

©Bundesforschungszentrum für Wald, Wien, download unter www.zobodat.at
KOLMOGOROW-SUZUKI UND DIE STOCHASTISCHE DIFFERENTIAL-
GLEICHUNG ALS BESCHREIBUNGSMITTEL DER
BESTANDESEVOLUTION

Branislav SLOBODA

SUMMARY

Presuming "without after-effect" development in homogeneous, even-aged stands (tree growth), can be described by the formal stand parameters α, β, γ in the Kolmogorow-Suzuki differential equation (1.1.4). Apparently the fluctuation of trees around the mean doesn't violate rank status, demanding the same from the realisations of the models used. A useful criterium for this purpose is the correlation function. Neglecting mortality, tree growth can be represented by a differential equation equivalent to the SUZUKI-models. The solution parameters EX_t and $R(t, \gamma)$ can be obtained in a transparent way. Two models of stochastic differential equations are discussed, the second is illustrated on plotting pictures.

1.0 Einführung

Die "vielen" kleinen Schwankungen der Energie- und Materienbilanz des Boden-Baum-Atmosphäre Kontinuismus (kurz B.B.A) (Abb.1') und ein Teil der Konkurrenzeinwirkungen erweisen sich als Wachstumsstörungen und können erfahrungsgemäß stochastisch behandelt werden, wobei die durch die Konkurrenz erwirkten rangerzeugenden Effekte im Modell als deterministische Komponente berücksichtigt werden. Es soll hier die Bewegung von B.B.A. in dem Gefüge Bestand diskutiert und modellartig beschrieben werden mit dem Ziel, daß daraus auf die Bestandesentwicklung (Fluß der Häufigkeitsverteilungen) geschlossen werden kann. (Abb. 1)

Einleitend möchte ich mich noch bei Herrn Prof. SUZUKI für die Unterstützung und die vielen Hinweise bedanken.

1.1 SUZUKI-UMEMURA Modelle im Falle der Durchmesserentwicklung

Beim SUZUKI-UMEMURA, 1973) wird die "Bewegung" des Einzelbaumes im Bestand als ein Markow-Prozess aufgefaßt. Der Markow-Eigenschaft entspricht hier das sog. "gedächtnislose" Verhalten des Baumes im

Medium Bestand (SLOBODA, 1976). Dieses Medium wird durch die Markow'sche Übergangsdichte der Durchmesserentwicklung $p(t,x;\tau,y)$ charakterisiert. Es gilt hier für $p:p(t,x;t,y)=\delta(y-x)$, (δ - Delta-Funktion) und $P(t,x;\tau,0):=p(t,x;\tau,0)$. Kennt man etwas "bequemere" Funktionen $\alpha, \beta, \mathcal{V}$ gemäß

$$(1.1.1) \quad \beta(t,y) = \lim_{\tau \downarrow t} \frac{1}{\tau - t} \int_{|z-y| \leq \epsilon} (z-y)p(t,y;\tau,z) dz, (= : \text{Driftfeld})$$

$$(1.1.2) \quad \alpha^2(t,y) = \lim_{\tau \downarrow t} \frac{1}{\tau - t} \int_{|z-y| \leq \epsilon} (z-y)^2 p(t,y;\tau,z) dz, (= : \text{Diffusionsfeld})$$

$$(1.1.3) \quad \mathcal{V}(t,y) = \lim_{\tau \downarrow t} \frac{1}{\tau - t} \int_{|z-y| > \epsilon} p(t,y;\tau,z) dz, (= : \text{Sterbeintensität})$$

so wird man den "regulären" Teil von $p(t,x;\tau,y)$ aus der Kolmogorow-Suzuki partiellen Differentialgleichung (Abb.4)

$$(1.1.4) \quad \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\alpha^2 \cdot p) - \frac{\partial}{\partial y} (\beta \cdot p) - \mathcal{V} \cdot p ; \text{ mit } p(\tau,x;\tau,y) = \delta(y-x)$$

berechnen können. Wir setzen wegen Singularität in $z=0$ fest

$$\int_{\mathbb{R}} p(t,x;\tau,y) dy + P(t,x;\tau,0) = 1 \quad t,x - \text{bel. aber fest.}$$

Die Funktion p aus (1.1.4) beschreibt einen stoch. Prozess, dessen Elementarereignisse unter geeigneten $\beta, \alpha, \mathcal{V}$ stückweise stetige Funktionen sind (Abb.2).

Bemerkung 1.1.1:

Beim gleichaltrigen homogenen Bestand "strömen alle Bäume" aus einem Knotenpunkt, so daß α, β , bzw. \mathcal{V} , p ähnlich wie die in Abb.3a, 3b bzw. 4 verlaufen. Die Funktionen $\beta, \alpha, \mathcal{V}$ stecken den Rahmen des Wachstums ab; wegen der Singularität der Pfade in $(0,0)$ muß für jede absolute Wahrscheinlichkeitsdichte (kurz W.Dichte) $\psi(\tau,y)$ wie folgt gelten

$$(1.1.5) \quad I_{(0,\infty)}(y) \cdot p(0,0;\tau,y) + I_{\{0\}}(y)P(0,0;\tau,y) = \psi(\tau,y) \quad (\text{Abb.4})$$

um für p und Ψ die Häufigkeitsinterpretation zu ermöglichen.

Es gilt nämlich für beliebige Anfangsdichte $\Psi(t_0, x)$ und Übergangsdichte $p(t_0, x; \tau, y)$ daß $\Psi(\tau, y)$ gemäß (1.1.6)

$$(1.1.6) \quad \Psi(\tau, y) = \int_{\mathbb{R}} \Psi(t_0, x) \cdot p(t_0, x; \tau, y) dx$$

die absoluten Dichten eines Markow-Prozesses sind und $\Psi(\tau, y)$ erfüllt ebenfalls die Differentialgleichung (1.1.4) mit $\Psi = p$.
(SUZUKI, 1973)

Im Zusammenhang mit dem homogenen gleichaltrigen Bestand haben
haben jedoch nur solche Anfangsdichten $\Psi(t_0, x)$ einen "realen
Sinn", die zumindest in der Annäherung folgende Relation er-
füllen (SLOBODA, 1976)

$$(1.1.7) \quad \Psi(t_0, x) = I_{(0, \infty)}(x) \cdot p(0, 0; t_0, x) + I_{\{0\}}(x) \cdot P(0, 0; t_0, 0)$$

D.h. die aktuelle Häufigkeitsverteilung des Bestandes $\Psi(t_0, x)$, die
es infolge des Wachstums fortzuschreiben gilt, muß eine konsisten-
te Schätzung von $p(0, 0; t_0, x)$ (im Sinne von GLIVENKO) darstellen.
Da sich alle Bäume einmal mit $P=1$ in $(0, 0)$ befanden, ist gemäß
(1.1.7) auch $\Psi(t_0, x)$ von β, α, γ abhängig!!!

Folglich stellt $\Psi(\tau, y)$ gemäß (1.1.6) nur einen Spezialfall der folgenden Chapman-Kolmogorow-Gleichung (SLOBODA, 1976)

$$(1.1.8) \quad p(t_0, x; \tau, y) = \int_{\mathbb{R}} p(0, 0; t_0, x) p(t_0, x; \tau, y) dx$$

Wird die Behandlung im Bestand sehr schwach sein, so wird man mit (1.1.6) die "Bestandesevolution" sinnvoll erklären können.

Def. 1.1.1:

Der Paar ($\Psi(t_0, x)$; $p(t, x; \tau, y)$) verknüpft mit (1.1.6) unter Berücksichtigung von (1.1.7) determiniert die "Bewegung des Baumes im Bestand" und damit auch die Bestandesevolution.

2.0 Die Wiedergabe der Rangerhaltung der Pfade durch Modell

Um die Rangerhaltung in Modellen vom Suzuki-Typ untersuchen zu können, nimmt man zunächst die konstante Sterberate $\varphi(\tau, y) = c$ und für p den folgenden Ansatz an (d.h. "homogene exponentiale Stammzahlabnahme")

$$(2.0.1) \quad q(t, x; \tau, y) = e^{-c(\tau-t)} \cdot p(t, x; \tau, y)$$

es folgt wegen (1.1.3)

$$\lim_{\substack{t \uparrow \tau \\ |y-x| \leq \varepsilon}} \int q(t, x; \tau, y) dy = 1 \quad (\text{SLOBODA, 1976})$$

Die neue Übergangsdichte q beschreibt den "Wachstumsprozess unter Ausschluß des Sterbens". Damit fällt der Nichthomogenitätsterm in (1.1.4) aus und q erfüllt die homogene Kolmogorow-Gleichung eines "Diffusionsprozesses" (2.0.2) dessen Realisierung f.s. stetige Funktionen sind.

$$(2.0.2) \quad \frac{\partial q}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\alpha^2 \cdot q) - \frac{\partial}{\partial y} (\beta \cdot q) ; \text{ mit } q(t, x; t, y) = \delta(y-x)$$

Bemerkung 2.0.1:

In der Theorie über stoch. Differentialgleichungen wird unter gewissen Einschränkungen für β, α (die bei uns zutreffen) bewiesen, daß die Ito'sche stoch. Differentialgleichung

$$(2.0.3) \quad dX_t = \beta(t, X_t) dt + \alpha(t, X_t) dW_t; \quad X_{t_0} \sim \bar{\varphi}(t_0, x)$$

mit $C=x=\text{konst}$ beschreibt im wesentlichen den gleichen Markow-Prozess (Diffusionsprozess), wie (2.0.2) mit $q(t_0; x; t_0, y) = \delta(y-x)$.

Wählt man in (2.0.3) den zufälligen Anfangswert mit $\mathbb{P}(X_{t_0}) \sim \varphi(t_0, x)$ so werden die absoluten Dichten des Lösungsprozesses $\varphi(\tau, y)$ durch die Differentialgleichung

$$(2.0.4) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\alpha^2 \cdot \varphi) - \frac{\partial}{\partial y} (\beta \cdot \varphi) \text{ mit } \varphi_0(y) := \bar{\varphi}(t_0, y)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \bar{\varphi}(t_0, y) dy = 1$$

gegeben. Hierzu berücksichtige auch die Bemerkung (1.1.1) (GICHMAN-SKOROCHOD, 1971, ARNOLD, 1973, SLOBODA, 1976).

Bemerkung 2.0.2:

$\{W_t; t \in [0, T]\}$ ist der Wiener-Levy-Prozess mit $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$,
 $\text{Cov}(W_t, W_s) = \min(t, s)$ und es gilt im Sinne der Theorie der
 Distributionen $dW_t = \xi_t \cdot dt$. (ξ_t ist Gauß'sche weisses Rauschen
 mit $E \xi_t = 0$ $\text{Cov}(\xi_t; \xi_s) = 0$; (ARNOLD, 1973, SLOBODA, 1976).

Sei in (2.0.3) $X_{t_0} = C \sim \mathcal{N}(C)$, dann erfüllt der Prozess gemäß
 (2.0.4) die Ito'sche Integralgleichung (2.0.5).

$$(2.0.5) \quad X_t = C + \int_{t_0}^t \beta(t, X_t) dt + \int_{t_0}^t \alpha(t, X_t) dW_t \quad X_{t_0} = C \sim \mathcal{N}(C)$$

Bemerkung 2.0.3:

Die Theorie der stoch. Differentialgleichungen liefert die Metho-
 den zur Lösung von (2.0.5.) und danach lassen sich auch die
 Charakteristiken des Lösungsprozesses X_T - (Wachstumsprozesse
 ohne Sterben); $E X_t$, $\text{Var} X_t$ und $\text{Cov}(X_t, X_s)$ direkt und besonders
 handlich berechnen.

Bemerkung 2.0.4:

Durch die Werte der normierten Korrelationsfunktion $R(t, \tau)$ von
 (2.0.5) wird die Rangerhaltung der Pfade dieses Prozesses charak-
terisiert. Es ist

$$(2.0.6) \quad R(t, \tau) = B(t, \tau) / \sqrt{\text{Var} X_t \cdot \text{Var} X_\tau} \quad B(t, \tau) := \text{Cov}(X_t, X_\tau)$$

Aus (2.0.5) läßt sich entnehmen, daß alle drei Summanden auf
 $R(t, \tau)$ Einfluß nehmen. Es gibt Prozesse, deren absoluten Dichten
 zu allen Zeiten gleich sind, aber die Pfade verschiedenen Rang-
 strukturen folgen. (Abb.5, Abb.6)

Die hier untersuchten Modelle der Bestandesevolution sind unter die
 lineare stoch. Differentialgleichung vom Typ

$$(2.0.7) \quad dX_t = (A(t)X_t + a(t))dt + B(t) \cdot dW_t \quad X_{t_0} = x \text{ bzw. } X_{t_0} = C \sim \mathcal{N}(C)$$

einzuordnen in der stets $a(t) = 0$ ist. (SLOBODA, 1976).

3.0 Zwei stoch. Modelle zur Beschreibung des Baumwachstums im Bestand

Es wird angenommen, daß jeder Rang (Relative Klasse) ähnlich wie bei Suzuki im Mittel nach einer "Mitscherlich'schen Kurve" mit einem linearen Differenzendiagramm wächst (Abb.7), wobei alle diese "Kurven" aus einem Knoten (a,0) derart strömen, daß sie sich nicht schneiden. Eine solche Kurvenschar läßt sich mit der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(3.0.1) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{kLe^{-kt}x}{1-Le^{-kt}} \quad (=: \beta(t,x))$$

beschreiben. Das Wolf'sche Richtungsfeld der Rangbewegung im Bestand gemäß (3.01) läßt sich nach Def. von $\beta(t,x)$ mit dem Driftfeld identifizieren und ist eine Art deterministische Komponente der Rangerhaltung. Sämtliche Fluktuationen, die durch Energie und Materienzufuhr entstehen, werden mit $\alpha^2(t,x)$ und W_t quantifiziert, indem zuerst das konstante Diffusionsfeld $\alpha^2(t,x)=b^2$ und schließlich die Suzuki'sche Wahl $\alpha^2(t,x)=b^2e^{-2kt}$ angenommen wird.

Es liegen somit folgende stoch. Differentialgleichungen vor

$$(3.0.2) \quad dX_t = \frac{kLe^{-kt}}{1-Le^{-kt}} X_t dt + b dW_t$$

$X_{t_0} \quad C \sim \Psi(t_0, X)$

$$(3.0.3) \quad dX_t = \frac{kLe^{-kt}}{1-Le^{-kt}} X_t dt + be^{-kt} dW_t$$

Bei festen oder normalverteiltem X_{t_0} erhalten wir in beiden Fällen einen Gauß-Prozess als Lösung, dessen Mittelwertfunktion in beiden Fällen mit (3.0.4) gegeben ist.

$$(3.0.4) \quad EX_t = \frac{EC}{1-Le^{-kt_0}} \cdot (1-Le^{-kt}) \quad m_t$$

Die Kovarianzfunktion $B(t,\tau)$ läßt sich für beide Gleichungen allgemein wie folgt angeben

$$(3.0.5) \quad B(t,\tau) = \frac{1-Le^{-kt}}{1-Le^{-kt_0}} \left(\text{Var } C + b^2 \cdot T_0^2 \int_{t_0, \min(t,\tau)}^t \frac{1-Le^{-k\tau}}{1-Le^{-kt_0}} \right)$$

in der sich $I_{t_0, \min(t, \tau)}^1$ von Gleichung zu Gleichung ändert.

$I_{s, z}$ für (3.0.2) bzw. (3.0.3) lautet: $(T_0 \quad 1 - Le^{-kt_0})$

$$I_{s, z}^1 := \int_s^z \frac{1}{(1 - Le^{-ku})^2} du = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{r(s)} - \frac{1}{r(z)} \right) + \ln \frac{e^{-kz}}{r(z)} - \ln \frac{e^{-ks}}{r(s)}$$

bzw.

$$I_{s, z}^2 \int_s^z \frac{e^{-2ku}}{(1 - Le^{-ku})^2} du = \frac{1}{N} \left(\frac{1}{r(s)} - \frac{1}{r(z)} + \ln \frac{r(s)}{r(z)} \right)$$

Hier ist $r(w) = 1 - Le^{-kw}$; $N := kL^2$; $s = t_0$ und $z = \min(t, \tau)$ zu setzen. (Hierzu siehe SLOBODA, 1976).
Es gilt

$$(3.0.6) \quad \text{Var } X_t = B(t, t) \text{ und } R(t, \tau) = B(t, \tau) / \sqrt{B(t, t) \cdot B(\tau, \tau)}$$

Beispiel:

a) Gegeben ist: (3.0.3) mit dem fixen Anfangswert $X_{12} = 0.5$, so daß alle Pfade aus $(12, 0.5)$ strömen und dabei für $q(12, 0.5; \tau, y)$ gilt

$$q(12, 0.5; \tau, y) \sim \mathcal{N}(m_{\tau}(12, 0.5); B_{\tau}(12, 0.5))$$

$m_{\tau}(12, 0.5)$ bzw. $B_{\tau}(12, 0.5)$ erhält man so, daß man in (3.0.4) $t_0 = 12$ und $EC = 0.5$ bzw. in (3.0.5) $t_0 = 12$ und $\text{Var } C = 0$ setzt. (Siehe Abb.8a)

Die Korrelationsfunktion dieses Prozesses weist auf die "hohe" Rangerhaltung der Pfade im Bestand (siehe Abb.6 und 8b).

b) Gegeben ist: (3.0.3.) mit $X_{t_0} = C \sim \bar{\psi}(t_0, x)$ in der $\bar{\psi}$ eine nicht symmetrische Dichte ist. Hier ist eine numerische Integration der Gleichung $\bar{\psi}(\tau, y) = \int_{t_0}^{\tau} \bar{\psi}(t_0, x) \cdot q(t, x; \tau, y)$ notwendig. Hierzu siehe Abb.8c) wo $\bar{\psi}(\tau, y)$ am Beispiel der lognormalen Anfangsdichte berechnet wurde.

$q(t, x; \tau, y)$ erhält man wie im Teil a), wobei t, x nicht festliegen. Hierzu ist vorbehaltlich die Bemerkung 1.1.1 zu berücksichtigen. (Siehe SLOBODA, 1976)

4.0 Fazit

Hier zeigt sich die Eignung von stoch. Differentialgleichungen zur Beschreibung der Bestandesevolution, da sie in dem hier diskutierten Fall den erweiterten Adäquat zur Suzuki-Modellen darstellen und bieten die Möglichkeit, die Rangerhaltung der Modellpfade durch $R(t, \zeta)$ zu quantifizieren und mit Realität zu vergleichen! Da die Linearität der "Differenzdiagramme der relativen Rangzustände" gegenüber Zeit mehr oder weniger robust ist (Abb.7), so liegt es nahe, diese Modelle auch zur "vorsichtigen" Prognose der Durchmesserhäufigkeiten für die Zukunft gemäß (1.1.6) heranzuziehen. (Abb.1) (Die Erweiterung dieser Betrachtungen auf multivariate Fälle ist ebenfalls gegeben).

LITERATURHINWEISE

- ARNOLD, L. 1973 Stochastische Differentialgleichungen
Theorie und Anwendung,
R. Oldenburg-Verlag, München-Wien
- GICHMAN, I.I. 1971 Stochastische Differentialgleichungen,
u. SKOROCHOD, A.W. Akademie-Verlag, Berlin
- KOLMOGOROW, A.N. 1931 Über die analytischen Methoden in der Wahr-
scheinlichkeitsrechnung, Math. Annalen 104,
Springer, Göttingen
- SLOBODA, B.: 1971 Zur Darstellung der Wachstumsprozesse mit
der Differentialgleichung erster Ordnung,
Mitt. der FVA,
Freiburg, Heft 32
- SLOBODA, B.: 1976 Mathematische und stochastische Modelle zur
Beschreibung der Dynamik von Bäumen und Be-
ständen, insbesondere das bestandesspezifi-
sche Wachstum als stochastischer Prozess,
Freiburg i. Br. eingereicht als Habilitation
an der Forstl. Fakultät
- SUZUKI, T.: und 1973 Forest Transition as a stochastic process II
UMEMURA, T Nancy-IUFRO, Kongress
- SUZUKI, T.: 1973 Vorlesungsskriptum für forstl. Biometrie,
Nagoya, Manuskript (pers. Übergabe)
- SUZUKI, T.: 1973: Seminarreihe I, II, III zur Thematik der Er-
tragsprognosen, Freiburg i.Br.,
Forstl. Fakultät

ABB. 1'

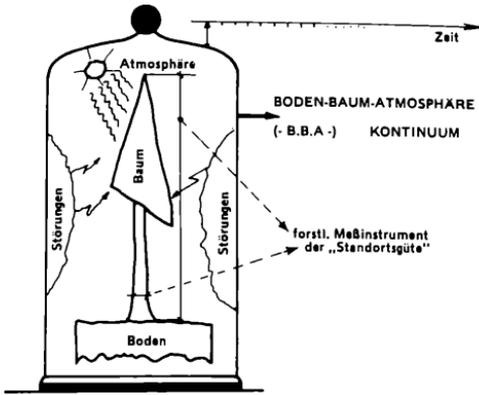
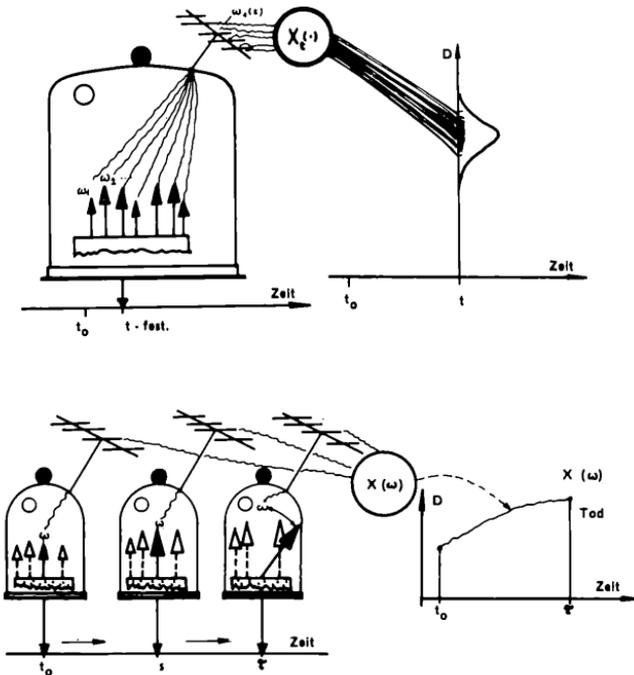


ABB. 2



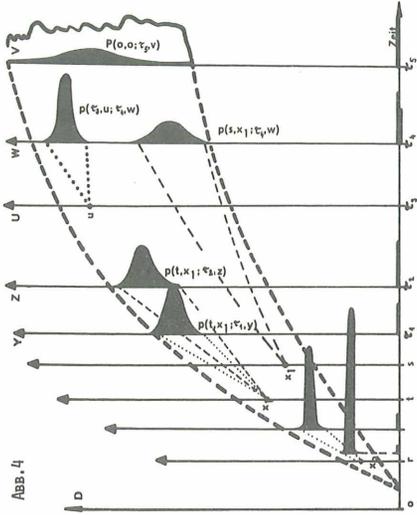


Abb. 4

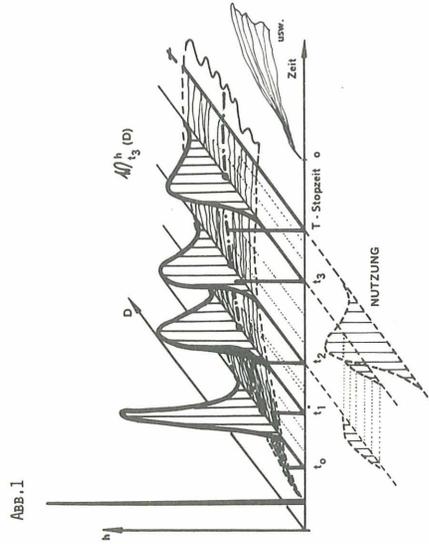


Abb. 1

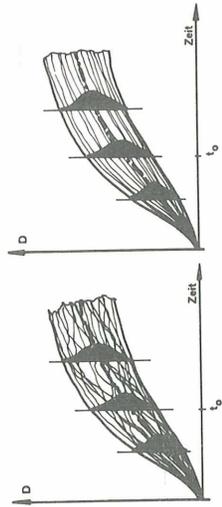


Abb. 6

Abb. 5

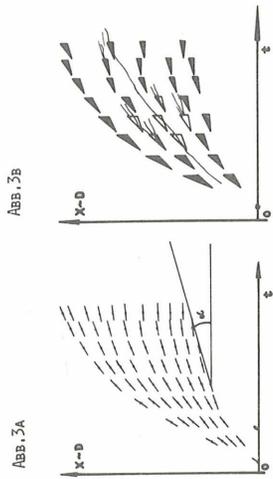


Abb. 3b

Abb. 3a

Abb.7

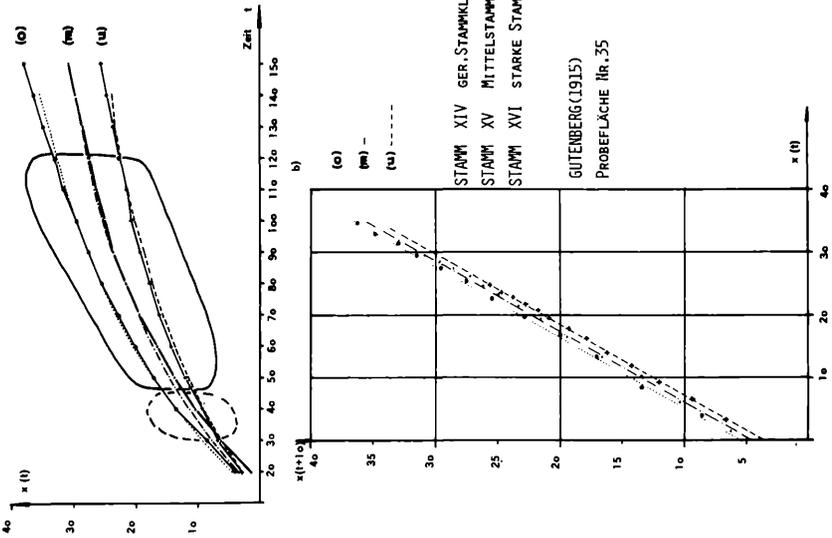
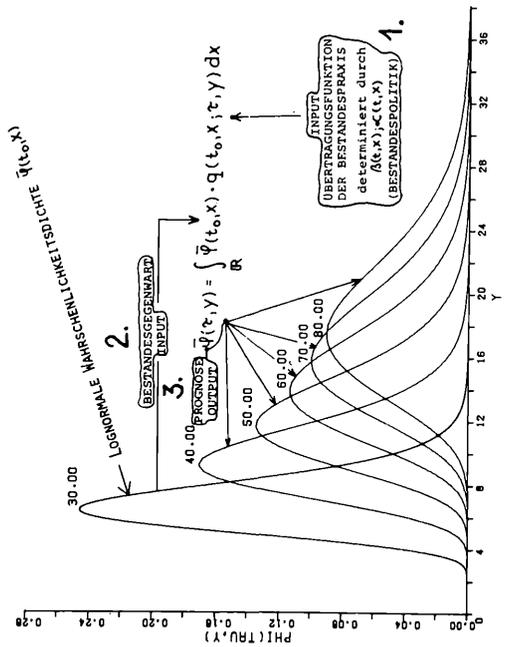


Abb.9

DIE FORTSCHRIBUNG EINER PRAXISNAHEN ASYMETRISCHEN WAHRSCHEINLICHKEITSDICHTE



B 0.050 VERSION 2

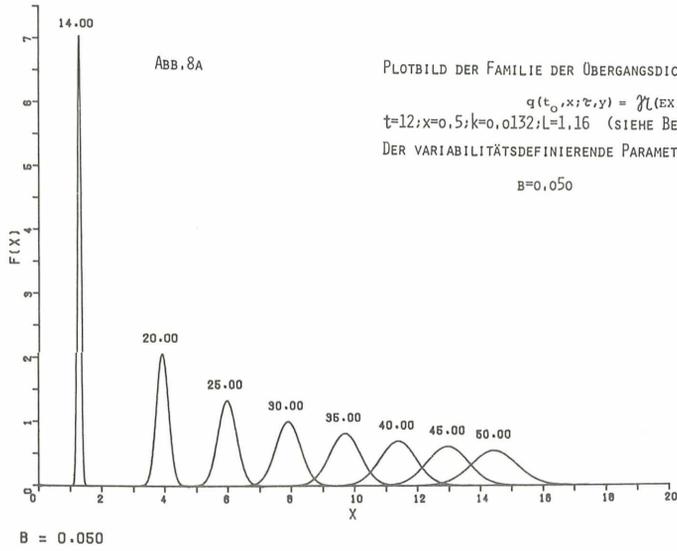


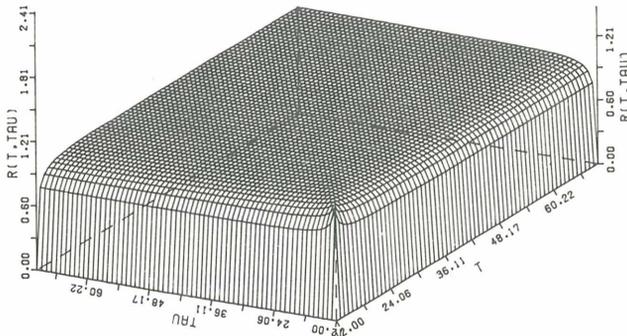
Abb. 8B

DIE DARSTELLUNG DER KORRELATIONSFUNKTION DES STOCH.PROZESSES X_T GEMÄSS DER STOCH.DIFFERENTIALGLEICHUNG (3,3,3) MIT DER FESTEN ANFANGSBEDINGUNG $t_0=12, x=0,5$

DIE PARAMETER SIND:

$k=0,0132, L=1,16, B=0,050$

(HIERZU SIEHE (3,0,5), (3,0,6) UND SETZE $t_0=12, VAR C = 0$)



ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Mitteilungen der forstlichen Bundes-Versuchsanstalt Wien](#)

Jahr/Year: 1977

Band/Volume: [120_1977](#)

Autor(en)/Author(s): Sloboda Branislav

Artikel/Article: [Kolmogorow-Suzuki und die stochastische Differentialgleichung als Beschreibungsmittel der Bestnadesevolution 71-82](#)