Ueber die Schwere an der Oberfläche eines Rotations-Ellipsoids von gleichförmiger Dichte.

Von Dr. Carl Friesach.

Manche sonst treffliche Lehrbücher der Physik enthalten die Bemerkung, dass, auch abgesehen von der Axendrehung der Erde, schon in Folge ihrer abgeplatteten Gestalt, die Schwere an den Polen grösser sein müsse als am Aequator, indem erstere vom Erdmittelpunkte weniger weit entfernt wären, als die Punkte des Aequators — eine Erklärung, welche durchaus nicht zulässig ist, da man von einem sphäroidischen Körper nicht behaupten kann, dass er so wirke, als ob seine ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre. In der That ist ein solcher Beweis kaum besser, als die Behauptung eines bekannten astronomischen Literaten, welcher, aus der grösseren Schwere an den Polen, eine Polar-Anschwellung folgert, indem er meint, die Anziehung der Erde müsse sich dort am stärksten äussern, wo die Massenanhäufung am grössten. Es wäre daher besser, in Elementarbüchern diesen Gegenstand entweder unerwähnt zu lassen, oder, behufs seiner Begründung, auf die höhere Analyse zu verweisen.

Ich beschränke mich im Folgenden auf die Untersuchung der Schwere an der Oberfläche eines elliptischen Sphäroids von constanter Dichte.

Geht man von der Hypothese einer gleichförmig dichten, tropfbar flüssigen Masse aus, welche, in Folge ihrer Rotation, die Gestalt eines durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleinere Axe erzeugten Sphäroids angenommen hat, so ist die Oberfläche dieses Sphäroids, in Bezug auf dessen Massenanziehung und die in Folge der Rotation sich entwickelnde Fliehkraft, eine Gleichgewichtsfläche, d. i. eine solche, auf welcher überall die Resul-

tirende jener beiden Kräfte mit der Normalen zusammenfällt. Für diesen Fall ist bekanntlich, wenn g, g' und G die Schwere am Aequator, in der geographischen Breite φ und an den Polen, a den Aequatorial-Halbmesser und b die halbe Polaraxe bezeichnet:

$$g' = \frac{g}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} . \sin \varphi^2}},$$

woraus sich sofort die Abnahme der Schwere von den Polen gegen den Aequator ergibt. Für die Pole ist hiernach:

$$G = g \, . \, \frac{a}{b} \, .$$

Lässt man aber die Fliehkraft unberücksichtigt, so ergeben sich, für g und G, weit complizirtere Ausdrücke, aus welchen nicht auf den ersten Blick zu ersehen, dass $G > g$ sein müsse.

Es sei m ein Punkt an der Oberfläche des Sphäroids. Nimmt man, in dessen Meridanebene, den Halbmesser des Aequators als Abscissen- und die Polaraxe als Ordinatenaxe an, so kann die in der Meridanebene wirkende Anziehung des Sphäroids auf den Punkt m in zwei jenen Axen parallele Componenten X und Y zerlegt werden, und man hat, wenn man die Coordinaten des Punktes m mit x, y, die Excentricität des Sphäroids mit ε, und einen von der Intensität der Massenanziehung abhängigen constanten Factor mit μ bezeichnet, nach den bekannten Formeln für die Anziehung eines elliptischen Sphäroides:

$$X = \frac{\mu b x}{a} \int_0^1 \frac{t^2 \, dt}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 t^2}} = \mu x . \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2 \varepsilon^2} \left(\frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon} - \sqrt{1 - \varepsilon^2} \right)$$

$$Y = \frac{\mu a^2 y}{b^2} \int_0^1 \frac{t^2 \, dt}{1 - \varepsilon^2 t^2} = \mu y . \frac{1}{\varepsilon^2} \left(1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2} . \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon} \right),$$

woraus:

$$g = \frac{\mu a \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2 \varepsilon^2} \left(\frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon} - \sqrt{1 - \varepsilon^2} \right)$$

$$G = \frac{\mu a \sqrt{1 \quad \varepsilon^2}}{\varepsilon^2} \left(1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2} \, . \, \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon} \right)$$

Für den Fall, dass das Sphäroid wenig von einer Kugel abweicht, überzeugt man sich leicht, dass $G > g$, indem man obige Ausdrücke nach steigenden Potenzen von ε in Reihen ent-

wickelt, und bei den Gliedern zweiter Ordnung stehen bleibt, wodurch man findet:

$$g = \frac{\mu a}{3}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{10}\right)$$

$$G = \frac{\mu a}{3}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{5}\right).$$

Um aber allgemein darzuthun, dass die Schwere, von den Polen gegen den Aequator hin, abnimmt, dürfte folgender Weg der kürzeste sein:

Man setze $\varepsilon = \sin w$, so verwandeln sich obige Formeln in:

$$X = \frac{\mu\, x \cos w}{2 \sin w^3}\left(w - \sin w \cos w\right)$$

$$Y = \frac{\mu\, y}{\sin w^3}\left(\sin w - w \cos w\right)$$

$$g = \frac{\mu\, a \cos w}{2 \sin w^3}\left(w - \sin w \cos w\right)$$

$$G = \frac{\mu\, a \cos w}{\sin w^3}\left(\sin w - w \cos w\right).$$

Ferner ist:

$$g' = \sqrt{X^2 + Y^2} =$$

$$= \frac{\mu}{2 \sin w^3}\sqrt{x^2 \cos w^2 (w - \sin w \cos w)^2 + xy^2 (\sin w - w \cos w)^2}$$

Durch Einführung des aus der Gleichung der Ellipse sich ergebenden Werthes $y^2 = \cos w^2 (a^2 - x^2)$, erhält man, wenn man, Kürze halber, $2a (\sin w - w \cos w) = A$ und $4 (\sin w - w \cos w)^2 - (w - \sin w \cos w)^2 = B$ setzt:

$$g' = \frac{\mu \cos w}{2 \sin w^2}\sqrt{A^2 - Bx^2}.$$

Es ist nun klar, dass g', bei abnehmender geogr. Breite, ab- oder zunimmt, je nachdem B positiv oder negativ ist. B ist aber die Differenz der Quadrate von $2 (\sin w - w \cos w)$ und $w - \sin w \cos w$, welche Ausdrücke nur positiv sein können, und hat darum mit deren Differenz einerlei Zeichen. Es handelt sich sonach nur um die Qualität der Differenz

$$\triangle = 2 (\sin w - w \cos w) - (w - \sin w \cos w).$$

Download von www.biologiezentrum.at
Download unter www.biologiezentrum.at
©Akademie d. Wissenschaften Wien;

Nach w differentiirend, hat man:

$$d\triangle = 2 \sin w \, (w - \sin w) \, dw,$$

und, weil $\triangle$, für $w = o$, verschwindet:

$$\triangle = 2 \int_{o}^{w} \sin w \, (w - \sin w) \, dw$$

Da nun, zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$, innerhalb welcher w nothwendig liegt, obiges Differential stets einen positiven Werth hat, ist auch $\triangle$ sicher positiv, woraus folgt, dass die Schwere von den Polen gegen den Aequator abnimmt.

An den Grenzen selbst, d. i. für $w = 0$ und $w = \frac{\pi}{2}$, wird $G - g = 0$. In ersterem Falle hat man $G = g = \frac{\mu a^3}{3}$; in letzterem hingegen verschwindet, wegen $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, sowohl G als g, während der Quotient $\frac{G}{g}$ den Grenzwerth $\frac{4}{\pi}$ annimmt.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Mitteilungen des naturwissenschaftlichen Vereins für Steiermark

Jahr/Year: 1875

Band/Volume: 12

Autor(en)/Author(s): Friesach Carl

Artikel/Article: Ueber die Schwere an der Oberfläche eines Rotations-Ellipsoids von gleichförmiger Dichte. 187-190