

Ueber die Anziehung von Ellipsoiden und ellipsoidischen Schalen.

Von Dr. Karl Friesach.

I.

Nachdem die Anziehung eines homogenen Ellipsoides, dessen Oberfläche durch die Gleichung

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

ausgedrückt wird, auf einen inneren oder äusseren Punkt (x, y, z) bereits bekannt war, gelang es Lejeune Dirichlet, durch Anwendung eines höchst sinnreichen analytischen Kunstgriffes, den Aus-

druck $\iiint \frac{d\xi \, d\eta \, d\zeta}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ auf ein einfaches Integral zurückzuführen, und für das Potential des homogenen Ellipsoids die Formel

$$V = \pi p_a b c \int_{\lambda_1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c^2 + \lambda} \right) \frac{d\lambda}{V(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} \quad (2)$$

aufzustellen, wo μ die constante Dichte des Ellipsoids, und λ_1 die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda_1} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda_1} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda_1} = 1 \quad \dots \quad 3)$$

bedeutet, wenn (x, y, z) ausserhalb des Ellipsoides liegt, während, für einen inneren Punkt, $\lambda_1 = 0$ ist.

Aus 2) lassen sich alle jene Sätze, welche von den Mathematikern, behufs Ermittlung der Anziehung eines Ellipsoides, erdonnen wurden, ohne Mühe herleiten.

Angenommen es sei weder b noch c grösser als a , so kann man $b = a \sqrt{1 - \varepsilon^2}$, $c = a \sqrt{1 - \varepsilon_1^2}$ setzen, und hat dann

$$V = \pi p a^3 \sqrt{(1 - \varepsilon^3)(1 - \varepsilon_1^2)} \times \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{a^2 + \lambda - a^2 \varepsilon^2} - \frac{z^2}{a^2 + \lambda - a^2 \varepsilon_1^2}\right) d\lambda}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(a^2 + \lambda - a^2 \varepsilon^2)(a^2 + \lambda - a^2 \varepsilon_1^2)}}. \quad 4)$$

Man setze $a^2 + \lambda = \theta^2$, $a^2 \varepsilon^2 = h^2$, $a^2 \varepsilon_1^2 = k^2$, so ist, wenn man den constanten Factor durch die Masse (M) des Ellipsoids ausdrückt:

$$V = \frac{3M}{2} \int_{\sqrt{a^2 + \lambda_1}}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{\theta^2} - \frac{y^2}{\theta^2 - h^2} - \frac{z^2}{\theta^2 - k^2}\right) d\theta}{\sqrt{(\theta^2 - h^2)(\theta^2 - k^2)}} = \frac{3M}{2} \int_{a'}^{\infty} P d\theta \quad 5)$$

Für den inneren Punkt ist $\lambda_1 = 0$, daher

$$V = \frac{3M}{2} \int_a^{\infty} P d\theta \quad 6)$$

Für den äusseren Punkt hingegen gilt, wegen $a'^2 = a^2 + \lambda_1$, die mit 3 identische Gleichung

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{a'^2 - h^2} + \frac{z^2}{a'^2 - k^2} = 1, \quad 7)$$

woraus ersichtlich, dass a' , $b' = \sqrt{a'^2 - h^2}$, $c' = \sqrt{a'^2 - k^2}$ die den a , b , c entsprechenden Halbachsen desjenigen mit (a, b, c) confocalen Ellipsoides sind, dessen Oberfläche durch den Punkt (x, y, z) geht, und dass, in der Formel 5) die untere Grenze a' , für alle confocalen Ellipsoide, einen constanten Werth besitzt. Hieraus folgt, dass die Potentiale confocaler homogener Ellipsoide bezüglich des nämlichen äusseren Punktes, sich wie deren Massen verhalten, woraus sich sofort der bekannte Satz von Maclaurin ergibt. Denn, bezeichnet man die Masse, das Potential eines Ellipsoides und die Componenten seiner Anziehung auf den äusseren Punkt (x, y, z) mit M , V und X , Y , Z , die analogen Grössen für ein zweites mit ersterem confocales Ellipsoid mit M' , V' und X' , Y' , Z' , endlich die Kraft, womit der Punkt (x, y, z) von der Masse 1 in der Entfernung 1 angezogen wird, mit i , so ist bekanntlich $X = i \frac{dV}{dx}$, $X' = i \frac{dV'}{dx}$ u. s. w. Nach Obigem ist

aber $V = \frac{M}{M'} V'$, also auch $\frac{dV}{dx} = \frac{M}{M'} \frac{dV'}{dx}$ u. s. f., folglich $\frac{M}{M'} = \frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'} = \frac{Z}{Z'}$. Diese Gleichungen sind der Ausdruck des Maclaurin'schen Satzes, welcher also lautet: Die Anziehungen homogener, confocaler Ellipsoide auf den nämlichen äusseren Punkt haben dieselbe Richtung, und sind deren Massen proportional.

Zu dem Ivory'schen Lehrsatz gelangt man durch folgende Betrachtungen. Es sei V das Potential des Ellipsoides (a, b, c) in Bezug auf den äusseren Punkt (x, y, z) , der sich in der Oberfläche des mit (a, b, c) confocalen Ellipsoides (a', b', c') befindet, und V' das Potential des letzteren bezüglich eines Punktes (x', y', z') , dessen Coordinaten durch die Gleichungen

$$a'x' = ax, \quad b'y' = by, \quad c'z' = cz \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

gegeben sind. Da der Punkt (x, y, z) in der Fläche (a', b', c') liegt, ist deren Halbachse a' mit der unteren Grenze a' in 5) identisch, und gilt die Gleichung

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1,$$

welche, wenn x, y, z mittelst 8) durch x', y', z' ausgedrückt werden, sich in

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$$

verwandelt, woraus erhellt, dass der Punkt x', y', z' in der Fläche (a, b, c) , also im Inneren des Ellipsoides (a', b', c') liegt. Durch

Anwendung der Formeln 5) und 6) hat man nun $V = \frac{3M}{2} \int_{a'}^{\infty} P d\theta$

und $V' = \frac{3M}{2} \int_{a'}^{\infty} P' d\theta$, und hieraus:

$$X = i \frac{dV}{dx} = -3Mx \int_{a'}^{\infty} \frac{d\theta}{\theta^2 V (\theta^2 - h^2) (\theta^2 - k^2)}$$

$$X' = i \frac{dV'}{dx'} = -3Mx' \int_{a'}^{\infty} \frac{d\theta}{\theta^2 V (\theta^2 - h) (\theta^2 - k^2)}$$

$$\frac{X}{X'} = \frac{Mx}{M'x'} = \frac{M}{M'}, \quad \frac{a'}{a} = \frac{bc}{b'c'}.$$

Ebenso findet man $\frac{Y}{Y'} = \frac{ac}{a'c'}$, $\frac{Z}{Z'} = \frac{ab}{a'b'}$.

Diese Gleichungen enthalten den Ivory'schen Satz.

Indem man, ohne die Werthe von ε und ε_1 zu ändern, a in $a - \partial a$ übergehen lässt, wodurch b, c, V in $b - \partial b, c - \partial c, V - \partial V$ übergehen, erhält man für das Potential der von den homofocalen Ellipsoidenflächen (a, b, c) und $(a - \partial a, b - \partial b, c - \partial c)$ begrenzten, unendlich dünnen Massenschicht A , den Ausdruck $\partial V = \frac{dV}{da} \partial a$.

Um den aus der Gleichung 4) für $\frac{dV}{da}$ sich ergebenden verwickelten Ausdruck durch einen einfacheren zu ersetzen, setze ich $a^2 + \lambda = a^2 v^2$, woraus $d\lambda = 2a^2 v dv$ und

$$V = 2\pi\mu V(1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon_1^2) \times \int_u^\infty \frac{\left[a^2 - \left(\frac{x^2}{v^2} + \frac{y^2}{v^2 - \varepsilon^2} + \frac{z^2}{v^2 - \varepsilon_1^2} \right) \right] dv}{V(v^2 - \varepsilon^2)(v^2 - \varepsilon_1^2)} \quad 9)$$

Hinsichtlich der unteren Grenze u ist zu bemerken, dass u^2 die einzige zwischen 1 und ∞ enthaltene Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{u^2 - \varepsilon^2} + \frac{z^2}{u^2 - \varepsilon_1^2} = a^2 \quad \dots \quad 10)$$

ist, und dass u im Folgenden immer positiv angenommen wird.

In 9) ist a sowohl unter dem Integralzeichen, als in der unteren Grenze u enthalten und ist sonach

$$\partial V = \frac{dV}{da} \partial a = 2\pi\mu V(1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon_1^2) \left\{ 2a \cdot \partial a \int_u^\infty \frac{dv}{V(u^2 - \varepsilon^2)(v^2 - \varepsilon_1^2)} - \right. \\ \left. - \frac{\left[a^2 - \left(\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{u^2 - \varepsilon^2} + \frac{z^2}{u^2 - \varepsilon_1^2} \right) \right] \frac{du}{da} \partial a}{V(u^2 - \varepsilon^2)(u^2 - \varepsilon_1^2)} \right\}$$

Da aber der zweite Theil des in der Klammer $\{\}$ stehenden Ausdrucks vermöge 10) verschwindet, reducirt sich obige Gleichung auf

$$\partial V = 4\pi \mu a V(1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon_1^2) \cdot \partial a \int_u^\infty \frac{dv}{V(v^2 - \varepsilon^2)(v^2 - \varepsilon_1^2)} \quad (11)$$

Bezeichnet man die Masse der Schale A mit ∂M , so ist

$$\partial M = \partial \left(\frac{4}{3} \pi a^3 V(1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon_1^2) \right) = 4\pi a V(1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon_1^2) \cdot \partial a$$

daher auch

$$\left. \begin{aligned} \partial V &= \frac{\partial M}{a} \int_u^\infty \frac{dv}{V(v^2 - \varepsilon^2)(v^2 - \varepsilon_1^2)} = \\ &= \partial M \int_u^\infty \frac{a dv}{V(a^2 v^2 - a^2 \varepsilon^2)(a^2 v^2 - a^2 \varepsilon_1^2)} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Dies gilt für den äusseren Punkt. Für den inneren Punkt hätte man in 9) $u = 1$ und

$$\partial V = \frac{\partial M}{a} \int_1^\infty \frac{dv}{V(v^2 - \varepsilon^2)(v^2 - \varepsilon_1^2)} \quad (13)$$

Da dieser Ausdruck von x, y, z unabhängig ist, übt die Schale A auf einen in ihrer Höhlung liegenden Punkt keine Anziehung aus, was auch für eine homofocale Schale von endlicher Dicke gilt.

Setzt man $av = \emptyset, a\varepsilon = h, a\varepsilon_1 = k$, so verwandelt sich 12) in

$$\partial V = \partial M \int_{a'}^\infty \frac{d\emptyset}{V(\emptyset^2 - h^2)(\emptyset^2 - k^2)} \quad (14)$$

und gilt bezüglich a' die Gleichung 7).

Für eine zweite Schale A' von derselben Art, deren äussere Oberfläche mit der äusseren Oberfläche von A confocal ist, hätte

$$\text{man } dV' = \partial M' \int_{a'}^\infty \frac{d\emptyset}{V(\emptyset^2 - h^2)(\emptyset^2 - k^2)}, \text{ folglich } \frac{dV}{dV'} = \frac{\partial M}{\partial M'},$$

woraus zu ersehen, dass der Maclaurin'sche Satz auch von den Schalen A und A' gilt.

Ebenso lässt sich auch die Giltigkeit des Ivory'schen Satzes für diese Schalen beweisen.

Es seien nun $\partial X, \partial Y, \partial Z$ die Componenten der von der Schale A auf den äusseren Punkt (x, y, z) ausgeübten Anziehung, so ist

$$\left. \begin{aligned} \partial X &= i \frac{dV}{dx} = - \frac{\partial M}{a} \cdot \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{(u^2 - \varepsilon^2)(u^2 - \varepsilon_1^2)}} \\ \partial Y &= i \frac{dV}{dy} = - \frac{\partial M}{a} \cdot \frac{\frac{du}{dy}}{\sqrt{(u^2 - \varepsilon^2)(u^2 - \varepsilon_1^2)}} \\ \partial Z &= i \frac{dV}{dz} = - \frac{\partial M}{a} \cdot \frac{\frac{du}{dz}}{\sqrt{(u^2 - \varepsilon^2)(u^2 - \varepsilon_1^2)}} \end{aligned} \right\} \quad 15)$$

Aus 10) folgt, wenn man Kürze halber

$$\frac{x^2}{u^4} + \frac{y^2}{(u^2 - \varepsilon^2)^2} + \frac{z^2}{(u^2 - \varepsilon_1^2)^2} = \psi^2 \quad . \quad . \quad 16)$$

setzt: $\frac{x dx}{u^2} + \frac{y dy}{u^2 - \varepsilon^2} + \frac{z dz}{u^2 - \varepsilon_1^2} = \psi^2 u du,$

folglich

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{u^3 \psi^2}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{y}{u(u^2 - \varepsilon^2) \psi^2}, \quad \frac{du}{dz} = \frac{z}{u^2(u^2 - \varepsilon_1^2) \psi^2} \quad 17)$$

Ferner ergibt sich aus 10), indem man x, y, z als constante Grössen behandelt:

$$- u \psi^2 \cdot \partial u = a \cdot \partial a \quad . \quad . \quad . \quad 18)$$

Mit Rücksicht auf 16) und 17) und den Werth von ∂M , folgt aus 15), wenn man zur Abkürzung $4\pi i \sqrt{(1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon_1^2)} = H$ setzt:

$$\left. \begin{aligned} \partial X &= - \frac{H y x a \cdot \partial a}{\psi^2 u^3 \sqrt{(u^2 - \varepsilon^2)(u^2 - \varepsilon_1^2)}} = \\ &= - \frac{H y \cdot \partial u}{(u^2 - \varepsilon^2)(u^2 - \varepsilon_1^2)} \cdot \frac{x}{u^2} \\ \partial Y &= - \frac{H y y a \cdot \partial a}{\psi^2 u (u^2 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{u^2 - \varepsilon_1^2}} = \\ &= - \frac{H y \cdot \partial u}{\sqrt{(u^2 - \varepsilon^2)(u^2 - \varepsilon_1^2)}} \cdot \frac{y}{u^2 - \varepsilon^2} \\ \partial Z &= - \frac{H y z a \cdot \partial a}{\psi^2 u (u^2 - \varepsilon_1^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{u^2 - \varepsilon^2}} = \\ &= - \frac{H y \cdot \partial u}{(u^2 - \varepsilon^2)(u^2 - \varepsilon_1^2)} \cdot \frac{z}{u^2 - \varepsilon_1^2} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad 19)$$

Für die Resultirende δR erhält man aus 19):

$$\delta R = \frac{H\mu a \cdot \delta a}{\psi u \sqrt{(u^2 - \varepsilon^2)(u^2 - \varepsilon_1^2)}} = - \frac{H\mu \psi \cdot \delta u}{\sqrt{(u^2 - \varepsilon^2)(u^2 - \varepsilon_1^2)}} \quad 20)$$

Es seien nun α, β, γ die Winkel, welche die Resultirende mit den Richtungen der positiven x, y, z bildet, so ist, wie aus 19) ersichtlich:

$$\cos \alpha = - \frac{x}{u^2 \psi}, \quad \cos \beta = - \frac{y}{(u^2 - \varepsilon^2) \psi}, \quad \cos \gamma = - \frac{z}{(u^2 - \varepsilon_1^2) \psi} \quad 21)$$

Wenn der Punkt (x, y, z) in der äusseren Oberfläche der Schale A liegt, gilt für denselben die Gleichung

$$x^2 + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2} + \frac{z^2}{1 - \varepsilon_1^2} = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad 22)$$

und ist, vermöge 10), $u = 1$. Bezeichnet man für diesen Fall die Grössen α, β, γ etc. durch $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ etc., so hat man

$$\cos \alpha_1 = - \frac{x}{\psi_1}, \quad \cos \beta_1 = - \frac{y}{\psi_1 (1 - \varepsilon^2)}, \quad \cos \gamma_1 = - \frac{z}{\psi_1 (1 - \varepsilon_1^2)} \quad 23)$$

wo

$$\psi_1 = \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} + \frac{z^2}{(1 - \varepsilon_1^2)^2}}.$$

Hieraus erkennt man, dass der Punkt (x, y, z) normal gegen die äussere Oberfläche angezogen wird.

Mittelst dieses Satzes kann man leicht beweisen, dass die Anziehung der Schale A auf einen äusseren Punkt (x, y, z) in der Normalen der mit ihrer äusseren Oberfläche confocalen, durch (x, y, z) gehenden Ellipsoidenfläche erfolgt. Man braucht hiezu nur die oben mit A' bezeichnete Schale so anzunehmen, dass (x, y, z) in ihrer äusseren Oberfläche liegt. Man hat dann zwei Schalen, welche den Punkt (x, y, z) in derselben Richtung anziehen, und ist diese normal zur äusseren Oberfläche von A' .

Es folgt hieraus, dass, indem der Punkt (x, y, z) in der Geraden, die ihn mit dem Mittelpunkte der Schale A verbindet, ohne Ende fortückt, die Richtung der Resultirenden sich ohne Ende dieser Geraden nähert.

Liegt der Punkt (x, y, z) in der äusseren Oberfläche der Schale, so ist die Resultirende (s. 20):

$$\delta R_1 = \frac{4\pi i\mu a \cdot \delta a}{\psi_1} \quad . \quad . \quad . \quad 24)$$

Diese Formel lässt sich noch vereinfachen. Wenn man den in der äusseren Oberfläche der Schale A befindlichen Punkt

(x, y, z) in seiner Normalen auf die innere Oberfläche versetzt, wobei er den Weg ∂n beschreibt und x, y, z, a in $x - \partial x, y - \partial y, z - \partial z, a - \partial a$ übergehen, so ist zufolge 22)

$$x \partial x + \frac{y \partial y}{1 - \varepsilon^2} + \frac{z \partial z}{1 - \varepsilon_1^2} = a \cdot \partial a$$

und ausserdem

$$\partial x = - \partial n \cdot \cos \alpha_1 = \partial n \cdot \frac{x}{\psi_1}$$

$$\partial y = - \partial n \cdot \cos \beta_1 = \partial n \cdot \frac{y}{\psi_1 (1 - \varepsilon^2)}$$

$$\partial z = - \partial n \cdot \cos \gamma_1 = \partial n \cdot \frac{z}{\psi_1 (1 - \varepsilon_1^2)}$$

folglich $\frac{\partial n}{\psi_1} \left(x^2 + \frac{y^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} + \frac{z^2}{(1 - \varepsilon_1^2)^2} \right) = \psi_1 \partial n = a da;$

und daher auch $\partial R_1 = 4\pi i p \cdot \partial n \quad 25)$
d. h. die Anziehung, welche die Schale A auf einen Punkt ihrer äusseren Oberfläche ausübt, ist der Dicke, welche die Schale an diesem Punkte hat, proportional.

Dirichlet hat die Anziehung einer homofocalen Schale aus derjenigen des homogenen Ellipsoides abgeleitet, während Chasles den entgegengesetzten Weg einschlug, indem er zuerst mit Hilfe des Satzes, dass die zwischen zwei homofocalen Ellipsoidenflächen enthaltenen Abschnitte einer geraden Linie einander gleich sind, die Gleichung 5) aufstellte, von welcher er, durch eine Reihe scharfsinniger Betrachtungen zu den Formeln für die Anziehung einer homofocalen Schale, und aus diesen endlich, durch Integration, zur Anziehung eines homogenen Ellipsoides gelangte.

II.

Aus 9) erhält man für die Anziehung des homogenen Ellipsoides, wenn man unter dem Integralzeichen v mit u vertauscht:

$$\left. \begin{aligned} X &= - Hx \int_u^\infty \frac{u \, du}{u^2 \sqrt{(u^2 - \varepsilon^2)(u^2 - \varepsilon_1^2)}} \\ Y &= - Hy \int_u^\infty \frac{u \, du}{(u^2 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{u^2 - \varepsilon_1^2}} \\ Z &= - Hz \int_u^\infty \frac{u \, dv}{\sqrt{u^2 - \varepsilon^2} (u^2 - \varepsilon_1^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\} . . . 26$$

Für einen äusseren Punkt gilt für die untere Grenze u die Gleichung 10); während für einen inneren $u = 1$ ist.

Zu diesen Formeln gelangt man auch durch Integration der Gleichungen 19), woraus erhellt, dass dieselben nicht nur für eine constante Dichte, sondern auch dann gelten, wenn die Dichte von Schicht zu Schicht nach einem bestimmten Gesetze sich stetig ändert. In einem solchen Falle wird sich ρ als eine Function der Variablen α , oder mit Rücksicht auf 10), als eine Function von u angeben lassen. Man begreift hiernach, dass die Gleichungen 26) zugleich die allgemeinsten Formeln für die Anziehung eines aus homofocalen Schichten von unendlich geringer Dicke bestehenden Ellipsoides darstellen, wenn man in denselben $\rho = f\left(\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{u^2 - \varepsilon^2} + \frac{z^2}{u^2 - \varepsilon_1^2}\right)$ setzt, wo f eine beliebige Function bedeuten kann.

Indem man $c = a$ setzt, verwandelt sich das dreiachsige Ellipsoid in ein abgeplattetes Rotationssphäroid. Man kann nun die Ebene der yz durch den angezogenen Punkt legen, wodurch z verschwindet und die Gleichung 26) sich auf folgende zwei reduciren:

$$\left. \begin{aligned} X &= -Hx \int_u^\infty \frac{\rho \, du}{u^3 \sqrt{u^2 - \varepsilon^2}} \\ Y &= -Hy \int_u^\infty \frac{\rho \, du}{u^2 (u^2 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad 27)$$

Dabei ist

$$H = 4\pi \rho \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

und

$$\rho = f\left(\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{u^2 - \varepsilon^2}\right),$$

und bedeutet die untere Integrationsgrenze u die einzige die Einheit übersteigende Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{u^2 - \varepsilon^2} = a^2.$$

Es sei hier bemerkt, dass in diesem Falle die Formel 12) in

$$\partial V = \frac{\partial M}{a} \int_u^\infty \frac{dv}{v^2 \sqrt{v^2 - \varepsilon^2}} = \frac{\partial M}{a \varepsilon} \cdot \arcsin \frac{\varepsilon}{u} \quad . \quad 28)$$

übergeht.

Um die Formeln 27) auf einen Fall anzuwenden, wo die Integration in geschlossenen Ausdrücken ausführbar ist, nehme

ich an, die Dichte sei der variablen grossen Achse verkehrt proportional, und setze $\mu = \frac{k}{a} = \frac{k}{\sqrt{\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{u^2 - \varepsilon^2}}}$, wo k eine Constante bezeichnet.

Setzt man $\sqrt{x^2 + y^2} = r$, so folgt aus 27)

$$\left. \begin{aligned} X &= -H^k k x \int_u^\infty \frac{du}{u^2 \sqrt{r^2 u^2 - \varepsilon^2 x^2}} = \\ &= -H^k k x \cdot \frac{1}{\varepsilon^2 x^2} \left[\frac{\sqrt{r^2 u^2 - \varepsilon^2 x^2}}{u} \right]_u^\infty = \\ &= -\frac{4\pi i k \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon^2 x} \left(r - \frac{\sqrt{r^2 u^2 - \varepsilon^2 x^2}}{u} \right) \\ Y &= -H^k k y \int_u^\infty \frac{du}{(u^2 - \varepsilon^2) \sqrt{r^2 u^2 - \varepsilon^2 x^2}} = \\ &= -H^k k y \cdot \frac{1}{\varepsilon^2 y} \left[l \left(\frac{\sqrt{r^2 u^2 - \varepsilon^2 x^2} - y u}{\sqrt{u^2 - \varepsilon^2}} \right) \right]_u^\infty = \\ &= -\frac{4\pi i k \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon^2} l \left\{ \frac{(r - y) \sqrt{u^2 - \varepsilon^2}}{\sqrt{r^2 u^2 - \varepsilon^2 x^2} - y u} \right\} \end{aligned} \right\} 29)$$

Es sei K das Volum, M die Masse des gegebenen Ellipsoides, so ist

$$K = \frac{4}{3} \pi a^3 \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad dK = 4\pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} \cdot da; \text{ folglich}$$

$$M = \int_0^a \frac{k}{a} dK = 4\pi k \sqrt{1 - \varepsilon^2} \int_0^a a da = 2\pi k a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad 30)$$

Denkt man sich diese Masse in dem Raume des Ellipsoides gleichförmig vertheilt, und bezeichnet man die bei solcher Vertheilung stattfindende constante Dichte mit μ , so ist

$$M = \frac{4}{3} \cdot \mu \cdot \pi a^3 \sqrt{1 - \varepsilon^2} = 2\pi k a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \text{ daher } \frac{k}{a} = \frac{2\mu}{3};$$

d. h.: An der Oberfläche des geschichteten Ellipsoides beträgt die Dichte zwei Drittel seiner mittleren Dichte.

Indem man, mittelst 30), k durch M ausdrückt, hat man

$$\left. \begin{aligned} X &= -\frac{2iM}{a^2 \varepsilon^2 x} \left(r - \frac{\sqrt{r^2 u^2 - \varepsilon^2 x^2}}{u} \right) \\ Y &= -\frac{2iM}{a^2 \varepsilon^2} l \left\{ \frac{(r-y) \sqrt{u^2 - \varepsilon^2}}{\sqrt{r^2 u^2 - \varepsilon^2 x^2 - y^2}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad 31,$$

Wenn der Punkt (x, y) in der Achse der x (in der Ebene des Aequators) liegt, ist $y = 0$, $r = x$, $u = \pm \frac{x}{a}$; folglich

$$X_{(y=0)} = -\frac{2iM}{a^2 \varepsilon^2} \left(1 - \sqrt{\frac{1 - a^2 \varepsilon^2}{x^2}} \right) \quad . \quad . \quad 32)$$

Liegt derselbe aber in der Polarachse, so ist $x = 0$, $r = y$, und folgt aus 29)

$$\begin{aligned} Y_{(x=0)} &= -Hky \cdot \frac{1}{y} \int_u^\infty \frac{du}{u(u^2 - \varepsilon^2)} = \\ &= -\frac{Hk}{\varepsilon^2} \left[l \cdot \frac{\sqrt{u^2 - \varepsilon^2}}{u} \right]_u^\infty = -\frac{Hk}{\varepsilon^2} l \frac{u}{\sqrt{u^2 - \varepsilon^2}}; \end{aligned}$$

und da hier $\frac{y^2}{u^2 - \varepsilon^2} = a^2$,

$$Y_{(x=0)} = -\frac{2iM}{a^2 \varepsilon^3} l \left(1 + \frac{a^2 \varepsilon^2}{y^2} \right) \quad . \quad . \quad 33)$$

Um die Anziehung eines Sphäroids, dessen Dichte, nach dem hier angenommenen Gesetze, von der Oberfläche gegen den Mittelpunkt hin zunimmt, mit derjenigen eines homogenen, mit ersterem an Masse, Gestalt und Grösse übereinstimmenden zu vergleichen, beschränke ich mich darauf, die Anziehung an den Achsenenden (am Aequator und am Pole) zu untersuchen.

Es seien g und G die absoluten Werthe dieser Anziehungen für das geschichtete, g' und G' für das homogene Sphäroid, so folgt aus 32) und 33), wenn in der ersten Gleichung $x = a$, in der zweiten $y = b = a \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ annimmt:

$$g = \frac{2iM}{a^2 \varepsilon^2} (1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}), \quad G = \frac{iM}{a^2 \varepsilon^2} l \frac{1}{1 - \varepsilon^2};$$

während man für das homogene Sphäroid bekanntlich hat:

$$\begin{aligned} g' &= \frac{3iM}{2a^2 \varepsilon^3} (\text{arc sin } \varepsilon - \varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2}), \\ G' &= \frac{3iM}{a^2 \varepsilon^3} (1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \text{ arc sin } \varepsilon). \end{aligned}$$

Mittelst dieser Gleichungen findet man, dass die Quotienten $\frac{g}{G}, \frac{g'}{G'}, \frac{g}{g'}, \frac{G'}{G}$, indem ε von 0 bis 1 stetig wächst, von der Einheit bis zu den Grenzwerten 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{8}{3\pi}$, 0 stetig abnehmen.

Ist die Excentricität sehr klein, hat man

$$\frac{g}{G} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}, \frac{g'}{G'} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{10}, \frac{g}{g'} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{20}, \frac{G'}{G} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{10}$$

Bezeichnet man die Abplattung mit α , so ist $\alpha = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}$, und für einen sehr kleinen Werth von ε , $\alpha = \frac{\varepsilon^2}{2}$;

daher
$$\frac{G - g}{g} = \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{G' - g'}{g'} = \frac{\alpha}{5}.$$

Man ersieht hieraus, dass bei einem Ellipsoide von sehr geringer Abplattung, dessen Dichte von der Oberfläche gegen die Mitte hin, in geringerem Masse als nach dem hier angenommenen Gesetze, zunimmt, das Verhältniss $\frac{G - g}{g}$ zwischen den Grenzen $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\alpha}{5}$ liegen wird.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Mitteilungen des naturwissenschaftlichen Vereins für Steiermark](#)

Jahr/Year: 1884

Band/Volume: [20](#)

Autor(en)/Author(s): Friesach Carl

Artikel/Article: [Ueber die Anziehung von Ellipsoiden und ellipsoidischen Schalen. 193-204](#)