# FORSTLICHE BESTANDESÜBERGÄNGE ALS STOCHASTISCHE PROZESSE III

## Gleichung für zweidimensionale Bestandesübergänge

von

T.Suzuki und K. Tanaka

Universität Nagoja, Japan

## 1. Inhalt

Als Modell für das Wachstum eines forstlichen Bestandes wird die zweidimensionale Stammverteilung $\phi(\tau;x,y)$ angenommen, mit $x$ als dem Durchmesser und $y$ als der Baumhöhe im Alter $\tau$. Um die Gleichung für den Übergang von $\phi(\tau;x,y)$ abzuleiten, wird in der vorliegenden Arbeit zuerst eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom parabolischen Typus entwickelt. Im besonderen Fall, daß die Koeffizientenfunktionen dieser Gleichung alle nur Funktionen von $\tau$ sind, es sich also um eine Evolutionsgleichung handelt, kann die Grundlösung dafür intuitiv gefunden werden. Diese Lösung ist eine zweidimensionale Normalverteilung. Es kann leicht nachgewiesen werden, daß diese Lösung der ursprünglichen Gleichung genügt und zu einer $\delta$-Funktion wird, wenn $\tau$ gegen Null geht. Auch für allgemeine CAUCHY-Problem kann durch Faltung der Anfangsbedingung mit dieser Grundlösung leicht ein Ergebnis gefunden werden.

## 2. Vorbemerkung

Für die Untersuchungen der Bestandesübergänge hat man bisher nur die Verteilungsänderung des Stammdurchmessers herangezogen, den Übergang des Durchmessers beschrieben und das als eindimensionale Gleichung behandelt (Literaturhinweise 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 10). Der Zustand des Baums muß jedoch nicht nur nach dem Durchmesser, sondern auch nach der Höhe beschrieben werden. Um den Bestandeszustand zu beschreiben, ist somit in Hinblick auf die zwei Faktoren Durchmesser und Höhe eine zweidimensionale Verteilung ratsam.

In der vorliegenden Untersuchung wird in Zusammenhang mit dem Übergang der zweidimensionalen Stammverteilung aufgrund von Stammdurchmesser und Baumhöhe ein neues Ableitungsverfahren für die Kolmogorow-Gleichung angegeben (1) und gleichzeitig über diese Grundlösung und das Problem der Anfangswerte referiert. Die hier erhaltene Gleichung ist bereits im Aufsatz (2) angenommen worden, dort aber im Vergleich zu hier noch bei weitem zu intuitiv und zu einfach abgeleitet.

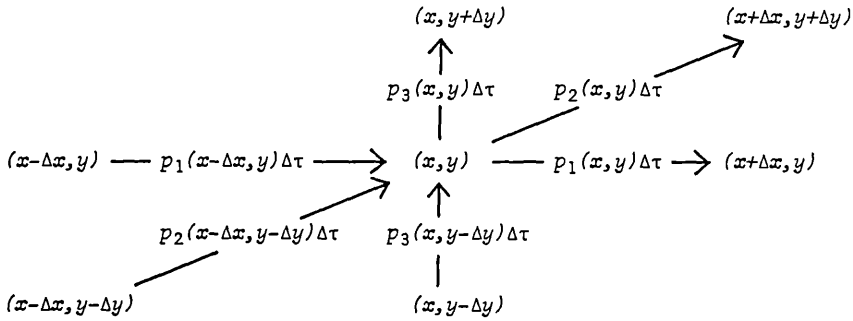
Desgleichen besprechen wir auch das Verfahren für die Wahrscheinlichkeit des Absterbens, wie sie bei der Gleichung hier im dritten Glied auf der rechten Seite ihren Ausdruck findet, weil wir zu einer allgemeineren Methode als bisher gekommen sind.

Über einen Teil der vorliegenden Untersuchung wurde auch schon auf dem 91. Kongreß der Japanischen Gesellschaft für Forstwissenschaft berichtet.

## 3. Die Ableitung der Gleichung für Bestandesübergänge

Ist bezüglich der Altersklasse $\tau$, $x$ der Baumdurchmesser und $y$ die Baumhöhe und legen wir derartige reelle Baumdurchmesser und Baumhöhen als den Waldzustand $(x,y)$ fest, so ergibt die Stammzahl, die bezüglich der Altersklasse $\tau$ den Waldzustand $(x,y)$ besitzt, $\phi(\tau;\, x,y)$. Korrekterweise müßten sowohl Zeit als auch Durchmesser und Baumhöhe als stetige Variablen betrachtet werden, doch nehmen wir sie hier in Einklang mit der Ableitung der Abhandlung (8) alle als diskret an. Das heißt, wir brauchen nur die Altersklasse $\tau + \Delta\tau$, die sich von der Altersklasse $\tau$ nur um das infinitesimale Zeitintervall $\Delta\tau$ entfernt hat, in Betracht zu ziehen und anzunehmen, daß $x + \Delta x$ sich vom Durchmesser $x$ nur um das infinitesimale Intervall $\Delta x$ unterscheidet, beziehungsweise die Baumhöhe $y + \Delta y$ von der Baumhöhe $y$ nur um das infinitesimale Intervall $\Delta y$.

Daraufhin nehmen wir den Übergang des Waldzustands im infinitesimalen Zeitintervall $\Delta\tau$ und die Wahrscheinlichkeit dieses Übergangs an als




Die Übergangswahrscheinlichkeit, daß der Baumzustand $(x \quad \Delta x,\ y)$ zu $(x,\ y)$ wird, ist hier zum Beispiel $p_1(x - \Delta x,\ y)\Delta\tau$. Der Bezug auf den Baumzustand $(x,\ y)$ beschränkt sich jedoch auf die sechs Baumzustandsarten in seinem Bereich und auf die Übergangswahrscheinlichkeiten dazwischen. Es wird angenommen, daß jede dieser Wahrscheinlichkeiten eine Funktion der Altersklasse $\tau$ sowie des Durchmessers $x$ und der Baumhöhe $y$ ist und sowohl stetig als auch bis zu zweimal differenzierbar ist. Demzufolge gilt $p_1(x \quad \Delta x,\ y) \quad p_1(x,\ y)$, $p_2(x - \Delta x,\ y - \Delta y) \quad p_2(x,\ y)$ und $p_3(x,\ y \quad \Delta y) \quad p_3(x,\ y)$,und deshalb kann man der Einfachheit halber $p_1$, $p_2$ oder $p_3$ schreiben. Auch wird die Wahrscheinlichkeit für den Baumzustand $(x,\ y)$ zu $q\Delta\tau$ und von da zur Sterbewahrscheinlichkeit $\gamma\Delta\tau$, womit sich von der obigen Bestimmung her erhellt, daß

(1) $p_1\Delta\tau + p_2\Delta\tau + p_3\Delta\tau + q\Delta\tau + \gamma\Delta\tau \quad 1.$

Wendet man die Wahrscheinlichkeit von vorhin an, beträgt die Stammzahl des Baumzustands $(x,\ y)$ in der Altersklasse $\tau + \Delta\tau$

$$\begin{aligned}\phi(\tau + \Delta\tau;\ x,\ y) \quad & \phi(\tau;\ x - \Delta x,\ y)p_1(x \quad \Delta x,\ y)\Delta\tau \\ & + \phi(\tau;\ x - \Delta x,\ y \quad \Delta y)p_2(x \quad \Delta x,\ y \quad \Delta y)\Delta\tau \\ & + \phi(\tau;\ x,\ y \quad \Delta y)p_3(x,\ y \quad \Delta y)\Delta\tau \\ & + \phi(\tau;\ x,\ y)q(x,\ y)\Delta\tau\end{aligned}$$

Zieht man bei dieser Gleichung auf beiden Seiten $\phi(\tau;\ x,\ y)$ ab und wendet die Gleichung (1) an, erhält man

$$\begin{aligned}\phi(\tau + \Delta\tau;\ x,\ y) \quad & \phi(\tau;\ x,\ y) \\ & \{\phi(\tau;\ x \quad \Delta x,\ y)p_1(x - \Delta x,\ y) \\ & \phi(\tau;\ x,\ y)p_1(x,\ y)\}\Delta\tau\end{aligned}$$

$$+ \{\phi(\tau;\, x \quad \Delta x,\, y - \Delta y) p_2(x - \Delta x,\, y - \Delta y)$$
$$\phi(\tau;\, x,\, y) p_2(x,\, y)\} \Delta\tau$$
$$+ \{\phi(\tau;\, x,\, y \quad \Delta y) p_3(x,\, y - \Delta y)$$
$$\phi(\tau;\, x,\, y) p_3(x,\, y)\} \Delta\tau$$
$$\phi(\tau;\, x,\, y) \gamma \Delta\tau$$

Teilt man beide Seiten hier durch $\Delta\tau$, läßt $\Delta\tau$ gegen den Grenzwert 0 gehen und entwickelt die Potenzreihe von $\Delta x$ und $\Delta y$, erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial\tau} \doteq & - \frac{\partial(p_1\phi)}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(p_1\phi)}{\partial x^2}(\Delta x)^2 \\
& - \frac{\partial(p_2\phi)}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial(p_2\phi)}{\partial y}\Delta y \\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(p_2\phi)}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2(p_2\phi)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y \\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(p_2\phi)}{\partial y^2}(\Delta y)^2 - \frac{\partial(p_3\phi)}{\partial y}\Delta y \\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(p_3\phi)}{\partial y^2}(\Delta y)^2 - \gamma\phi
\end{aligned}$$

beziehungsweise

(2)
$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial\tau} \quad & \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{(p_1 + p_2)(\Delta x)^2\phi\} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\{p_2 \Delta x \Delta y \phi\} \\
& + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\{(p_2 + p_3)(\Delta y)^2\phi\}\Big] \quad \frac{\partial}{\partial x}\{(p_1 + p_2)\Delta x \phi\} \\
& - \frac{\partial}{\partial y}\{(p_2 + p_3)\Delta y \phi\} - \gamma\phi
\end{aligned}$$

Der Mittelwert für den Durchmesserzuwachs beträgt hierbei

$$\Delta\mu x \quad 0(p_3 + q + \gamma)\Delta\tau + (p_1 + p_2)\Delta x \Delta\tau$$

wonach beide Seiten durch $\Delta\tau$ geteilt werden, und man

(3)
$$\frac{\Delta\mu x}{\Delta\tau} \quad (p_1 + p_2)\Delta x$$

als Durchmesserzuwachsgeschwindigkeit erhält.

Auf dieselbe Weise erhält man die Höhenzuwachsgeschwindigkeit

(4)
$$\frac{\Delta\mu y}{\Delta\tau} \quad (p_2 + p_3)\Delta y$$

Weiters ist die Zuwachsmenge der Durchmesservarianz

$$\Delta\sigma x^2 \quad 0(p_3 + q + \gamma)\Delta\tau + (p_1 + p_2)(\Delta x)^2\Delta\tau$$

und das Umwandlungsverhältnis davon

(5)
$$\frac{\Delta\sigma x^2}{\Delta\tau} \quad (p_1 + p_2)(\Delta x)^2$$

Auf dieselbe Weise ist das Umwandlungsverhältnis der Baumhöhenvarianz

(6)
$$\frac{\Delta\sigma y^2}{\Delta\tau} \quad (p_2 + p_3)(\Delta y)^2$$

Die Zuwachsmenge der Kovarianz von Durchmesser und Baumhöhe ist des weiteren

(7) $$\frac{\Delta\sigma xy}{\Delta\tau} \quad p_2 \Delta x \Delta y$$

Die Gleichungen von (3) bis (7) sind alle Funktionen der Altersklasse $\tau$, des Durchmessers $x$ und der Baumhöhe $y$, und wenn man sie entsprechend als $\beta_1$, $\beta_2$, $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{1,2}$ festlegt, erhält man aus der Gleichung (2) die Gleichung für zweidimensionale Bestandesübergänge

(8) $$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} \quad \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\alpha_{1,1}\phi) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(2\alpha_{1,2}\phi) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\alpha_{2,2}\phi)\right\} \quad \left\{\frac{\partial}{\partial x}(\beta_1\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta_2\phi)\right\} - \gamma\phi$$

4. Das Verfahren für die Wahrscheinlichkeit des Absterbens

Nimmt man bei der Gleichung für eindimensionale Bestandesübergänge

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} \quad \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\alpha\phi) \quad \frac{\partial}{\partial y}(\beta\phi) \quad c\phi$$

die Sterbewahrscheinlichkeit $c$ als unveränderlich an, kann man $\phi$ festlegen als

$$\phi \quad e^{-c\tau}\psi$$

was nach $\tau$ differenziert wird,

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} \quad -ce^{-c\tau}\psi + e^{-c\tau}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}$$

und dann, wenn man es in die ursprüngliche Gleichung einsetzt, zurückgeführt werden kann auf

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} \quad \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\alpha\psi) - \frac{\partial}{\partial y}(\beta\psi)$$

Auf diese Weise kann man auch für den Fall, daß die Sterbewahrscheinlichkeit $\gamma$ eine Funktion von $\tau$ ist, festlegen, daß

(9) $$c(\tau) \quad \int\gamma(\tau)d\tau$$

und wenn man

(10) $$\phi \quad e^{-c(\tau)}\psi$$

setzt,ergibt sich

(11) $$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} = -\gamma e^{-c(\tau)}\psi + e^{-c(\tau)}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}$$

und das wird zu

(12) $$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} \quad \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\alpha_{1,1}\psi) \quad 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\alpha_{1,2}\psi)\right.$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\alpha_{2,2}\psi)\} \quad \{\frac{\partial}{\partial x}(\beta_1\psi) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta_2\psi)\}$$

wenn man es in die Gleichung (8) einsetzt, die man als eine Gleichung erhält, bei der auf der rechten Seite das dritte Glied, welches für das Absterben stand, weggefallen ist.

## 5. Die Grundlösung der Bachelierschen Gleichung

Wenn die Koeffizientenfunktionen der Gleichung (12) alle Funktionen der Altersklasse $\tau$ sind, ergibt das eine Bacheliersche Gleichung.

(13)
$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} \quad \frac{1}{2}\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\alpha_{1,1}(\tau)\psi) + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\alpha_{1,2}(\tau)\psi)$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\alpha_{2,2}(\tau)\psi)\} \quad \{\frac{\partial}{\partial x}(\beta_1(\tau)\psi) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta_2(\tau)\psi)\}$$

Doch ist es möglich, in diesem Fall in Analogie zum eindimensionalen Beispiel intuitiv als Grundlösung herauszuheben die Funktion

(14)
$$\psi(\tau;\, x,y) \quad \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_x\sigma_y} e^{-(1/2(1-\rho^2))Q(x,\,y)}$$

vorausgesetzt,

(15)
$$Q(x,\,y) \quad \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}$$

$\sigma_x^2$, $\sigma_y^2$, $\rho$, $\mu_x$ oder $\mu_y$ haben hier jeweils die Bedeutung der Durchmesservarianz, der Baumhöhenvarianz, des Korrelationskoeffizienten für Durchmesser und Baumhöhe, des mittleren Durchmessers beziehungsweise der mittleren Baumhöhe. Sind diese Koeffizienten alle nur Funktionen von $\tau$, stellt sich heraus, die Gleichung (14) erfüllt

(16)
$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} \quad \sigma_x\sigma_x'\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (\rho'\sigma_x\sigma_y + \rho\sigma_x'\sigma_y + \rho\sigma_x\sigma_y')\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}$$
$$+ \sigma_y\sigma_y'\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \mu_x'\frac{\partial\psi}{\partial x} - \mu_y'\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

Bedingung ist dabei, daß das Zeichen für das Differential bezüglich $\tau$ steht. Für folgende Differentialgleichungen ergibt sich nun als Lösung

(17)
$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(\sigma_x)^2 \quad \sigma_x\sigma_x' \quad \frac{1}{2}\alpha_{1,1}(\tau)$$

(18)
$$\frac{d}{d\tau}(\rho\sigma_x\sigma_y) \quad \rho'\sigma_x\sigma_y + \rho\sigma_x'\sigma_y + \rho\sigma_x\sigma_y' \quad \alpha_{1,2}(\tau)$$

(19) $$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(\sigma_y)^2 = \sigma_y\sigma_y' \quad \frac{1}{2}\alpha_{2,2}(\tau)$$

(20) $$\frac{d}{d\tau}\mu_x \quad \beta_1(\tau)$$ und

(21) $$\frac{d}{d\tau}\mu_y \quad \beta_2(\tau)$$

und nimmt man für die Funktionen, welche die Anfangsbedingungen erfüllen, an, daß

(22) $\sigma_x(0)=0,\ \sigma_y=0,\quad \rho(0)=1$ und

(23) $\mu_x(0)=0,\ \mu_y=0.$

und stellt damit die Gleichung (14) her, so ergibt sich, daß diese die Grundlösung der Gleichung (13) ist.

Die Gleichung (14) erfüllt nämlich nach obigem die Gleichung (13) und ergibt beim Grenzwert $\tau \to 0$ aus der Tatsache, daß $\mu_x=\mu_y=0$, $\sigma_x=\sigma_y=0, \rho=1$ auf eine Generalfunktion hinführt. Erweitern wir den Begriff der $\delta$-Funktion vom eindimensionalen Fall her, dann wollen wir auch für die bei $\tau \to 0$ gegen eine dünne vertikale Säule konvergierende Funktion $\delta(x,y)$ schreiben und sie gleichfalls $\delta$-Funktion nennen. Für eine derartige $\delta$-Funktion ergibt sich gleich wie beim eindimensionalen Fall in bezug auf die willkürliche Funktion $f(x,y)$

(24) $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x,y)dxdy=f(0,0).$$

ist. Im folgenden wird die Grundlösung (14) als $\Psi_o(\tau;x,y)$ ausgeschrieben. Wenn man das benutzt, ist die Grundlösung für die Gleichung (8)

(25) $$\phi_o(\tau;x,y)=e^{-c(\tau)}\Psi_o(\tau;x,y)$$

## 6. Die Anfangswertlösung der Gleichung für Bestandesübergänge

Wendet man diese Grundlösung an, erhält man genauso wie beim eindimensionalen Fall die Anfangswertlösung durch Faltung der Grundlösung mit der Anfangsverteilung. Führt man also aus, daß

(26) $\phi(\tau;\, x,\, y) \quad \int_{\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} f(\xi,\, \eta)\phi_0(\tau;x-\xi\, ,y-\eta)d\xi\, d\eta$

so erhält man etwas recht Günstiges. Bei $\tau \to 0$ ergibt sich nämlich für $\phi_0(\tau\, ;x-\xi\, ,y-\eta\, ) \to \delta(x-\xi\, ,y-\eta\, )$, daß

(27) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)\, \delta(\, x-\xi\, ,y-\eta)d\xi d\eta \quad f(x,y)$.

Die parabolische Bacheliersche Gleichung, bei der die vorhin erwähnte Koeffizientengleichung eine Funktion nur von $\tau$ geworden ist, ist eine sogenannte Wachstumsgleichung, und bezüglich der Frage des Anfangswertes wie zum Beispiel bei der Theorie von Tanabe, welche die Halbgruppentheorie von Hille / Yoshida verallgemeinert, ist die Existenz und Ausschließlichkeit dieser Lösung bewiesen (Literaturhinweis 9). Weil deshalb auch die Gleichung, die wir vorhin intuitiv erhalten baben, die Gleichung erfüllt und die Anfangsbedingung erfüllt, ist es aufgrund dieser Ausschließlichkeit möglich, zu behaupten, daß diese Lösung die einzig richtige ist.

Summary

As a growth model of a forest stand, it is appropriate to think of a two-dimensional stem frequency $\phi(\tau;x,y)$, a second order linear parabolic partial differential equation is derived at first. This equation is a kind of KOLMOGOROV equation. In particular, if its coefficients are all functions of $\tau$ only, that is, if this equation is an equation of evolution, the fundamental solution is intuitively obtained. This solution has the form of a two-dimensional normal- distribution. It is easily affirmed that the solution can satisfy the original equation and be reduced to a $\delta$-function when $\tau$ tends to be zero. The general CAUCHY problem of this equation can be solved as a convolution of this fundamental solution and an initial distribution.

Keywords: Forest transition, Growth model, Stochastic process

## 7. Zitierte Literatur

KOLMOGOROV A., 1931: Über die analytische Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Math. Ann. 104, S415-458

SUZUKI T.,1966: *Kakuritukatei to site no rinbun no sen'i* (I)
Forstliche Bestandesübergänge als stochastische Prozesse (1)
Nitirinsi (Zeitschrift der Japanischen Gesellschaft für Forstwissenschaft ) 48, S 436-439

DERSELBE 1967 :*Kakuritukatei to site no rinbun no sen'i* (II)
(w.o.(II)) Nitirinsi (w.o.) 49, S17-19

DERSELBE 1967 :*Kakuritukatei to site no rinbun no sen'i* (III)
(w.o.( III)) Nitirinsi (w.o.) 49, S208-210

DERSELBE 1967 :*Kakuritukatei to site no rinbun no sen'i* (IV)
(w.o.(IV)) Nitirinsi (w.o.) 49, S 402-404

DERSELBE 1971 Forest transition as a stochastic process (I)
Mitt. der Forstl. Bundesversuchsanstalt Wien 91, S 69-86

SUZUKI T./ UMEMURA T., 1974 Forest transition as a stochastic process (II)
IUFRO working party S4.01-4, Proceedings of meetings in 1973

SUZUKI T., 1979 *Rinbunsen'i-hoteisiki no atarasi yudo ni tuite*
Über eine neue Ableitung für die Gleichung forstlicher Bestandesübergänge
90-*kai-Nitirinron* Gesammelte Abhandlungen der Japanischen Gesellschaft für Forstwissenschaft, Nr. 90, S 127-128

TANABE H., 1975 *Hatten-hoteisiki* ( Die Evolutionsgleichung)
S 109-120, bei Iwanami, Tokio

UMEMURA T./ SUZUKI T., 1975 *Kakuritukatei to site no rinbun no sen'i* (V) (w.o.(V))
Nitirinsi (w.o.) 56, S 195-206

SUZUKI T. / TANAKA K., 1981: *Kakuritukatei to site no rinbun no sen'i* (VI) (w.o.(VI))
Nitirinsi (w.o.) 63, S 273-277