Ueber die

analytische und geometrische Bedeutung der Grössen

$\alpha\sqrt{-1}$, $\cos\alpha\sqrt{-1}$ und $\sin(\alpha\sqrt{-1})$.

Von **Dr. K. Friesach.**

Wenn man in den bekannten Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{2.3.4} - \ldots\\ \sin\alpha &= \alpha - \frac{\alpha^3}{2.3} + \frac{\alpha^5}{2.3.4.5} - \ldots\end{aligned}\right\}\ldots\ldots 1.)$$

α mit $\alpha\sqrt{-1}$ vertauscht, so verwandeln sich dieselben in

$$\left.\begin{aligned}\cos(\alpha\sqrt{-1}) &= 1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{2.3.4} + \ldots = x\\ \sin(\alpha\sqrt{-1}) &= \sqrt{-1}\left(\alpha + \frac{\alpha^3}{2.3} + \frac{\alpha^5}{2.3.4.5} + \ldots\right)\\ &= y\sqrt{-1}\end{aligned}\right\}\ldots 2.)$$

Beide Reihenpaare convergiren für jeden endlichen Werth von α.

Aus 2.) erhellt, dass die Cosinus und Sinus imaginärer Bogen von der Form $\alpha\sqrt{-1}$ von denjenigen reeller Bogen darin abweichen, dass sie keine periodischen Funktionen ihres Bogens sind, sondern bei dessen unendlichem Wachsen selbst unendlich gross werden, dass ferner $\cos(\alpha\sqrt{-1})$ stets positiv und grösser als 1 ist. Trotz dieser Verschiedenheit haben sie manche Eigenschaften mit den Sinus und Cosinus reeller Bogen gemein. So z. B. wechselt $\sin(\alpha\sqrt{-1})$ sein Zeichen, indem α in $-\alpha$ übergeht, während $\cos(\alpha\sqrt{-1})$ dadurch nicht geändert wird; und bei dem unendlichen Abnehmen von α wird

$\lim.\ \dfrac{\sin(\alpha\sqrt{-1})}{\alpha\sqrt{-1}} = 1$; $\lim.\ \cos(\alpha\sqrt{-1}) = 1$, wie bei

reellen Bogen. Ueberhaupt gelten zwischen $\sin(\alpha\sqrt{-1})$ und $\cos(\alpha\sqrt{-1})$ die nämlichen Relationen, welche zwischen $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ Statt haben. Der Grund davon liegt darin, dass $\cos(\alpha\sqrt{-1})$ und $\sin(\alpha\sqrt{-1})$, obiger Darstellung gemäss, als blosse Symbole jener Reihen zu betrachten sind, welche man aus 1.) erhält, wenn man α mit $\alpha\sqrt{-1}$ vertauscht. Ein Beispiel wird genügen, dies klar zu machen.

Um zu beweisen, dass

$$\cos[(\alpha \pm \beta)\sqrt{-1}] =$$
$$= \cos(\alpha\sqrt{-1})\cos(\beta\sqrt{-1}) \mp \sin(\alpha\sqrt{-1})\sin(\beta\sqrt{-1}),$$

gehe man von der Gleichung

$$\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha \pm \beta)$$

aus, welche, indem man anstatt $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ etc., die diesen Ausdrücken äquivalenten Reihen setzt, auch so geschrieben werden kann:

$$\left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{2.3.4}\cdot\cdot\right)\left(1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{2.3} - \cdot\cdot\cdot\right) \mp$$
$$\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{2.3} + \cdot\cdot\cdot\cdot\right)\left(\beta - \frac{\beta^3}{2.3} + \cdot\cdot\cdot\right) = 1 - \frac{(\alpha \pm \beta)^2}{2}$$
$$+ \frac{(\alpha \pm \beta)^4}{2.3.4} - \cdot\cdot\cdot\cdot$$

Diese Gleichung kann als eine identische betrachtet werden, weil die darin vorkommenden Reihen, für jeden Werth von α und β konvergiren. Die Gleichung wird daher durch Vertauschung von α und β mit $\alpha\sqrt{-1}$ und $\beta\sqrt{-1}$ nicht gestört. Dadurch aber verwandelt sie sich in die zu erweisende Gleichung

$$\cos(\alpha\sqrt{-1})\cos(\beta\sqrt{-1}) \mp \sin(\alpha\sqrt{-1})\sin(\beta\sqrt{-1})$$
$$= \cos(\alpha \pm \beta)\sqrt{-1} \quad . \quad . \quad 3.)$$

Auf diesem Wege lassen sich alle zwischen den trigonometrischen Funktionen reeller Bogen bestehenden Relationen auch auf imaginäre Bogen von der Form $\alpha\sqrt{-1}$ ausdehnen.

Setzt man $\beta = \alpha$, so folgt aus 3.):

$$\cos(\alpha\sqrt{-1})^2 + \sin(\alpha\sqrt{-1})^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4.)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(\alpha\sqrt{-1}) &= \pm\sqrt{1 - \cos(\alpha\sqrt{-1})^2} \\ \cos(\alpha\sqrt{-1}) &= +\sqrt{1 - \sin(\alpha\sqrt{-1})^2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad 5.)$$

Bezeichnet man den Bruch $\dfrac{\sin(\alpha\sqrt{-1})}{\cos(\alpha\sqrt{-1})}$ durch $tg(\alpha\sqrt{-1})$,

so sieht man, dass $tg\,(\alpha\sqrt{-1})$ unter der Form $z\sqrt{-1}$ erscheint und mit $\sin\,(\alpha\sqrt{-1})$ einerlei Zeichen hat. Ausserdem folgt aus $tg\,(\alpha\sqrt{-1}) = \sqrt{\frac{1-\cos\,(\alpha\sqrt{-1})^2}{\cos\,(\alpha\sqrt{-1})^2}} = \sqrt{\frac{1}{\cos\,(\alpha\sqrt{-1})^2} - 1}$, dass z immer zwischen den Grenzen -1 und $+1$ liegt, und, für $\alpha = 0, -\infty$ und $+\infty$, die Werthe $0, -1$ und $+1$ annimmt.

Mit Rücksicht auf $\lim\limits_{(\alpha=0)} \frac{\sin\,(\alpha\sqrt{-1})}{\alpha\sqrt{-1}} = 1$ und $\lim\limits_{(\alpha=0)} \cos\,(\alpha\sqrt{-1}) = 1$, erhält man:

$$\left.\begin{aligned} d.\ \sin\,(\alpha\sqrt{-1}) &= \sqrt{-1}.\ \cos\,(\alpha\sqrt{-1})\,d\alpha \\ d.\ \cos\,(\alpha\sqrt{-1}) &= -\sqrt{-1}.\ \sin\,(\alpha\sqrt{-1})\,d\alpha \\ d.\ tg\,(\alpha\sqrt{-1}) &= \frac{\sqrt{-1}.\ d\alpha}{1-\alpha^2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 6.)$$

und hieraus:

$$\left.\begin{aligned} d.\ \text{arc}\sin\,(y\sqrt{-1}) &= \frac{\sqrt{-1}.\ dy}{\sqrt{1+y^2}} \\ d.\ \text{arc}\cos\,x &= -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{-1}.\ dx}{\sqrt{x^2-1}} \\ d.\ \text{arc}\,tg\,(z\sqrt{-1}) &= \frac{\sqrt{-1}.\ dz}{1-z^2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots 7.)$$

Die zweite der Gleichungen 7.) zeigt, dass die Formel für $d.$ arc cos x die nämliche ist, gleichviel, ob der Bogen reell oder imaginär. Nur ist in letzterem Falle $x > 1$.

Aus 7.) findet man durch Integration:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} &= \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\text{arc}\sin\,(y\sqrt{-1}) = l\,(y+\sqrt{1+y^2}) \\ \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\text{arc}\cos\,x = l\,(x+\sqrt{x^2-1}) \\ \int_0^z \frac{dz}{1-z^2} &= \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\text{arc}\,tg\,(z\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\,l\,\frac{1+z}{1-z} \end{aligned}\right\} \ldots 8.)$$

Diese Gleichungen können zur Entwickelung des imaginären Bogens in konvergirende Reihen nach den Potenzen von y, z und $\frac{1}{x}$ dienen. Durch Anwendung der Binomialreihe auf obige Differentialformellen erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{-1}}\,\text{arc}\,tg\,(z\sqrt{-1})\int_0^z dz\,(1+z^2+z^4+z^6+\ldots)=\\
&\qquad z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^7}{7}+\ldots.\\
&\frac{1}{\sqrt{-1}}\,\text{arc}\cos x=\int_1^x\frac{dx}{\sqrt{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}=\int_1^x\frac{dx}{x}\left(1+\frac{1}{2\,x^2}+\frac{3}{2.4x^4}+\right.\\
&\left.+\ldots\right)=lx+\frac{1}{4}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)+\frac{3}{2.4.4}\left(\frac{x^4-1}{x^4}\right)+\ldots\\
&\frac{1}{\sqrt{-1}}\,\text{arc}\,\sin\,(y\sqrt{-1})=\int_0^y dy\left(1-\frac{y^2}{2}+\frac{3\,y^4}{2.4}-\right.\\
&\left.-\frac{3.5.y^6}{2.4.6}+\ldots\right)=y-\frac{y^3}{2.3}+\frac{3\,y^5}{2.4.5}-\frac{3.5.y^7}{2.4.6.7}+\ldots
\end{aligned}\right\}\;9.)$$

Die letzte Reihe konvergirt nur, so lang der numerische Werth von y die Einheit nicht übersteigt. Für $y=\pm 1$ hat man

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{-1}}\,\text{arc}\,\sin\,(\pm\sqrt{-1})=\int_0^{\pm 1}\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=l(\pm 1+\sqrt{2})=\\
&=\pm\left(1-\frac{1}{2.3}+\frac{3}{2.4.5}-\frac{3.5}{2.4.6.7}+\ldots\right)
\end{aligned}\right\}\;10.)$$

Wäre $y^2>1$, so könnte der Bogen nach den Potenzen von $\frac{1}{y}$ in eine Reihe entwickelt werden. Hiezu hat man

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\left[\text{arc}\,\sin\,(y\sqrt{-1})-\text{arc}\,\sin\,(\sqrt{-1})\right]=\int_1^y\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=$$
$$=\int_1^y\frac{dy}{y}\left(1-\frac{1}{2\,y^2}+\frac{3}{2.4.y^4}-\frac{3.5}{2.4.6.y^6}+\ldots\right),$$

Digitized by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

woraus, je nachdem für $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ arc sin $(\sqrt{-1})$ der eine oder der andere Werth aus 10.) gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{-1}} \text{ arc sin } (y\sqrt{-1}) = 1 + \sqrt{2} + ly - \\
&- \frac{1}{2.2}\left(\frac{y^2-1}{y^2}\right) + \frac{3}{2.4.4}\left(\frac{y^4-1}{y^4}\right) - \ldots \\
\text{oder } &\frac{1}{\sqrt{-1}} \text{ arc sin } (y\sqrt{-1}) = ly + \frac{1}{2.\,2.\,y^2} - \\
&\frac{3}{2.4.4.y^4} + \frac{3.\,5}{2.4.6.6.y^6} - \ldots \\
&+ 1 - \frac{1}{2}.\frac{2+3}{2.3} + \frac{3}{2.4}.\frac{4+5}{4.5} - \frac{3.5}{2.4.6}.\frac{6+7}{6.7} \\
&+ \ldots
\end{aligned}\right\} \ldots 11.)$$

Durch Vertauschung von α mit $\alpha\sqrt{-1}$, gehen die bekannten Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha + \sqrt{-1}.\sin\alpha &= e^{\alpha\sqrt{-1}} \\
\cos\alpha - \sqrt{-1}.\sin\alpha &= e^{-\alpha\sqrt{-1}}
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots 12.)$$

in folgende über:

$$\left.\begin{aligned}
\cos(\alpha\sqrt{-1}) + \sqrt{-1}.\sin(\alpha\sqrt{-1}) &= e^{-\alpha} \\
\cos(\alpha\sqrt{-1}) - \sqrt{-1}.\sin(\alpha\sqrt{-1}) &= e^{\alpha}
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots 13.)$$

welche man eben so leicht aus 2.) ableiten kann.

Aus 13.) folgt:

$$\cos(\alpha\sqrt{-1}) = x = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$$

$$\sin(\alpha\sqrt{-1}) = y\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}.}{2}\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right)$$

$$tg(\alpha\sqrt{-1}) = z\sqrt{-1} = \sqrt{-1}.\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}$$

Setzt man nun $e^{\alpha} = A$, wo A eine beliebige positive Zahl bedeuten kann, so ist $\alpha = lA$ und $e^{-\alpha} = \frac{1}{A}$. Man hat daher auch

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$\left.\begin{aligned}
\cos(\sqrt{-1}\,.\,lA) &= x = \frac{1}{2}\left(A + \frac{1}{A}\right)\\
\sin(\sqrt{-1}\,.\,lA) &= y\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\left(A - \frac{1}{A}\right)\\
tg(\sqrt{-1}\,.\,lA) &= z\sqrt{-1} = \frac{A^2-1}{A^2+1}.\sqrt{-1}
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots 14.)$$

Die letzten Gleichungen sind mit den folgenden identisch:

$$\left.\begin{aligned}
lA &= \frac{1}{\sqrt{-1}}\operatorname{arc}\cos\frac{A^2+1}{2A}\\
lA &= \frac{1}{\sqrt{-1}}\operatorname{arc}\sin\frac{(A^2-1)}{2A}\sqrt{-1}\\
lA &= \frac{1}{\sqrt{-1}}\operatorname{arc}tg\frac{A^2-1}{A^2+1}\sqrt{-1}
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots 15.)$$

Es ist klar, dass man, mittelst der Gleichungen 8) und 15.), indem man die darin vorkommenden imaginären Bogen nach 9.) entwickelt, Reihen für die Logarithmen erhalten kann. Auf diesem Wege folgt aus 8.) die bekannte Formel:

$$l\frac{1+z}{1-z} = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots\ldots\right);$$

und aus 15.):

$$lA = \frac{A^2-1}{A^2+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{A^2-1}{A^2+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{A^2-1}{A^2+1}\right)^5 + \ldots\ldots,$$

Indem man in dieser Gleichung $A^2 = a$ setzt, wodurch $lA = \frac{1}{2}la$ wird, ergibt sich die bekannte Gleichung:

$$la = 2\left[\frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \ldots\ldots\right].$$

Durch das Vorhergehende ist der Zusammenhang zwischen den Logarithmen und imaginären Kreisbogen, und dadurch die analytische Bedeutung dieser Bogen und ihrer trigonometrischen Funktionen zur Genüge beleuchtet.

Um auch eine geometrische Beziehung zwischen dem imaginären Bogen und dessen Sinus und Cosinus aufzufinden, geht man am besten von der mit 4.) identischen Gleichung

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 16.)$$

aus, welche, wenn man x und y als rechtwinkelige Coordinaten betrachtet, zu einer gleichseitigen Hyperbel gehört, deren Halbaxen der Längeneinheit gleich sind, und deren Mittelpunkt mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfällt.

Es sei nun r der Radiusvector des Punktes x,y und θ der Winkel, welchen derselbe mit der Axe der x bildet, so ist $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Durch Substitution dieser Werthe in 16. ergibt sich die Polargleichung $r^2 \cos 2\theta = 1$ . . . . . 17.), woraus $\frac{dr}{d\theta} = r\, tg\, 2\theta$. Für das Hyperbelelement ds hat man daher

$$ds = d\theta \sqrt{r^2 + \frac{(dr)^2}{d\theta}} = \frac{r\, d\theta}{\cos 2\theta} \quad . \; . \quad . \; . \; . \; . \; . \; 18.)$$

Aber nach 2.) ist

$$x = \cos (\alpha \sqrt{-1} = r \cos \theta$$

$$y \sqrt{-1} = \sin (\alpha \sqrt{-1}) = \sqrt{-1}.\, r \sin \theta,$$

$$tg\, (\alpha \sqrt{-1}) = \sqrt{-1}.\, tg\, \theta\,,$$

$$\alpha \sqrt{-1} = \text{arc}\, tg\, (\sqrt{-1}.\, tg\, \theta),$$

$$d\, \alpha \sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}.\, d\theta}{\cos \theta^2} : (1 - tg\, \theta^2),$$

oder $$d\, \alpha = \frac{d\theta}{\cos \theta^2 (1 - tg\, \theta^2)} = \frac{d\theta}{\cos \theta^2 - \sin \theta^2} = \frac{d\theta}{\cos \theta 2} \; . \; . \; 19.)$$

Aus 18.) und 19.) folgt nun

$$d\, \alpha = \frac{ds}{r}, \text{ folglich } \alpha = \int \frac{ds}{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 20.)$$

Die Integration ist entweder von 0 bis θ oder von 1 bis r auszudehnen, je nachdem die Differentialformel $\frac{ds}{r}$ als eine Funktion von θ oder von r dargestellt wird.

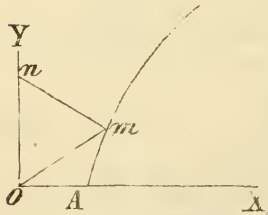
Aus 20.) ergibt sich für die Grösse α folgende geometrische Bedeutung: α ist gleich der Summe aller jener Brüche, welche man erhält, indem man den zwischen dem Scheitel und dem Punkte $(x\, y)$ enthaltenen Hyperbelbogen in Elemente theilt, und jedes Element durch den dazugehörigen Radiusvector dividirt. Es folgt hieraus, dass der numerische Werth von α stets zwischen s und $\frac{s}{r}$ enthalten ist, wenn man jenen Bogen durch s bezeichnet.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Eine ähnliche geometrische Beziehung, wie soeben für die Grössen α, x, y gefunden wurde, besteht auch zwischen einem reellen Bogen und dessen Sinus und Cosinus. Denn, betrachtet man $\cos \alpha = \xi$ und $\sin \alpha = \eta$ als rechtwinkelige Coordinaten, und bezeichnet man das Element der durch die Gleichung $\xi^2 + \eta^2 = 1$ ausgedrückten Kreislinie durch $d\sigma$, den dazugehörigen Radiusvector durch ρ, so ist auch hier $\alpha = \int \frac{d\sigma}{\rho}$, nur mit dem Unterschiede, dass hier ρ konstant und gleich 1 ist. Diese Analogie in Verbindung mit dem Umstande, dass im Kreise die Normale dem Halbmesser gleich ist, liess mich vermuthen, dass auch in der gleichseitigen Hyperbel zwischen der Normalen und dem auf den Mittelpunkt bezogenen Radiusvector ein sehr einfaches Verhältniss stattfinden dürfte. Ich fand in der That, dass dieser Radiusvector der auf die konjugirte Axe bezogenen Normalen gleich ist, was leicht auf folgende Art gezeigt werden kann:

$$\text{Aus 16.) folgt } \frac{dx}{dy} = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}.$$

Bezeichnet man nun das zwischen der Hyperbel und der konjugirten Axe enthaltene Stück der Normalen durch N, so ist



$$N = x\sqrt{1 + \frac{(dx)^2}{dy}} = \sqrt{2x^2 - 1}.$$

Aber aus 16.) folgt auch

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2x^2 - 1},$$

folglich $N = r$, w. z. b. r.

Hieraus ergibt sich eine sehr einfache Construction der Normalen eines beliebigen Punktes in der gleichseitigen Hyperbel, wenn deren Mittelpunkt O nebst den Axenrichtungen gegeben ist. Denn, beschreibt man aus m mit dem Halbmesser Om einen Kreisbogen, welcher die konjugirte Axe in n schneidet, so ist mn die gesuchte Normale.

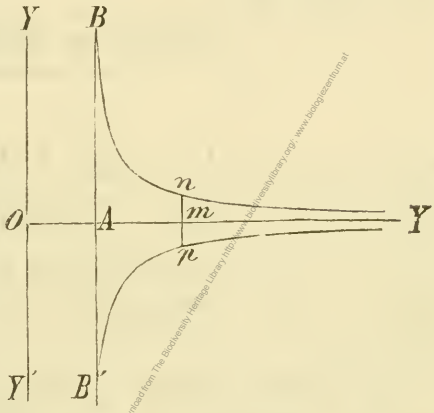
Um die Abhängigkeit des imaginären Bogens von seinem Cosinus und Sinus graphisch darzustellen, kann man $d\alpha$ als das Flächendifferential einer von einer Kurve begrenzten ebenen Figur betrachten. Nach dem Vorhergehenden ist

$$d\alpha = \frac{ds}{r} = \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Um α als eine Funktion von $\cos(\alpha\sqrt{-1}) = x$ darzustellen, hat man daher, indem man die Coordinaten eines beliebigen Punktes der zu bestimmenden Kurve durch x, η bezeichnet:

$$d\alpha = \eta\, dx = \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \text{ oder } \eta = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \ldots\ldots \quad 21.)$$

Diese Gleichung zeigt, dass die gesuchte Kurve aus zwei kongruenten, zu beiden Seiten der Axe der x symmetrisch gelegenen, derselben ihre konvexe Seite zuwendenden Kurvenästen besteht, zu welchen die genannte Axe und das im Punkte $\left\{\begin{matrix} x = 1 \\ \eta = 0 \end{matrix}\right\}$ darauf errichtete Loth BB sich als Asymptoten verhalten. Der Asymptote BB' nähert sich die Kurve viel rascher als der OX.



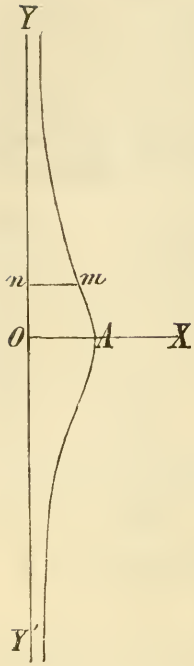
Macht man die Abscisse $Om = \cos(\alpha\sqrt{-1})$, und zieht man durch m die Gerade $np \perp OX$, so ist die zwischen den Parallelen np, BB' und den beiden Kurvenästen enthaltene Fläche der Grösse α proportional; denn die Zahl, welche den Inhalt dieser Fläche in Quadrateinheiten angibt, ist $= 2\alpha$.

Will man hingegen α als eine Funktion von $\sin(\alpha\sqrt{-1})$, d. i. von $y\sqrt{-1}$, darstellen, so erhält man eine andere Kurve, welche, wenn man deren Coordinaten durch y, ξ bezeichnet, analytisch durch die Gleichung $d\alpha = \xi\, dy = \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}$ oder

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 22.)$$

ausgedrückt wird.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at



Diese Kurve besteht nur aus einem in Bezug auf die Axe der X symmetrisch gestellten Aste, welcher zu beiden Seiten dieser Axe ohne Ende fortläuft, und sich dabei ohne Ende der Axe der Y nähert, welche daher eine beiden Kurvenhälften gemeinschaftliche Asymptote bildet. Der Scheitel der Kurve befindet sich in der Abscissenaxe bei A, und steht um die Längeneinheit von der Ordinatenaxe ab.

Zwischen den Punkten $\left\{\begin{array}{l}\xi = \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ y = \frac{1}{2}\sqrt{2}\end{array}\right\}$ und $\left\{\begin{array}{l}\xi = \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ y = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\end{array}\right\}$ ist die Kurve in Bezug auf die Axe der Y konkav, ausserhalb dieser Grenzen aber konvex.

Macht man $On = y = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \sin(\alpha\sqrt{-1})$, so ist α gleich der Zahl, welche die Fläche $OAmn$ ausdrückt.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Mitteilungen des naturwissenschaftlichen Vereins für Steiermark

Jahr/Year: 1872

Band/Volume: 9

Autor(en)/Author(s): Friesach Carl

Artikel/Article: Ueber die analytische und geometrische Bedeutung der Grössen. 15-24