Fundamentalpunkte

eines Systemes centrirter brechender Kugelflächen

von **Ferdinand Lippich,**

Professor an der technischen Hochschule in Graz.

In der bekannten Schrift: „Die Haupt- und Brennpunkte eines Linsen-Systemes" hat Herr C. Neumann die wesentlichsten Resultate der dioptrischen Untersuchungen von Gauss in ganz elementarer Darstellung wiedergegeben. Die einfache geometrische Deutung dieser Resultate ist sodann durch E. Reusch zur graphischen Behandlung dioptrischer Probleme in einer sehr verdienstlichen Arbeit *) ausgenützt worden. Den Haupt-, Brenn- und Knotenpunkten, die in diesen Untersuchungen und Constructionen eine fundamentale Bedeutung erlangen, hat Herr A. Toepler in einer schönen Abhandlung **), die manche neue Gesichtspunkte eröffnet, noch andere Punkte hinzugefügt, die ebenfalls sehr einfache Constructionen gestatten und die bisher bekannten Punkte, abgesehen von anderweitiger Bedeutung, mit Vortheil ersetzen können. In dieser Abhandlung, welche den Beweis geliefert hat, dass die Dioptrik eines Linsensystemes noch kein so abgeschlossenes Gebiet ist, als man für den ersten Augenblick wohl meinen möchte, wird ausgegangen von der analytischen Form, welche Gauss für die Gleichungen der ein- und austretenden Strahlen aufgestellt hat und ausserdem werden die Relationen benützt, welche zwischen den Constanten in diesen Gleichungen bestehen müssen.

So gross auch die Vereinfachung in der Deduction bei den erwähnten und anderen einschlägigen Arbeiten gegenüber der

*) Constructionen zur Lehre von den Haupt- und Brennpunkten eines Linsensystemes. Leipzig. Teubner 1870.

**) Pogg. Ann. Band CXLII, pag. 232.

Gauss'schen rein analytischen Behandlung sein mag, so glaube ich doch, in der nachfolgenden Darstellungsweise auf eine noch einfachere, und wie mir scheint, der Natur des Problemes noch mehr entsprechende Methode zurückgegangen zu sein, ohne übrigens der Allgemeinheit und Strenge Eintrag thun zu müssen. Diese Darstellungsweise beruht auf „geometrischen Betrachtungen der Lage“, denen leicht die metrischen Beziehungen hinzugefügt werden können. Die sämmtlichen Fundamentalpunkte, die älteren sowohl, als auch die vier von *Toepler* gefundenen, ergeben sich fast von selbst, ohne dass man nöthig hätte, auf Beziehungen zu reflectiren zwischen Constanten, welche von der Natur des brechenden Systemes abhängen.

Ausser den Grundbegriffen und Definitionen wird aus der Geometrie der Lage nur noch folgender Satz als bekannt vorausgesetzt:

Haben zwei projectivische Grundgebilde zwei entsprechende Elemente gemeinsam, so liegen sie perspectivisch zu einander.

Da übrigens dieser Satz nur für sehr specielle gegenseitige Lagen der Grundgebilde angewendet werden wird, so kann er auch leicht ganz entbehrt und durch gewöhnliche geometrische Betrachtungen ersetzt werden.

Wollte man von den projectivischen Eigenschaften geometrischer Gebilde mehr als diesen Satz herbeiziehen, so liesse sich die Theorie natürlich auch viel allgemeiner und erschöpfender durchführen. Gegenwärtig möchte ich aber gerade auf das geringste Mass der Hilfsmittel zurückgehen und sie so wählen, dass auch solche, denen die Geometrie der Lage fremd ist, die angewandten Sätze sich leicht auf anderem Wege begründen können. Ich behalte mir vor, weitere Betrachtungen an einem anderen Orte mitzutheilen; die gegenwärtigen dürften die bisher bekannten Hauptresultate dioptrischer Untersuchungen umfassen, so weit sich letztere auf ein sehr dünnes, wenig von der Axe abweichendes Strahlenbündel beschränken.

I.

Eine einzige brechende Fläche.

Wir denken uns Fig. I in der Zeichnungsebene eine Gerade oder Axe x gezogen. In einem Punkte h derselben errichten wir eine zu x senkrechte Ebene H, welche die Zeichnungsebene in H schneidet. Ferner sei auf x noch gegeben der Punkt k und zwei constante Zahlen n und n', die sich auf die beiden Raumtheile oder Medien N und N' beziehen, welche längs der Ebene H zusammenstossen. Mit Hilfe der beiden Constanten berechnen wir die Länge

$$fh = kf' = \frac{n}{n+n'} \cdot hk$$

und erhalten so die Punkte f und f', durch welche wir die zu x senkrechten Ebenen F und F' hindurchlegen.

Zu irgend einer Geraden A in N construiren wir eine Gerade in N' mit Benützung von k und F' auf folgende Art. Wir ziehen aus k den Strahl $k\alpha'$ parallel zu A und verbinden die Durchstosspunkte $\mathfrak{a}\,\alpha'$ der parallelen Geraden A, $k\alpha'$ mit den parallelen Ebenen H, F'. Die so erhaltene Gerade heisse A'. Umgekehrt kann man zu A' in N' die Gerade A finden, wenn man durch $\mathfrak{a}$ die Parallele zu $k\alpha'$ zieht. Man kann jedoch die Construction von A aus A' auf eine andere zurückführen, die der früheren analog ist. Wir ziehen nämlich aus k die Gerade $k\alpha$ parallel zu A'; dann ist die Gerade, welche $\mathfrak{a}$ mit dem Durchstosspunkte dieser Parallelen auf F verbindet, also $\mathfrak{a}\,\alpha$, die Gerade A. In der That ist wegen $fh = kf'$, $k\alpha'\alpha\mathfrak{a}$ ein Parallelogramm und $\mathfrak{a}\,\alpha$ parallel zu $\alpha' k$, d. h. die Gerade A.

Zwei Gerade A und A', welche nach obigen Constructionen mit einander verbunden sind, so dass A' mittelst k und F' aus A, oder nach demselben Gesetze A mittelst k und F aus A' entstanden gedacht werden kann, wollen wir c o n j u g i r t e S t r a h l e n nennen.

1 . . . Zwei im Punkte $\mathfrak{a}$ von H zusammenstossende Strahlen A und A' sind conjugirt zu einander bezüglich der Fläche H und der Medien N und N', wenn ihre Durchschnittspunkte α und α' auf den zugehörigen Ebenen F und F', mit $\mathfrak{a}$ und k die Eckpunkte eines Parallelogrammes bilden. Jedem Strahl A in N entspricht nur ein einziger Strahl A' in N' und umgekehrt.

Denken wir uns für einen Augenblick von den Strahlen in N nur solche genommen, welche mit x sehr kleine Winkel einschliessen und H in Punkten treffen, die sehr nahe an der Axe liegen; dann bilden auch die conjugirten Geraden mit der Axe sehr kleine Winkel. Zieht man $k\,a$ oder r, so ist

$$\frac{k\,a}{k\,a'} = \frac{\sin\left[(A\,r) + (A'r)\right]}{\sin(A'r)} = \cos(A\,r) + \frac{\sin(A\,r)}{\sin(A'r)} \cos(A'r).$$

Wegen der Kleinheit der Winkel wird man aber für ka, kh; für ka', kf' und für die Cosinusse die Einheit setzen können. Hiedurch werden erst Grössen vernachlässiget, welche bezüglich der kleinen Distanzen von x, von der zweiten Ordnung sind. Aus obiger Gleichung wird jetzt

$$\frac{n + n'}{n} = 1 + \frac{\sin(A\,r)}{\sin(A'r)},$$

oder

$$\frac{\sin(A\,r)}{\sin(A'r)} = \frac{n'}{n}.$$

Man bemerkt sofort, dass nunmehr A die Bedeutung eines durch N einfallenden Lichtstrahles und A' die Bedeutung des an einer Fläche nach N' gebrochenen gewinnt, für welche Fläche r eine Normale zum Einfallspunkte ist. Diese Fläche kann nur eine Kugelfläche mit dem Centrum in k und dem Radius hk sein. Die Constanten n und n' sind die beiden absoluten Brechungsindices der Medien N und N', welche an der Kugeloberfläche aneinander grenzen. Die oben angegebene Beziehung zwischen conjugirten Strahlen ist demnach nichts anderes, als die zwischen einfallenden und an einer Kugelfläche gebrochenen Strahlen bei sehr kleinen Neigungen geltenden Beziehung, ausgedehnt auf Strahlen mit endlichen Neigungen gegen die Axe.

Wegen dieser Uebereinstimmung werden wir auch H eine brechende Fläche und conjugirte Strahlen einfallende und gebrochene nennen, obgleich bei endlichen Neigungen durch das gewöhnliche Brechungsgesetz ein Lichtstrahl beim Uebergang von einem Medium in das andere nicht von A nach A' abgelenkt werden könnte.

Nachdem wir so die physikalische Bedeutung obiger Construction erkannt haben, wollen wir die Abhängigkeit zwischen conjugirten Strahlen weiter verfolgen. Wir denken uns jetzt unter A einen in der Zeichnungsebene gelegenen Strahl; A' liegt in derselben Ebene. Sodann nehmen wir einen beliebigen Punkt a

in A und ziehen durch diesen die weiteren Strahlen B ... in der Zeichnungsebene. Zu diesen suchen wir nach der obigen Construction die conjugirten B'.... Das Strahlbüschel AB... ist gleich und parallel liegend mit dem Büschel $k\alpha'$, $k\beta'$..., daher sind die Punktreihen $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$... und $\alpha'\,\beta'$... zu einander projectivisch und, weil sie die in H und F' gelegenen unendlich fernen Punkte entsprechend gemein haben, perspectivisch zu einander gelegen. Demnach gehen die Verbindungslinien $\mathfrak{a}\,\alpha'$, $\mathfrak{b}\,\beta'$... oder $A'\,B'$... durch einen und denselben Punkt a'. Jedes in einer Axenebene gelegenes Strahlbüschel verwandelt sich also durch Brechung an der Fläche H wieder in ein Strahlbüschel, welches mit ersterem perspectivisch liegt. Der beiden Büscheln entsprechend gemeinsame Strahl ist der durch k gehende. Einem zur Axe parallelen Strahl in dem einen Büschel C (oder B'), entspricht ein durch f' (oder f) gehender im anderen. Die von a und a' auf die Axe gefällten Senkrechten sind ebenfalls conjugirte Strahlen.

Wir wollen uns das Dreieck $a\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}$, ohne seine Gestalt zu ändern, so im Raume verschoben denken, dass $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}$ fortwährend auf H bleibt. Es behält also a denselben Abstand von H und beschreibt eine zur Axe senkrechte Ebene. Für jede neue Lage der Strahlen AC construiren wir die gebrochenen oder conjugirten $A'\,C'$. Die Figur $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\,\alpha'\,f'$ bleibt fortwährend ein ebenes Trapez, in welchem sich das Verhältniss der parallelen Seiten und die Distanz der parallelen Ebenen, in denen sie liegen, nicht ändert. Man erkennt sofort, dass dann der Durchschnittspunkt $A'\,C'$ oder a' immer dieselbe Distanz von H behalten muss. Besteht nun die Verschiebung des Dreieckes in einer blossen Drehung von A um C, so erkennt man, dass alle in der Mantelfläche des so beschriebenen Kegels liegenden Strahlen nach der Brechung durch a' gehen. Man hätte statt von A von jedem anderen Strahl B... ausgehen und dasselbe zeigen können, also gehen überhaupt alle von a ausgehenden Strahlen nach der Brechung wieder durch einen Punkt a', oder anders ausgedrückt:

2... Sämmtlichen Strahlen eines Strahlenbündels entsprechen als conjugirte wieder Strahlen eines Bündels. Beide Bündel liegen zu einander perspectivisch bezüglich der brechenden Ebene und der entsprechend gemeinsame Strahl geht durch k.

Durch dieses Verhalten ist jedem Punkte a in N ein, und nur ein Punkt a' in N' zugeordnet und umgekehrt. Diese Punkte liegen immer auf einer durch k gehenden Geraden. Zwei durch obigen Satz mit einander zusammen hängende Punkte a und a' sollen zu einander conjugirt heissen bezüglich der Räume N in N' und der brechenden Fläche H.

Wenn die Strahlen A' B' ... sich nach der Brechung an H nicht in einem Rechts von H gelegenen Punkte a' schneiden, so werden wir ihn dennoch als dem Raume oder Medium N' angehörig oder darin liegend, bezeichnen, weil es Strahlen des Raumes N' sind, welche diesen Punkt bestimmen.

3 ... Zwei auf einer Geraden durch k gelegene Punkte a und a' sind bezüglich der Fläche H und der Medien N und N' conjugirt zu einander, wenn sie Träger zweier Strahlbündel sind, deren Strahlen sich paarweise als conjugirte entsprechen. Jedem Punkte in N entspricht nur ein einziger Punkt in N' als conjugirter und umgekehrt.

Aus dieser Definition conjugirter Punkte folgt sofort, weil einerseits zwei sich schneidende Gerade als zwei Strahlen des Bündels im Durchschnittspunkte, andererseits die zwei Punkte verbindende Gerade als gemeinsamer Strahl der beiden in den Punkten vorhandenen Strahlbündel, angesehen werden kann:

4 ... Sind A, A', B, B' zwei conjugirte Strahlenpaare, so sind die Schnittpunkte $A \cdot B$ und $A' \cdot B'$ conjugirte Punkte. Sind a, a', b, b' zwei conjugirte Punktenpaare, so sind die Verbindungs-Geraden $\overline{a\,b}$ und $\overline{a'\,b'}$ conjugirte Strahlen.

Schneidet man zwei conjugirte Strahlbüschel durch zwei conjugirte Strahlen, so kann man sofort behaupten:

5 ... Sämmtlichen Punkten einer Geraden entsprechen als conjugirte wieder Punkte einer Geraden. Beide geraden Punktreihen liegen zu einander perspectivisch, bezüglich der brechenden Ebene H und der gemeinsam entsprechende Punkt liegt in dieser Ebene.

Hieraus folgt, dass auch zwei zur Axe senkrechte conjugirte Punktreihen zu einander perspectivisch liegen; doch wollen wir dieses Resultat noch auf eine andere Weise ableiten. Verschieben wir das Dreieck a a c unter den gemachten Beschränkungen nach irgend einem Orte und lassen es dann um C rotiren, so beschreibt A die Oberfläche eines Kegels. Wiederholen wir dasselbe mit jedem anderen Dreieck $a\,b\,c \ldots$, welches dem der übrigen Strahlen $B \ldots$ des ursprünglichen Büschels in a entspricht, so erhalten wir das ganze Strahlbündel in der neuen Lage. Die gebrochenen Strahlen gehen sämmtlich durch denselben Punkt, der mit a' in derselben zur Axe senkrechten Ebene liegen muss. Da je zwei auf diese Art erhaltene conjugirte Punkte auf der Geraden durch k sich befinden, so folgt:

6... Sämmtlichen in einer zur Axe senkrechten Ebene liegenden Punkten entsprechen als conjugirte wieder Punkte in einer zur Axe senkrechten Ebene. Diese beiden ebenen Punktsysteme liegen zu einander perspectivisch bezüglich des Punktes k.

Beschränkt man sich nur auf Punkte, die der Axe sehr nahe liegen, und auf wenig gegen die Axe geneigte Strahlen, so gewinnen zwei conjugirte Punkte die Bedeutung von Object-Punkt und Bild-Punkt bezüglich der brechenden Kugelfläche mit dem Mittelpunkte in k und Scheitel in h, wobei die absoluten Brechungsindices der angrenzenden Medien n und n' sind.

Alle Sätze, die wir für conjugirte Strahlen und Punkte ableiten, werden als ebenso viele dioptrische Sätze angesehen werden können, falls nur diese Sätze unabhängig sind von endlichen Neigungen der Strahlen und endlichen Entfernungen der Punkte von der Axe.

Da Object- und Bild-Punkte in einer Ebene liegend angenommen werden können, die durch die Axe geführt ist, so darf man nach dem Vorhergehenden Betrachtungen über die Abhängigkeit in der Lage zweier solcher Punkte auf Betrachtungen in einer durch die Axe gehenden Ebene beschränken. Endlich ist man nicht nur für conjugirte Punkte in der Axe im Stande, mit Strahlen von endlichen Neigungen die Constructionen durchzuführen, sondern auch für solche Punkte, die der Axe sehr nahe liegen, und zwar vermöge des Satzes 6. Hat man nämlich zu einem Punkte a in endlicher Entfernung von der Axe den zugehörigen conjugirten Punkt a' gefunden, so ist das Verhältniss $\frac{a'a'_1}{a\,a_1}$ für alle conjugirte Punktenpaare in den zur Axe senkrecht geführten Geraden durch a und a' dasselbe, also auch gleich dem Verhältniss $\frac{b'a'_1}{b\,a_1}$ für den der Axe sehr nahen Object-Punkt b und zugehörigen

Bild-Punkt b'. Dieses Verhältniss ist aber nichts anderes, als die Bildgrösse einer zur Axe senkrechten Längeneinheit als Object. Ist also $b\,a_1$ gegeben, so folgt aus

$$\frac{b'a'_1}{b\,a_1} = \frac{a'a'_1}{a a_1}$$

$b\,a_1$ und somit b_1, wobei a ein beliebiger Punkt in der Senkrechten $b\,a_1$ sein kann.

Während demnach die endlich entfernten conjugirten Punkte eigentlich keine directe dioptrische Bedeutung haben, stehen sie doch mit den in dioptrischen Problemen zu betrachtenden Punkten in der Beziehung, dass durch sie die Bildgrösse der Längeneinheit senkrecht zur Axe bestimmt ist.

Ohne für eine einzige brechende Fläche weitere Betrachtungen hinzuzufügen, gehen wir sogleich zum allgemeinsten Falle über, da sich aus diesem leicht durch Specialisirung die auf eine einzige brechende Fläche bezüglichen Sätze erhalten lassen.

II.

Beliebig viele brechende Flächen. Allgemeine Sätze und Constructionen.

Wir denken uns jetzt beliebig viele brechende Flächen H, H_1 $H_2 \ldots H_n$ H', in denen die Medien $N\,N_1$, $N_1\,N_2$, $\ldots N_{n-1}\,N_n$, $N_n\,N'$ mit den zugehörigen Brechungsindices $n\,n$, $n_2 \ldots n'$ aneinander grenzen. Aus diesen Constanten und den für jede Fläche gegebenen Punkt k bestimmen wir die Punkte f und Ebenen F. Wir machen ferner die Annahme, dass alle Punkte K auf derselben Axe liegen, oder, dass das System der brechenden Kugelflächen mit den Mittelpunkten k centrirt sei. Zu irgend einem Strahle A in N können wir bezüglich H den conjugirten A_1 in N_1, zu diesen wieder bezüglich H_1 den conjugirten A_2 in N_2 u. s. f. construiren, bis wir zu einen Strahl A' in N' kommen. Ebenso können wir zu einen beliebigen Punkt a in N, bezüglich H den conjugirten a_1 in N_1 u. s. f. suchen, bis wir zum Punkte a' in N' gelangen.

7 ... Wir nennen zwei Strahlen A und A' oder zwei Punkte a und a' in N und N' conjugirt zu einander bezüglich des

brechenden Systemes, wenn man von dem einen zum anderen gelangt durch eine Reihe von Strahlen oder Punkten, in der immer je zwei auf einander folgende conjugirt sind bezüglich zweier unmittelbar auf einander folgenden Medien und der sie trennenden brechenden Fläche. Jedem Elemente (Strahl oder Punkt) in N entspricht nur ein einziges gleichartiges Element in N' als conjugirtes und umgekehrt.

Wegen der speciellen Lage aller Punkte k auf der Axe, und weil immer zwei unmittelbar auf einander folgende conjugirte Strahlen mit dem zugehörigen k in derselben Ebene, zwei unmittelbar auf einander folgende conjugirte Punkte mit dem zugehörigen k in derselben Geraden liegen, folgt:

8 ... Ist ein Strahl in einer durch die Axe gehenden Ebene enthalten, so liegt sein, bezüglich des brechenden Systemes, conjugirter in derselben Ebene. Zwei conjugirte Punkte liegen immer mit der Axe in derselben Ebene. In der Axe selbst fallen zwei conjugirte Strahlen und zwei Punktreihen, deren Punkte sich paarweise als conjugirte entsprechen, zusammen.

Ferner sieht man sofort den folgenden Satz ein, wenn man die Sätze 2 und 5 successive für je zwei unmittelbar auf einander folgende Medien in Anwendung bringt:

9 ... Strahlen, die durch einen Punkt gehen, entsprechen als conjugirte wieder Strahlen durch einen Punkt, nämlich durch einen Punkt, der zu ersterem conjugirt ist. Punkte, die in einer Geraden liegen, entsprechen als conjugirte wieder Punkte in einer Geraden, nämlich in der zur ersteren conjugirten Geraden.

Hieraus wieder folgt:

10 ... Geraden und Punkten in einer Ebene entsprechen als conjugirte wieder Gerade und Punkte in einer Ebene.

Ohne diese Sätze weiter auszuführen, wollen wir uns nunmehr bloss auf jene specielleren Fälle beschränken, die für das Weitere unumgänglich nöthig sind. Zuerst bemerken wir, dass der S a t z 4 f ü r d e n j e t z i g e n a l l g e m e i n e n F a l l e b e n s o g i l t, w i e f ü r e i n e e i n z i g e b r e c h e n d e F l ä c h e. In der That ist er ja nur eine Consequenz der Definition conjugirter Punkte. Ferner denken wir uns ein Strahlbüschel, das in einer Axen-Ebene gelegen ist, und betrachten die auf einander folgenden conjugirten

Büschel bis zum letzten. Da je zwei auf einander folgende zu einander perspectivisch liegen (Satz 2), so sind das erste und letzte zu einander projectivisch. Liegt dann überdiess der Mittelpunkt des ersten auf der Axe, so gilt gleiches vom Mittelpunkte des zweiten, und die beiden Büschel haben einen Strahl, nämlich die Axe entsprechend gemeinsam (Satz 2); daher:

11 . . . Zwei zu einander conjugirte Strahlenbüschel, deren (nothwendig auch conjugirte) Mittelpunkte auf der Axe liegen, sind zu einander perspectivisch bezüglich einer zur Axe senkrechten Geraden.

Aehnliches gilt daher auch von conjugirten Strahlbündeln, deren Mittelpunkte auf der Axe liegen; sie sind perspectivisch bezüglich einer zur Axe senkrechten Ebene.

Vermöge dieses Satzes kann man folgende Aufgabe lösen:

A u f g a b e 1. Wenn in einer Axen-Ebene das conjugirte Strahlenpaar A und A' gegeben ist, alle übrigen conjugirten Strahlenpaare zu finden, welche durch die Schnittpunkte a und a' der gegebenen Strahlen mit der Axe, hindurchgehen.

Man suche Fig. 2 den Schnittpunkt $A \cdot A'$ oder α und ziehe durch diesen die Senkrechte S zur Axe. Der zu A_1 conjugirte Strahl A'_1 muss dann durch $A_1 \cdot S$ oder α_1 hindurchgehen.

Weiters denken wir uns eine zur Axe senkrechte, mit ihr in einer Ebene liegende Punktreihe, und betrachten die in den Medien N_1 N_2 . . . . auf einander folgenden Punktreihen bis zur letzten in N'. Da je zwei unmittelbar auf einander folgende zu einander perspectivisch liegen (Satz 6), so sind das erste und letzte zu einander jedenfalls projectivisch. Allein der unendlich entfernte Punkt ist beiden entsprechend gemeinsam, daher liegen die Punktreihen perspectivisch, u. z. bezüglich eines Axenpunktes.

12 . . . Zwei zu einander conjugirte zur Axe senkrechte Punktreihen, die (nothwendig) gleichzeitig in derselben Axen-Ebene liegen, sind zu einander perspectivisch bezüglich eines in der Axe gelegenen Punktes.

Dasselbe gilt daher auch von zwei conjugirten ebenen Punkt- (und Geraden) Systemen, deren Ebenen senkrecht zur Axe liegen.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man die folgende Aufgabe lösen:

Aufgabe 2. Wenn (in einer Axen-Ebene) das conjugirte Punktenpaar a und a' gegeben ist, alle übrigen conjugirten Punktenpaare zu finden, welche in den beiden durch a und a' zur Axe geführten Senkrechten liegen.

Man ziehe Fig. 3 die Verbindungslinie $\overline{a\,a'}$ bis sie die Axe in s schneidet. Der zu a_1 conjugirte Punkt a'_1 muss dann auf der Geraden $\overline{a_1\,s}$ liegen.

Durch ein Paar conjugirter Strahlen ist also nur ein Paar conjugirter Punkte, die beiden Schnittpunkte der Strahlen mit der Axe, bestimmt, aber unendlich viele Paare conjugirter Strahlen, nämlich die der Strahlbüschel in diesen Schnittpunkten. Ebenso ist durch ein Paar conjugirter Punkte nur ein Paar conjugirter Strahlen, die beiden durch die Punkte zur Axe senkrechten Strahlen, bestimmt, aber unendlich viele Paare conjugirter Punkte, nämlich die der Punktreihen in diesen Senkrechten.

Wir denken uns jetzt zwei Paare conjugirter Strahlen A, A'; B, B' gegeben, welche die Axe in den conjugirten Punktenpaaren a, a'; b, b' schneiden. Der Einfachheit wegen seien beide Strahlenpaare in derselben Axen-Ebene liegend, angenommen. Durch jeden Punkt m dieser Ebene gehen zwei Strahlen der Büschel a und b hindurch, und der zu m conjugirte Punkt m' liegt im Durchschnitte der beiden zu den früheren conjugirten Strahlen der Büschel in a' und b' (Satz 4). Man kann daher zu jedem Punkte m den conjugirten m' construiren, indem man zu den aus m nach a und b gezogenen Strahlen A_1 und B_1, Fig. 2, die conjugirten A'_1 B'_1 nach Aufgabe 1 sucht und ihren Schnittpunkt m' bestimmt. Da jeder Strahl durch zwei Punkte bestimmt ist, so kann man nunmehr auch zu jedem Strahl den conjugirten finden, indem man nach Satz 4 nur zwei Punkte zu suchen hat, durch die er hindurchgehen muss.

Man übersieht sofort, dass wegen der nach Satz 11 gemachten Bemerkung, die beiden Strahlenpaare gar nicht in derselben Axen-Ebene zu liegen brauchen und die Construction conjugirter Punkte und Strahlen für den Raum ebenfalls durchführbar ist.

Wenn eines oder beide der gegebenen Strahlenpaare zur Axe senkrecht stehen, so werden die obigen Constructionen undurchführbar, weil der perspectivische Durchschnitt der conjugirten Strahlbüschel nicht angegeben werden kann.

13... Die Wirkung des brechenden Systemes ist vollkommen bestimmt, sobald zwei Paare conjugirter Strahlen gegeben werden, von denen keines die Axe senkrecht schneidet.

Nun wollen wir als gegeben annehmen zwei Paare conjugirter Punkte a, a'; b, b' die nicht in der Axe liegen, der Einfachheit wegen aber in derselben Axen-Ebene enthalten gedacht werden. In jeder Geraden M dieser Ebene liegen zwei Punkte der zu a und b gehörigen, auf der Axe senkrechten Pnnktreihen, und der zu M conjugirte Strahl M' geht durch die beiden, den früheren conjugirten Punkte. Man kann daher zu jedem Strahl M den conjugirten M' construiren, indem man zu den Schnittpunkten $a_1\ b_1$ von M mit den Senkrechten durch a und b, Fig. 3, die conjugirten a'_1, b'_1 nach Aufgabe 2 sucht und die Gerade M' durch $a'_1\ b'_1$ zieht. Mit Hilfe der gegebenen beiden Punktenpaaren gelingt dann auch die Construction conjugirter Punkte, indem man sie für zwei Strahlen durchführt.

Wegen der nach Satz 12 gemachten Bemerkung, brauchen die beiden Punktenpaare nicht in derselben Axen-Ebene enthalten zu sein, und kann die Construction für beliebige Strahlen im Raume ausgeführt werden. Sie wird nur dann unmöglich, wenn eines oder beide Punktenpaare in der Axe liegen.

14 . . . Die Wirkung des brechenden Systemes ist vollständig bestimmt, wenn zwei Paare conjugirter Punkte gegeben werden, von denen keines auf der Axe liegt.

Ein Paar conjugirter Strahlen A, A' und ein Paar conjugirter Punkte b, b' in derselben Axen-Ebene können nicht willkührlich angenommen werden, wenn sie demselben brechenden Systeme angehören sollen. In der That, es mögen die Mittelpunkte der durch A und A' bestimmten Strahlbüschel a und a' sein (Fig. 4), die Träger der beiden durch b und b' bestimmten zur Axe senkrechten Punktreihen $B\,B'$. Die beiden Strahlbüschel sind perspectivisch bezüglich der Senkrechten S gezogen durch den Schnittpunkt $A \cdot A'$, und die beiden Punktreihen sind perspectivisch bezüglich des Schnittpunktes s von $\overline{bb'}$ mit der Axe. Nun sind aber $\overline{ab}$ und $\overline{a'b'}$ zwei conjugirte Strahlen, die sich auf S schneiden müssen, $A \cdot B$ und $A' \cdot B'$ conjugirte Punkte, dessen Verbindungslinie durch s gehen muss.

15 . . . Sollen in derselben Axen-Ebene zwei Strahlen A, A' und zwei Punkte b, b' so angenommen werden, dass sie sich als

conjugirte Elemente bezüglich desselben brechenden Systemes entsprechen können, so sind ausser den Schnittpunkten a, a' der Strahlen mit der Axe und den Senkrechten B, B' aus den Punkten zur Axe, von den vier Elementen A, A', b, b' nur drei willkührlich. Das vierte bestimmt sich aus den in 4, 11 und 12 enthaltenen Beziehungen.

Man überträgt diese Bemerkung leicht auf den Fall, in welchem Strahlen und Punkte nicht in derselben Axen-Ebene enthalten sind. Eine Ausnahme erleidet dieser Satz, wenn die Senkrechten $B\,B'$ durch die Punkte $a\,a'$ hindurchgehen. Uebrigens bemerkt man, dass durch Angabe eines Paares conjugirter Strahlen und Punkte, die Wirkung des brechenden Systemes im Allgemeinen noch nicht bestimmt ist.

Die Bestimmungen conjugirter Strahlen und Punkte aus zwei Paaren conjugirter Strahlen oder aus zwei Paaren conjugirter Punkte oder, was auf dasselbe hinaus kommt, aus zwei Paare conjugirter Strahlbüschel, deren Mittelpunkte in der Axe liegen und aus zwei Paare conjugirter Punktreihen, die die Axe senkrecht treffen, vereinfacht sich natürlich, wenn die als gegeben betrachteten Strahlbüschel oder Punktreihen speciellere Lagen und Beziehungen annehmen. Zur Aufsuchung derselben wollen wir nun übergehen.

III.

Fundamentalpunkte des brechenden Systemes.

Bei allen geometrischen Beziehungen der Lage spielen die unendlich fernen Elemente und die ihnen entsprechenden eine Hauptrolle und gestatten die Aufstellung einfacher metrischer Relationen. Wenden wir uns daher zu unendlich entfernten Strahlbüschel und Punktreihen und zu deren conjugirten.

Wir lassen in Fig. 2 den Mittelpunkt a mit dem unendlich fernen Punkt ∞ insoferne er dem Medium N angehörig gedacht wird, zusammenfallen; dann wird a' eine bestimmte Lage f' (Fig. 5) erhalten und der perspectivische Durchschnitt des Parallel-Strahlbüschel mit dem conjugirten in f' mag H' heissen. Ebenso lassen wir b' mit dem unendlich fernen Punkt ∞' in N' znsammenfallen, den zu ∞' conjugirten nennen wir jetzt f und den perspectivischen Durchschnitt H. Ist das brechende System durch zwei Paare conjugirter Strahlen oder Punkte definirt, so können $f f'$ $H H'$ immer gefunden werden nach den in 13 und 14 angegebenen Verfahrungsarten (Fig. 2 und 3), man hat nur z. B. in Fig. 3 einmal den Strahl M, das andere Mal M' parallel zur Axe zu nehmen, und den conjugirten zu suchen. Letzterer schneidet die Axe im Mittelpunkte f' oder f des betreffenden Strahlbüschel, und den Parallel-Strahl in einem Punkte von H' oder H. Die den unendlich fernen Punkten ∞ und ∞' conjugirten f' und f heissen die beiden Brennpunkte und die perspectivischen Durchschnitte der zur Axe parallelen Strahlbündel mit ihren conjugirten H und H', die Hauptebenen, die Punkte h und h', wo diese die Axe treffen, die Hauptpunkte des brechenden Systemes. Die in Fig. 2 angegebene Construction conjugirter Punkte wird man nunmehr leicht auf den Fall übertragen, in dem statt a, a; b, b'; S, S' gegeben ist ∞, f'; f, ∞'; H, H'. Die Punkte f, f', h, h' müssen immer ebenso reel vorhanden sein, als die zwei Paare conjugirter Punkte (oder Strahlen), welche das brechende System definiren, da sie aus diesen durch Construction geradliniger Figuren abgeleitet werden.

Wir lassen jetzt in Fig. 3 den Punkt a und mit ihm die zur Axe senkrechte Punktreihe in's Unendliche rücken, die zu ihr conjugirte Punktreihe F' muss dann nothwendig durch f' gehen, weil ∞ und f' conjugirte Axenpunkte sind. Um den Punkt auf der Axe zu finden, durch welchen sämmtliche Verbindungslinien der conjugirten Punkte hindurchgehen, denken wir uns das brechende System durch ∞, f'; f, ∞' definirt, was wir nunmehr können. Sodann wählen wir in F', Fig. 5, einen beliebigen Punkt a', ziehen A' parallel zur Axe, so dass αf der zu A' conjugirte Strahl ist. Auf diesem liegt also im Unendlichen der zu a' conjugirte Punkt a_∞, die aus a' zu αf parallele Gerade $a' a_\infty$ geht durch a_∞ und ihr Durchschnitt k' mit der Axe ist der verlangte Punkt. In gleicher Weise findet man für die durch f gehende Punktreihe als conjugirte die im Unendlichen liegende, und den Punkt k als Durchgangspunkt aller Verbindungs-Geraden conjugirter Punkte. Hiebei ist für den beliebigen Punkt b in F zum Strahl B parallel der Axe, der conjugirte $\alpha' f'$ und zu diesem $b\,k$ parallel gezogen worden, so dass letztere durch den zu b conjugirten Punkt b'_∞ hindurchgeht. Die Punkte k und k' nennt man die Knotenpunkte. Der Symmetrie wegen sind in Fig. 5 diese Punkte noch aus den zu b und a' symmetrisch bezüglich der Axe gelegenen Punkten b_1 und a'_1 construirt worden. Nach den ausgeführten Constructionen ist:

$$fh = k'f', \quad fk = h'f'.$$

Ausser den unendlich fernen Gebilden sind noch jene Beziehungen hervorzuheben, die der Gleichheit der projectivischen Grundgebilde entsprechen. Wir wollen daher jene conjugirten Strahlbüschel und Punktreihen aufsuchen, die einander congruent sind. Zwei perspectivische Strahlbüschel, deren Mittelpunkte auf der Axe liegen, können nur auf zweierlei Weise einander congruent werden; entweder dadurch, dass ihr perspectivischer Schnitt in's Unendliche rückt, dann laufen je zwei conjugirte Strahlen parallel und die Drehrichtung derselben ist gleich in beiden Büscheln; oder indem ihr perspectivischer Schnitt in die Mitte zwischen ihre Mittelpunkte fällt, dann bilden je zwei conjugirte Strahlen mit der Axe zusammen ein gleichschenkliches Dreieck und die Drehrichtung der Strahlen ist entgegengesezt. Die ersteren Strahlbüsehel haben ihre Mittelpunkte in den eben gefundenen Knotenpunkten. In der That, der Strahl $b\,k$, Fig. 5, schneidet F in b und die unendlich entfernte Punktreihe etwa in c_∞. Der zu b conjugirte Punkt b'_∞ liegt aber auf $b\,k$ und den zu c_∞ conjugirten c' auf F' würde man erhalten, indem man $c'\,k'\,c_\infty$, d. h. durch k' eine Parallele zu $b\,k$ zieht. Diese geht also durch c' und b'_∞, d. h. durch die zu c_∞ und b conjugirten Punkte, ist daher zum Strahl $b\,k$ conjugirt. Natürlich genügt es für zwei durch k und k' gehende conjugirte Strahlen nachgewiesen zu haben, dass sie parallel sind, um hieraus sofort das Gleiche für alle zusammengehörigen Strahlen der Büschel in k und k', wegen ihrer perspectivischen Lage, zu schliessen.

Wir suchen die beiden anderen Axenpunkte $\overline{k}$ und $\overline{k}'$, denen congruente Strahlen mit entgegengesetzter Drehrichtung entsprechen. Zu dem Zweck werden wir den durch b gehenden Strahl suchen, der dem Büschel in k angehört. Jedem durch b gehenden Strahl entspricht als conjugirter ein zu $b\,k$ oder zu $\alpha'\,\beta'$ paralleler. Der gesuchte Strahl $b\,\overline{k}$ muss daher so liegen, dass $\overline{k}f = f\,k$ wird, d. h. er ist parallel zur anderen Diagonale $f'\,\gamma'$ des Rechteckes $\alpha'\,\infty'\,\beta'\,\gamma'$. In ganz gleicher Weise vom Punkte a' ausgehend, erhält man $a'\overline{k}'$ parallel zur Diagonale $\beta\gamma$ des Rechteckes $\beta\alpha\gamma a_\infty$. Wir hätten übrigens beide Punkte $\overline{k}$ und $\overline{k}'$ auch auf folgende Art finden können.

Man ziehe $b\overline{k}$, so dass $\overline{k}f = fk$. Der Strahl $b\overline{k}$ schneide die unendlich ferne Punktreihe in d_∞. Nun suchen wir zu $b\overline{k}$ den conjugirten Strahl, der durch die zu b und d_∞ conjugirten Punkte b'_∞ und d' geht. b'_∞ liegt auf bk; um d' auf F' zu finden, haben wir k' d_∞ oder was dasselbe sagt, durch k' eine Parallele zu $b\overline{k}$ zu ziehen. Der gesuchte conjugirte Strahl $d'b'_\infty$ ist somit zu bk parallel und schneidet die Axe in $\overline{k}'$ so, dass $f'\overline{k}' = k'f'$ ist. Nun bilden aber $b\overline{k}$ und $d'\overline{k}'$ verlängert mit $\overline{k}\,\overline{k}'$ ein gleichschenkliches Dreieck, woraus folgt, dass $\overline{k}$ und $\overline{k}'$ die Mittelpunkte der beiden anderen congruenten Strahlbüschel sind, von denen früher die Rede war. Ihr perspectivischer Schnitt O liegt in der Mitte zwischen H und H'. Der Symmetrie wegen sind diese Punkte auch noch aus b_1 und a_1' construirt werden.

In ganz ähnlicher Weise werden zwei conjugirte perspectivische Punktreihen congruent werden, wenn der Axenpunkt, in dem sich die Verbindungs-Geraden conjugirter Punkte schneiden, in's Unendliche rückt, wo dann die Punktreihen gleichlaufend sind, oder wenn dieser Punkt in die Mitte zwischen beiden Punktreihen liegt, wodurch die Punktreihen ungleichlaufend werden. Die ersteren Punktreihen fallen mit H und H' zusammen. Man erkennt diess sofort, wenn man in Fig. 5 eine Gerade ba' parallel der Axe zieht; insoferne diese ein Strahl B in N ist, sind B und $\alpha'f'$ conjugirt, insoferne sie aber als Strahl A' in N' betrachtet wird, sind αf und A' conjugirte Strahlen. Es müssen also die Schnittpunkte B, αf und A', $\alpha'f'$ oder die Punkte α und α' zu einander conjugirt sein. Die Verbindungslinie $\alpha\alpha'$ ist aber der Axe parallel, geht also durch den unendlich fernen Punkt derselben. Die beiden anderen congruenten Punktreihen sind so beschaffen, dass einem Punkte β der einen, auf der anderen Seite der Axe ein gleichweit abstehender conjugirter Punkt β' der anderen Punktreihe entspricht. Wir denken uns, um die Punktreihen zu finden, aus β und β' zwei der Axe parallele Strahlen gezogen, Fig. 5. Dem von β ausgehenden B entspricht als conjugirter $\alpha'f'$, dem von β' ausgehenden $\beta'\gamma$ ist γf conjugirt. Die Schnittpunkte B, γf und $\alpha'f'$, $\beta'\gamma$ sind somit die beiden gesuchten Punkte β und β'

und die durch sie geführten Senkrechten zur Axe, $\overline{H}$ und $\overline{H}'$ die beiden anderen congruenten Punktreihen, welche die Axe in $\overline{h}$ und $\overline{h}'$ treffen. Bezüglich des Mittelpunktes m von $\overline{h}\,\overline{h}'$ sind die beiden Punktreihen perspectivisch. Aus der Construction folgt

$$\overline{h}\,f = f\,h, \quad h' f' = f' \,\overline{h}'; \quad k\,m = m\,k';$$

somit wegen der früheren auf k, k', $\overline{k}$ und $\overline{k}'$ bezüglichen Relation:

$$f h = \overline{h}\,f = k' f' = f' \,\overline{k}'; \quad f' h' = \overline{h}' f' = k\,f = f\,\overline{k};$$
$$k\,k' = h\,h'; \qquad \overline{k}\,\overline{k} = \overline{h}\,\overline{h}'.$$

Hiebei heissen $f h$ und $f' h'$ die beiden Brennweiten des brechenden Systemes bezüglich des ersten und letzten Mediums.

Die Figur 5, in der mehr Linien eingezeichnet wurden, als zur Construction der Fundamentalpunkte nöthig wären, gibt eine sehr gute Uebersicht über die gegenseitige Lage dieser Punkte.

Die Punkte f, f', h, h' mit den durch dieselben gehenden Ebenen, sind von Gauss gefunden worden. Die Knotenpunkte k und k' rühren von Listing her. $\overline{k}, \overline{k}'$; $\overline{h}, \overline{h}'$ hat Toepler in der oben citirten Abhandlung hervorgehoben, und als negative Knoten- und Hauptpunkte bezeichnet. Alle diese Fundamentalpunkte ergeben sich nach unserer Darstellungsweise als conjugirte Axenpunkte, die speciellen Lagen derjenigen Strahlbüschel und Punktreihen in Fig. 2 und 3 entsprechen, durch welche die brechende Wirkung des Systemes als definirt angesehen wurde. Alle diese Punkte sind, wie die Ableitung zeigt, sämmtlich reel vorhanden und sie können mit Vortheil zur Construction conjugirter Strahlen und Punkte, ganz nach den Vorschriften zu Fig. 2 und 3, benützt werden.

Natürlich werden zur Bestimmung conjugirter Strahlen, Punktreihen, zur Construction conjugirter Punkte aber, Strahlbüschel am vortheilhaftesten zu verwenden sein. Im ersten Falle wird man also die durch a, a'; b, b' bestimmten Punktreihen in Fig. 2 zusammenfallen lassen:

Mit der unendlich fernen Punktreihe in N, F'; F, und der unendlich fernen Punktreihe in N'; oder mit H, H' und $\overline{H}$, $\overline{H}'$.

Im anderen Falle würde man den durch A, A'; B, B' bestimmten Strahlbüscheln in Fig. 3 substituiren:

Entweder das Parallel-Strahlenbüschel in N, f'; f' und das Parallel-Strahlbüschel in N'; oder k, k'; $\overline{k}, \overline{k}'$.

Hat man nur eine einzige brechende Fläche, so fallen H und H' in die brechende Fläche selbst hinein. Alsdann müssen auch k und k' zusammenfallen, u. z., wie man sogleich übersieht, im Mittelpunkte der brechenden Kugelfläche. Die in Fig. 1 mit f und f' bezeichneten Punkte, sind die beiden Brennpunkte, $f\,h$ und $h\,f'$ die beiden Brennweiten.

IV.

Einige metrische Relationen.

Einige Eigenschaften der bisher betrachteten Fundamental-Punkte sollen nun benützt werden, um die wichtigsten metrischen Beziehungen zwischen conjugirten Axenpunkten und zwischen den Abständen conjugirter Punkte von der Axe abzuleiten. Hiebei betrachten wir die Richtung der Axe vom ersten zum letzten Medium als positiv. Die Distanz x zweier Punkte a, b auf der Axe soll mit $a\,b$ bezeichnet werden, so, dass wenn b näher am zweiten Medium liegt $a\,b = +\,x$, im entgegengesetzten Falle $a\,b = -\,x = -\,b\,a$ zu setzen kommt. Es ist also $a\,b + b\,a = o$ und bei drei Punkten $a, b, c,$ $a\,b + b\,c = a\,c$, gleichgiltig, wo c liegen mag.

Wir betrachten sämmtliche Fundamentalpunkte als gegeben. Sie sind es, sobald die Lage der Brennpunkte und die beiden Brennweiten bekannt sind. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehmen wir, wie in Fig. 6, die Brennpunkte ausserhalb $h\,h'$ gelegen an und setzen

$$f\,h = +\,\varphi,\quad h'\,f' = +\,\varphi'.$$

Zu einem Axenpunkte a soll der conjugirte a' gefunden werden. Benützen wir hiezu die Brennebenen und ihre conjugirten. Durch a ziehen wir den Strahl m_∞ und suchen zu den beiden Punkten m im Unendlichen und q die conjugirten. m' liegt in F' auf der durch k' zu $m_\infty\,q$ gezogenen Parallelen; q' liegt im Unendlichen auf dem Strahle $q\,k$; somit ist der zu $m_\infty\,q$ conjugirte Strahl, die aus m' zu $q\,k$ gezogene Parallele $m'\,q'_\infty$, und ihr Durchschnitt mit der Axe a', der gesuchte conjugirte Punkt. Da somit die Dreiecke $a\,q\,k$ und $k'\,m'\,a'$ ähnlich sind, folgt sogleich:

$$(1) \;.\;.\;.\;.\; \frac{af}{fk} = \frac{k'f'}{f'a'} \text{ oder } af\,.\,f'a' = \varphi\,.\,\varphi'.$$

D a s P r o d u c t a u s d e n A b s t ä n d e n z w e i e r c o n j u g i r t e r A x e n p u n k t e v o n d e n B r e n n p u n k t e n i s t c o n s t a n t, u. z. g l e i c h d e m P r o d u c t e d e r B r e n n w e i t e n.

Ist b, b' ein zweites Paar conjugirter Axenpunkte, also auch

$$bf\,.\,f'b' = \varphi\,.\,\varphi',$$

so folgt

$$af\,.\,f'a' = bf\,.\,f'b',$$

oder in Form einer Proportion

$$bf : af = f'a' : f'b',$$

aus welcher man sofort die beiden folgenden ableitet:

$$ba : af = b'a' : f'b'; \qquad bf : ba = f'a' : b'a'.$$

Hieraus folgt aber:

$$(2) \;.\;.\;.\;.\; \frac{ba}{b'a'} = \frac{af}{f'b'} = \frac{bf}{f'a'}.$$

Wählt man nun zwei Punkte a und b' so, dass $af = f'b'$ ist, wobei in unserer Figur diese Punkte beide ausserhalb oder innerhalb ff' liegen müssen, so wird gleichzeitig $bf = f'a'$ und $ba = b'a'$. Man kann also immer zwei Punkte ba so wählen, dass die conjugirten die gleiche Strecke einschliessen, diese Strecken liegen symmetrisch gegen die Brennpunkte, jedoch so, dass der Anfangspunkt der einen Strecke gegen den einen Brennpunkt ebenso liegt, wie der Endpunkt der anderen Strecke gegen den anderen Brennpunkt.

Aus der obigen Gleichung (2) folgt die erste der folgenden:

$$\frac{bf}{ab} = \frac{f'a'}{a'b'}; \quad \frac{b'f'}{a'b'} = \frac{b'f'}{a'b'}.$$

Addirt man zu ihr die zweite, so folgt:

$$(3) \;.\;.\;.\;.\; \frac{bf}{ab} + \frac{b'f'}{a'b'} = -1.$$

Mittelst dieser Gleichung kann man durch das conjugirte Punktenpaar b, b' jedes andere a, a' auf der Axe bestimmen. Lässt man $b\,b'$ der Reihe nach mit den verschiedenen Paaren conjugirter Fudamentalpunkte, h, h'; $\overline{h}, \overline{h'}$; k, k'; $\overline{k}, \overline{k'}$ zusammenfallen, so erhält man verschiedene Ausdrücke für die Beziehung conjugirter Punkte, u. z. die oben angegebenen Entfernungen der genannten Fundamentalpunkte von den Brennpunkten berücksichtigend:

$$(4) \ldots \quad \begin{array}{ll} \dfrac{\varphi}{a\,h} + \dfrac{\varphi'}{h'\,a'} = +1, & \dfrac{\varphi}{a\,\overline{h}} + \dfrac{\varphi'}{\overline{h}'\,a'} = -1, \\ \dfrac{\varphi'}{a\,k} + \dfrac{\varphi}{k'\,a'} = +1, & \dfrac{\varphi'}{a\,\overline{k}} + \dfrac{\varphi}{\overline{k}'\,a'} = -1. \text{*)} \end{array}$$

Wir gehen wieder zurück zur Gleichung (1) und bestimmen eine Länge ψ so, dass ohne Rücksicht auf das Vorzeichen

$$(5) \ldots \ldots \quad \psi^2 = \varphi . \varphi'$$

wird. Man erhält diese Länge von der Axe aus in F oder F' als Ordinate $f\,q$ oder $f'\,r$ des über $\overline{h}\,k$ oder $k'\,\overline{h}'$ als Durchmesser beschriebenen Kreises dargestellt. Indem wir ψ^2 mit gleichem Vorzeichen wie $\varphi . \varphi'$ in Gl. (1) setzen, wird dieselbe

$$a\,f . f'\,a' = \psi^2.$$

Unsere Fig. 6 entsprechend, wäre der rechte Theil dieser Gleichung positiv. Wir nehmen zwischen f und f' einen Punkt l so, dass $f\,l = -\,l\,f = \psi$ wird. Dann gehört zu l ein conjugirter Punkt l', für welchen $f'\,l' = -\,\psi$ oder $l'\,f' = \psi$ ist, d. h. ein ebenfalls zwischen f und f' gelegener, der dieselbe Entfernung von f' hat, wie l von f. Dessgleichen existirt ein ausserhalb $f\,f'$ gelegenes conjugirtes Punktenpaar $\overline{l}$, $\overline{l}'$ so, dass $\overline{l}\,f = f'\,\overline{l}' = \psi$ ist. Diese vier Punkte, welche immer reel vorhanden sind, können gleichfalls als Fundamentalpunkte angesehen werden. Bezieht man ein Paar conjugirter Axenpunkte auf dieselben, so nimmt die Gleichung (3) ganz die Form an, wie bei einer Linse in Luft, deren Brennweite ψ ist, denn man erhält:

$$(6) \ldots \quad \frac{1}{a\,l} + \frac{1}{l'\,a'} = \frac{1}{\psi}, \quad \frac{1}{a\,\overline{l}} + \frac{1}{\overline{l}'\,a'} = -\,\frac{1}{\psi}.$$

Die hier mit l bezeichneten Punkte sind das Analogon der vier Punkte, welche Möbius**), jedoch in einem speciellen Falle,

*) Diese Gleichungen hätten sich auch direct aus den Constructionen vermittelst der Haupt- und Knotenpunkte sehr einfach ableiten lassen.

**) Crelle Journal, Band 5.

in welchem sie gleichzeitig, wie die Punkte k mit den entsprechend bezeichneten h zusammenfallen, hervorgehoben hat.

Durch die Endpunkte q, r der Ordinaten aus f und f',

$$f q = f' r = \psi$$

legen wir die (der Axe parallele) Gerade $q r$ und beschreiben über $q r = f f'$ als Durchmesser einen Kreis C. Mittelst dieses Kreises lässt sich sehr leicht zu a der conjugirte a' construiren, wie folgt: Man ziehe $a q$ bis zum Durchschnitt c mit dem Kreise C, dann trifft die Gerade $c r$ die Axe im conjugirten Punkte a'. In der That, da $a q$ und $r a'$ auf einander senkrecht stehen, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $a f q$ und $r f' a'$

$$a f : \psi = \psi : f' a'.$$

Natürlich sind $a q$ und $r a'$ nicht conjugirte Strahlen. Wenn

$$\psi < \tfrac{1}{2} f f'$$

ist, so schneidet der Kreis C die Axe in zwei Punkten A und B. Aus der eben gezeigten Construction schliesst man sofort, dass in jedem dieser Punkte zwei conjugirte Punkte zusammenfallen. Diese Doppelpunkte, welche für einen specielleren Fall bereits Listing *) angibt, haben durch ihn den Namen symptotische Punkte erhalten. Setzt man

$$\tfrac{1}{2} f f' = \delta,$$

so findet man leicht für die Entfernungen dieser Punkte von den Brennpunkten

$$f A = B f' = \delta - \sqrt{\delta^2 - \psi^2}, \; f B = A f' = \delta + \sqrt{\delta^2 - \psi^2}.$$

Wird $\psi = \delta$, so fallen A und B zusammen mit dem Halbirungspunkte von $f f'$ und in diesem liegen dann auch die Punkte l und l'.

Wir denken uns jetzt in a und a' die zu einander perspectivisch gelegenen Punktreihen und Strahlenbüschel. Bezüglich ersterer sei p der Punkt auf der Axe, in welchem die Verbindungs-Geraden $\alpha\,\alpha'$ zweier conjugirter Punkte α und α' zusammentreffen. Die Lage dieses Punktes kann durch das Verhältniss $\frac{a p}{a' p}$ oder $\frac{a' p}{a p}$ bestimmt, angenommen werden. Wir setzen:

*) Poggendorff Ann. CXXIX.

$$(7)\ \ldots\qquad \frac{a\,p}{a'\,p} = \varepsilon,\quad \frac{a'\,p}{a\,p} = \varepsilon'.$$

Das erste Verhältniss ist zugleich das der Entfernung zweier Punkte der Punktreihe in a, zur Entfernung der conjugirten Punkte in a'; das zweite hingegen das umgekehrte. Nach der optischen Bedeutung kann man auch sagen, ε und ε' sind die Verhältnisse von Object-Länge zur Bild-Länge senkrecht zur Axe, je nachdem man sich das Licht vom ersten Medium in das letzte oder umgekehrt vom letzten in das erste, gehend denkt. Sie sind positiv, wenn die conjugirten Punkte α, α' auf derselben Seite der Axe liegen. Diese Verhältnisszahlen drücken sich am einfachsten mittelst der Knotenpunkte $k\,k'$ aus. Zieht man nämlich (Fig. 6) $\alpha\,k$, so muss $k'\,\alpha'$ parallel zu $\alpha\,k$ sein, vermöge der Eigenschaft dieser Knotenpunkte. Daher ist

$$\varepsilon = \frac{a\,\alpha}{a'\,\alpha'} = \frac{a\,k}{a'\,k'},\quad \varepsilon' = \frac{a'\,\alpha'}{a\,\alpha} = \frac{a'\,k'}{a\,k}.$$

Nun folgt aber aus den Gleichungen (4)

$$\frac{a\,k}{a'\,k'} = -\frac{a\,k - \varphi'}{\varphi} = -\frac{a\,f + f\,k - \varphi'}{\varphi},$$

$$\frac{a'\,k'}{a\,k} = -\frac{k'\,a' - \varphi}{\varphi'} = -\frac{k'\,f' + f'\,a' - \varphi}{\varphi'},$$

und somit wird weiter

$$(8)\ \ldots\qquad \varepsilon = -\frac{a\,f}{\varphi},\quad \varepsilon' = -\frac{f'\,a'}{\varphi'}.$$

Natürlich ist $\varepsilon\,\varepsilon' = 1$ wegen Gleichung (1), wie es sein muss.

Es sei ferner S der perspectivische Durchschnitt der beiden Strahlbüschel in a und a', und s der Schnittpunkt von S mit der Axe. Zur Bestimmung von s betrachten wir wieder die folgenden Vsrhältnisse:

$$(9)\ \ldots\qquad \eta = \frac{a\,s}{a'\,s'},\quad \eta' = \frac{a'\,s'}{a\,s}.$$

Auch diese haben eine weitere einfache Bedeutung. Sind nämlich A und A' zwei conjugirte Strahlen in a und a', und zählt man die Winkel, welche sie mit der Axe x nach einer bestimmten Seite hin bilden, einer Links-Drehung entsprechend, positiv, so ist

$$\eta = \frac{\operatorname{tng}(x A)}{\operatorname{tng}(x A')}, \quad \eta' = \frac{\operatorname{tng}(x A')}{\operatorname{tng}(x A)}.$$

Daher stellen η und η' die Verhältnisse der Neigungstangenten des einfallenden und gebrochenen Strahles dar, je nachdem das Licht von N nach N' oder umgekehrt geht. Diese Verhältnisse drückt man am einfachsten durch die Hauptpunkte h, h' aus. Denn zieht man A aus a, bis H geschnitten wird, so muss A' aus a', die Senkrechte H' in derselben Höhe über der Axe treffen, vermöge der Eigenschaft dieser Punktreihen. Daher ist

$$\eta = \frac{a\,h}{a'\,h'}, \quad \eta' = \frac{a'\,h'}{a\,h}.$$

Benützt man wieder die Gleichungen (4), um η und η' beziehungsweise durch $a\,h$ und $a'\,h'$, und sodann wegen $a\,h = a\,f + f\,h$, $h'\,a' = h'\,f' + f'\,a'$ durch $a\,f$ und $f'\,a'$ auszudrücken, so erhält man:

$$(10) \quad \ldots \quad \eta = -\frac{a\,f}{\varphi'}, \quad \eta' = -\frac{f'\,a'}{\varphi}.$$

Demnach ergibt sich zwischen den ε und η die einfache Beziehung (Gl. 11)

$$\frac{\varepsilon}{\eta} = \frac{\eta'}{\varepsilon'} = \frac{\varphi'}{\varphi}, \quad \varepsilon\,\eta' = \frac{1}{\varepsilon'\,\eta} = \frac{\varphi'}{\varphi}.$$

Beachtet man die Werthe von ε und η in (7) und (9), so ist hienach

$$\frac{a\,p}{a'\,p} : \frac{a\,s}{a'\,s} = \frac{\varphi'}{\varphi},$$

d. h. das Doppel-Verhältniss zweier conjugirter Punkte und der zugehörigen Punkte p und s ist constant. Wird $\varphi = \varphi'$, so fallen p und s zusammen.

Es seien a_1, a'_1 zwei andere conjugirte Punkte und

$$\varepsilon_1 = -\frac{a_1\,f}{\varphi}, \quad \varepsilon'_1 = -\frac{f'\,a'_1}{\varphi'};$$

$$\eta_1 = -\frac{a_1\,f}{\varphi'}, \quad \eta'_1 = -\frac{f'_1\,a'_1}{\varphi}.$$

Dann folgen die Beziehungen:

$$(11) \ldots \quad \varepsilon - \varepsilon_1 = -\frac{a\,a_1}{\varphi}, \quad \varepsilon' - \varepsilon'_1 = -\frac{a_1\,a}{\varphi'},$$

$$(11) \ldots \quad \eta - \eta_1 = -\frac{a\,a_1}{\varphi'}, \quad \eta' - \eta'_1 = -\frac{a_1\,a}{\varphi}.$$

Wird $\varepsilon_1 = \varepsilon + 1$, so wird $a\,a_1 = \varphi$. Man kann daher die Brennweite im ersten Medium definiren, als die Länge, um welche das Object verschoben werden muss, damit das Verhältniss der Objectlänge zur Bildlänge um die Einheit sich vergrössere. Aehnlich lässt sich die zweite Brennweite definiren.

Vermöge der Eigenschaften, die den Fundamentalpunkten zukommen, erkennt man, dass für h, h'; $\varepsilon = +1$, für $\overline{h}, \overline{h'}$, $\varepsilon = -1$ ist; dass zu k, k'; $\eta = +1$, zu $\overline{k}, \overline{k'}$ aber $\eta = -1$ gehört. Die anderen Werthe der Verhältnisse für diese Punkte sowohl als auch für die übrigen, findet man sehr leicht aus (8), (10) oder auch aus (11). Wir haben sie in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	ε	η
f, ∞'	-0	-0
∞, f'	$-\infty$	$-\infty$
h, h'	$+1$	$+\frac{\varphi}{\varphi'}$
$\overline{h}, \overline{h'}$	-1	$-\frac{\varphi}{\varphi'}$
k, k'	$+\frac{\varphi'}{\varphi}$	$+1$
$\overline{k}, \overline{k'}$	$-\frac{\varphi'}{\varphi}$	-1
l, l'	$+\sqrt{\frac{\varphi'}{\varphi}}$	$+\sqrt{\frac{\varphi}{\varphi'}}$
$\overline{l}, \overline{l'}$	$-\sqrt{\frac{\varphi'}{\varphi}}$	$-\sqrt{\frac{\varphi}{\varphi'}}$
A	$+\frac{\delta - \sqrt{\delta^2 + \psi^2}}{\varphi}$	$+\frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - \psi^2}}{\varphi'}$
B	$+\frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - \psi^2}}{\varphi}$	$+\frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - \psi^2}}{\varphi'}$

V.

Bestimmung der Brennpunkte und Brennweiten für ein gegebenes brechendes System.

Unter allen Fundamentalpunkten, durch welche die Wirkung eines brechenden Systemes definirt werden kann, sind die Brenn- und Hauptpunkte diejenigen, welche sich am leichtesten aus der Structur eines gegebenen brechenden Systemes bestimmen lassen. Aus diesem Grunde müssen sie auch als Fundamentalpunkte catexochen bezeichnet werden. Wir wollen noch die Ermittlung dieser Punkte, die auf die Ermittlung der Brennpunkte und Brennweiten hinausläuft, zunächst auf rechnendem Wege zeigen.

Es seien zu diesem Zwecke $N, N_1, N_2 \ldots N_{n-1}, N'$ die brechenden Medien, von einander getrennt durch centrirte Kugelflächen, welche die Axe in den Punkten $b_1, b_2, \ldots b_n$ schneiden. Aus den Radien dieser Kugelflächen und den Brechungsexponenten der angrenzenden Medien berechnen wir nach den in Art. I angegebenen Ausdrücken die Brennweiten φ_1, φ'_1; φ_2, φ'_2; .. φ_n, φ'_n, durch welche die Lage der beiden Brennpunkte jeder Kugelfläche bestimmt ist. Diese Brennpunkte seien f_1, f'_1; f_2, f'_2; .. f_n, f'_n. Hiebei rechnen wir eine Brennweite als positiv, wenn der durch sie bestimmte Punkt f auf derjenigen Seite der Kugelfläche liegt, auf welcher auch das Medium gelegen ist, durch dessen Brechungsexponenten die Brennweite bestimmt wurde. Die durch b geführten brechenden Ebenen nennen wir B. Endlich bezeichnen wir die Distanzen zwischen zwei Brennpunkten, wie folgt:

$$f'_1 f_2 = \Delta_1, \; f'_2 f_3 = \Delta_2, \; \ldots \; f'_{n-1} f_n = \Delta_{n-1}.$$

Nun denken wir uns auf der Axe zwei bezüglich des brechenden Systemes conjugirte Punkte a und a', ziehen durch a einen beliebigen Strahl A und verfolgen die gebrochenen Strahlen bis zum letzten A' durch a'. Natürlich liefert ein aus a' ausgehender Strahl A' dieselben Zwischenstrahlen bis zum ersten A. Betrachten wir irgend zwei unmittelbar auf einander folgende Zwischenstrahlen, die sich (Fig. 7) in der brechenden Fläche B_i begegnen; die beiden Strahlen vor und nach der Brechung an B_i mögen die Axe in a_{i-1} und a_i schneiden. Nach Gleichung (1) ist

$$a_{i-1} f_i \,.\, f'_i a_i = \varphi_i \,.\, \varphi'_i .$$

Setzt man in diese Gleichung einmal $f'_i a_i = \Delta_i - a_i f_{i+1}$, das andere Mal $a_{i-1} f_i = \Delta_{i-1} - f'_{i-1} a_{i-1}$, so erhält man die beiden Ausdrücke

$$(12) \ldots \quad f'_i a_i = \frac{\varphi_i \ \varphi'_i}{\Delta_{i-1} - f'_{i-1} a_{i-1}} \,; \quad a_{i-1} f_i = \frac{\varphi_i \ \varphi'_i}{\Delta_i - a_i f_{i+1}} .$$

Kennt man die Lage des Bildpunktes a_1 nach der Brechung an der ersten Fläche, so kann man von diesem ausgehend, durch die erste Formel die Lage der übrigen Punkte a_2, a_3, a_4 .. bis a' durch folgende Kettenbrüche angeben

$$(12a^1) \ldots \quad f'_2 a_2 = \frac{\varphi_2 \ \varphi'_2}{\Delta_1 - f'_1 a_1}, \quad f'_3 a_3 = \cfrac{\varphi_3 \ \varphi'_3}{\Delta_2 - \cfrac{\varphi_2 \ \varphi'_2}{\Delta_1 - f'_1 a_1}},$$

$$f'_4 a_4 = \cfrac{\varphi_4 \ \varphi'_4}{\Delta_3 - \cfrac{\varphi_3 \ \varphi'_3}{\Delta_2 - \cfrac{\varphi_2 \ \varphi'_2}{\Delta_1 - f'_1 a_1}}}, \ldots$$

Ebenso liefern die aus der zweiten Formel fliessenden Werthe:

$$(12a^2) \ldots \quad a_{n-2} f_{n-1} = \frac{\varphi_{n-1} \ \varphi'_{n-1}}{\Delta_{n-1} - a_{n-1} f_n}, \quad a_{n-3} f_{n-2} = \cfrac{\varphi_{n-2} \ \varphi'_{n-2}}{\Delta_{n-2} - \cfrac{\varphi_{n-1} \ \varphi'_{n-1}}{\Delta_{n-1} - a_{n-1} f_n}};$$

$$a_{n-4} f_{n-3} = \cfrac{\varphi_{n-3} \ \varphi'_{n-3}}{\Delta_{n-3} - \cfrac{\varphi_{n-2} \ \varphi'_{n-2}}{\Delta_{n-2} - \cfrac{\varphi_{n-1} \ \varphi'_{n-1}}{\Delta_{n-1} - a_{n-1} f_n}}}, \ldots$$

die Punkte a_{n-2}, a_{n-1} .... bis a, wenn, die Strahlen von a' angehend gedacht, a_{n-1} als das Bildpunkt von a' nach der Brechung an der letzten Fläche, bekannt ist.

Es sei noch in Fig. 7 $U U'$ parallel der Axe gezogen. Aus den Schnittpunkten u_{i-1} und u_i der beiden durch a_{i-1} und a_i gehenden Strahlen fällen wir die Senkrechten $u_{i-1} h_{i-1}$ und $u_i h_i$ auf die Axe. Endlich construiren wir zum Strahle aus a_{i-1} den conjugirten, indem wir durch den Schnittpunkt m von $a_{i-1} u_{i-1}$ mit der Brennebene F_i die parallele $m n$ zur Axe ziehen, n mit f'_i verbinden und so den conjugirten Strahl $p\,a_i$ parallel zu $n\,f'_i$ erhalten. Nun ist in Folge dieser Construction:

$$\frac{a_{i-1}\,h_{i-1}}{a_{i-1}\,f_i} = \frac{h_{i-1}\,u_{i-1}}{f_i\,m} = \frac{h_i\,u_i}{b_i\,n} = \frac{a_i\,h_i}{f'_i\,b_i},$$

somit, weil $f'_i\,b_i = -\varphi'_i$ und $a_{i-1}\,f_i \,.\, f'_i\,a_i = \varphi_i \,.\, \varphi'_i$ ist,

$$(13) \ldots \frac{a_i\,h_i}{a_{i-1}\,h_{i-1}} = -\frac{\varphi'_i}{a_{i-1}\,f_i} = -\frac{f'_i\,a_i}{\varphi_i}.$$

Setzt man in dieser Gleichung, von a_1 ausgehend und $a_1\,h_1$ als bekannt annehmend, der Reihe nach $2, 3, \ldots n$ für i und schreibt für a_n als den letzten Punkt, der bereits in N' liegt, a', multiplicirt sodann die ganze Reihe der Gleichungen, so erhält man, wie leicht ersichtlich

$$(13\,a') \;.. \frac{a'\,h_n}{a_1\,h_1} = (-1)^{n-1}\,\frac{f'_2\,a_2 \,.\, f'_3\,a_3 \ldots .\, f'_n\,a'}{\varphi_2 \;.\; \varphi_3 \;\ldots\; \varphi_n}.$$

Geht man in gleicher Weise von a_{n-1} aus, indem man $a_{n-1}\,h_{n-1}$ als bekannt ansieht, und setzt in obiger Gleichung für i der Reihe nach n-2, n-3 .... 2, 1, wobei für a_0 als ersten Punkt, der in N liegt, a zu schreiben kommt, so wird sich ergeben:

$$(13\,a) \ldots \frac{a\,h_0}{a_{n-1}\,h_{n-1}} = (-1)^{n-1}\,\frac{a_{n-2}\,f_{n-1} \,.\, a_{n-3}\,f_{n-2} \ldots .\, a\,f_1}{\varphi_{n-2} \;.\; \varphi_{n-3} \;\ldots\; \varphi_1}.$$

Lassen wir jetzt a in's Unendliche rücken und U einen Strahl des einfallenden Parallel-Strahlbündel bedeuten. Dann wird der Punkt a' in N' der Brennpunkt f' des brechenden Systemes, der Punkt h_n wird der Hauptpunkt h' und $a'\,h_n = f'\,h' = -h'\,f' = -\varphi'$, wo φ' die zweite Brennweite bedeutet. Die früher mit $a_1\,a_2 \ldots$ bezeichneten Punkte sollen jetzt $b'_1\,b'_2 \ldots$ heissen. Sie sind zugleich die zweiten Brennpunkte der Partialsysteme B_1, $B_1\,B_2$, $B_1\,B_2\,B_3 \ldots$ In den Gleichungen (12a) kommt jetzt zu setzen

$$f'_1\,a_1 = o,$$

und in (13a'), $a_1\,h_1 = f'_1\,b_1 = -b_1\,f'_1 = -\varphi'$.

Zur Bestimmung der Punkte $b'_2, b'_3 \ldots . f'$ hat man nunmehr die folgenden Ausdrücke, denen eine sofort ersichtliche abgekürzte Bezeichnung der Nenner beigefügt ist:

$$
(14')\ldots\quad
\begin{aligned}
f'_2\, b'_2 &= \frac{\varphi_2\, \varphi'_2}{\Delta_1} &&= \frac{\varphi_2\, \varphi'_2}{\nu'_1},\\
f'_3\, b'_3 &= \frac{\varphi_3\, \varphi'_3}{\Delta_2 - f'_2\, b'_2} = \frac{\varphi'_3\, b'_3}{\Delta_2 - \dfrac{\varphi_2\, \varphi'_2}{\Delta_1}} &&= \frac{\varphi_3\, \varphi'_3}{\nu'_2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f'_n\, f' &= \frac{\varphi_n\, \varphi'_n}{\Delta_{n-1} - f'_{n-1}\, b'_{n-1}} = \frac{\varphi_n\, \varphi'_n}{\Delta_{n-1} - \dfrac{\varphi_{n-1}\, \varphi'_{n-1}}{\Delta_{n-2} \cdot \ddots - \dfrac{\varphi_2\, \varphi'_2}{\Delta_1}}} &&= \frac{\varphi_n\, \varphi'_n}{\nu'_{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Die wirkliche Berechnung von $f'_n\, f'$ wird am zweckmässigsten durch successive Ausrechnung von $f'_2\, b'_2$, ν'_2; $f'_3\, b'_3$, ν'_3; .... $f'_{n-1}\, b'_{n-1}$, ν'_{n-1} ausgeführt. Die Brennweite φ' erhält man aus ($13\,a'$), wobei man für $f'_1\, a_2$, $f'_3\, a_3$ ...., $f'_2\, b'_2$, $f'_3\, b'_3$ .... und für diese die Werthe aus ($14'$) zu setzen hat. Die $\nu_1\, \nu_2 \ldots \nu_{n-1}$ sind aus der früheren Berechnung von $f'_n\, f'$ zu entnehmen. Der Ausdruck für die Brennweite φ' wird

$$
(15') \ldots\ldots \quad \varphi' = (-1)^n \cdot \frac{\varphi'_1\, \varphi'_2\, \varphi'_3 \ldots \varphi'_{n-1}\, \varphi'_n}{\nu'_1\, \nu'_2\, \nu'_3 \ldots \nu'_{n-1}\, \nu'_n}.
$$

Lassen wir a' in's Unendliche rücken und denken wir uns unter U' einen Strahl, des aus N' kommenden Parallel-Strahlenbündel, so wird a der Brennpunkt f und h_0 der Hauptpunkt h, also $a\, h_0 = f\, h = \varphi$, wo φ die erste Brennweite bedeutet. Die früheren Punkte a_{n-1}, a_{n-2} ... sollen jetzt b_{n-1}, b_{n-2} heissen; a_{n-1} oder b_{n-1} fällt nach f_n und es ist daher zu setzen in ($12\,a$) und ($13\,a$)

$$
a_{n-1}\, f_n = 0, \quad a_{n-1}\, h_{n-1} = f_n\, b_n = \varphi_n.
$$

Man erhält ganz in der früheren Weise zur Brechung der Entfernung $f\, f_1$ das folgende Gleichungssystem, in welchem wieder eine abgekürzte Bezeichnung der durch Kettenbrüche gebildeten Nenner beigefügt ist:

$$
(14)\ldots\quad
\begin{aligned}
b_{n-2} f_{n-1} &= \frac{\varphi_{n-1}\,\varphi'_{n-1}}{\Delta_{n-1}} && = \frac{\varphi_{n-1}\,\varphi'_{n-1}}{\nu_{n-1}}, \\
b_{n-3} f_{n-2} &= \frac{\varphi_{n-2}\,\varphi'_{n-2}}{\Delta_{n-2} - b_{n-2} f_{n-2}} = \frac{\varphi_{n-2}\,\varphi'_{n-2}}{\Delta_{n-2} - \dfrac{\varphi_{n-1}\,\varphi'_{n-1}}{\Delta_{n-1}}} && = \frac{\varphi_{n-2}\,\varphi'_{n-2}}{\nu_{n-2}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f f_1 &= \frac{\varphi_2\,\varphi'_2}{\Delta_2 - b_2 f_2} = \frac{\varphi_1\,\varphi'_1}{\Delta_2 - \dfrac{\varphi_3\,\varphi'_3}{\Delta_3 - \ddots - \dfrac{\varphi_{n-1}\,\varphi'_{n-1}}{\Delta_{n-1}}}} && = \frac{\varphi_2\,\varphi'_2}{\nu_2}.
\end{aligned}
$$

Wieder geschieht die wirkliche Ausrechnung von $f f_1$ am besten durch aufeinander folgende Ermittlung der Werthe $b_{n-2} f_{n-1}$, ν_{n-2}; $b_{n-3} f_{n-3}$, ν_{n-3}; .... Mittelst der ν_{n-2}, ν_{n-3} .... drückt sich dann die Brennweite φ nach Gleichung (13 a), wie folgt aus:

$$
(15)\ldots\quad \varphi = (-1)^n \cdot \frac{\varphi_n\,\varphi_{n-2}\,\varphi_{n-2}\ldots\varphi_2\,\varphi_1}{\nu_{n-1}\,\nu_{n-2}\ldots\nu_2\,\nu_1}.
$$

Die beiden Brennweiten φ und φ' stehen in einer äusserst einfachen Beziehung zu einander, die wir angeben wollen. Sie lässt sich aus (15) und (15′) entnehmen mit Hilfe eines auf Kettenbrüche bezüglichen Satzes, welcher von Möbius *), jedoch nur für die vereinfachte Form derselben, nachgewiesen wurde, der sich aber auf die hier auftretende allgemeinere Form der Kettenbrüche ν und ν' ausdehnen lässt. Ohne einen vollkommen strengen Beweis dieses Satzes zu geben, wollen wir uns hier mit einer inductiven Herleitung begnügen. Es ist

$$
a\left(b - \frac{\beta}{a}\right) = ab - \beta = b\left(a - \frac{\beta}{b}\right),
$$

$$
a\left(b - \frac{\beta}{a}\right)\left(c - \frac{\gamma}{b - \dfrac{\beta}{a}}\right) = abc - c\beta - a\gamma =
$$

$$
= c\left(b - \frac{\gamma}{c}\right)\left(a - \frac{\beta}{b - \dfrac{\gamma}{c}}\right),
$$

*) Crelle Journal. Band 6.

u. s. f. für die Producte von vier, fünf und mehr Kettenbrüchen, wenn man Links und Rechts immer dieselben Elemente in Kettenbruchform combinirt, dabei aber Links die Ordnung der Buchstaben $a, b, c \ldots$ einhält, Links dagegen die umgekehrte wählt. Da das Gleichwerden dieser Producte nicht in speciellen Werthen der Elemente, sondern in dem Bildungsgesetze der in Beziehung gesetzten Kettenbrüche seinen Grund hat, so darf man schliessen, dass die Gleichheit der Producte auch bei beliebig vielen Factoren stattfinden wird. Die $\nu_1\ \nu_2 \ldots \nu_{n-1}$ einerseits und die $\nu'_1\ \nu'_2 \ldots \nu'_{n-1}$ andererseits sind aber genau nach obigem Gesetze gebildete Kettenbrüche, wir schliessen daher:

$$\nu_{n-1}\, \nu_{n-2}\, \nu_{n-3} \ldots \nu_2\, \nu_1 = \nu'_1\, \nu'_2\, \nu'_3 \ldots \nu'_{n-2}\, \nu'_{n-1}.$$

Vermöge dieser Relation wird aber

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3 \ldots \varphi_{n-1}\ \varphi_n}{\varphi'_1\ \varphi'_2\ \varphi'_3 \ldots \varphi'_{n-1}\ \varphi'_n}.$$

Wie aber aus den in Art. I für eine brechende Fläche gegebenen Ausdrücken der beiden Brennweiten fh und hf' folgt, ist allgemein

$$\frac{\varphi i}{\varphi' i} = \frac{ni}{ni+1},$$

daher erhält man für obiges Verhältniss der beiden Brennweiten des ganzen Systemes

$$(16) \ldots \quad \frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{n}{n'}.$$

Haben daher das erste und letzte Medium gleiche Brechungsexponenten, so sind auch die beiden Brennweiten des gegebenen Systemes einander gleich. Dann fallen aber die in den folgenden Gruppen stehenden Fundamentalpunkte zusammen

$$(h\,k\,l),\quad (h'\,k'\,l'),\quad (\overline{h}\ \overline{k}\ \overline{l}),\quad (\overline{h'}\ \overline{k'}\ \overline{l'}),$$

und sind in gleichen Distanzen von den beiden Brennpunkten angeordnet. Die beiden Brennweiten haben ferner, wie (16) zeigt, immer gleiche Vorzeichen. Dem positiven Vorzeichen entspricht eine Wirkung des Systemes, ähnlich der einer Sammellinse, dem negativen kommt das einer Zerstreuungslinse analoge Verhalten zu.

Die hier angeführten Ausdrücke zur Bestimmung der Brennpunkte und Brennweiten bieten den Vortheil, dass sie sich ganz unverändert auf den Fall anwenden lassen, in welchem man das brechende System nicht, wie es eben geschehen, aus einzelnen brechenden Flächen zusammengesetzt, sondern vielmehr aus mehreren brechenden Systemen combinirt. Bezüglich der Giltigkeit der Gleichungen (14′) und (14) ist diess sofort klar, da dieselben bloss die Brennpunkts-Distanzen enthalten und im Uebrigen auf der allgemein giltigen Gleichung (1) basiren. Was aber die Gleichungen (15′) und (15) anbelangt, welche aus (13) entstanden sind, so erkennt man, dass die Construction, aus welcher diese Gleichung hervorging, wenn man sie für ein System mittelst seiner Hauptebenen H und H' an Stelle der einzigen brechenden Fläche Bi (Fig. 7) ausführt, dieselben ähnlichen Dreiecke und somit auch dieselbe Gleichung (13) liefert.

Ganz conform der Vorstellung, die den Berechnungen von f, f', φ, φ' zu Grunde gelegt wurde, kann auch eine rein graphische Ermittlung der Brenn- und Hauptpunkte durchgeführt werden.

Im Selbstverlage.

Druckerei: „Leykam-Josefsthal“ in Graz.

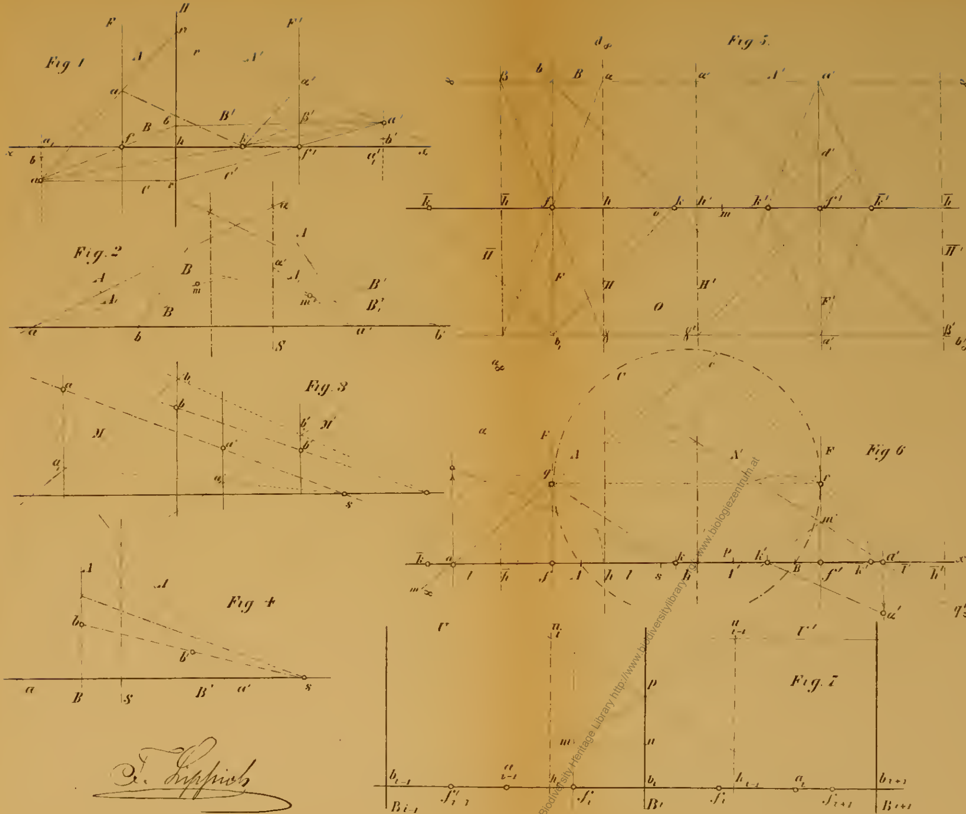
Fig 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig 4
Fig 5.
Fig 6
Fig. 7

Zeitschrift/Journal: Mitteilungen des naturwissenschaftlichen Vereins für Steiermark

Jahr/Year: 1871

Band/Volume: 8

Autor(en)/Author(s): Lippich Ferdinand (Franz)

Artikel/Article: Fundamentalpunkte eines Systemes centrirter brechender Kugelflächen. 429-459