg\frac{\gamma_2}{2} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}\; tg\, \frac{\alpha}{2}.$$

Für $\alpha = 90^0$ wird

$$tg\frac{\gamma_1}{2} = tg\frac{\gamma_2}{2} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}.$$

Für $\alpha = 0^0$, $b = a = \infty$ versagen die Formeln; in diesem Falle ist g parallel $A\,B$ und durch b, a, α nicht mehr bestimmt. Setzt man den Abstand der beiden Parallelen gleich h, so ist

$$tg\frac{\gamma_1}{2} = \frac{A\,B}{2\,h}, \; \gamma_2 = 0.$$

Es mag noch bemerkt werden, daß C_1, C_2 imagnär werden, wenn g zwischen A und B hindurch geht; b und a sind dann mit entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen.

Läßt man in einer der beiden Formeln für

$$tg\frac{\gamma_1}{2}, \quad tg\frac{\gamma_2}{2}$$

die linke Seite konstant und auf der rechten Seite das Verhältnis $\frac{b}{a}$ und den Winkel α variabel, so bewegen sich die entsprechenden Geraden g als Tangenten der 2 durch A, B und C_1 resp. C_2 bestimmten Kreise.

IV.

(Fig. 4.)

F sei ein beliebiger Punkt der Ebene. Durch F gibt es unendlich viele gerade Linien g und unter den Punkten einer jeden derselben gibt es 2, für welche die scheinbare Entfernung der Punkte A, B ein Maximum ist. Wie verteilen sich diese Punkte? Wenn g eine der Geraden durch F ist, so findet man die auf ihr gelegenen Punkte C_1, C_2 als Berührungspunkte von g mit 2 durch A, B gehenden Kreisen. Legt man daher durch A, B alle möglichen Kreise und zieht von F aus Tangenten an dieselben, so bildet die Gesamtheit der Berührungspunkte den gesuchten Ort. Es ergeben sich leicht noch andere Entstehungsarten der Kuvre. Sind C_1, C_2 die fraglichen Punkte auf $F\,S$, so ist $S\,C_1 = S\,C_2$ die mittlere geometrische Proportionale zwischen $S\,A$ und $S\,B$, d. h. gleich der Tangente von S aus an den Kreis über $A\,B$ als Durchmesser. Legt man daher von jedem Punkte S der Geraden $A\,B$ die Tangente $S\,D$ an den Kreis über $A\,B$ als Durchmesser und beschreibt man um S mit der Tangente SD als Radius einen Kreis, so erzeugen die Endpunkte C_1, C_2 der durch F gehenden Durchmesser dieser Kreise den fraglichen Ort. Die Kreise um die Punkte S mit der jeweiligen Tangente SD als Radius bilden ein Kreisbüschel zweiter Art und wir haben somit die Küppersche Erzeugung jener eigentümlichen Kurve dritter Ordnung, welcher die imaginären Kreispunkte als konjugierte Punkte angehören. Weil $SC_1 = SD$ ist, so folgt aus der Figur $OS^2 - SC_1{}^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2$. Auf eine bekannte Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel gestützt kann man daraus schließen, daß die 4 Punkte C_1, C_2, A, B auf der gleichseitigen Hyperbel liegen, welche AB zum Durchmesser hat und deren Asymptoten zu den Halbierungsgeraden des Winkels OSF und seines Nebenwinkels parallel sind. Die Kurve erscheint hiernach als das Erzeugnis eines Strahlenbüschels mit dem Scheitel F und eines dazu projektivischen Büschels von gleichseitigen Hyperbeln; die letztern haben alle AB zum Durchmesser und die projektivische Zuordnung besteht darin, daß die Asymptoten der Hyperbel jeweils zu den Halbierungsgeraden des Winkels OSF und seines Nebenwinkels parallel sind. Es ergibt sich ferner leicht, daß ein Kegelschnitt durch C_1 mit A, B als Brennpunkten in C_1 von einer Parabel berührt wird, die F zum Brennpunkt hat und deren Axe zu AB parallel ist, ferner daß Winkel BC_1F stets gleich dem Winkel ist, den AC_1 mit der Parallelen durch C_1 zu BA bildet u. s. f.; alle diese Sätze lassen sich verallgemeinern und geben zu weitern Erzeugungsarten und Eigenschaften Veranlassung. —

Die Kurve dritter Ordnung ändert sich mit der Wahl des Punktes F; wenn F im Unendlichen angenommen wird, so verschiebt sich die Gerade FS parallel zu sich selber. Da $OS^2 - SC^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2$ konstant bleibt, so beschreiben in diesem Falle die Punkte C_1, C_2 die gleichseitige Hyperbel, welche AB zum Durchmesser hat und deren Asymptoten zu den Halbierungslinien des Winkels OSC_1 und seines Nebenwinkels parallel sind; hieraus könnte man mancherlei Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel ableiten. Wählt man F auf der Geraden AB, so ist der Ort der Punkte C_1, C_2 der Kreis, der F' als Mittelpunkt hat und einen beliebigen durch A, B gehenden Kreis orthogonal schneidet.

V.

Die Aufgabe, unter den Punkten einer geraden Linie diejenigen zu finden, für welche der Winkel ACB ein Maximum wird, läßt sich dadurch verallgemeinern, daß man an Stelle der Geraden eine Kurve setzt und diejenigen Punkte C derselben aufsucht, für welche Winkel ACB ein Maximum oder Minimum wird. Um diese Aufgabe zu lösen, hat man diejenigen Kreise durch A, B zu bestimmen, welche die gegebene Kurve berühren. Die Berührungspunkte sind die gesuchten Punkte. Wenn die gegebene Kurve ein Kreis ist, so läßt die Aufgabe 2 Lösungen zu; wird ein Kegelschnitt gewählt, so gibt es 6 Lösungen und für eine Kurve m^{ter} Ordnung $m\ (m+1)$ Lösungen. Der Berührungsstelle entspricht ein Maximum, wenn die Kurve dort außerhalb des berührenden Kreises verläuft und ein Minimum, wenn sie innerhalb des berührenden Kreises weiter läuft.

VI.

Bis jetzt blieb die Lage von C auf eine durch A, B gehende Ebene beschränkt. Hält man an dieser Bestimmung nicht mehr fest, so kann man zunächst nach dem Ort aller Punkte C des Raumes fragen, für welche der Winkel ACB dieselbe Größe hat. Jede durch $A\,B$ gehende Ebene schneidet den Ort in 2 kongruenten durch $A\,B$ gehenden und symmetrisch gelegenen Kreisen; der Ort ist daher die Rotationsfläche vierter Ordnung R_4, die entsteht, wenn man den Kreis durch A, B, C um die Gerade $A\,B$ herum rotieren läßt. Schneidet man die Fläche mit einer Geraden oder mit einer Ebene, so erhält man auf der Geraden die Punkte und auf der Ebene den Ort der Punkte, für welche der Winkel ACB dieselbe Größe hat. Läßt man C eine beliebige Gerade durchlaufen, so kann man nach den Stellen auf g fragen, für welche ACB ein Maximum oder Minimum wird. Für eine solche Stelle auf g muß eine unendlich kleine Verschiebung des Punktes C die Größe von $\sphericalangle\, ACB$ nicht ändern, folglich muß g an der betreffenden Stelle von einer Rotationsfläche R_4

berührt werden. Denkt man sich auch die Gerade g um die Axe AB herumrotiert, so beschreiben die 2 im Berührungspunkt unendlich benachbarten Punkte der Geraden 2 unendlich benachbarte Parallelkreise und folglich berührt das durch Rotation von g entstandene Hyperboloid die Fläche R_4 längs eines Parallelkreises. Schneidet man das Hyperboloid und die Fläche R_4 mit einer durch AB gehenden Ebene, so schneidet sie das erstere in einer Hyperbel und die letztere in 2 Kreisen, von denen der eine die Hyperbel berühren muß. Für die gesuchten Punkte auf g hat man nun folgende Konstruktion: Man schneidet das Hyperboloid, das durch Rotation der Geraden g um die Axe AB entsteht, mit einer durch AB gehenden Ebene; dann konstruiert man durch A, B die 6 Kreise, welche die Schnitthyperbel berühren und dreht die Berührungspunkte auf g zurück. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Hyperbel in Bezug auf die Gerade AB symmetrisch liegt; daher liegen die 6 Kreise ebenfalls paarweise symmetrisch und auf der Geraden g entstehen nur 3 gesuchte Punkte. Wählt man den beliebigen Punkt P des Raumes, so kann man nach den Geraden g durch P fragen, für welche P eine solche Maximums- oder Minimumsstelle wird; die Geraden g müssen die Rotationsfläche R_4 berühren, welche durch P geht und daher bilden sie ein Strahlenbüschel durch P, dessen Ebene durch die Tangente des Kreises durch ABP hindurch geht und auf der Ebene des Kreises senkrecht steht. Denkt man sich alle möglichen Geraden durch den Punkt P gelegt und für jede die 3 Maximums- oder Minimumsstellen konstruiert, so ist der Ort derselben eine Fläche vierter Ordnung, welche durch den Punkt P hindurch geht. Sie enthält auch die Gerade AB und besitzt mancherlei leicht zu findende Eigenschaften. Liegt P auf der Geraden AB, so tritt an Stelle der Fläche vierter Ordnung eine Kugel. Fällt P ins Unendliche, so sondert sich die unendlich ferne Ebene als Bestandteil der Fläche ab.

Fig. 1. Taf. III.

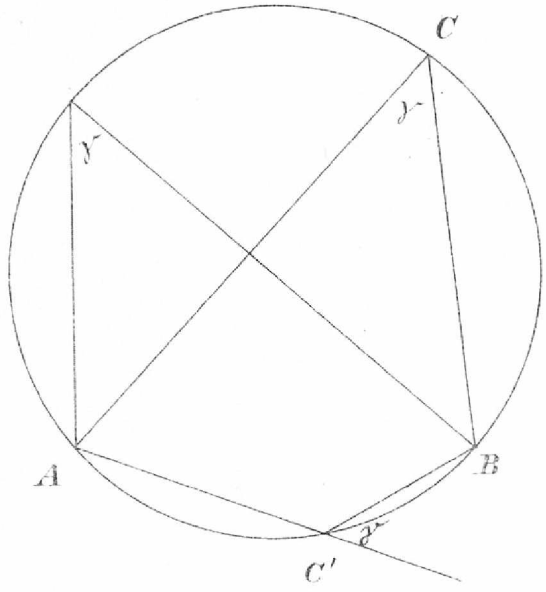
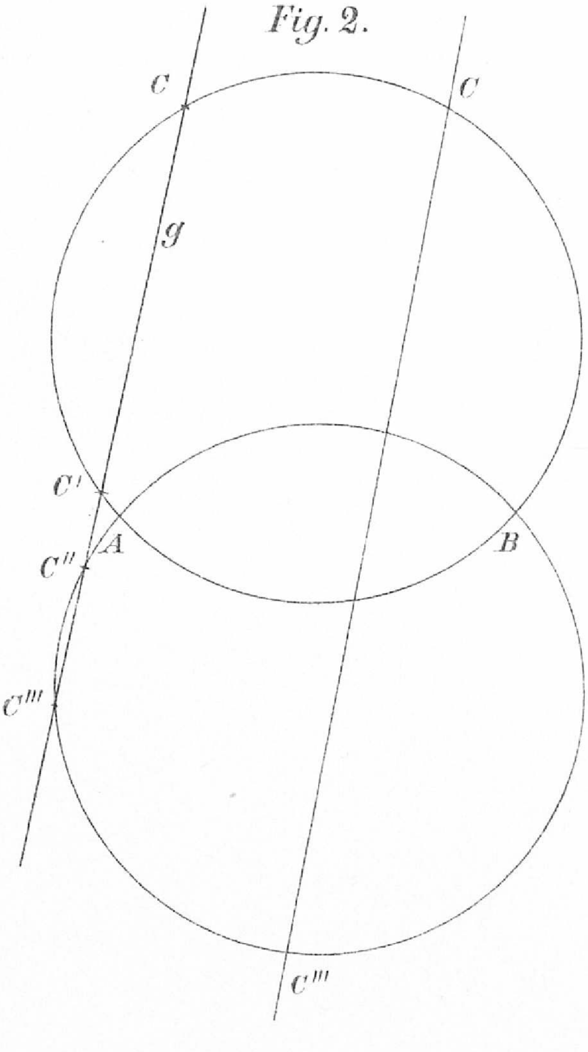


Fig. 2.



Taf. IV.

Fig. 3.

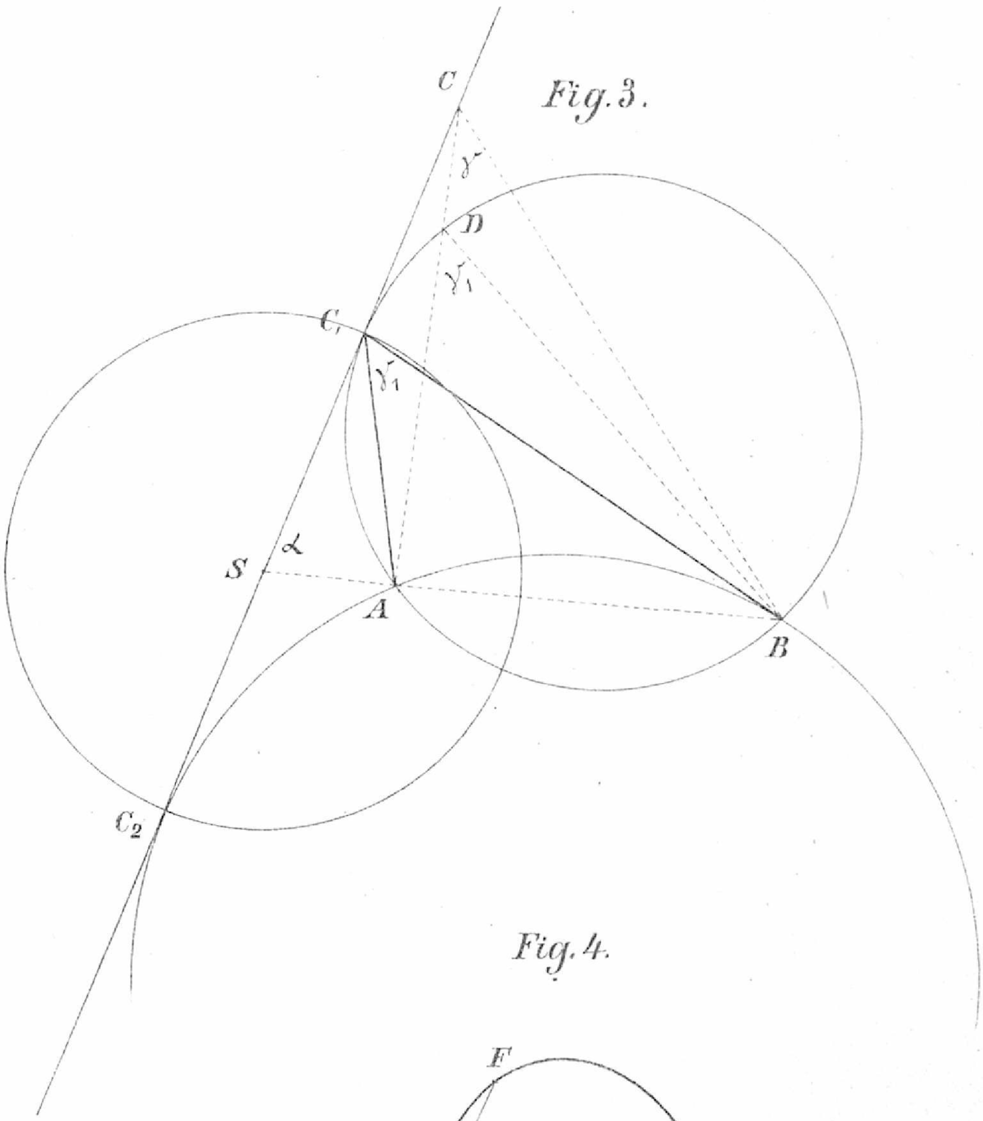


Fig. 4.