Convergenz der Kugelfunction-Reihen.

Von Prof. Dr. J. Frischauf.

Die vollkommene Strenge des berühmten Dirichlet'schen Convergenz-Beweises der Kugelfunction-Reihen wird seit mehr als zehn Jahren nicht mehr anerkannt. Wenngleich durch die Arbeiten von *U. Dini*, *H. Bruns* und *E. Heine* die Unvollkommenheiten dieses Beweises beseitiget wurden, so dürfte dennoch eine vollständige Darstellung dieses Beweises mit Benützung aller bis jetzt gewonnenen Vereinfachungen der einzelnen Theile nicht ohne Interesse sein.[1])

1.

Setzt man in dem Ausdrucke

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos\gamma + \alpha^2}} = P_0 + P_1\,\alpha + \ldots + P_n\,\alpha^n + \ldots,$$

welcher den Ausgang für die Theorie der Kugelfunctionen bildet, $\alpha = e^{\psi i} = \cos\psi + i \sin\psi$, so wird

$$1 + \alpha^2 = \alpha\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = 2\,\alpha \cos\psi,$$

$$T^2 = 2\,(\cos\psi - \cos\gamma)\,\alpha \qquad \psi < \gamma$$

$$= -\,2\,(\cos\gamma - \cos\psi)\,\alpha \qquad \psi > \gamma$$

$$-\,1 = e^{-\pi i}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\cos\frac{1}{2}\psi - i \sin\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{2\,(\cos\psi - \cos\gamma)}} \qquad \psi < \gamma$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\sin\frac{1}{2}\psi + i \cos\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{2\,(\cos\gamma - \cos\psi)}} \qquad \psi > \gamma.$$

[1]) Hinsichtlich der Geschichte der Convergenz-Beweise für die Kugelfunction-Reihen mag auf das bekannte „Handbuch der Kugelfunctionen" von *E. Heine* hingewiesen werden.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Dadurch nimmt der Ausdruck $1 : T$ die Form $G + Hi$ an, wo

$$G = P_0 + P_1 \cos\psi + \ldots + P_n \cos n\psi + \ldots$$
$$H = \phantom{P_0 +{}} P_1 \sin\psi + \ldots + P_n \sin n\psi + \ldots,$$

G und H haben die obigen verschiedenen Formen, je nachdem $\psi <$ oder $> \gamma$ ist.

Nach der Theorie der Sinus- und Cosinus-Reihen ist

$$P_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi G \cos n\psi \, d\psi \text{ und } P_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi H \sin n\psi \, d\psi;$$

jedes dieser Integrale muss in zwei Theile zwischen den Grenzen 0 und γ, γ und π zerlegt werden; es ist daher

$$1.\ P_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\cos n\psi \cos \frac{1}{2}\psi \, d\psi}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}} + \frac{2}{\pi} \int_\gamma^\pi \frac{\cos n\psi \sin \frac{1}{2}\psi \, d\psi}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}},$$

$$2.\ P_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\sin n\psi \sin \frac{1}{2}\psi \, d\psi}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}} + \frac{2}{\pi} \int_\gamma^\pi \frac{\sin n\psi \cos \frac{1}{2}\psi \, d\psi}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}};$$

wobei zu bemerken ist, dass in der Formel 1. für $n = 0$ auf der rechten Seite die Hälfte zu nehmen ist, die Formel 2. für $n = 0$ ihre Giltigkeit verliert.

Durch Addition von 1. und 2. erhält man

$$P_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\psi \, d\psi}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}} + \frac{1}{\pi} \int_\gamma^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\psi \, d\psi}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}},$$

setzt man in 1. und 2. statt n die Zahl $n + 1$ und subtrahiert man die neuen Gleichungen, so wird

$$\int_0^\gamma \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\psi \, d\psi}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}} = \int_\gamma^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\psi \, d\psi}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}}.$$

Es ist daher

$$3.\ P_n(\cos\gamma) = \frac{2}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\psi \, d\psi}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\psi \, d\psi}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin\frac{1}{2}\psi^2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\psi \, d\psi}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(\gamma + \psi)\sin\frac{1}{2}(\gamma - \psi)}}$$

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$4.\quad P_n(\cos\gamma) = \frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\psi\,d\psi}{\sqrt{2(\cos\gamma-\cos\psi)}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\psi\,d\psi}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}\psi^2-\sin\frac{1}{2}\gamma^2}} = \frac{1}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\psi\,d\psi}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(\gamma+\psi)\sin\frac{1}{2}(\psi-\gamma)}},$$

welche Formeln auch für $n = 0$ giltig sind.[1])

Setzt man in 4. $\gamma = \pi - \delta$, $\psi = \pi - \varphi$, so erhält man

$$4'.\quad P_n(\cos\gamma) = \frac{(-1)^n}{\pi}\int_0^\delta \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(\delta+\varphi)\sin\frac{1}{2}(\delta-\varphi)}}.$$

Die vorstehende Ableitung der Formeln 1. bis 4. ist nicht strenge, da die Entwicklung von $1 : T$ nur für $\alpha < 1$ convergent ist. Es lässt sich aber die Richtigkeit dieser Formeln ohne Schwierigkeit directe beweisen. Es genügt hierzu der Beweis für die Formel 3. Dieses geschieht durch Summierung der Reihe

$$S = P_0 + P_1\alpha + \ldots + P_n\alpha^n + \ldots,$$

wo $P_n = P_n(\cos\gamma)$ durch die Gleichung 3. gegeben ist, und α einen echten Bruch bedeutet. Es ist

$$\pi S = \int_0^\gamma \frac{d\psi}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}\gamma^2-\sin\frac{1}{2}\psi^2}}$$

$$\left(\cos\tfrac{1}{2}\psi + \alpha\cos\tfrac{3}{2}\psi + \ldots + \alpha^n\cos(n+\tfrac{1}{2})\psi + \ldots\right).$$

Die in S vorkommende Reihe

$$R = \cos\tfrac{1}{2}\psi + \alpha\cos\tfrac{3}{2}\psi + \ldots + \alpha^n\cos(n+\tfrac{1}{2})\psi + \ldots$$

wird durch Anwendung von

$$2\cos x = e^{xi} + e^{-xi},$$

als die Summe zweier geometrischer Reihen

$$2R = \frac{e^{\frac{1}{2}\psi i}}{1-\alpha e^{\psi i}} + \frac{e^{-\frac{1}{2}\psi i}}{1-\alpha e^{-\psi i}} = \frac{2(1-\alpha)\cos\frac{1}{2}\psi}{1-2\alpha\cos\psi+\alpha^2}$$

bestimmt; damit wird

$$S = \frac{1-\alpha}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\cos\frac{1}{2}\psi\,d\psi}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}\gamma^2-\sin\frac{1}{2}\psi^2}}\cdot\frac{1}{1-2\alpha\cos\psi+\alpha^2}.$$

---

[1]) Die beiden Formeln 3. und 4. wurden von *Mehler* („Math. Ann." Bd. V) aufgestellt.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Setzt man

$$\sin \tfrac{1}{2}\psi = \sin \tfrac{1}{2}\gamma \sin \varphi,$$

so wird

$$S = \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1-\alpha)^2 + 4\alpha \sin \frac{1}{2}\gamma^2 \sin \varphi^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos\gamma + \alpha^2}}.$$

Setzt man in S statt α und γ resp. $-\alpha$ und $\pi - \gamma$, so bleibt die ganze Rechnung ungeändert, und man erhält damit die Begründung der Formel 4'.

2.

Aus den Formeln 3. und 4'. erhält man den Wert von $P_n(\cos\gamma)$, wenn $n = \infty$ ist.

1) Ist γ endlich, dabei $\gamma \leq \frac{1}{2}\pi$.

Man zerlege das Integral von 0 bis γ in Formel 3. in die zwei Theile von 0 bis $\gamma - \varepsilon$ und von $\gamma - \varepsilon$ bis γ, wo unabhängig von n die Größe ε beliebig klein, $n\varepsilon$ mit n unendlich groß vorausgesetzt wird. Dann ist das erste Integral [wegen

$$\int_a^b f(x) \cos kx \, dx = 0, \text{ für } k = \infty,$$

wenn $f(x)$ im Intervalle von a bis b endlich bleibt[1])] gleich Null. Das zweite Integral geht, $\gamma - \psi = \eta$ gesetzt, über in

$$K = \frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{\cos(n + \frac{1}{2})(\gamma - \eta)\, d\eta}{\sqrt{\sin(\gamma - \frac{1}{2}\eta) \sin \frac{1}{2}\eta}}.$$

Wendet man auf dieses Integral den „Du Bois'schen Satz"

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^b \varphi(x)\,dx + \big(f(b) - f(a)\big)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx$$

(ξ bedeutet einen unbestimmten zwischen a und b liegenden Wert, das Integral

$$\int_\xi^b \varphi(x)\,dx$$

muss für alle Werte von $\xi = a$ bis $\xi = b$ stetig, die Func-

[1]) Folgt unmittelbar aus dem „Du Bois'schen Satze".

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

tion $f(x)$ im Intervalle von a bis b entweder nicht wachsend oder nicht abnehmend vorausgesetzt werden) an, so wird

$$K = \frac{1}{\pi \sqrt{\sin \gamma}} \int_0^{\varepsilon} \frac{\cos (n + \frac{1}{2})(\gamma - \eta)\, d\eta}{\sqrt{\sin \frac{1}{2} \eta}}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\sin (\gamma - \frac{1}{2} \varepsilon)}} - \frac{1}{\sqrt{\sin \gamma}} \right) \int_{\xi}^{\varepsilon} \frac{\cos (n + \frac{1}{2})(\gamma - \eta)\, d\eta}{\sqrt{\sin \frac{1}{2} \eta}}.$$

Das zweite Glied kann vernachlässigt werden; für das erste erhält man, wenn $\frac{1}{2}\eta$ statt $\sin \frac{1}{2}\eta$, $(n + \frac{1}{2})\eta = u$ gesetzt wird,

$$\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\sin \gamma}} \left(\frac{\cos (n + \frac{1}{2})\gamma}{\sqrt{n + \frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\, du + \frac{\sin (n + \frac{1}{2})\gamma}{\sqrt{n + \frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du \right).$$

Nun ist

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\, du = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

also der obige Ausdruck

$$\frac{\cos (n + \frac{1}{2})\gamma + \sin (n + \frac{1}{2})\gamma}{\sqrt{\pi (n + \frac{1}{2}) \sin \gamma}},$$

welcher gleich Null wird, wenn $n = \infty$ wird.

Damit ist

$$P_n (\cos \gamma) = 0, \text{ für } n = \infty.$$

2) Wird γ mit n unendlich klein, $n\gamma$ aber mit n unendlich groß (z. B. $\gamma = \vartheta : \sqrt{n}$, wo ϑ eine bestimmte endliche Zahl bedeutet), so kann in diesem Falle für $P_n (\cos \gamma)$ der vorige Wert K gesetzt werden, indem man γ statt ε setzt. Damit wird, wie in 1), der erste Theil von K gleich Null, während der zweite

$$\frac{1}{\pi \sqrt{\gamma}} (\sqrt{2} - 1) \int_{\xi}^{\gamma} \frac{\cos (n + \frac{1}{2})(\gamma - \eta)\, d\eta}{\sqrt{\sin \frac{1}{2} \eta}}$$

analog wie in 1), wegen

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\, du, \int_{\xi}^{\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du$$

(wo ξ zwischen 0 und ∞ liegt) endlich, in Null übergeht. Es ist daher auch in diesem Falle

$$P_n (\cos \gamma) = 0, \text{ für } n = \infty.$$

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

3) Wird mit n unendlich groß γ unendlich klein, $n\gamma = \vartheta$ endlich, so kann man in 3. statt der Größen $\sin \frac{1}{2} \gamma$ und $\sin \frac{1}{2} \psi$ $\frac{1}{2} \gamma$ und $\frac{1}{2} \psi$ setzen, setzt man überdies $n \psi$ [oder $(n + \frac{1}{2}) \psi] = \varphi$, so wird

$$P_n (\cos \gamma) = \frac{2}{\pi} \int_0^\vartheta \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{\sqrt{\vartheta^2 - \varphi^2}} = J (\vartheta),$$

wo $J (\vartheta)$ die Bessel'sche Cylinderfunction bedeutet.

4) Wird mit n unendlich groß γ unendlich klein, $n \gamma$ ebenfalls unendlich klein, so kann in obiger Formel $\cos \varphi = 1$ gesetzt werden; damit erhält man

$$P_n (\cos \gamma) = \frac{2}{\pi} \int_0^\vartheta \frac{d\varphi}{\sqrt{\vartheta^2 - \varphi^2}} = 1.$$

Um $P_n (\cos \gamma)$ für $n = \infty$ zu bestimmen, wenn $\gamma > \frac{1}{2} \pi$ aber $< \pi$ ist, so setze man $\pi - \gamma = \delta$; damit erhält man aus Formel 4'. folgende Werte:

1') und 2') $P_n (\cos \gamma) = 0$, $n (\pi - \gamma)$ unendlich groß.

3') $P_n (\cos \gamma) = (-1)^n J (\vartheta)$, $n (\pi - \gamma) = \vartheta$ endlich.

4') $P_n (\cos \gamma) = (-1)^n$, $n (\pi - \gamma)$ unendlich klein.

3.

Es sei eine Kugelfläche vom Radius 1 gegeben. Auf dieser Fläche werde ein fixer Punkt N als Coordinaten-Anfang und eine fixe größte Kreislinie NZ als Axe angenommen. Jeder Punkt M der Kugelfläche ist durch seine sphärischen Coordinaten ϑ, φ, wo ϑ den Abstand MN, φ den Winkel MNZ bedeutet, bestimmt; ϑ wird von 0 bis π, φ von 0 bis 2π gezählt. Diese Kugelfläche denke man sich als Träger der Functionswerte $f(\vartheta, \varphi)$ einer beliebig gegebenen Function, deren Werte aber nie unendlich werden sollen.

Es sei nun $(\vartheta, \varphi) = M$ ein bestimmter Punkt der Kugelfläche, $(\vartheta', \varphi') = M'$ ein beliebiger Punkt, $\omega = MM'$ und $d\vartheta' . \sin \vartheta' d\varphi'$ das Flächenelement bei M'; es soll der Grenzwert der Summe

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$S_n = X_0 + X_1 + \ldots + X_n,$$

$$X_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin \vartheta' \, d\vartheta' \int_0^{2\pi} P_n (\cos \omega) \, f(\vartheta', \varphi') \, d\varphi',$$

für $n = \infty$ bestimmt werden.

Man setze zunächst $\vartheta = 0$, auf diesen einfacheren Fall lässt sich der allgemeine leicht zurückführen. In diesem Falle wird $\omega = \vartheta'$, also

$$X_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin \vartheta' \, P_n (\cos \vartheta') \, d\vartheta' \int_0^{2\pi} f(\vartheta', \varphi') \, d\varphi'.$$

Setzt man der Kürze halber

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta', \varphi') \, d\varphi' = F(\vartheta'),$$

so wird

$$X_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} \sin \vartheta' \, P_n (\cos \vartheta') \, F(\vartheta') \, d\vartheta';$$

dabei bedeutet $F(\vartheta')$ den Mittelwert aller Functionswerte $f(\vartheta' \varphi')$ auf jener Kreislinie, welche um den Punkt N mit dem sphärischen Radius ϑ' beschrieben ist.

Im Folgenden soll der einfacheren Schreibweise wegen ϑ statt ϑ' gesetzt werden.

Aus der Gleichung

$$(2n+1) \, P_n(x) = \frac{d P_{n+1}(x)}{dx} - \frac{d P_{n-1}(x)}{dx}$$

folgt, wenn $x = \cos \vartheta$ gesetzt wird,

$$(2n+1) \sin \vartheta \, P_n (\cos \vartheta) = \frac{d P_{n-1} (\cos \vartheta)}{d\vartheta} - \frac{d P_{n+1} (\cos \vartheta)}{d\vartheta};$$

damit wird

$$2 X_n = \int_0^{\pi} F(\vartheta) \left(\frac{d P_{n-1} (\cos \vartheta)}{d\vartheta} - \frac{d P_{n+1} (\cos \vartheta)}{d\vartheta} \right) d\vartheta.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke $n = 0, 1, 2 \ldots n$, so erhält man durch Addition

$$-2 S_n = \int_0^{\pi} F(\vartheta) \left(\frac{d P_n}{d\vartheta} + \frac{d P_{n+1}}{d\vartheta} \right) d\vartheta.$$

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Das erste der beiden Integrale

$$J_n = \int_0^\pi F(\vartheta) \frac{d P_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta} d\vartheta$$

zerlege man in die drei Integrale

$$J_n = \int_0^\eta + \int_\eta^\zeta + \int_\zeta^\pi,$$

wo mit n unendlich groß η und $\pi - \zeta$ unendlich klein und zugleich $n\eta$ und $n(\pi - \zeta)$ unendlich groß werden.

Zunächst soll das mittlere dieser drei Integrale bestimmt werden.

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ die Wurzeln von $P_n(\cos\alpha) = 0$ im Intervalle von $\alpha = \eta$ bis $\alpha = \zeta$, so ändert in jedem Intervalle zwischen je zwei Wurzeln (wie von α_1 bis α_2, u. s. w.) die Function $\frac{d P_n(\cos\alpha)}{d\alpha}$ einmal das Zeichen; es sei β_m die im Intervalle von α_m bis α_{m+1} liegende Wurzel von $\frac{d P_n(\cos\alpha)}{d\alpha} = 0$.[1]

Das Integral $\int_\eta^\zeta$ zerlege man in

$$\int_\eta^\zeta = \int_\eta^{\alpha_1} + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} + \cdots + \int_{\alpha_m}^{\alpha_{m+1}} + \cdots$$

Ist $F(\vartheta)$ im Intervalle von α_m bis α_{m+1} stetig, so setze man

$$\int_{\alpha_m}^{\alpha_{m+1}} = \int_{\alpha_m}^{\beta_m} + \int_{\beta_m}^{\alpha_{m+1}};$$

auf jedes dieser beiden Integrale kann der einfache Mittelwertsatz angewendet werden; es ist daher

$$\int_{\alpha_m}^{\alpha_{m+1}} = P_n(\cos\beta_m)\Big(F(\alpha_m + \varepsilon) - F(\beta_m + \iota)\Big),$$

wo ε zwischen 0 und $\beta_m - \alpha_m$, ι zwischen 0 und $\alpha_{m+1} - \beta_m$ liegt. Der Unterschied $F(\alpha_m + \varepsilon) - F(\beta_m + \iota)$ ist kleiner als

---

[1]) Die etwa zwischen η und α_1 liegende Wurzel möge mit β_0 bezeichnet werden, u. s. w.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

die im Intervalle α_m bis α_{m+1} stattfindende Schwankung der Function $F(\vartheta)$.

Ist $F(\vartheta)$ im Intervalle von 0 bis π abtheilungsweise stetig und besitzt diese Function in diesem Intervalle nur eine endliche Anzahl von Maxima und Minima, so sind die Beträge von $\int\limits_{\eta}^{\zeta}$ für die Sprungstellen von $F(\vartheta)$ verschwindend, für das Stetigkeits-Gebiet ist die Summe aller $F(\alpha_m + \varepsilon) - F(\beta_m + \varepsilon)$ kleiner als die Summe A aller Schwankungen der Function $F(\vartheta)$ von $F(0)$ bis $F(\pi)$, d. i. der Summe der Änderungen der Werte von $F(0)$ bis zum nächsten Maximum oder Minimum, von diesem Maximum oder Minimum zum nächsten Minimum oder Maximum, u. s. w. bis zum Werte $F(\pi)$.

Setzt man außerdem statt der abwechselnd positiven und negativen (oder negativen und positiven) Werte $P_n(\cos\beta_m)$ den absolut größten $P_n(\cos\beta)$, so wird $\int\limits_{\eta}^{\zeta}$ von der Form $A\,P_n(\cos\beta)$, welcher Ausdruck gleich Null wird, wenn n unendlich groß wird.

Es ist daher

$$J_n = \int\limits_0^{\eta} + \int\limits_{\zeta}^{\pi}.$$

Ist die Function $F(\vartheta)$ im Intervalle von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \eta$ stetig wachsend oder stetig abnehmend, so ist nach dem „Du Bois'schen Satze"

$$\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a)\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx + \big(f(b) - f(a)\big)\int\limits_{\xi}^b \varphi(x)\,dx,$$

$$\int\limits_0^{\eta} = F(0)\,\big(P_n(\cos\eta) - P_n(\cos 0)\big)$$
$$+ \big(F(\eta) - F(0)\big)\cdot\big(P_n\cos\eta - P_n(\cos\xi)\big).$$

Für $n = \infty$, wird $P_n(\cos\eta) = 0$, $F(\eta) - F(0) = 0$; also

$$\int\limits_0^{\eta} = -F(0).$$

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.zobodat.at

Ist die Function $F(\vartheta)$ im Intervalle von $\vartheta = \zeta$ bis $\vartheta = \pi$ stetig wachsend oder stetig abnehmend, so ist analog mit dem Vorigen

$$\int_{\zeta}^{\pi} = (-1)^n F(\pi).$$

Es ist daher $\quad J_n = - F(0) + (-1)^n F(\pi).$

Ebenso erhält man

$$J_n + 1 = - F(0) + (-1)^{n+1} F(\pi),$$

also

$$S = F(0).$$

Zusatz. Wie man aus dem Vorhergehenden ersieht, genügt es bei der Auswertung von S_n statt von $\vartheta' = 0$ bis $\vartheta' = \pi$ nur von 0 bis η zu integrieren. Es ist daher diese Bestimmung ganz analog mit der der Fourier'schen Reihen.

Der allgemeine Fall kann auf diesen speciellen (wo $\vartheta = 0$) leicht zurückgeführt werden.

Dies geschieht entweder durch eine Coordinaten-Transformation, oder directe (nach *Dirichlet*) durch die Betrachtung der Bedeutung des allgemeinen Gliedes X_n. Das Doppel-Integral X_n unterscheidet sich nur durch den Factor $P_n(\cos \omega)$, d. i. statt des Abstandes des Punktes M' von N wird der Abstand $M' M$ des Punktes M' von dem festen Punkt M genommen; d. h. statt des Punktes N erscheint der Punkt M als Anfang. Die Summe der Reihe S ist daher der Mittelwert aller Functionswerte im Umfange eines um den Punkt (ϑ, φ) mit unendlich kleinem Radius beschriebenen Kreises. Ist die Function $f(\vartheta, \varphi)$ um diesen Punkt herum eindeutig, so stellt die Summe S diesen Functionswert $f(\vartheta, \varphi)$ selbst dar.

Beispiel. Auf der Kugelfläche sei ein größter Kreis als Theilungslinie gezogen, auf der einen Hälfte der Kugelfläche sei der Functionswert a, auf der anderen Hälfte der Functionswert b aufgetragen. Liegt die um den Punkt M mit dem Radius ϑ' beschriebene Kreislinie vollständig auf der ersten Hälfte, so ist $F(\vartheta') = a$, u. s. w. Liegt aber diese Kreislinie theils auf der einen, theils auf der anderen Hälfte, so wird $F(\vartheta')$ auf die folgende Art bestimmt. Liegt M auf der Hälfte mit den Functionswerten a, ist γ der Winkel der

Bögen von M zu den Durchschnittspunkten der Kreislinie mit dem Theilungskreise, so ist

$$F(\vartheta') = \frac{a\,(2\pi - \gamma) + b\gamma}{2\pi} = a + \frac{b-a}{2\pi}\gamma,$$

wo γ durch den Abstand des Punktes M vom Theilungskreise bestimmt ist. Ist dieser Abstand größer als γ_1, wo $n\gamma_1 = \infty$ ist, so ist von $\vartheta' = 0$ bis $\vartheta' = \gamma_1$, $\gamma = 0$, also $F(\vartheta') = a$. Liegt M im Theilungskreise selbst, so ist $\gamma = \pi$, also $F(\vartheta') = \frac{1}{2}(a+b)$; u. s. w.

Nimmt man den Pol der ersten Hälfte der Kugelfläche als Anfang der Zählung von ϑ, so sind in jedem Meridian von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ die Functionswerte $= a$, von $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ bis π hingegen $= b$; $f(\vartheta, \varphi)$ also von φ unabhängig. Durch Anwendung des Legendre'schen Satzes

$$\int_0^{2\pi} P_n(\cos\omega)\, d\varphi' = 2\pi\, P_n(\cos\vartheta) \cdot P_n(\cos\vartheta')$$

wird das allgemeine Glied

$$X_n = \frac{2n+1}{2} P_n(\cos\vartheta) \int_0^{\pi} f(\vartheta')\, P_n(\cos\vartheta') \sin\vartheta'\, d\vartheta'.$$

$$\int_0^{\pi} = a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} P_n(\cos\vartheta') \sin\vartheta'\, d\vartheta' + b \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} P_n(\cos\vartheta') \sin\vartheta'\, d\vartheta'$$

$$X_n = \left\{ \frac{a}{2} \Big(P_{n-1} - P_{n+1}\Big)_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{b}{2} \Big(P_{n-1} - P_{n+1}\Big)_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \right\} P_n(\cos\vartheta)$$

$$= \frac{a-b}{2} \Big(P_{n-1} - P_{n+1}\Big)_{\vartheta = \frac{1}{2}\pi} P_n(\cos\vartheta)$$

$$X_0 = \frac{a+b}{2}.$$

Aus $$1 : T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} = S \binom{-\frac{1}{2}}{r} \alpha^{2r},$$

erhält man $$P_{2r} = \binom{-\frac{1}{2}}{r},\quad P_{2r+1} = 0;$$

$$X_{2r} = 0,\quad X_{2r+1} = \frac{a-b}{2} \left(\binom{-\frac{1}{2}}{r} - \binom{-\frac{1}{2}}{r+1}\right) P_{2r+1}(\cos\vartheta)$$

$$= \frac{a-b}{2} \cdot (-1)^r \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2r-1}{2^{r+1}\,(r+1)!} (4r+3)\, P_{2r+1}(\cos\vartheta).$$

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Die unendliche Reihe

$$X_0 + X_1 + X_3 + X_5 + \ldots$$

liefert für alle Werte von $\vartheta = 0$ bis $\frac{1}{2}\pi$ den Wert a, für alle Werte von $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ bis π den Wert b, für $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ den Wert

$$\frac{a+b}{2}.$$

Anhang.

Die Bestimmung von $P_n(\cos\gamma)$ für $n = \infty$, $n\gamma = \infty$, beruht darauf, dass die Integrale

$$\int_a^b \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\, du, \quad \int_a^b \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du,$$

wo a und b reelle Zahlen (0 und ∞ inbegriffen) bedeuten, endlich sind.

Analog können die Integrale

$$\int_0^\gamma \frac{\cos ny\, dy}{(\sin(2\gamma - y)\sin y)^a}, \quad \int_0^\gamma \frac{\sin ny\, dy}{(\sin(2\gamma - y)\sin y)^a} \qquad a < 1$$

mit Berücksichtigung, dass für $\alpha < 1$

$$\int_a^b \frac{\cos u}{u^\alpha}\, du, \quad \int_a^b \frac{\sin u}{u^\alpha}\, du$$

endlich sind, behandelt werden.

Für das erste Integral erhält man:

1) γ endlich $< \frac{1}{2}\pi$.

$$J = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^\gamma,$$

wo ε unabhängig von n beliebig klein, $n\varepsilon$ unendlich groß vorausgesetzt wird.

$$\int_0^\varepsilon = \frac{1}{(\sin 2\gamma)^a\, n^{1-a}} \int_0^\infty \frac{\cos u\, du}{u^a}, \quad ny = u;$$

also

$$J = 0, \text{ für } n = \infty.$$

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

2) γ wird mit n unendlich klein, $n\gamma$ unendlich groß, d. h.

$$\gamma = \frac{\vartheta}{n^\alpha}, \; \alpha < 1;$$

$$J = \frac{1}{\vartheta^a \, n^{1 - a(1+\alpha)}} \left(\frac{1}{2^a} \int_0^\xi \frac{\cos u \, du}{u^a} + \int_\xi^\infty \frac{\cos u \, du}{u^a} \right),$$

also $J = 0$, endlich oder ∞, je nachdem

$$1 >, = \text{ oder } < a(1+\alpha) \text{ ist.}$$

3) $n\gamma = \vartheta$ endlich.

$$J = \frac{1}{n^{1-2a}} \int_0^\vartheta \frac{\cos u \, du}{(2\vartheta - u)^a \, u^a}.$$

4) $n\gamma$ unendlich klein.

$$J = \int_0^\gamma \frac{dy}{(2\gamma - y)^a \, y^a}.$$

Die Grenzen von J nach dem Mittelwert-Satz sind

$$\frac{\gamma^{1-2a}}{1-a} \quad \text{und} \quad \frac{\gamma^{1-2a}}{2^a(1-a)}.$$

Das zweite Integral wird ganz analog behandelt; der bekannte Fall $a = 1$ und γ endlich, für welchen dieses letztere Integral noch existiert, kann hier übergangen werden.

Für große Werte von n hat $P_n(\cos\gamma)$ die Form $A : \sqrt{n \sin\gamma}$, wo A endlich ist. Die n-Wurzeln von $P_n(\cos\gamma)$ sind reell, zu jeder Wurzel γ gehört eine zweite $\pi - \gamma$, für große Werte von n haben je zwei aufeinander folgende Wurzeln den Unterschied nahezu $\pi : n$, d. h. die Wurzeln sind im Intervalle 0 bis π gleichmäßig vertheilt.[1]) Es erhellet dies aus nachfolgender Betrachtung. Ist $n\gamma$ und $n(\pi - \gamma)$ unendlich mit n, so folgt aus

$$P_n\left(\cos\left(\gamma + \frac{\pi}{n}\right)\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\gamma + \frac{\pi}{n}} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\psi \, d\psi}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{\pi}{n} + \psi\right) \sin\frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{\pi}{n} - \psi\right)}}$$

wenn $\psi = y + \frac{\pi}{n}$ gesetzt wird,

[1]) Beweise dieses Satzes haben *U. Dini* und *H. Bruns* gegeben.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$P_n\left(\cos\left(\gamma+\frac{\pi}{n}\right)\right) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\gamma} \frac{\cos\left((n+\frac{1}{2})\,y+\frac{\pi}{2\,n}\right)dy}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(\gamma+y+\frac{2\,\pi}{n})\sin\frac{1}{2}(\gamma-y)}}.$$

Zerlegt man das Integral in die beiden Theile von $-\pi:n$ bis 0 und von 0 bis γ, so wird ersterer (bei Vernachlässigung der kleinen Glieder im Nenner) $\pi:2\,n\,(n+\frac{1}{2})\sin\frac{1}{2}\gamma$, während der zweite sich bis auf Glieder von der Ordnung $1:n^{\frac{3}{2}}$ auf $\pi\,P_n(\cos\gamma)$ reduciert, es ist daher

$$P_n\left(\cos\left(\gamma+\frac{\pi}{n}\right)\right) = -P_n(\cos\gamma)+\frac{B}{n^{\frac{3}{2}}},$$

wo B endlich ist. Es wechselt daher $P_n(\cos\gamma)$ das Zeichen, wenn γ um $\pi:n$ geändert wird. Ist $P_n(\cos\gamma)=0$, so ist daher auch (mit Vernachlässigung der kleinen Glieder höherer Ordnung) $P_n\left(\cos\left(\gamma+\frac{\pi}{n}\right)\right)=0$.

Für die auf das Intervall 0 bis η (und ζ bis π) fallenden Wurzeln ist die Vertheilung aus der Theorie der Bessel'schen Functionen bekannt. Auf einfache Weise erfolgt dies durch Zerlegung von

$$J(\vartheta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\vartheta}\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\vartheta^2-\varphi^2}}$$

in Theile mit dem Intervalle $\frac{\pi}{2}$.

Setzt man

$$J_r = \text{absolut}\ \frac{2}{\pi}\int_{(r-1)\frac{\pi}{2}}^{r\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\vartheta^2-\varphi^2}},$$

so folgt (wegen der Gleichheit der Zähler $\cos\varphi$ und der abnehmenden Nenner $\sqrt{\vartheta^2-\varphi^2}$)

$$J_r < J_r+1\,.$$

Für $\vartheta=\frac{\pi}{2}+m\pi$, wird

$$J(\vartheta)=J_1-J_2-J_3+J_4+J_5-\ldots\,;$$

woraus folgt, dass

$J\left(\frac{\pi}{2}\right)$ positiv, $J\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)$ negativ, $J\left(\frac{\pi}{2}+2\,\pi\right)$ positiv,

u. s. w.; d. h. zwischen $\vartheta=\frac{\pi}{2}+m\,\pi$ und $\vartheta=\frac{\pi}{2}+(m+1)\,\pi$ liegt eine Wurzel von $J(\vartheta)$.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Zusatz. Für absolute Zahlen folgt, wenn $a < b$, $k > l$,

$$\frac{a}{b} < \frac{a-k}{b-k},$$

$$\frac{1}{a^m} - \frac{1}{b^m} < \left(\frac{b-k}{b}\right)^m \left(\frac{1}{(a-k)^m} - \frac{1}{(b-k)^m}\right)$$

$$< \frac{1}{(a-k)^m} - \frac{1}{(b-k)^m} < \frac{1}{(a-k)^m} - \frac{1}{(b-l)^m}.$$

Wendet man diese Ungleichung auf die obige Zerlegung von J an, so erhält man

$$J_{2r+2} - J_{2r+1} < J_{2r+4} - J_{2r+3}.$$

Berücksichtiget man, dass das obige Integral von $m\pi$ bis $m\pi + m'$, $m' \leqq \frac{1}{2}\pi$, mit $(-1)^m$ dasselbe Zeichen hat, so erhält man den „Bessel'schen Satz": $J(\vartheta)$ ist von $\vartheta = m\pi$ bis $(m + \frac{1}{2})\pi$ positiv, wenn m gerade, und negativ, wenn m ungerade ist.

Nach den von *Hansen* auf 6 Decimalstellen berechneten Tafeln der Functionswerte $J(\vartheta)$ von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 20$ (abgedruckt in *Lommels* „Studien über die Bessel'schen Functionen") ergeben sich folgende Wurzelwerte:

	Differenz
2.404826	
	3.115253
5.520079	
	3.133651
8.653730	
	3.137805
11.791535	
	3.139384
14.930919	
	3.140145
18.071064,	

wo die letzte Ziffer jedoch nicht verbürgt werden kann. Der Unterschied zweier aufeinander folgender Wurzeln nähert sich umsomehr der Zahl π, je größer die Wurzeln werden.

Dass die Summe $P_0 + P_1\alpha + P_2\alpha^2 + ..$ auch für $\alpha = 1$, wenn γ von Null verschieden ist, den Wert $1 : T$ liefert, wird so bewiesen. Setzt man in

$$S_n = P_0 + P_1 + .. + P_n$$

für P_n den Wert 3., so erhält man, mit Anwendung von

$$\cos\tfrac{1}{2}\psi + \cos\tfrac{3}{2}\psi + .. + \cos(n+\tfrac{1}{2})\psi = \frac{\sin(n+1)\psi}{2\sin\frac{1}{2}\psi},$$

$$S_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\gamma} \frac{\sin(n+1)\psi\, d\psi}{\sin\frac{1}{2}\psi \sqrt{\sin\frac{1}{2}(\gamma+\psi)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\psi)}}.$$

Zerlegt man das Integral in die drei Theile von 0 bis ε, von ε bis $\gamma - \varepsilon$, von $\gamma - \varepsilon$ bis γ, wo ε beliebig klein vorausgesetzt wird, so wird für $n = \infty$, der erste Theil $\pi : \sin\frac{1}{2}\gamma$, der zweite und dritte Null. Es ist daher

$$S = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\gamma} = \frac{1}{T}.$$

Um diese Summe allgemein, also auch für $\alpha = e^{\delta i}$ zu bestimmen, sei

$$S_n = P_0 + P_1\,\alpha + \,.\,.\, + P_n\,\alpha^n.$$

Setzt man für P_n den Wert 3. und

$$R = \cos\tfrac{1}{2}\psi + \alpha\cos\tfrac{3}{2}\psi + \,.\,.\, + \alpha^n\cos(n+\tfrac{1}{2})\psi$$

$$= \frac{(1-\alpha)\cos\frac{1}{2}\psi - \alpha^{n+1}\cos(n+\frac{3}{2})\psi + \alpha^{n+2}\cos(n+\frac{1}{2})\psi}{1 - 2\alpha\cos\psi + \alpha^2};$$

so wird

$$\pi\, S_n = \int_0^{\gamma} \frac{R\, d\psi}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin\frac{1}{2}\psi^2}}.$$

Für $n = \infty$ wird: Ist $\alpha < 1$, so ist $S = 1 : T$. Ist $\alpha = 1$, so erhält man, wie oben, $S = 1 : 2\sin\frac{1}{2}\gamma$. Ist $\alpha = e^{\delta i}$, so wird, wegen $1 - 2\alpha\cos\psi + \alpha^2 = 2\alpha(\cos\delta - \cos\psi)$, $S = 1 : T$, wenn $\delta > \gamma$ ist; hingegen verliert das obige Integral scheinbar seine Bedeutung, wenn $\delta < \gamma$ ist. In diesem Falle erscheint für $\psi = \delta$ der Ausdruck R in der Form $0 : 0$, dessen wahrer Wert aber unendlich ist.[1]) Gleiches gilt, wenn $\delta <$ oder $> \gamma$ ist und für P_n der Wert 4. gesetzt wird. Für $\delta = \gamma$ wird die Reihe S für beide Werte von P_n divergent.

[1]) Nach bekannter Methode oder auch durch unmittelbare Summierung der Reihe, erhält man $4\sin\delta\; R = A + Bi$, wo

$$A = (n+1)(\sin\tfrac{1}{2}\delta + \sin\tfrac{3}{2}\delta) + \sin\tfrac{1}{2}\delta + \sin(2n+\tfrac{3}{2})\delta$$

$$B = -(n+1)(\cos\tfrac{1}{2}\delta - \cos\tfrac{3}{2}\delta) + \cos\tfrac{1}{2}\delta - \cos(2n+\tfrac{3}{2})\delta.$$

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Mitteilungen des naturwissenschaftlichen Vereins für Steiermark

Jahr/Year: 1887

Band/Volume: 23

Autor(en)/Author(s): Frischauf Johannes

Artikel/Article: Convergenz der Kugelfunction-Reihen. 3-18