Die Teilbarkeit der Zahlen

Von **E. Früh,** Kradolf

Um festzustellen, ob eine Zahl Z durch eine Primzahl p teilbar sei, führen wir Z durch Abspaltung Vielfacher von p auf ein Z_n zurück, das kongruent zu Z (mod. p) ist, das heißt durch p dividiert den gleichen Rest ergibt, wie Z. Während man bei der Division aus einem ersten Teil von Z, der die Form $a \cdot 10^t$ hat, $m \cdot p$ so herausnimmt, daß $a - m \cdot p < p$ ist, dann unter Hinzunahme von $a - m \cdot p$ ein $a_1 \cdot 10^{t-1}$ bildet, wieder um $m_1 \cdot p < a_1$ reduziert, usw., wird bei dem hier darzustellenden Verfahren von $a \cdot 10^t$ ein Vielfaches $a \cdot m \cdot p$ so weggenommen, daß $m \cdot p$ möglichst wenig von 10^t abweicht, daß also $10^t - m \cdot p < p$ ist.

Setzen wir

$$m \cdot p \pm r = 10^t, \text{ dann wird}$$
$$Z = a \cdot 10^t + R = a \cdot m \cdot p \pm a \cdot r + R$$

Wenn Z durch p teilbar sein soll, dann muß auch $\pm a \cdot r + R$ teilbar sein. Wir prüfen deshalb

$$Z_1 = |\pm a \cdot r + R| = a_1 \cdot m \cdot p \pm a_1 \cdot r + R_1$$

und weiter

$$Z_2 = |\pm a_1 \cdot r + R_1| = a_2 \cdot m \cdot p \pm a_2 \cdot r + R_2$$

und gelangen durch (n—1)-malige Wiederholung des Verfahrens schließlich zu einem

$$Z_n = |\pm a_{n-1} \cdot r + R_{n-1}| < 10^t,$$

an welchem eine Abspaltung von $a_n \cdot m \cdot p$ nicht mehr vorgenommen werden kann und das infolgedessen direkt, das heißt durch Division auf die Teilbarkeit durch p geprüft werden muß.

Für irgend ein $Z_k = a_k \cdot 10^t + R_k$ sind a_k und R_k gegeben und $Z_{k+1} = |\pm a_k \cdot r + R_k|$ enthält als vorläufig noch nicht bestimmte Größe nur r. Es ist leicht einzusehen, daß Z_{k+1} um so leichter zu ermitteln sein wird, je kleiner r ist. Anderseits ist zu fordern, daß Z_n unterhalb einer, nach praktischen Erwägungen festzusetzenden oberen Grenze zu liegen komme; grundsätzlich sollte es möglich sein, ein $Z_n < p$ zu erhalten, so daß also dieses letzte Z mit dem

Rest, der bei der Division der Ausgangszahl durch p übrig bleibt, identisch wäre. Dieser letzten Forderung zu genügen, dürfte nicht allzuschwer sein. Fraglich ist aber, ob es in jedem Fall, das heißt für jedes p möglich ist, brauchbare Reste zu erhalten; also solche, die aus Z_k unschwer Z_{k+1} zu bestimmen erlauben.

Für die Bildung der Reste r, die bei der Division von 10^t durch p übrig bleiben, benützen wir folgende Sätze der Zahlentheorie:

Von den Gliedern der geometrischen Progression: $10^0, 10^1, 10^2, \ldots, 10^{p-1}$ müssen wenigstens zwei den gleichen Rest bei der Division durch p liefern.

Ist r_u der Rest von 10^u und r_v der Rest von 10^v und gilt: $r_u = r_v$, dann ist $10^u - 10^v$ durch p teilbar.

Da $10^u - 10^v = 10^v (10^{u-v} - 1)$, muß 10^{u-v} den Rest 1 ergeben, sofern $r_u = r_v$.

Der Rest von 10^{u+v} ist gleich dem Produkt der Reste von 10^u und 10^v : $r_{u+v} = r_u \cdot r_v$.
Also ist $r_2 = r_1 \cdot r_1$; $r_3 = r_1 \cdot r_2$; $r_4 = r_1 \cdot r_3 = r_2 \cdot r_2$, usw.

Ergibt 10^a den Rest $r_a = 1$, dann ist

$$r_{a+1} = r_1$$
$$r_{a+2} = r_2$$
$$r_{a+3} = r_3, \text{ usw.}$$

und allgemein

$$r_{na+k} = r_k$$

Ist 10^a die niedrigste Potenz von 10, die den Rest 1 liefert, dann sind die Reste der niedrigeren Potenzen alle voneinander verschieden und sie kehren wieder von 10^a bis 10^{2a-1}, von 10^{2a} bis 10^{3a-1}, usw. Andere Reste, als jene von 10^0 bis 10^{a-1} treten nicht auf.

10^{p-1} ergibt stets den Rest 1. Wird er auch von 10^a erhalten, dann muß a ein Teiler von $p-1$ sein. Der Rest von $10^{(p-1)/2}$ ist stets $+1$, oder -1.

Erhält man von 10^a den Rest $r_a = -1$, dann wird $r_{a+1} = -r_1$; $r_{a+2} = -r_2$, ... usw. Kennen wir also alle Reste bis zu einem ersten, der den Wert $+1$, oder -1 hat, dann kennen wir auch alle übrigen.

Läßt man auch negative Reste $r' = -(p-r)$ zu, dann werden keine Reste größer als $p/2$ auftreten.

Mit Hilfe dieser Sätze und Rechenregeln sind wir nun in der Lage, für bestimmte Primzahlen die Restreihen zu ermitteln, um mit geeigneten Resten die Reduktion einer vorgegebenen Zahl in der dargestellten Weise vorzunehmen.

Die Teilbarkeit durch 7, 13, 11.

Bei der Division von 10^t durch 7 ergeben sich folgende Reste:

Für $t = 1$	$r = 3$
2	$3 \cdot 3 - 7 = 2$
3	$3 \cdot 2 = 6$, oder -1
4	-3 $(= -r_1!)$
5	-2
6	1
7	3 $(= r_1!)$

usw.

Ist zum Beispiel die Aufgabe gestellt, die Zahl

$$Z = 5\,944\,628\,793\,567\,849\,595$$

auf ihre Teilbarkeit durch 7 zu prüfen, dann können wir diese 19-stellige Zahl unter Verwendung des passenden Restes r_9 auf eine 10-stellige zurückführen. Wir setzen

$$Z = a \cdot 10^9 + R = a \cdot (10^9 + 1) - (a - R)$$

In diesem Ausdruck ist $a = 5\,944\,628\,793$

$$R = 567\,849\,595$$

Ist Z durch 7 teilbar, dann muß auch $a - R$ durch 7 teilbar sein. An Stelle von Z haben wir nun $Z_1 = a - R$ zu prüfen.

$$Z_1 = a - R = 5\,376\,779\,198$$

führen wir nun weiter mit r_6 auf ein Z_2 zurück. Da $r_6 = 1$ ist, erhalten wir:

$$Z_1 = a \cdot 10^6 + R = a \cdot (10^6 - 1) + (a + R)$$

(Die Indizes sind der Einfachheit halber weggelassen.)

$$a = 5\,376 \qquad R = 779\,198$$

$$Z_2 = a + R = 784\,574$$

In ähnlicher Weise ergibt sich aus Z_2 mit Hilfe von $r_3 = -1$ Z_3:

$$Z_2 = a \cdot 10^3 + R = a \cdot (10^3 + 1) - (a - R)$$

$$a = 784 \qquad R = 574$$

$$Z_3 = a - R = 210$$

Z_3 und somit auch Z sind also durch 7 teilbar. Am folgenden Beispiel soll gezeigt werden, daß es, wenn auch nicht notwendig, so doch möglich ist (und sein muß!), den Rest selbst zu erhalten, der sich bei der Division von Z durch p ergeben muß.

Es sei

$$Z = 56\ 235$$

Dann wird für

$$\begin{array}{lll} r_3 = -1 & Z_1 & = -56 + 235 = 179 \\ r_2 = 2 & Z_2 & = 2 \cdot 1 + 79 = 81 \\ r_1 = 3 & Z_3 & = 3 \cdot 8 + 1 = 25 \\ & Z_4 & = 3 \cdot 2 + 5 = 11 \\ & Z_5 & = 3 \cdot 1 + 1 = 4 \end{array}$$

Also $56\ 235 \equiv 4 \pmod{7}$

Wird die Reduktion von Z mit Hilfe negativer Reste vorgenommen, dann kann unter Umständen $-Z_n \equiv Z \pmod{p}$ sein, wie folgender Fall zeigt:

$$\begin{array}{ll} Z & = 821\ 309 \\ Z_1 & = 512 \text{ (Zeichenwechsel!)} \\ Z_2 & = 22 \end{array}$$

und für $r_1 = -4 \quad Z_3 = -6$

Z ergibt durch 7 dividiert den Rest + 6!

Ist Z durch 7 (p) teilbar, dann wird $Z_n = 7$ (p), oder $= 0$. Der zweite Fall wird dann eintreten, wenn bei der Verwendung negativer Reste $a \cdot r = R$ ist; also für $r = -1$: $a = R$. Daraus ergibt sich ein Bildungsgesetz für eine Gruppe von durch 7 (p) teilbaren Zahlen.

Es sei $r_u = -1$ für $10^u : p$. Bezeichnen wir mit R eine u Stellen umfassende Gruppe der Zahl Z, dann ist Z durch p teilbar, wenn es aus einer beliebigen Zahl ganzer Gruppen R besteht, die folgende Bedingung erfüllen:

$$\sum R_{2n} = \sum R_{2n\pm 1} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Umfaßt Z zwei Gruppen, dann ist also

$$R_2 = R_1$$

Für drei Gruppen gilt:

$$R_2 = R_3 + R_1$$

Für vier Gruppen:

$$R_4 + R_2 = R_3 + R_1 \quad \text{usw.}$$

Die Gruppen seien von rechts nach links gezählt. Dann werden für $p = 7$, da $r_3 = -1$, folgende Zahlen stets teilbar sein:

Form R_1R_1	258 258	Der Einfachheit halber wird gesetzt:
$\left.\begin{matrix} R_3R_{3+1}R_1 \\ \text{oder } R_{2-1}R_2R_1 \end{matrix}\right\}$	531 625 094	$R_{u\pm v} = R_u \pm R_v$
$R_{3+1-2}R_3R_2R_1$	077 235 889 731	
usw.		

Ist r_u der Rest, den man bei der Division von 10^u durch p erhält, negativ und von -1 verschieden, dann muß allgemein — denn man kann jedes positive r durch $-(p-r)$ ersetzen — für $Z_n = 0$ gelten, sofern Z zwei Gruppen von je u Stellen umfaßt:

$r \cdot R_1 = R_0$ (die erste Gruppe von rechts an ist mit R_0, statt mit R_1 bezeichnet; ferner ist r für r_u gesetzt),

sofern Z drei Gruppen umfaßt:

$$r \cdot R_1 = r^2 \cdot R_2 + R_0$$

bei vier Gruppen:

$$r^3 \cdot R_3 + r \cdot R_1 = r^2 \cdot R_2 + R_0$$

und allgemein:

$$\sum_{i=o}^{n} r^{2i\pm 1} \cdot R_{2i\pm 1} = \sum_{i=o}^{n} r^{2i} \cdot R_{2i}$$

Ist Z teilbar durch p und $Z_n \neq o$, dann kann man dieser Beziehung folgende, für alle Primzahlen gültige Form geben:

$$\sum^{n} r^{2i\pm 1} \cdot R_{2i\pm 1} - \sum^{n} r^{2i} \cdot R_{2i} \pm k \cdot p = o \qquad 1)$$

$$k \cdot p < 10^u$$

Wir werden ihr später noch einmal begegnen. Sie zeigt, daß die bei der Prüfung auf die Teilbarkeit durch 9 angewendete Quersummenmethode nur eine spezielle Form eines bei allen Primzahlen anwendbaren Summenverfahrens darstellt.

Dividiert man 10^t durch 13, dann werden folgende Reste erhalten:

Für $t = 1$	$r = -3$
2	-4
3	-1
4	3
5	4
6	1
7	-3
usw.	

Wir sehen, daß 13 die günstigen Reste r_3, r_6... mit 7 gemeinsam hat. Soweit sich also Aussagen über die Teilbarkeit durch 7 auf diese Reste beziehen, gelten sie wörtlich auch für 13. Wir können uns daher auf die Darstellung des Reduktionsverfahrens bei Zahlen kleiner als 1000 beschränken.

Es sei $Z = 811$. Dann wird $Z_1 = -4 \cdot 8 + 11 = -21$ und $Z_2 = -3 \cdot -2 - 1 = 5$. Daraus folgt: $811 \equiv 5$ (mod. 13), was natürlich aus Z_1 sich schon ergibt.

$Z = 508$; also $Z_1 = -20 + 8 = -12$ oder $+1$. Dividiert man 508 durch 13, dann erhält man den Rest 1.

$Z = 793$; $Z_1 = -28 + 93 = 65$; $Z_2 = -13$; $Z_3 = 0$. 793 ist durch 13 teilbar. usw.

Für $p = 11$ wird $r_1 = -1$; somit $r_2 = +1$, $r_3 = -1$, usw. Führt man also die Reduktion einer Zahl Z, die auf die Teilbarkeit durch 11 geprüft werden soll, mit r_2 durch, dann hat man Z in Gruppen von je zwei Stellen einzuteilen und diese Gruppen dann zu addieren. Umfaßt das so erhaltene Z_k mehr als zwei Stellen, dann kann man wieder in gleicher Weise verfahren.

Es sei $Z = 2\,635\,945$. Dann ist

$$Z' = 45 + 59 + 63 + 2 = 169$$
$$Z'' = 69 + 1 = 70$$

und da $r_1 = -1$ ist: $Z''' = -7$, oder $+4$.

Man kann auch in der Weise verfahren, daß man alle geradstelligen Ziffern (2., 4., ... Z.) addiert und zum Zehnfachen dieser Summe jene aller ungeradstelligen Ziffern hinzunimmt.

Reduziert man mit Hilfe von r_1, dann wird offenbar

$$Z' = 5 - 4 + 9 - 5 + 3 - 6 + 2 = 4$$
$$= (5 + 9 + 3 + 2) - (4 + 5 + 6)$$

Ist Z durch 11 teilbar, dann muß sich die Summe aller ungeradstelligen Ziffern von der Summe aller geradstelligen um 0, oder ein ganzzahliges Vielfaches von 11 unterscheiden.

Verwendet man $r_3 = -1$ zur Reduktion, dann gilt das bereits von $p = 13$, bzw. $p = 7$ Gesagte.

Summation und Reduktion

Im Falle $p = 11$ erkennt man deutlich, daß die Reduktion mit Hilfe von Resten, die den Wert ± 1 haben, einer Summation von Ziffern oder Ziffergruppen gleichkommt. Anderseits wurde gezeigt, daß bei Verwendung negativer Reste die Kennzeichen aller durch p teilbaren Zahlen in allgemeiner Form durch ebensolche Summationen ausgedrückt werden können. Wenn S das Ergebnis der Summenbildung und Z_n das Endglied der Reduktionsreihe: $Z, Z_1, Z_2, \ldots$ ist, gilt: $Z \equiv S \equiv Z_n$ (mod. p). Somit können sich auch Summation und Reduktion nicht grundsätzlich voneinander unterscheiden, wenn, was vorauszusetzen ist, das Verfahren der Summenbildung auch die Reste benützt, die bei der Division von 10^t durch p übrig bleiben ($t = 0, 1, 2, \ldots n$).

Um eine für jedes Z und jedes p gültige Form von S zu erhalten, setzen wir:

$$Z = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \ 10^2 + \ldots + a_n \cdot 10^n$$

Ist r_k der bei der Division von 10^k durch p übrig bleibende Rest, dann wird

$$\begin{aligned} S &= a_0 \cdot r_0 + a_1 \cdot r_1 + a_2 \cdot r_2 + \ldots + a_n \cdot r_n \\ &= \sum_{o}^{n} a_k \cdot r_k \end{aligned} \qquad 2)$$

Es gilt also allgemein:

$$Z \equiv \sum_{o}^{n} a_k \cdot r_k \text{ (mod. p), wenn } \underset{< p}{r_k} \equiv 10^k \text{ (mod. p).} \qquad 3)$$

Die Summenformel 2) möge nun auf einige besondere Fälle angewendet werden. Ist $p = 9$, dann sind alle Reste unter sich gleich und gleich Eins, sodaß wir erhalten:

$$S_9 = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum a_k,$$

entsprechend der bekannten Quersummenformel. Für $p = 11$ wurde wegen $r_1 = -1$ bereits festgestellt:

$$\begin{aligned} S_{11} &= (Z' =)\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots \\ &= \sum_{o} a_{2k} - \sum_{1} a_{2k \pm 1} \end{aligned}$$

Ergibt 10^u durch p dividiert den Rest 1, dann setzen wir

$$Z = A_0 + A_1 \cdot 10^u + A_2 \cdot 10^{2u} + A_3 \cdot 10^{3u} + \ldots,$$

$$\begin{aligned} \text{wobei} \quad A_0 &= a_0 + a_1 \cdot 10^1 + \ldots + a_{u-1} \cdot 10^{u-1} \\ A_1 &= a_u \quad + \ldots + a_{2u-1} \cdot 10^{u-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_k &= a_{ku} + \ldots + a_{(k+1)\,u-1} \cdot 10^{u-1} \end{aligned}$$

Für $r_u = +1$ wird dann

$$S = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots$$

Beispiel $r_2 = 1$ für $p = 11$. Summation zweigliedriger Gruppen.
$r_3 = 1$ für $p = 37$. Summation dreigliedriger Gruppen.
$r_4 = 1$ für $p = 101$. Summation viergliedriger Gruppen.
usw.

Ist $r_u = -1$, dann erhält man entsprechend:

$$S = A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \ldots$$

Beispiel: $r_2 = -1$ für $p = 101$
$r_3 = -1$ für $p = 7, 11, 13$
usw.

Es sei $Z = 58\,321\,937\,544$. Aus

$$S = 44 - 75 + 93 - 21 + 83 - 5 = 119;\ S' = 19 - 1 = 18$$

schließen wir, daß Z durch 101 dividiert, den Rest 18 ergibt.

$$S = 544 - 937 + 321 - 58 = -130$$

zeigt, daß Z durch 13, aber nicht durch 7 und nicht durch 11 geteilt werden kann.

Erfolgt die Summenbildung unter Verwendung des Restes $r_u = r \mp 1$, dann wird

$$S = A_0 + r \cdot A_1 + r^2 \cdot A_2 + r^3 \cdot A_3 + \ldots \qquad 4)$$

Für $r_u = -r$ erhält man

$$S = A_0 - r \cdot A_1 + r^2 \cdot A_2 - r^3 \cdot A_3 + \ldots$$

in Übereinstimmung mit 1). Es ist z. B. $r_2 = 2$ für $p = 7$ und $r_2 = -2$ für $p = 17$. $Z = 79\,968$ ergibt mit Hilfe dieser Reste:

$$S_7 = 68 + 2 \cdot 99 + 2^2 \cdot 7 = 294;\ S' = 94 + 2 \cdot 2 = 98$$
$$S_{17} = 68 - 2 \cdot 99 + 2^2 \cdot 7 = -102;\ S' = -2 + 2 \cdot 1 = 0$$

Z ist also durch 7 und durch 17 teilbar.

Wir haben in 2) und in 4) zwei für alle p und alle Z mögliche Arten der Summenbildung kennengelernt. Während 2) alle Reste r_k benutzt, d. h. soviele, als in Z Ziffern vorkommen, um S zu erhalten, wird mit 4) aus einem einzigen Rest die Summe ermittelt. Das bedingt die Zusammenfassung der Glieder (Summanden) von Z zu Gruppen in der dargestellten Weise und damit auch die Summierung einer bestimmten Anzahl von Einzelresten. In der Tat finden wir, daß ein beliebiger, aus S nach 4) entnommener Gruppenrest

$$\begin{aligned} r^k \cdot A_k &= r^k \cdot (a_{ku} + a_{ku+1} \cdot 10 + a_{ku+2} \cdot 10^2 + \ldots \\ &\qquad + a_{(k+1)u-1} \cdot 10^{u-1}) \\ &\equiv r^k \cdot (a_{ku} + a_{ku+1} \cdot r_1 + a_{ku+2} \cdot r_2 + \ldots + a_{(k+1)u-1} \cdot r_{u-1}) \\ &\equiv a_{ku} \cdot r_{ku} + a_{ku+1} \cdot r_{ku+1} + \ldots + a_{(k+1)u-1} \cdot r_{(k+1)-1} \\ &\qquad\qquad (\text{mod. } p). \end{aligned}$$

nur um ein ganzzahliges Vielfaches $m \cdot p$ sich von der Summe der entsprechenden Einzelreste unterscheidet.

Das gilt nun wörtlich auch für das Reduktionsverfahren, wenn man es im einen Fall unter Verwendung aller Reste; im andern mit Hilfe eines einzigen Restes (Gruppenrestes) durchführt. Setzen wir wieder

$$Z = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

und reduzieren mit r_n, r_{n-1}, ... r_1, dann wird

$$Z_1 = a_n \cdot r_n + R, \qquad R = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$Z_2 = a_n \cdot r_n + a_{n-1} \cdot r_{n-1} + R_1 \quad | \quad R_1 = a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_0$$

$$Z_3 = a_n \cdot r_n + a_{n-1} \cdot r_{n-1} + a_{n-2} \cdot r_{n-2} + R_2$$

$$Z_n = a_n \cdot r_n + \ldots + a_0 = \sum a_k \cdot r_k$$

Z_n stimmt also mit S [vgl. 2)], wie zu erwarten war, überein. Verwenden wir nur den Rest r_u zur Reduktion, dann erhalten wir in ähnlicher Weise ein 4) entsprechendes Z_n. Zwischen Reduktion und Summation besteht also kein grundsätzlicher Unterschied. Wenn trotzdem bei der praktischen Anwendung die beiden Verfahren auseinanderzuhalten sind, dann liegt das daran, daß bei Benützung e i n e s, von 1 verschiedenen Restes die simultane (Summation) Berechnung der auf die Teilbarkeit durch p direkt zu prüfenden Zahl weniger vorteilhaft ist, als die sukzedane (Reduktion). Verwendet man dagegen viele Reste, dann ist das Gegenteil der Fall.

Es bleibt nun noch übrig, Z_n in der das Reduktionsverfahren kennzeichnenden Weise auszudrücken. Ist r_u der bei der Division von 10^u durch p übrig bleibende Rest und

$$Z = A_0 + A_1 \cdot 10^u + A_2 \cdot 10^{2u} + \ldots$$

die auf die Teilbarkeit zu prüfende Zahl, dann wird

$$Z_n = A_0 + r_u \cdot (A_1 + r_u \cdot (A_2 + r_u \cdot (A_3 + \ldots))))) \qquad 5)$$

in Übereinstimmung mit 4). Entsprechend würde man bei Verwendung aller Reste erhalten:

$$Z_n = a_0 + r_1 \cdot (a_1 + r_1 \cdot (a_2 + r_1 \cdot (a_3 + \ldots))))) \qquad 6)$$

Zum Schlusse mögen noch einige Beispiele die Anwendung der beiden Verfahren zeigen.

Es sei $Z = 4\,872\,634\,987\,129$ durch Reduktion auf die Teilbarkeit durch 7, 11 und 13 zu prüfen.

Für alle drei Primzahlen sind $r_3 = -1$, $r_6 = 1$, usw.

$$\begin{array}{ll}
 & Z = 4\,872\,634\,987\,129 \\
r_6 = 1 & Z_1 = 4\,872\,634 + 987\,129 = 5\,859\,763 \\
r_3 = -1 & Z_2 = 5\,859 - 763 = 5096 \\
 & Z_3 = 96 - 5 = 91
\end{array}$$

Z ist durch 7 und durch 13 teilbar.

Durch Quersummenbildung erhält man:

$$S = 129 - 987 + 634 - 872 + 4 = (-)\,1092$$
$$S' = 91$$

Man prüfe Z auf die Teilbarkeit durch 37. — Da r_3 für 37 gleich 1 ist, finden wir

$$S = 129 + 987 + 634 + 872 + 4 = 2626$$
$$S' = 626 + 2 = 628$$

und weiter durch Reduktion mit $r_2 = -11$:

$$Z' = -11 \cdot 6 + 28 = -38 \text{ oder } -1 \qquad Z \equiv -1 \text{ (mod. 37)}$$

Man stelle unter Verwendung von $r_4 = 3$, usw. durch Reduktion die Teilbarkeit von Z durch 13 fest.

$$\begin{array}{ll}
 & Z = 4\,872\,634\,987\,129 \\
r_4 = 3 & Z_1 = 3 \cdot 487\,263\,498 + 7129 = 1\,461\,797\,623 \\
 & Z_2 = 3 \cdot 146\,179 + 7623 = 446\,160 \\
 & Z_3 = 3 \cdot 44 + 6160 = 6292 \\
r_3 = -1 & Z_4 = 292 - 6 = 286 \\
r_2 = -4 & Z_5 = -4 \cdot 2 + 86 = 78 = 6 \cdot 13
\end{array}$$

Die Lösung der gleichen Aufgabe nach der allgemeinen Summenmethode [vgl. 2)] zeigt folgendes Bild:

Stellung der Ziffern

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Ziffern v. r. n. l.

	9	2	1	7	8	9	4	3	6	2	7	8	4

Reste

+	1	10	9	12	3	4	1	10	9	12	3	4	1
—	12	3	4	1	10	9	12	3	4	1	10	9	12

Summe

$S = 9 - 6 - 4 - 7 + 24 + 36 - 48 - 9 - 24 - 2 + 21 + 32 + 4 = 26$

oder

$-108 - 6 + 9 - 7 + 24 + 36 - 48 + 30 - 24 - 2 + 21 + 32 - 48 = -91$

oder $9 - 6 - 4 - 7 - 80 + 36 - 48 + 30 + 54 + 24 + 21 + 32 - 48 = 13$

usw.

Da S ein Vielfaches von 13 ist, muß Z durch 13 teilbar sein.