# Nachweis der Gleichheit des Integrals

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\gamma} \frac{\cos\,(n+\tfrac{1}{2})\,\psi\,.\,d\psi}{\sqrt{(\sin\frac{\gamma}{2})^2-(\sin\frac{\psi}{2})^2}}$$

## mit der Kugelfunction $P_n\,(\cos\gamma)$.

Von Alois Walter.

---

Die Function $\frac{1}{\sqrt{1-2\,\alpha\,x+\alpha^2}}$ der beiden unabhängigen Veränderlichen $\alpha$ und $x$ lässt sich mittels der Binomialformel in eine unendliche Reihe entwickeln, welche nach ganzzahligen Potenzen der einen Veränderlichen $\alpha$ fortschreitet, indess die Coefficienten dieser Potenzen Functionen der andern Veränderlichen $x$ allein sind.

Es ist nämlich

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\,\alpha\,x+\alpha^2}} = \Big[1-\alpha\,(2\,x-\alpha)\Big]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{\lambda}(-\alpha)^{\lambda}\,(2\,x-\alpha)^{\lambda} =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{\lambda}(-\alpha)^{\lambda}\sum_{\nu=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{\nu}(2\,x)^{\lambda-\nu}\,(-\alpha)^{\nu} =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\lambda}\binom{-\frac{1}{2}}{\lambda}\binom{\lambda}{\nu}(2\,x)^{\lambda-\nu}\,(-1)^{\lambda+\nu}\,.\,\alpha^{\lambda+\nu}$$

Fasst man nun alle Glieder, welche dieselbe Potenz von $\alpha$ enthalten, in je ein Glied zusammen, so ergibt sich

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\,\alpha\,x+\alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n}\,.\,(-1)^{n}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{-\frac{1}{2}}{n-\nu}\binom{n-\nu}{\nu}(2\,x)^{n-2\nu}$$

*

Es erscheinen somit die Coefficienten der einzelnen Potenzen von $\alpha$ als ganze Functionen von $x$; man bezeichnet den Coefficienten von $\alpha^n$ mit $P_n(x)$, und nennt ihn die *Kugelfunction* $n^{ter}$ Ordnung von $x$; es ist also

$$P_n(x) = (-1)^n \sum_{\nu=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{n-\nu} \binom{n-\nu}{\nu} (2x)^{n-2\nu}$$

Von der Kugelfunction $P_n(x)$ ist nun eine Anzahl von Umformungen bekannt; bemerkenswert ist unter denselben die *Mehler'sche* Formel

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\psi \, . \, d\psi}{\sqrt{(\sin\frac{\gamma}{2})^2 - (\sin\frac{\psi}{2})^2}}$$

welches Integral den Wert $P_n(\cos\gamma)$ hat.

Es lässt sich nämlich, nach dem Vorgange *Dirichlets*, zeigen, dass die unendliche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \, . \, \frac{1}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\psi \, . \, d\psi}{\sqrt{(\sin\frac{\gamma}{2})^2 - (\sin\frac{\psi}{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha \, . \cos\gamma + \alpha^2}}$$

ist; da nun, nach der Entstehung der Kugelfunction, auch die unendliche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \, . \, P_n(\cos\gamma) = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha \, . \cos\gamma + \alpha^2}}$$

ist, so muss in der That

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\psi \, . \, d\psi}{\sqrt{(\sin\frac{\gamma}{2})^2 - (\sin\frac{\psi}{2})^2}} = P_n(\cos\gamma)$$

sein. Es ist nun der Zweck dieser Blätter, diese Gleichheit ganz direct nachzuweisen. Zu diesem Ende möge der oben für $P_n(\cos\gamma)$ aufgestellte Ausdruck solange umgeformt werden, bis schließlich das *Mehler'sche* Integral zu Tage tritt.

Man setze zunächst

$$P_n(x) = P_n\big(1 + (x-1)\big) =$$

$$= \sum_{\rho=0}^{n} \frac{(x-1)^\rho}{\rho!} \, . \, P_n^{(\rho)}(1)$$

Die Werte sämmtlicher Ableitungen von $P_n(x)$ für $x = 1$, welche hier auftreten, erhält man so: es ist

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n-\nu} = \frac{(-1)^{n-\nu}\,(2n-2\nu)!}{2^{2n-2\nu}\,[(n-\nu)!]^2}, \quad \binom{n-\nu}{\nu} = \frac{(n-\nu)!}{\nu!\,(n-2\nu)!}$$

daher ist auch

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu (2n-2\nu)!}{[(n-\nu)!]^2} \cdot \frac{(n-\nu)!}{\nu!\,(n-2\nu)!} \cdot x^{n-2\nu} =$$

$$= \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \cdot \frac{(2n-2\nu)!}{n!\,(n-2\nu)!} \cdot \frac{n!}{\nu!\,(n-\nu)!} \cdot x^{n-2\nu} =$$

$$= \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \cdot \binom{2n-2\nu}{n} \binom{n}{\nu} x^{n-2\nu}.$$

Vergleicht man damit den Ausdruck

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \frac{d^n}{dx^n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \cdot x^{2n-2\nu} (-1)^\nu =$$

$$= n! \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{2n-2\nu}{n} \binom{n}{\nu} \cdot x^{n-2\nu},$$

so bemerkt man, dass

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \text{ ist.}$$

Darnach ist nun

$$P_n^{(\rho)}(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \cdot \frac{d^{n+\rho}}{dx^{n+\rho}} (x+1)^n (x-1)^n =$$

$$= \frac{1}{2^n\, n!} \cdot \sum_{\lambda=0}^{n+\rho} \binom{n+\rho}{\lambda} \cdot \frac{d^{n+\rho-\lambda}}{dx^{n+\rho-\lambda}} (x+1)^n \cdot \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} (x-1)^n.$$

Setzt man hier

$$\frac{d^{n+\rho-\lambda}}{dx^{n+\rho-\lambda}} (x+1)^n = (n+\rho-\lambda)! \binom{n}{n+\rho-\lambda} \cdot (x+1)^{-\rho+\lambda}$$

$$\frac{d^\lambda}{dx^\lambda} (x-1)^n = \lambda! \binom{n}{\lambda} \cdot (x-1)^{n-\lambda}$$

so erhält man schließlich

$$P_n^{(\rho)}(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \cdot \sum_{\lambda=0}^{n+\rho} \binom{n+\rho}{\lambda} \cdot \binom{n}{n+\rho-\lambda} \cdot$$

$$\cdot \binom{n}{\lambda} (n+\rho-\lambda)!\, \lambda!\, (x+1)^{-\rho+\lambda} \cdot (x-1)^{n-\lambda}$$

Bei allen Gliedern dieser Summe, wo negative Potenzexponenten auftreten, hat stets auch einer der als Factoren vorkommenden Binomialcoefficienten den Wert Null, weshalb alle diese Summanden wegfallen; für $x = 1$ werden außerdem noch alle Glieder, für welche $n - \lambda > 0$ ist, auch gleich Null, so dass nur derjenige Summand, bei dem $\lambda = n$ ist, überbleibt; somit ist

$$P_n^{(\rho)}(1) = \frac{1}{2^n\, n!} \binom{n+\rho}{n} \binom{n}{\rho} \rho!\, n!\, 2^{n-\rho} =$$

$$= \frac{1}{2^\rho} \cdot \binom{n+\rho}{n} \binom{n}{\rho} \cdot \rho! =$$

$$= \frac{1}{2^\rho} \cdot \frac{(n+\rho)!}{n!\, \rho!} \cdot \frac{n!}{\rho!\, (n-\rho)!} \cdot \rho! =$$

$$= \frac{1}{2^\rho} \cdot \frac{(n+\rho)!}{(2\rho)!\, (n-\rho)!} \cdot \frac{(2\rho)!}{\rho!\, \rho!} \cdot \rho!$$

$$P_n^{(\rho)}(1) = \frac{1}{2^\rho} \cdot \binom{n+\rho}{2\rho} \binom{2\rho}{\rho} \cdot \rho!$$

Somit ist

$$P_n(x) = \sum_{\rho=0}^{n} (x-1)^\rho \cdot \frac{1}{2^\rho} \cdot \binom{n+\rho}{2\rho} \binom{2\rho}{\rho}$$

Führt man jetzt eine neue Veränderliche $\gamma$ ein durch die Gleichung

$$x = \cos\gamma,$$

so ist $x - 1 = -2 . (\sin \frac{\gamma}{2})^2$, und es folgt

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{\rho=0}^{n} (-1)^\rho (\sin \tfrac{\gamma}{2})^{2\rho} \cdot \binom{n+\rho}{2\rho} \binom{2\rho}{\rho}$$

Die ganze weitere Umformung von $P_n(\cos\gamma)$ beruht nun auf der Ersetzung des hier auftretenden Binomialcoefficienten $\binom{2\rho}{\rho}$ durch ein bestimmtes Integral; dieser Schritt führt geraden Wegs zur Mehler'schen Formel.

Es ist

$$(\sin x)^{2\rho} = \frac{(e^{xi} - e^{-xi})^{2\rho}}{(2i)^{2\rho}} =$$

$$= \frac{1}{2^{2\rho}(-1)^{\rho}} \cdot \sum_{\lambda=0}^{2\rho} \binom{2\rho}{\lambda} (-1)^{\lambda} \cdot e^{xi(2\rho-\lambda)} \cdot e^{-xi.\lambda} =$$

$$= \frac{(-1)^{\rho}}{2^{2\rho}} \cdot \sum_{\lambda=0}^{2\rho} \binom{2\rho}{\lambda} (-1)^{\lambda} \cdot \left\{\cos(2\rho - 2\lambda)x + i \cdot \sin(2\rho - 2\lambda)x\right\}$$

Schreibt man die Posten dieser Summe in der umgekehrten Reihenfolge an, so lautet diese Formel

$$(\sin x)^{2\rho} = \frac{(-1)^{\rho}}{2^{2\rho}} \cdot \sum_{\lambda=0}^{2\rho} \binom{2\rho}{2\rho - \lambda} (-1)^{2\rho-\lambda} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \cos(-2\rho + 2\lambda)x + i \cdot \sin(-2\rho + 2\lambda)x \right\}$$

Addiert man beide Ausdrücke, so heben sich je zwei einen Sinus enthaltende Glieder, und es bleibt nur

$$(\sin x)^{2\rho} = \frac{(-1)^{\rho}}{2^{2\rho}} \sum_{\lambda=0}^{2\rho} (-1)^{\lambda} \binom{2\rho}{\lambda} \cdot \cos(2\rho - 2\lambda)x.$$

Daraus erhält man

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2\rho} dx = \frac{(-1)^{\rho}}{2^{2\rho}} \cdot \sum_{\lambda=0}^{2\rho} (-1)^{\lambda} \binom{2\rho}{\lambda} \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\rho - 2\lambda)x \cdot dx =$$

$$= \frac{(-1)^{\rho}}{2^{2\rho}} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\rho-1} (-1)^{\lambda} \binom{2\rho}{\lambda} \cdot \frac{\sin(2\rho - 2\lambda)x}{2\rho - 2\lambda}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+ \frac{(-1)^{\rho}}{2^{2\rho}} \cdot (-1)^{\rho} \cdot \binom{2\rho}{\rho} \cdot \frac{\pi}{2} +$$

$$+ \frac{(-1)^{\rho}}{2^{2\rho}} \cdot \sum_{\lambda=\rho+1}^{2\rho} (-1)^{\lambda} \binom{2\rho}{\lambda} \cdot \frac{\sin(2\rho - 2\lambda)x}{2\rho - 2\lambda}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Es ist aber hier alles, mit Ausnahme des Mittelgliedes, gleich Null; dadurch erhält man

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2\rho} \,.\, dx = \frac{1}{2^{2\rho}} \,.\, \frac{\pi}{2} \,.\, \binom{2\rho}{\rho}$$

$$\binom{2\rho}{\rho} = 2^{2\rho} \,.\, \frac{2}{\pi} \,.\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2\rho} \,.\, dx\,.$$

Diesen Ausdruck führe man nun in die zuletzt für $P_n(\cos\gamma)$ erhaltene Formel ein; diese geht dadurch über in

$$P_n(\cos\gamma) = \frac{2}{\pi} \,.\, \sum_{\rho=0}^{n} (-1)^{\rho} \,.\, (\sin\tfrac{\gamma}{2})^{2\rho} \,.\, \binom{n+\rho}{2\rho} \,.\, 2^{2\rho} \,.\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2\rho} \,.\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \,.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{\rho=0}^{n} (-1)^{\rho} \,.\, (\sin\tfrac{\gamma}{2} \,.\, \sin x)^{2\rho} \,.\, \binom{n+\rho}{2\rho} \,.\, 2^{2\rho} \,.\, dx.$$

Zur Weiterführung der Integration ist es zweckdienlich, eine neue Integrationsveränderliche $\psi$ einzuführen, so dass

$$\sin\tfrac{\gamma}{2} \,.\, \sin x = \sin\tfrac{\psi}{2} \text{ ist.}$$

$$2\sin\tfrac{\gamma}{2} \,.\, \cos x \,.\, dx = \cos\tfrac{\psi}{2} \,.\, d\psi$$

$$dx = \frac{\cos\frac{\psi}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2} \,.\, \cos x}\, d\psi$$

$$\sin^2\tfrac{\gamma}{2}\,(1 - \cos^2 x) = \sin^2\tfrac{\psi}{2}$$

$$\sin\tfrac{\gamma}{2} \,.\, \cos x = \sqrt{(\sin\tfrac{\gamma}{2})^2 - (\sin\tfrac{\psi}{2})^2}$$

wobei die Quadratwurzel positiv ist, da sowohl $\sin\frac{\gamma}{2}$ als auch $\cos x$ positiv sind.

Auf diese Art geht die Kugelfunction über in

$$P_n(\cos\gamma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\gamma} \frac{\cos\frac{\psi}{2} \,.\, d\psi}{\sqrt{(\sin\frac{\gamma}{2})^2 - (\sin\frac{\psi}{2})^2}} \,.\, \sum_{\rho=0}^{n} (\sin\tfrac{\psi}{2})^{2\rho} \,.\, (-1)^{\rho} \,.\, \binom{n+\rho}{2\rho} \,.\, 2^{2\rho}$$

Es erübrigt nunmehr nur noch die Berechnung der Summe

$$S_n = \sum_{\rho=0}^{n} (\sin\alpha)^{2\rho}\; (-1)^{\rho}\; \binom{n+\rho}{2\rho}\; 2^{2\rho}$$

Einen Anhaltspunkt hiefür gewährt die Kenntnis des Wertes derselben für besondere Werte des $n$; so findet man

$$S_0 = 1 = \frac{\cos (2 . 0 + 1) \alpha}{\cos \alpha}$$

$$S_1 = 1 - 4 . \sin^2 \alpha = (1 - 2 \sin^2 \alpha) - 2 \sin^2 \alpha =$$

$$= \cos 2 \alpha - \frac{\sin 2 \alpha . \sin \alpha}{\cos \alpha} =$$

$$= \frac{\cos 2 \alpha . \cos \alpha - \sin 2 \alpha . \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$S_1 = \frac{\cos 3 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos (2 . 1 + 1) \alpha}{\cos \alpha}$$

$$S_2 = 1 - 12 \sin^2 \alpha + 16 \sin^4 \alpha =$$

$$= (1 - 4 \sin^2 \alpha)(1 - 2 \sin^2 \alpha) - 2 \sin \alpha (3 \sin \alpha - 4 \sin^2 \alpha) =$$

$$= \frac{\cos 3 \alpha}{\cos \alpha} . \cos 2 \alpha - \frac{\sin 2 \alpha}{\cos \alpha} . \sin 3 \alpha =$$

$$= \frac{\cos 5 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos (2 . 2 + 1) \alpha}{\cos \alpha}$$

Es ist somit für $n = 0, 1, 2$

$$\cos (2n + 1) \alpha = \cos \alpha . \sum_{\rho = 0}^{n} (\sin \alpha)^{2 \rho} (-1)^{\rho} \binom{n + \rho}{2 \rho} . 2^{2 \rho}$$

Und nun soll gezeigt werden, dass, wenn diese Gleichung für ein bestimmtes $n$ erfüllt ist, dieselbe auch für das um eine Einheit grössere $n$ besteht. Es ist

$$\cos (2 (n + 1) + 1) \alpha = \cos (2 n + 1) \alpha . \cos 2 \alpha -$$

$$- \sin (2 n + 1) \alpha . \sin 2 \alpha =$$

$$= \cos (2 n + 1) \alpha . \cos 2 \alpha + \frac{d \cos (2 n + 1) \alpha}{d \alpha} . \frac{\sin 2 \alpha}{2 n + 1}$$

Durch Anwendung dieser Beziehung ergibt sich nun

$$\cos ( 2 (n + 1) + 1) \alpha = \cos \alpha . \sum_{\rho = 0}^{n} (\sin \alpha)^{2 \rho} (-1)^{\rho} \binom{n + \rho}{2 \rho} 2^{2 \rho} .$$

$$. (1 - 2 \sin^2 \alpha) +$$

$$+ \frac{\sin 2 \alpha}{2 n + 1} \left\{ \cos^2 \alpha \sum_{\rho = 0}^{n} 2 \rho (\sin \alpha)^{2 \rho - 1} (-1)^{\rho} \binom{n + \rho}{2 \rho} 2^{2 \rho} - \right.$$

$$\left. - \sin \alpha \sum_{\rho = 0}^{n} (\sin \alpha)^{2 \rho} (-1)^{\rho} \binom{n + \rho}{2 \rho} 2^{2 \rho} \right\}$$

$$\frac{\cos\left(2(n+1)+1\right)\alpha}{\cos\alpha} = \sum_{\rho=0}^{n} (\sin\alpha)^{2\rho} (-1)^{\rho} \binom{n+\rho}{2\rho} 2^{2\rho} -$$

$$-\,2 \sum_{\rho=0}^{n} (\sin\alpha)^{2\rho+2} (-1)^{\rho} \binom{n+\rho}{2\rho} 2^{2\rho} +$$

$$+\,\frac{4}{2n+1} \sum_{\rho=0}^{n} \rho\,(\sin\alpha)^{2\rho} (-1)^{\rho} \binom{n+\rho}{2\rho} 2^{2\rho} -$$

$$-\,\frac{4}{2n+1} \sum_{\rho=0}^{n} \rho\,(\sin\alpha)^{2\rho+2} (-1)^{\rho} \binom{n+\rho}{2\rho} 2^{2\rho} -$$

$$-\,\frac{2}{2n+1} \sum_{\rho=0}^{n} (\sin\alpha)^{2\rho+2} (-1)^{\rho} \binom{n+\rho}{2\rho} 2^{2\rho}$$

$$\frac{\cos\left(2(n+1)+1\right)\alpha}{\cos\alpha} = \sum_{\rho=0}^{n} (\sin\alpha)^{2\rho} (-1)^{\rho} \binom{n+\rho}{2\rho} 2^{2\rho} \left(1 + \frac{4\rho}{2n+1}\right) -$$

$$-\,2 \sum_{\rho=0}^{n} (\sin\alpha)^{2\rho+2} (-1)^{\rho} \binom{n+\rho}{2\rho} 2^{2\rho} \left(1 + \frac{2\rho+1}{2n+1}\right).$$

Die erste der beiden hier stehenden Summen kann man von $\rho = 0$ bis $\rho = n + 1$ nehmen, weil der zu $\rho = n + 1$ gehörige Summand infolge des Factors $\binom{2n+1}{2n+2}$ den Wert Null hat. Betrachtet man in der zweiten Summe $\rho + 1$ als die Summationsveränderliche, so erstreckt sich diese Summe von $\rho + 1 = 1$ bis $\rho + 1 = n + 1$; man kann aber auch diese Summe zwischen den Grenzen 0 und $n + 1$ nehmen, da auch hier der dadurch hinzugefügte Posten den Wert Null hat. Setzt man schließlich statt $\rho + 1$ wieder einfach $\rho$, so erhält man

$$\frac{\cos\left(2(n+1)+1\right)\alpha}{\cos\alpha} = \sum_{\rho=0}^{n+1} (\sin\alpha)^{2\rho} (-1)^{\rho} \binom{n+\rho}{2\rho} 2^{2\rho} \left(1 + \frac{4\rho}{2n+1}\right) +$$

$$+ \sum_{\rho=0}^{n+1} (\sin\ \alpha)^{2\rho} (-1)^{\rho} \binom{n-1+\rho}{2\rho-2} 2^{2\rho-1} \left(1 + \frac{2\rho-1}{2n+1}\right) =$$

$$= \sum_{\rho=0}^{n+1} (\sin\alpha)^{2\rho} (-1)^{\rho} 2^{2\rho} \left\{ \binom{n+\rho}{2\rho} \left(1 + \frac{4\rho}{2n+1}\right) + \binom{n-1+\rho}{2\rho-2} \frac{n+\rho}{2n+1} \right\} =$$

$$= \sum_{\rho=0}^{n+1} (\sin\ \alpha)^{2\rho} (-1)^{\rho} 2^{2\rho} \left\{ \binom{n+\rho}{2\rho-1} \frac{n-\rho+1}{2\rho} \left(1 + \frac{4\rho}{2n+1}\right) + \right.$$

$$\left. + \binom{n+\rho}{2\rho-2} \frac{n-\rho+2}{2n+1} \right\} =$$

$$= \sum_{\rho=0}^{n+1} (\sin\ \alpha)^{2\rho} (-1)^{\rho} 2^{2\rho} \left\{ \binom{n+\rho}{2\rho-1} \frac{n-\rho+1}{2\rho} \left(1 + \frac{4\rho}{2n+1}\right) + \right.$$

$$\left. + \binom{n+\rho}{2\rho-1} \frac{2\rho-1}{2n+1} \right\} =$$

$$= \sum_{\rho=0}^{n+1} (\sin\ \alpha)^{2\rho} (-1)^{\rho} 2^{2\rho} \binom{n+\rho}{2\rho-1} \cdot \left\{ \frac{n-\rho+1}{2\rho} + \right.$$

$$\left. + \frac{2n-2\rho+2}{2n+1} + \frac{2\rho-1}{2n+1} \right\} =$$

$$= \sum_{\rho=0}^{n+1} (\sin\ \alpha)^{2\rho} (-1)^{\rho} 2^{2\rho} \binom{n+\rho}{2\rho-1} \frac{n+\rho+1}{2\rho} =$$

$$= \sum_{\rho=0}^{n+1} (\sin\ \alpha)^{2\rho} (-1)^{\rho} 2^{2\rho} \binom{n+1+\rho}{2\rho}.$$

Dies ist aber nichts anderes als $S_{n+1}$. Besteht also einmal für irgend ein $n$ die Gleichung

$$\frac{\cos\ (2\,n+1)\ \alpha}{\cos\ \alpha} = S_n,$$

so gilt diese auch noch für alle folgenden Werte von $n$. Nachdem nun oben für $n=0$ das Erfülltsein dieser Gleichung ausdrücklich festgestellt wurde, so ist nunmehr deren allgemeine Giltigkeit nachgewiesen.

Demnach ist

$$\sum_{\rho=0}^{n} \left(\sin \frac{\psi}{2}\right)^{2\rho} (-1)^{\rho} \binom{n+\rho}{2\rho} 2^{2\rho} = \frac{\cos\,(n+\frac{1}{2})\,\psi}{\cos \frac{\psi}{2}}$$

und

$$P_n\,(\cos\gamma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\gamma} \frac{\cos\,(n+\frac{1}{2})\,\psi\,.\,d\,\psi}{\sqrt{(\sin \frac{\gamma}{2})^2 - (\sin \frac{\psi}{2})^2}},$$

womit die Richtigkeit der *Mehler*'schen Formel auf directem Wege dargethan ist.

Zusatz. Die zweite *Mehler*'sche Formel

$$P_n\,(\cos\gamma) = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma}^{\pi} \frac{\sin\,(n+\frac{1}{2})\,\psi\,.\,d\,\psi}{\sqrt{(\cos \frac{\gamma}{2})^2 - (\cos \frac{\psi}{2})^2}}$$

erhält man aus der ersten dadurch, indem man $\pi - \gamma$ statt $\gamma$, $\pi - \psi$ statt $\psi$ setzt und berücksichtigt, dass

$$P_n\left(\cos\,(\pi - \gamma)\right) = (-1)^n\; P_n\,(\cos\gamma)$$

ist. Durch Addition der beiden *Mehler*'schen Formeln für $P_n$ mit Berücksichtigung der Gleichung, welche durch Subtraction der beiden *Mehler*'schen Formeln für $P_{n-1}$ erhalten wird, erhält man die beiden Formeln *Dirichlets*.

Zeitschrift/Journal: Mitteilungen des naturwissenschaftlichen Vereins für Steiermark

Jahr/Year: 1888

Band/Volume: 24



Autor(en)/Author(s): Walter Alois



Artikel/Article: Nachweis der Gleichheit des Integrals. 25-34