Ueber den

Berührungskegel eines elliptischen Sphäroids.

Von Dr. K. Friesach.

Das Sphäroid, dessen Halbaxen ich mit a, b, c bezeichne, werde auf ein rechtwinkeliges Axensystem bezogen, dessen Anfangspunkt O mit der Spitze des Berührungskegels und dessen z Axe mit der von der Kegelspitze an den Mittelpunkt des Sphäroids gezogenen Geraden zusammenfällt. Die Axe a bilde mit den Axen der x, y, z die Winkel α, α_1, α_2, und seien β, β_1, β_2 und γ, γ_1, γ_2 die analogen Winkel für die Axen b und c. Die Lage der Axen der x und y kann immer so gewählt werden, dass c in die Ebene der y z fällt, in welchem Falle $\gamma = 90^0$, folglich $\cos\gamma = 0$ wird.

Fielen die a, b, c mit den Axen der x, y, z zusammen, so hätte man für das Sphäroid die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z-\zeta)^2}{c^2} = 1,$$

wo ζ den Abstand des Mittelpunktes des Sphäroids vom Anfangspunkte bezeichnet. Um hieraus die Gleichung des Sphäroids für die oben vorgenommene Lage seiner Axen abzuleiten, hat man in dieser Gleichung nur

$$\begin{array}{lll} x & \text{durch} & x\cos\alpha + y\cos\alpha_1 + z\cos\alpha_2 \\ y & \text{„} & x\cos\beta + y\cos\beta_1 + z\cos\beta_2 \\ z & \text{„} & \qquad\qquad\; y\cos\gamma_1 + z\cos\gamma_2 \end{array}$$

zu ersetzen. Setzt man nun, Kürze halber,

$$\frac{\cos\alpha^2}{a^2}+\frac{\cos\beta^2}{b^2}=m \qquad \frac{\cos\alpha\,\cos\alpha_1}{a^2}+\frac{\cos\beta\,\cos\beta_1}{b^2}=q$$

$$\frac{\cos\alpha_1^2}{a^2}+\frac{\cos\beta_1^2}{b^2}+\frac{\cos\gamma_1^2}{c^2}=n \quad \frac{\cos\alpha\,\cos\alpha_2}{a^2}+\frac{\cos\beta\,\cos\beta_2}{b^2}=r$$

$$\frac{\cos\alpha_2^2}{a^2}+\frac{\cos\beta_2^2}{b^2}+\frac{\cos\gamma_2^2}{c^2}=p \quad \frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_2}{a^2}+\frac{\cos\beta_1\cos\beta_2}{b^2}+\frac{\cos\gamma_1\cos\gamma_2}{c^2}=s,$$

so hat man für die Oberfläche des Sphäroids, die Gleichung:

$$m x^2+n y^2+2 q\, x y+p(z-\zeta)^2+2(r x+s y)(z-\zeta)-1=0 \;.\; 1.)$$

Die Gleichung

$$x = y\, tg\, w \;\; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 2\,)$$

gehört zu einer durch die Axe der z gelegten Ebene, welche mit der Ebene der $y\,z$ den Winkel w bildet. Die Gleichungen 1.) und 2) zusammen gehören zu dem Durchschnitte jener Ebene mit dem Sphäroide. Indem man aus 1.) und 2.) x eliminirt, hat man

$$(m\,tgw^2+2\,q\,tgw+n)\,y^2+p\,(z-\zeta)^2+2y\,(r\,tgw+s)\,(z-\zeta)-1=0,$$

woraus:
$$z-\zeta=-\frac{(r\,tgw+s)y \pm \sqrt{p+\left[(r^2-mp)\,tgw^2+2\,(rs-pq)\,tgw+s^2-np\right]y^2}}{p} \;\; . \; . \; . \; 3.)$$

Wie aus 3.) erhellt, entsprechen einem gegebenen y im Allgemeinen, zwei Werthe von z. Da es sich aber im Folgenden um denjenigen Punkt der Kurve handelt, wo dieselbe von einer durch O gezogenen Geraden berührt wird, diesem Punkte aber das kleinere z entspricht, so gilt hier nur das untere Zeichen. Wird nun, Kürze halber, der unter dem Wurzelzeichen befindliche Coeffizient von y^2 durch θ bezeichnet, so ist

$$z=\frac{p\,\zeta-(r\,tgw+s)\,y-\sqrt{p+\theta y^2}}{p} \;\; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 4.)$$

Der hier in Betracht kommende Theil unserer Kurve kann nun auch durch die Gleichungen 2.) und 4.) ausgedrückt werden

Durch Differentiiren dieser Gleichungen findet man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= tgw \\ \frac{dz}{dy} &= -\frac{(r\,tgw+s)\sqrt{p+\theta y^2}+\theta\,y}{p\sqrt{p+\theta\,y^2}} \end{aligned}\right\} \;\; . \; . \; . \; . \; . \; 5.)$$

Für die Tangente einer Kurve gelten bekanntlich die allgemeinen Gleichungen: $\frac{x'-x}{dx} = \frac{y'-y}{dy} = \frac{z'-z}{dz}$, wo sich x, y, z auf den Berührungspunkt, x', y', z' aber auf einen beliebigen Punkt der Tangente beziehen. Soll die Tangente durch den Anfangspunkt gehen, so müssen diese Gleichungen auch durch die Werthe $x' = y' = z' = 0$ erfüllt werden, und ist sonach für den Berührungspunkt:

$$\frac{x}{dx} = \frac{y}{dy} = \frac{z}{dz} \text{ oder } \frac{x}{\frac{dx}{dy}} = y = \frac{z}{\frac{dz}{dy}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6.)$$

Die Gleichungen der Tangente aber sind:

$$\frac{x'}{\frac{dx}{dy}} = y' = \frac{z'}{\frac{dz}{dy}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7.)$$

Für den Punkt, wo der Durchschnitt der Ebene 2) mit dem Sphäroide von einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden berührt wird, ist daher, mit Rücksicht auf 6.), 5.) und 4.):

$$x \cot w = y = \frac{(r\, tgw + s)\, y \sqrt{p + \theta y^2} + p + \theta y^2 - p\, \zeta \sqrt{p + \theta y^2}}{(r\, tgw + s) \sqrt{p + \theta y^2} + \theta y}$$

Aus dem zweiten und dritten Theile dieser Gleichung folgt, nach gehöriger Reduction:

$$\zeta \sqrt{p + \theta y^2} = 1,$$

$$p + \theta y^2 = \frac{1}{\zeta^2}$$

$$y^2 = \frac{1 - p\, \zeta^2}{\zeta^2\, \theta};$$

endlich, mit Rücksicht auf 4.):

$$\left.\begin{aligned} y &= \pm \frac{\sqrt{1 - p\, \zeta^2}}{\zeta \sqrt{\theta}} \\ x &= \pm \frac{\sqrt{1 - p\, \zeta^2} \,.\, tgw}{\zeta \sqrt{\theta}} \\ z &= \frac{p\, \zeta^2 - 1}{p\, \zeta} \mp \frac{(r\, tgw + s) \sqrt{1 - p \zeta^2}}{p\, \zeta \sqrt{\theta}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 8.)$$

Diese Gleichungen geben die Coordinaten des Berührungspunktes. Durch Elimination von w, erhält man daraus die Gleichungen der Kurve, in welcher der Kegel das Sphäroid berührt. Setzt man nämlich, in dem Ausdrucke $0, \frac{x}{y}$ statt tgw, so reducirt sich sowohl die erste als die zweite der Gleichungen 8.) auf

$$1 = \pm \frac{\sqrt{1-p\zeta^2}}{\zeta\sqrt{(r^2-mp)x^2+2(rs-pq)xy+(s^2-np)y^2}}$$

oder $$(r^2-mp)x^2+2(rs-pq)xy+(s^2-np)y^2 = \frac{1-p\zeta^2}{\zeta} \quad . \ 9.)$$

Aus der ersten und dritten aber folgt

$$\frac{z-\frac{p\zeta^2-1}{p\zeta}}{y} = -\frac{rx+sy}{py} \text{ oder } rx+sy+pz = \frac{p\zeta^2-1}{\zeta} \quad . \ 10.)$$

9.) und 10.) sind die Gleichungen der Berührungskurve. Letztere zeigt, dass dieselbe in einer Ebene liegt, erstere aber, dass sie eine Ellipse ist.

Indem man in 5.) statt y dessen Werth aus 8.) einführt,

wird $$\frac{dz}{dy} = -\frac{r\,tgw + s \pm \sqrt{0}\sqrt{1-p\zeta^2}}{p}$$

Ferner ist $$\frac{dx}{dy} = tgw \quad . \ . \ 11.)$$

Aus der Verbindung von 11.) mit 7.) ergeben sich die Gleichungen der Tangente:

$$x'\cot w = y' = -\frac{pz'}{r\,tgw + s \pm \sqrt{0}\sqrt{1-p\zeta^2}} \quad . \ . \ 12.)$$

Die Elimination von w aus 12.) führt auf die Gleichung des Berührungskegels:

$$[(r^2-mp)x'^2+2(rs-pq)x'y'+(s^2-np)y'^2] = (1-p\zeta^2) =$$
$$= (rx'+sy'+pz')^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 13.)$$

In Verbindung mit der Gleichung $z'=k$, ist 13.) die Gleichung des Durchschnitts des Berührungskegels mit einer der Ebene der xy parallelen Ebene, welche von dem Anfangspunkte um k absteht. Diese Kurve, welche, wie aus 13.) ersichtlich, eine Ellipse ist, bildet in einer perspectivischen Darstellung de Sphäroides den Umriss.

Für $a=b$, verwandelt sich das dreiaxige Sphäroid in ein Retationssphäroid mit der Axe c, und wird, mit Rücksicht auf die bekannten zwölf Gleichungen, welche zwischen den Grössen α, α_1, etc. bestehen:

$$m = \frac{\cos\alpha^2 + \cos\beta^2}{a^2} = \frac{1}{a^2}$$

$$n = \frac{\cos\alpha_1^2 + \cos\beta_1^2}{a^2} + \frac{\cos\gamma_1^2}{c^2} = \frac{\sin\gamma_1^2}{a^2} + \frac{\cos\gamma_1^2}{c^2}$$

$$p = \frac{\cos\alpha_2^2 + \cos\beta_3^2}{a^2} + \frac{\cos\gamma_2^2}{c^2} = \frac{\sin\gamma_2^2}{a^2} + \frac{\cos\gamma_2^2}{c^2}$$

$$q = \frac{\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1}{a^2} = 0$$

$$r = \frac{\cos\alpha\cos\alpha_2 + \cos\beta\cos\beta_2}{a^2} = 0$$

$$s = \frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2}{a^2} + \frac{\cos\gamma_1\cos\gamma_2}{c^2} =$$

$$= \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)$$

Ausserdem ist $\sin\gamma_1^2 = \cos\gamma_2^2$, $\cos\gamma_1^2 = \sin\gamma_2^2$, $\cos\gamma_1\cos\gamma_2 =$
$= \sin\gamma_2 \cos\gamma_2$

Dadurch erhalten die obigen Gleichungen eine einfachere Gestalt. Die Ebene der Berührungskurve wird der Axe der x parallel, und ihr Mittelpunkt fällt in die Axe der z. Die Gleichung des Berührungskegels verwandelt sich zunächst in

$$(p\zeta^2-1)\,m\,x'^2 + \left[(p\zeta^2-1)\,n - s^2\zeta^2\right]y'^2 = 2\,s\,y'z' + p\,z'^2,$$

und, wenn man für m, n, etc. deren Werthe setzt, hat man schliesslich:

$$\left[\zeta^2(c^2\sin\gamma_2^2 + a^2\cos\gamma_2^2) - a^2c^2\right]x'^2 + \left[\zeta^2 - (c^2\cos\gamma_2^2 + a^2\sin\gamma_2^2)\right]a^2y'^2$$
$$= 2\,(a^2-c^2)\,a^2c^2\sin\gamma_2\cos\gamma_2\; y'z' + (c^2\sin\gamma_2^2 + a^2\cos\gamma_2^2)\,a^2z'^2$$