

MITTHEILUNGEN
AUS DEM
FORSTLICHEN VERSUCHSWESEN
ÖSTERREICHS.

HERAUSGEGEBEN
VON DER
K. K. FORSTLICHEN VERSUCHSANSTALT IN MARIABRUNN.



DER GANZEN FOLGE XXVI. HEFT.

DIE NÄHERUNGSWEISE
FLÄCHEN- UND KÖRPERBERECHNUNG

IN DER
WISSENSCHAFTLICHEN HOLZMESSKUNDE.

ELEMENTAR DARGESTELLT

VON

DR. OSCAR SIMONY,

O. Ö. PROFESSOR DER MATHEMATIK UND PHYSIK AN DER K. K. HOCHSCHULE FÜR BODENCULTUR IN WIEN.

MIT 32 ABBILDUNGEN IM TEXTE.

WIEN.

K. U. K. HOF-BUCHHANDLUNG WILHELM FRICK.

1901.

MITTHEILUNGEN

AUS DEM

FORSTLICHEN VERSUCHSWESEN

ÖSTERREICHS.

HERAUSGEGEBEN

VON DER

K. K. FORSTLICHEN VERSUCHSANSTALT IN MARIABRUNN.

~ ~ ~ ~ ~
DER GANZEN FOLGE XXVI. HEFT.
~ ~ ~ ~ ~

W I E N.

K. U. K. HOF-BUCHHANDLUNG WILHELM FRICK.

1901.

MITTHEILUNGEN
AUS DEM
FORSTLICHEN VERSUCHSWESEN ÖSTERREICHS.
—o XXVI. HEFT. o—

DIE NÄHERUNGSWEISE
FLÄCHEN- UND KÖRPERBERECHNUNG

IN DER
WISSENSCHAFTLICHEN HOLZMESSKUNDE.

ELEMENTAR DARGESTELLT

VON

DR. OSCAR SIMONY,

O. Ö. PROFESSOR DER MATHEMATIK UND PHYSIK AN DER K. K. HOCHSCHULE FÜR BODENCULTUR IN WIEN.

~~~~~  
MIT 32 ABBILDUNGEN IM TEXTE.

WIEN.  
K. U. K. HOF-BUCHHANDLUNG WILHELM FRICK.  
1901.

ALLE RECHTE VORBEHALTEN.

## Vorbemerkungen.

Die hohe Wichtigkeit und vielseitige Verwerthung, welche die hier zu erledigenden Aufgaben für die wissenschaftliche Holzmesskunde besitzen, liessen es mir schon seit Jahren wünschenswerth erscheinen, die Ableitung aller einschlägigen Formeln derart zu vereinfachen, dass dieselben auch an forstlichen Mittelschulen mathematisch strenge bewiesen werden können.

Demgemäss erfordern die hier gegebenen Entwicklungen in rein mathematischer Hinsicht lediglich die Ausführung einfacher algebraischer Operationen, also nicht einmal die Kenntnis des binomischen Lehrsatzes, geschweige denn jene der Differential- und Integralrechnung, sowie auch in geometrischer Hinsicht nur elementare Kenntnisse und so viel Vertrautheit mit dem Gebrauche rechtwinkliger Coordinaten vorausgesetzt werden, als sich bereits bei der graphischen Darstellung des Abhängigkeitsverhältnisses zwischen zwei veränderlichen Grössen erwerben lässt.

Nach Einführung der erwähnten Coordinaten bedeuten bekanntlich alle zusammengehörigen Grössenwerthe:  $x$ ,  $y$  zugleich Coordinaten von Punkten, so dass jene Gleichung, welche das Abhängigkeitsverhältnis beider Grössen näher bestimmt, gleichzeitig eine in der Ebene beider Coordinatenaxen gelegene Linie charakterisirt. Dagegen kann umgekehrt irgend einer in derselben Ebene empirisch gegebenen Curve nicht ohneweiters eine bestimmte Gleichung zugeordnet werden, zumal für die Coordinaten der aufeinanderfolgenden Curvenpunkte möglicherweise überhaupt kein gemeinsames Bildungsgesetz besteht.

Es liegt dann nahe, die mathematisch genaue durch eine näherungsweise Beschreibung zu ersetzen und zu diesem Zwecke die Curve fortgesetzt zu theilen, bis die erhaltenen Stücke sich näherungsweise sowohl in geometrischer als in analytischer Hinsicht einfach und gleichartig charakterisiren lassen.

Dieser Vorgang schafft zugleich die Grundlage für die Erledigung der wichtigsten hier zu lösenden Aufgaben, denn die Inhaltsbestimmung jeder Fläche erfordert zunächst eine präzise Feststellung über die Art ihrer Begrenzung, sowie auch die Cubirung jedes Rotationskörpers, dessen Mantelfläche durch Drehung irgend einer ebenen Curve um eine fixe Axe erzeugbar ist, wesentlich von der Beschaffenheit dieser Curve abhängt.

Die vorliegende Arbeit hat daher vor Allem eine geometrische und analytische Charakteristik der einfachsten im angegebenen Sinne verwerthbaren Linien zu liefern, wobei wir uns auf folgende Fälle beschränken:

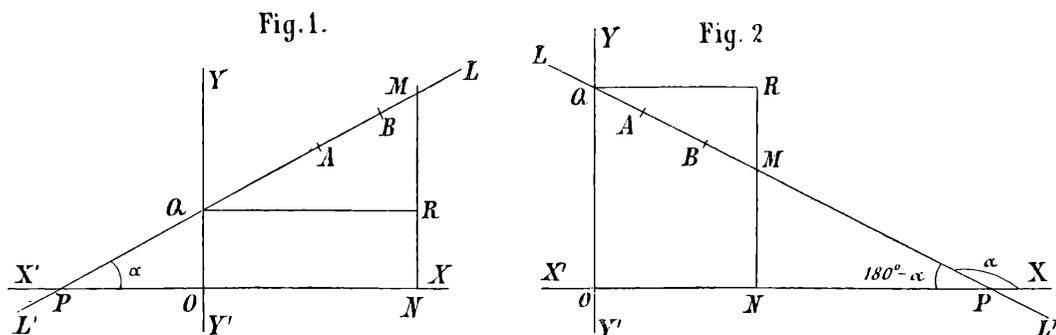
- (I.) Die Theilung der empirisch gegebenen Curve wird so weit fortgesetzt, bis die Krümmung ihrer einzelnen Stücke nicht mehr in Betracht kommt.
- (II.) Die Theilung wird sistirt, sobald jedes einzelne Curvenstück zwar noch merklich gekrümmt ist, aber bereits in seiner ganzen Ausdehnung entweder convex oder concav nach unten verläuft.

(III.) Es bleiben auch noch solche Curvenstücke ungetheilt, die in ihrem Verlaufe einen einmaligen Krümmungswechsel zeigen, also einen einzigen sogenannten Wendepunkt besitzen, welcher den concaven von dem convexen Theile des Curvenstückes scheidet.

Natürlich liesse sich eine Untersuchung des dritten Falles dadurch vermeiden, dass in der Folge alle Wendepunkte als Theilpunkte benützt würden. Es wäre jedoch bei einer derartigen Zerlegung der Curve häufig unmöglich, die ihren einzelnen Stücken zugehörigen Flächenstreifen gleich breit zu machen — eine Forderung, welche ausnahmslos erfüllt bleiben muss, wenn es sich um die Ableitung einfacher und allgemeiner Formeln zur näherungsweise Flächenberechnung handelt.

### §. 1.

Sind die durch Zerlegung der Curve erhaltenen Stücke nur unmerklich gekrümmt, so kann jedes derselben näherungsweise durch die, seine Endpunkte  $A, B$  (vgl. Fig. 1 und 2) verbindende Sehne ersetzt werden, welche stets einer bestimmten Geraden  $LL'$  angehört. Die



letztere bildet mit der Abscissenaxe  $XX'$  des gewählten Coordinatensystems einen spitzen oder stumpfen Winkel  $LPX = \alpha$ , je nachdem das betreffende Curvenstück einem steigenden oder fallenden Curvenbogen — in der Richtung von  $O$  gegen  $X$  gerechnet — entnommen ist, wobei sich die Coordinaten:  $ON = x$ ,  $MN = y$  jedes beliebigen Punktes  $M$  von  $LL'$  sehr leicht durch eine und dieselbe Gleichung verbinden lassen.

Setzen wir nämlich der Kürze wegen:  $OQ = a$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = b$ , so gilt der Endwerth von  $y$  für Fig. 1:

$$y = NR + MR = OQ + QR \operatorname{tg} \alpha = a + b x$$

auch für Fig. 2, weil in der correspondirenden Beziehung:

$$y = NR - MR = OQ - QR \operatorname{tg} (180^\circ - \alpha)$$

der Factor von  $-QR$  bekanntlich mit:  $-\operatorname{tg} \alpha$  zusammenfällt.

Es charakterisirt demnach jede Gleichung von der Gestalt:

$$(1) \quad y = a + b x$$

eine gerade Linie, wobei die erste Constante  $a$  die Ordinate ihres jeweiligen Durchschnittspunktes  $Q$  mit der Ordinatenaxe, die zweite Constante  $b$  dagegen die goniometrische Tangente des von  $LL'$  mit der Abscissenaxe eingeschlossenen Winkels  $\alpha$  bestimmt.

Vermöge dieser Bedeutung erhält  $b$  positive oder negative Werthe, je nachdem  $\alpha$  spitz oder stumpf ist und verschwindet für  $\alpha = 0$ , so dass die erste der beiden möglichen Specialformen von (1):

$$(2) \quad y = a, \quad y = b x$$

einer zur Abscissenaxe parallelen Geraden zugehört, während die zweite dann eintritt, wenn die Gerade durch den Ursprung  $O$  hindurchgeht, also  $a = 0$  bleibt. Im Gegenfalle durchschneidet  $LL'$  auch die Abscissenaxe in einem gewissen Punkte  $P$  (vgl. Fig. 1 und 2), dessen Coordinaten:  $x = OP$ ,  $y = 0$  consequent der allgemeinen Gleichung (1) zu genügen haben, d. h. es besteht die Relation:

$$0 = a + b \cdot \overline{OP}, \text{ aus welcher } OP = -\frac{a}{b} \text{ folgt.}$$

Um endlich unter allen denkbaren Specialisirungen der in (1) vorkommenden Constanten diejenigen herauszufinden, welche der geraden Verbindungslinie beider Curvenpunkte:  $A, B$  eigenthümlich sind, müssen  $a, b$  so gewählt werden, dass die Coordinaten:  $x_1, y_1; x_2, y_2$  von  $A, B$  zugleich zwei Punkte der Geraden  $LL'$  bestimmen, welcher Forderung die Relationen:

$$y_1 = a + b x_1, \quad y_2 = a + b x_2$$

entsprechen. Ihre Subtraction liefert unmittelbar:

$$y_2 - y_1 = b (x_2 - x_1), \text{ mithin: } b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

worauf sich der zugehörige Werth von  $a$  nach jeder der beiden Formeln:

$$a = y_1 - b x_1, \quad a = y_2 - b x_2$$

berechnen lässt, und die Übereinstimmung der erhaltenen Zahlenwerthe ausserdem die Richtigkeit der Rechnung gewährleistet.

Erwägt man, wie viele wissenschaftliche Beobachtungen aus verschiedenartigen Gründen auf relativ sehr kurze Stücke jener Curven beschränkt bleiben, welche den Verlauf aller zusammengehörigen Grössenwerthe veranschaulichen würden, so erscheint begreiflich, warum die Gleichung (1) sich speciell als empirische Näherungsformel ungemein vielseitig verwerthen lässt und auch den natürlichen Ausgangspunkt für die Ableitung complicirterer Grössenbeziehungen bildet.

## §. 2.

Die einfachste analytische Verallgemeinerung der Gleichung (1) besteht darin, dass ihre beiden Constanten  $a, b$  in analoger Weise von  $x$  abhängig gemacht werden, wie  $y$  in (1) von  $x$  abhängt. Wir ersetzen demgemäss in (1)  $a$  und  $b$  durch die mit neuen Constanten:  $a_0, a_1; b_0, b_1$  versehenen Binome:  $a_0 + a_1 x$ ,  $b_0 + b_1 x$  und gewinnen auf solche Art für  $y$  den Ausdruck:

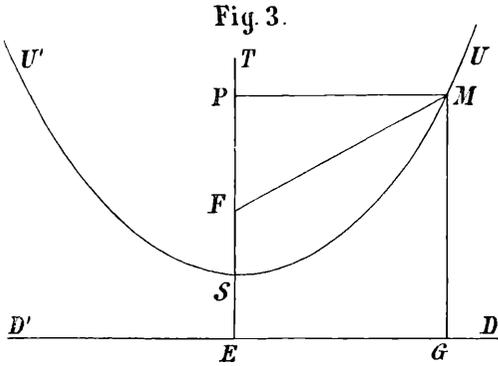
$$a_0 + a_1 x + (b_0 + b_1 x) x = a_0 + (a_1 + b_0) x + b_1 x^2,$$

welcher, da die Summe:  $a_1 + b_0$  eine einzige Constante liefert, im Ganzen drei Constanten enthält. Die zweckmässigste Schreibweise der neuen Relation ist mithin folgende:

$$(3) \quad y = a + b x + c x^2,$$

denn bei Einführung dieser Symbolik erscheint die Beziehung (1) direct als Specialfall von (3) für  $c = 0$ , wogegen die beiden Unterfälle:  $c > 0$ ,  $c < 0$ , wie sich völlig elementar beweisen lässt, eine unbegrenzte Mannigfaltigkeit parabolischer Bögen umfassen.

**Erster Unterfall:  $c > 0$**



**Fig. 3.**

Um zunächst die geometrische Bedeutung von (3) für positive Werthe von  $c$  kennen zu lernen, gehen wir von einer gewöhnlichen Parabel  $USU'$  (Fig. 3) mit dem Halbparameter  $EF = p$  aus, bei welcher bekanntlich jeder Punkt ebenso weit von ihrem Brennpunkte  $F$  als von ihrer Leitlinie  $DD'$  absteht. Speciell für den Scheitel  $S$  ist mithin:

$$FS = ES = \frac{1}{2} EF = \frac{1}{2} p,$$

und allgemein für den beliebigen Punkt  $M$  vermöge derselben Eigenschaft:  $FM = GM$ .

Fällen wir ferner von  $M$  auf die Parabelaxe  $ST$  die Senkrechte  $MP = u$ , welche von derselben das Stück  $PS = v$  abschneidet, so ist als Parallele zwischen Parallelen auch  $EP = GM = FM$ , wonach die Summe der Quadrate beider Katheten des rechtwinkligen Dreieckes  $FMP$  zugleich das Quadrat von  $EP$  bestimmt. Gemäss den unmittelbar anschaulichen Relationen:

$$EP = PS + ES = v + \frac{1}{2} p, \quad FP = PS - FS = v - \frac{1}{2} p$$

folgt dann aus  $\overline{MP}^2 + \overline{FP}^2 = \overline{EP}^2$  die weitere Beziehung:

$$u^2 = \overline{MP}^2 = \overline{EP}^2 - \overline{FP}^2 = (EP + FP)(EP - FP) = 2vp,$$

deren Auflösung nach  $v$  das Resultat:

$$(4) \quad v = \frac{u^2}{2p}$$

liefert. Dasselbe vermittelt nunmehr ohne jede Rechnung die Gleichung der Parabel  $USU'$ , falls ihre Axe  $ST$  mit der positiven Hälfte der Ordinatenaxe parallel und gleichgerichtet ist, und ihr Scheitel  $S$  die Coordinaten:  $OR = m$ ,  $RS = n$  besitzt.

Wie nämlich Fig. 4 direct ersichtlich macht, bestehen für diese Lage der Curve zwischen  $MP = u$ ,  $PS = v$  und den Coordinaten:  $ON = x$ ,  $MN = y$  des beliebigen Parabelpunktes  $M$  die Beziehungen:

$$x = OR + NR = OR + MP = m + u,$$

$$y = PR = RS + PS = n + v,$$

d. h. wir haben hier:

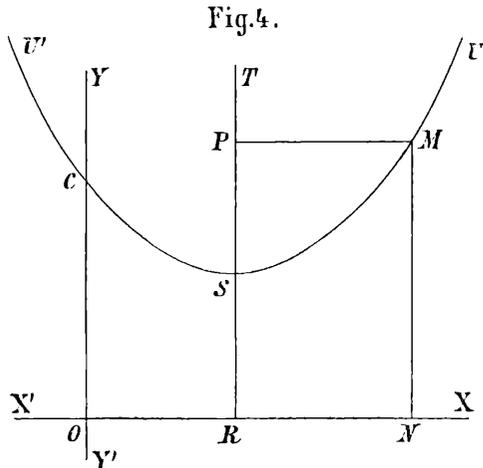
$$u = x - m, \quad v = \frac{(x - m)^2}{2p} \text{ und:}$$

$$(5) \quad y = n + \frac{(x - m)^2}{2p}.$$

Der Ausdruck rechter Hand:

$$n + \frac{x^2 - 2mx + m^2}{2p} = \left(n + \frac{m^2}{2p}\right) - \frac{m}{p}x + \frac{x^2}{2p}$$

stimmt mit  $a + bx + cx^2$  offenbar für jeden Werth von  $x$  überein, sobald dessen drei Constanten:  $m$ ,  $n$ ,  $p$  die Bedingungen:



**Fig. 4.**

$$n + \frac{m^2}{2p} = a, \quad -\frac{m}{p} = b, \quad \frac{1}{2p} = c$$

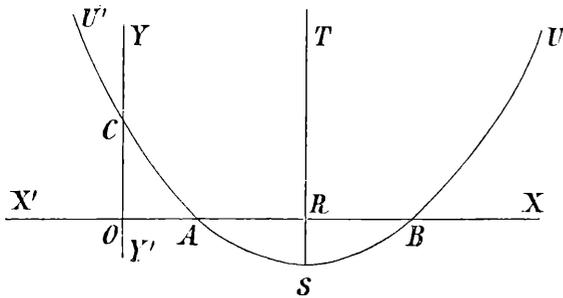
erfüllen, und so ergibt sich als Erledigung des ersten Unterfalles der Satz: Die Gleichung:  $y = a + bx + cx^2$  charakterisirt für  $c > 0$  jederzeit eine gewöhnliche Parabel mit dem Parameter:  $2p = \frac{1}{c}$  und den Scheitelkoordinaten:

$$m = -bp = -\frac{b}{2c}, \quad n = a - \frac{m^2}{2p} = a - \frac{b^2}{4c},$$

welche, da ihre Axe mit der positiven Hälfte der Ordinatenaxe parallel und gleichgerichtet bleibt, in ihrer ganzen Ausdehnung convex nach unten verläuft, folglich speciell zur näherungsweise Darstellung von im gleichen Sinne convexen Curvenstücken verwendbar ist.

Da ferner  $y$  für  $x = 0$  gleich  $a$  wird, durchschneidet die Parabel je nach dem Zeichen

Fig. 5.



dieser Constanten die positive oder negative Hälfte der Ordinatenaxe in einem durch den Zahlenwerth von  $a$  bestimmten Abstände vom Coordinatenursprunge, während eine Durchschneidung der Abscissenaxe offenbar nur dann stattfindet, wenn der Curvenscheitel  $S$  unterhalb der letzteren (Fig. 5) gelegen ist. Zugleich muss  $y$  für die Abscissen:  $OA = x_1$ ,  $OB = x_2$  beider Schnittpunkte:  $A, B$  der Parabel verschwinden, mithin  $x$  für jeden derselben der Relation:

$$\frac{(x - m)^2}{2p} = -n, \text{ d. h. } c \left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 = \frac{b^2}{4c} - a$$

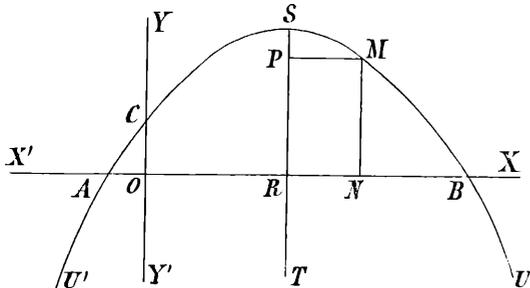
genügen, woraus zur Bestimmung der fraglichen Abscissen die Formeln:

$$(6) \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{b}{2c} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} = OR - AR, \\ x_2 = -\frac{b}{2c} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} = OR + BR \end{cases}$$

resultiren. Bei abnehmender Scheitelordinate rücken demgemäss beide Schnittpunkte einander stetig näher, und speciell für  $n = 0$  hat die Parabel mit der Abscissenaxe nur mehr ihren Scheitel gemein, so dass die letztere dann aus einer Sekante der Curve in eine Tangente derselben übergeht.

**Zweiter Unterfall:  $c < 0$**

Fig. 6.



Da unter dieser Voraussetzung auch der reciproke Werth von  $c$  negativ ausfällt, der Parameter  $2p$  der Parabel jedoch eine wesentlich positive Grösse vorstellt, erhellet sofort, dass die Parabel  $USU'$  hier um  $180^\circ$  gedreht werden muss, ehe sich deren Gleichung mit (3) in Übereinstimmung bringen lässt. Die zugehörige Fig. 6 liefert dann unter Beibehaltung der früheren Symbolik:

$$OR = m, \quad RS = n; \quad ON = x, \quad MN = y; \\ MP = u, \quad PS = v$$

wieder:  $x = m + u$ ,  $v = \frac{(x - m)^2}{2p}$ , hingegen:  $y = PR = RS - PS = n - v$ ,

wonach die Gleichung der Curve für deren neue Lage:

$$(7) \quad y = n - \frac{(x - m)^2}{2p}$$

lautet. Wenn also die rechte Seite von (7):

$$n - \frac{x^2 - 2mx + m^2}{2p} = \left(n - \frac{m^2}{2p}\right) + \frac{m}{p}x - \frac{x^2}{2p}$$

mit  $a + bx + cx^2$  übereinstimmen soll, haben wir

$$n - \frac{m^2}{2p} = a, \quad \frac{m}{p} = b, \quad -\frac{1}{2p} = c$$

zu setzen, welche Erwägungen den nachstehenden Satz begründen:

Die Gleichung:  $y = a + bx + cx^2$  charakterisirt für  $c < 0$  stets eine gewöhnliche Parabel mit dem Parameter:  $2p = -\frac{1}{c}$  und den Scheitelcoordinaten:

$$m = bp = -\frac{b}{2c}, \quad n = a + \frac{m^2}{2p} = a - \frac{b^2}{4c},$$

welche, da ihre Axe mit der negativen Hälfte der Ordinatenaxe parallel und gleichgerichtet ist, in ihrer ganzen Ausdehnung concav nach unten verläuft, sich also speciell zur näherungsweise Darstellung von im gleichen Sinne concaven Curvenstücken verwenden lässt.

Hiebei gelten für die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Parabel mit der Ordinaten- und Abscissenaxe dieselben Formeln wie im ersten Unterfalle, weil die Bestimmungsgleichungen von  $m$ ,  $n$ ,  $-2p$  mit jenen von  $m$ ,  $n$ ,  $+2p$  für  $c > 0$  zusammenfallen, wogegen die geometrische Deutung der Resultate der veränderten Lage der Curve Rechnung zu tragen hat. — Im Gegensatze zum ersten Unterfalle durchschneidet nämlich die Parabel die Abscissenaxe nur dann, wenn ihr Scheitel  $S$  (vgl. Fig. 6) über der letzteren gelegen ist, berührt für  $n = 0$  dieselbe Axe nicht von oben, sondern von unten und hat mit ihr für negative Werthe von  $n$  keinen einzigen Punkt gemein.

Wir haben jetzt noch zu erörtern, mit welchem parabolischen Bogen ein gegebenes, convex oder concav nach unten verlaufendes Curvenstück, welches speciell der Begrenzung eines zu berechnenden Flächenstreifens angehört, am zweckmässigsten vertauscht werden kann.

Es kommt dann vor Allem die Forderung in Betracht, dass der Gesamteinhalt der betreffenden Fläche durch diese Vertauschung eine möglichst geringe Änderung erfahren soll, mithin der einzuführende parabolische Bogen nicht nur beide Endpunkte des Curvenstückes, sondern auch jenen Punkt des letzteren enthalten muss, welcher von der Sehne des Curvenstückes am weitesten entfernt liegt. — Sobald jedoch die drei Curvenpunkte einer Parabel einverleibt werden, bestehen zwischen deren Coordinaten: \*)

$x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$  kraft der allgemeinen Gleichung (3) die Relationen:

$$y_1 = a + bx_1 + cx_1^2, \quad y_2 = a + bx_2 + cx_2^2, \quad y_3 = a + bx_3 + cx_3^2,$$

welche von Fall zu Fall eine sehr einfache Berechnung der für die fragliche Parabel charakteristischen Specialwerthe von  $a$ ,  $b$ ,  $c$  gestatten. Bilden wir nämlich die Differenzen:

$$y_2 - y_1 = b(x_2 - x_1) + c(x_2^2 - x_1^2), \quad y_3 - y_2 = b(x_3 - x_2) + c(x_3^2 - x_2^2),$$

\*) Hier sowie im folgenden Paragraphen erfolgt die Bezeichnungweise im Sinne der wachsenden Abscissen, so dass der längsten Abscisse stets der höchste Stellenzeiger zukommt.

so liefert deren Division durch  $x_2 - x_1$  und  $x_3 - x_2$  direct die elementaren Beziehungen:

$$b + c(x_2 + x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = q_1, \quad b + c(x_3 + x_2) = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = q_2.$$

Hieraus ergibt sich nach Ermittlung der Quotienten  $q_1, q_2$  zunächst für  $c$  der Ausdruck:

$$c = \frac{q_2 - q_1}{x_3 - x_1},$$

worauf die beiden übrigen Constanten der Reihe nach aus den Formeln:

$$b = q_1 - c(x_2 + x_1), \quad a = y_1 - x_1(b + cx_1)$$

bestimmbar sind, und die Substitution der auf solche Art gewonnenen Specialwerthe von  $a, b, c$  in die Relationen für  $y_2$  und  $y_3$  schliesslich eine Controlle für die Richtigkeit der Rechnung ermöglicht.

### §. 3.

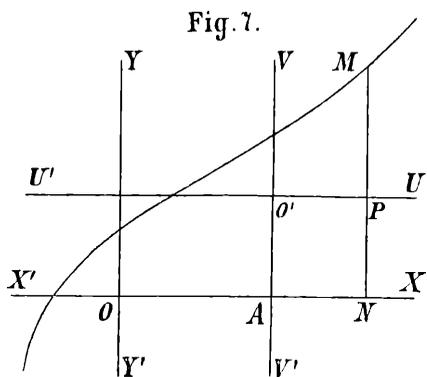
Aus der ersten Verallgemeinerung der Grundgleichung (1) lässt sich nunmehr die nächst höhere durch Wiederholung jenes Verfahrens ableiten, welches von (1) auf (3) geführt hat. Indem hiebei an die Stelle von  $a, b, c$  die Binome:  $a_0 + a_1 x, b_0 + b_1 x, c_0 + c_1 x$  treten, wird  $y$  gleich:

$$a_0 + a_1 x + (b_0 + b_1 x)x + (c_0 + c_1 x)x^2 = a_0 + (a_1 + b_0)x + (b_1 + c_0)x^2 + c_1 x^3,$$

oder im Anschluss an die Bezeichnungweise der Constanten in (1) und (3):

$$(8) \quad y = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

welche Relation nur für  $d = 0$  mit (3) zusammenfällt, für  $d \geq 0$  jedoch durchwegs parabolische Curven dritten Grades charakterisirt.



Um deren Beschaffenheit näher zu detailliren, erscheint es vor Allem geboten, die Punkte jeder solchen Curve auf ein neues Coordinatensystem (Fig. 7) zu beziehen, dessen Axen:  $UU', VV'$  zu  $XX', YY'$  parallel laufen. Nur der neue Coordinatenursprung  $O'$  mag einstweilen noch unbestimmte Coordinaten:  $OA = m, AO' = n$  erhalten, um dieselben in der Folge so wählen zu können, dass die vorgelegte Gleichung (8) sich für die neuen Coordinaten:  $O'P = u, MP = v$  des beliebigen Curvenpunktes  $M$  möglichst vereinfacht.

Da zwischen  $u, v$  und den ursprünglichen Coordinaten:  $ON = x, MN = y$  desselben Punktes  $M$  nach Fig. 7 augenscheinlich die Beziehungen:

$$x = OA + AN = OA + O'P = m + u, \quad y = NP + MP = AO' + MP = n + v$$

bestehen, erhält (8) bei Einführung der neuen Coordinaten zunächst die Gestalt:

$$\begin{aligned} n + v &= a + b(m + u) + c(m + u)^2 + d(m + u)^3 = \\ &= a + bm + cm^2 + dm^3 + (b + 2cm + 3dm^2)u + (c + 3dm)u^2 + du^3, \end{aligned}$$

wonach die gewünschte Vereinfachung eintritt, wenn wir die beiden disponiblen Constanten:  $m, n$  den Bedingungen:

$$c + 3dm = 0, \quad n = a + bm + cm^2 + dm^3$$

unterwerfen und die den letzteren entsprechenden Werthe von  $m$  und  $n$ :

$$(9) \quad m = -\frac{c}{3d}, \quad n = a - \frac{bc}{3d} + \frac{2c^3}{27d^2}$$

in die umgeformte Gleichung (8) substituiren. Wird dann noch aus dem Coëfficienten von  $u$  der Factor  $d$  herausgehoben, und der Kürze wegen:

$$3m^2 + \frac{2cm}{d} + \frac{b}{d} = \frac{3bd - c^2}{3d^2} = e$$

gesetzt, so reducirt sich (8) auf:

$$(10) \quad v = de u + d u^3 = d u (u^2 + e)$$

und kann daher — unter  $k, k'$  die jeweiligen Zahlenwerthe der Constanten  $d, e$  verstanden — im Ganzen lediglich folgende vier Formen annehmen:

$$v = k u (u^2 + k'), \quad v = k u (u^2 - k'); \quad v = -k u (u^2 + k'), \quad v = -k u (u^2 - k').$$

Hiebei sind die dritte und vierte Gleichungsform aus der ersten und zweiten durch Vertauschung von  $+v$  mit:  $-v$  direct ableitbar, d. h. es lassen sich die zugehörigen Curven mit jenen der ersten und zweiten Gleichungsform durch eine halbe Umdrehung um die Abscissenaxe  $UU'$  stets zur Deckung bringen, womit die Discussion von (8) analog wie jene von (3) auf zwei Unterfälle:  $e = +k', e = -k'$  zurückgeführt erscheint.

Die Erledigung beider Unterfälle gestaltet sich am einfachsten, wenn wir neben dem Verhalten von  $v$  für von 0 bis  $\infty$  zunehmende Werthe von  $u$  noch die gleichzeitigen Änderungen jener Winkel in Betracht ziehen, welche die geometrischen Tangenten der aufeinanderfolgenden Curvenpunkte mit der Abscissenaxe  $UU'$  einschliessen.

Wie aus der schematischen Fig. 8 unmittelbar hervorgeht, wird jede beliebige

Sekante  $SS'$  einer gegebenen Curve zu einer Tangente  $TT'$ , sobald wir diese Sekante um einen ihrer Schnittpunkte — etwa um  $M$  — so lange drehen, bis der zweite Schnittpunkt  $M'$  mit dem ersten zusammenfällt, und demgemäss auch die einander entsprechenden Coordinaten von  $M$  und  $M'$ :

$$O' N = u, \quad O' N' = u';$$

$$M N = v, \quad M' N' = v'$$

paarweise gleich werden. Gleichzeitig geht der von  $SS'$  mit der Abscissenaxe gebildete Winkel  $\varphi$  in den Tangentenwinkel  $\tau$  über, der mithin in allen jenen Fällen elementar bestimmbar bleibt, in welchen die keiner Erläuterung bedürftige Gleichung:

$$(11) \quad \text{tg } \varphi = \text{tg } M' M P = \frac{M' P}{M P} = \frac{v' - v}{u' - u}$$

allgemein eine restlose Ausführung der rechter Hand angezeigten Division gestattet. Das Letztere ist in der That der Fall, wenn beide Schnittpunkte:  $M, M'$  speciell einer durch die Relation (10) charakterisirten Curve angehören, und zwar ergibt sich nach Einführung des hier geltenden Ausdrucks:

$$v' - v = d e (u' - u) + d (u'^3 - u^3)$$

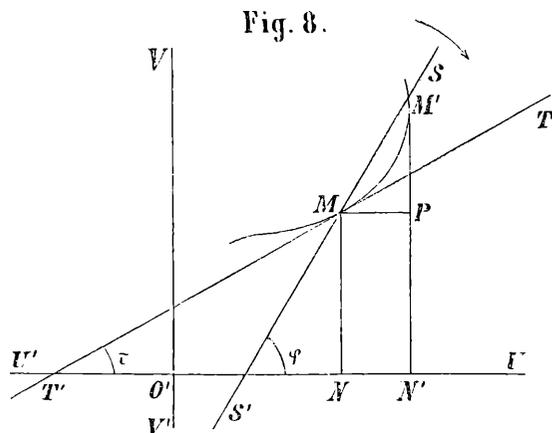
in (11) für  $\text{tg } \varphi$  die einfache Formel:

$$\text{tg } \varphi = d e + d (u'^2 + u u' + u^2),$$

welche für  $u' = u$  die fragliche Bestimmungsgleichung von  $\tau$  in der Gestalt:

$$(12) \quad \text{tg } \tau = d (3 u^2 + e)$$

liefert. Die vorstehenden Resultate vermitteln nunmehr folgende speciellere Ergebnisse, bei welchen die Constante  $d$  aus bereits angegebenen Gründen als eine wesentlich positive Grösse aufzufassen ist:

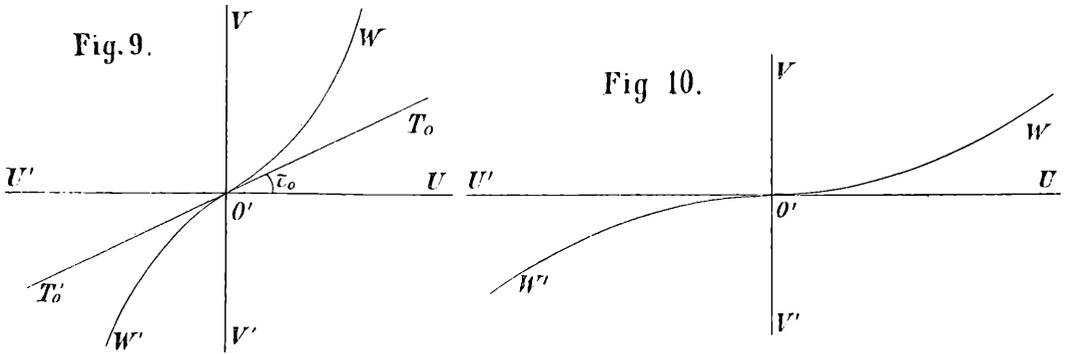


**Erster Unterfall:  $e = + k'$ .**

Die beiden dieser Annahme entsprechenden Specialformen der Gleichungen (10) und (12):

$$v = d u (u^2 + k'), \quad \text{tg } \tau = d (3 u^2 + k')$$

lassen zunächst erkennen, dass  $v$  gleichzeitig mit  $u$  verschwindet, also der neue Koordinatenursprung  $O'$  selbst ein Punkt der Curve ist, dessen geometrische Tangente  $T_0 T_0'$  (Fig. 9) mit der Abscissenaxe  $U U'$  einen aus der Formel:  $\text{tg } \tau_0 = d k'$  bestimmaren spitzen Winkel  $\tau_0$  einschliesst. Je grössere positive Werthe  $u$  annimmt, desto grösser werden auch  $v$  und  $\text{tg } \tau$ , wobei jede beliebige Specialisirung von  $u$  je einen Specialwerth von  $v$  liefert, und für  $u = + \infty$  mit  $v$  auch  $\text{tg } \tau$  in's Unendliche wächst, d. h. der Tangentenwinkel  $\tau$  nähert sich stetig seinem oberen Grenzwerte:  $90^\circ$ .



Es besteht demnach der rechts von der Ordinatenaxe  $VV'$  gelegene Zweig  $O'W$  der Curve aus einem einzigen in  $O'$  entspringenden Bogen, welcher stetig bis zu unendlich grosser Höhe über die Abscissenaxe sich erhebt und in seiner ganzen Ausdehnung *convex nach unten* verläuft, indem sich die Tangenten seiner aufeinanderfolgenden Punkte immer steiler aufrichten und für  $u = + \infty, v = + \infty$  die Abscissenaxe senkrecht durchschneiden.

Da ferner  $v$  bei Vertauschung von  $u$  mit  $-u$  in:

$$d (-u) \{(-u)^2 + k'\} = -d u (u^2 + k') = -v$$

übergeht, folglich numerisch gleichen, aber entgegengesetzt bezeichneten Specialwerthen von  $u$  ebenso geartete Specialisirungen von  $v$  zugehören, bleibt der zweite links von  $VV'$  gelegene Curvenzweig  $O'W'$  dem ersten *congruent* und wird auch seiner Lage nach erhalten, wenn man den ersten Zweig um dessen Anfangspunkt  $O'$  in der Ebene beider Coordinatenaxen um  $180^\circ$  dreht. Auf solche Art verläuft die Curve links von der Ordinatenaxe in ihrer ganzen Ausdehnung *concav nach unten* und besitzt einen einzigen Wendepunkt  $O'$  mit dem charakteristischen Tangentenwinkel  $\tau_0$ , so dass speciell für  $k' = 0$  die Abscissenaxe  $UU'$  zugleich die Tangente beider Curvenzweige  $O'W, O'W'$  (Fig. 10) in ihrem gemeinsamen Anfangspunkte  $O'$  bildet. In diesem Sinne erscheint die correspondirende Vereinfachung von (10):

$$(13) \quad v = d u^3$$

als die elementarste Relation, deren geometrische Deutung bereits auf Curven mit je einem Wendepunkte führt, und schliesst sich formal eng an die Beziehung (4) an, in welcher der Factor von  $u^2$  für  $c > 0$  bekanntlich ebenfalls den Coefficienten der höchsten Potenz von  $x$  in der umzuformenden Grundgleichung zwischen  $x$  und  $y$  bedeutet.

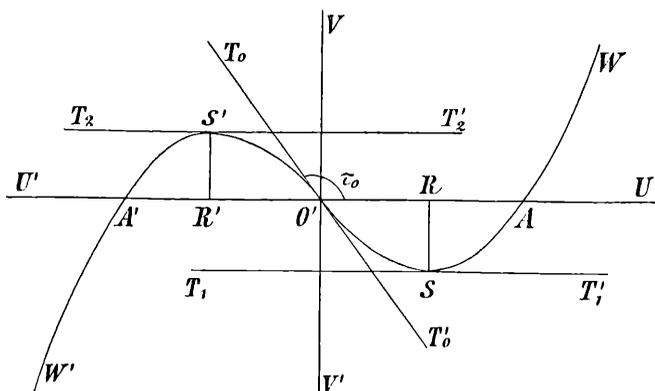
**Zweiter Unterfall:  $e = -k'$ .**

Da beide hier geltenden Relationen allgemein die Schreibweise:

$$v = du (u^2 - k') = du (u - \sqrt{k'}) (u + \sqrt{k'}),$$

$$\operatorname{tg} \tau = d(3u^2 - k') = d(u\sqrt{3} - \sqrt{k'}) (u\sqrt{3} + \sqrt{k'})$$

**Fig. 11.**



gestatten, wird ohne jede Rechnung ersichtlich, dass  $v$  im Ganzen dreimal,  $\operatorname{tg} \tau$  hingegen zweimal verschwindet, sobald die veränderliche Abscisse  $u$  der Reihe nach alle Werthe von  $-\infty$  bis  $+\infty$  annimmt. Die zugehörige Curve  $W'O'W'$  (Fig. 11) durchschneidet daher die Abscissenaxe  $U'U$  nicht nur im Ursprunge  $O'$  des neuen Coordinatensystems, sondern auch noch in zwei anderen Punkten:  $A, A'$  mit den Abscissen:

$$u_1 = O'A = +\sqrt{k'},$$

$$u_2 = O'A' = -\sqrt{k'}$$

und besitzt unähnlich der gemeinen Parabel zwei durch ihre Coordinaten:

$$u' = O'R = +\sqrt{\frac{1}{3}k'}, \quad v' = RS = -\frac{2}{3}dk'\sqrt{\frac{1}{3}k'};$$

$$u'' = O'R' = -\sqrt{\frac{1}{3}k'}, \quad v'' = R'S' = +\frac{2}{3}dk'\sqrt{\frac{1}{3}k'}$$

bestimmte Scheitel:  $S, S'$ , deren geometrische Tangenten:  $T_1 T_1', T_2 T_2'$  zur Abscissenaxe parallel laufen.

Hiebei entspricht die angegebene Tangentenlage gleichzeitig zwei Specialwerthen von  $\tau$ :  $\tau_1 = 0^\circ, \tau_2 = 180^\circ$ , bildet also speciell für  $T_1 T_1'$  beim Übergange vom Curvenpunkte  $O'$  zu  $S$  die Grenzlage der Tangenten aller Zwischenpunkte, deren stumpfe Winkel mit  $U'U$  sich von ihrem durch die Gleichung:  $\operatorname{tg} \tau_0 = -dk'$  gegebenen Anfangswerthe  $\tau_0$  stetig bis  $180^\circ$  vergrössern. Dagegen erscheint  $T_1 T_1'$  als Anfangslage für die Tangenten der rechts von  $S$  liegenden Curvenpunkte, indem  $\operatorname{tg} \tau$  für  $u > u'$  ununterbrochen von 0 bis  $+\infty$  zunimmt, mithin  $\tau$  für diese Punkte einen von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  wachsenden spitzen Winkel vorstellt.

Auf solche Art verläuft der rechts von  $V'V'$  gelegene Curvenzweig  $O'W$  in seiner ganzen Ausdehnung convex nach unten und besitzt von  $u = 0$  bis  $u = u_1$  lauter negative Ordinaten, unter welchen jene seines Scheitels  $S$  die längste ist, während die positiven Ordinaten der übrigen Punkte zugleich mit ihren Abscissen in's Unendliche wachsen. Da ferner eine Vertauschung von  $u$  mit:  $-u$  nur das Zeichen, nicht aber den jeweiligen numerischen Werth von  $v$  ändert, lässt sich der zweite Curvenzweig  $O'W'$  seiner Form und Lage nach aus  $O'W$  durch genau dieselbe Drehung um  $O'$  wie im ersten Unterfalle erzeugen und verläuft infolgedessen durchwegs concav nach unten, so dass  $O'$  nach wie vor den einzigen Wendepunkt der ganzen Curve bildet, dessen Coordinaten in Bezug auf das ursprüngliche Axenpaar ebenso wie für  $e = +k'$  aus den Formeln (9) zu berechnen sind.

Durch passende Wahl der in  $u', u''; v', v''$  auftretenden Constanten  $d$  und  $k'$  kann der Abstand  $SS'$  beider Curvenscheitel offenbar nach Belieben vergrössert oder verkleinert, und

hiedurch die jeweilige Krümmung des Bogens  $S O' S'$  zweckdienlich variiert werden, wobei nur das Verhältnis:

$$\frac{O' R}{O' A} = \frac{O' R'}{O' A'} = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0.5773503$$

constant, und zwar in erster Annäherung gleich  $\frac{15}{26}$  bleibt.

Lassen wir schliesslich, ohne den Werth von  $d$  zu ändern, speciell  $k'$  mehr und mehr abnehmen, so rücken beide Curvenscheitel:  $S, S'$  unter gleichzeitiger Verkleinerung ihrer Coordinaten dem Wendepunkte  $O'$  stetig näher und fallen für  $k' = 0$  vollständig mit demselben zusammen, wobei der Winkel seiner Tangente mit der Abscissenaxe vermöge der Relation:  $\operatorname{tg} \tau_0 = -d k'$  ebenfalls gleich Null wird. Es verwandeln sich mithin die hier untersuchten Curven gleich jenen des ersten Unterfalles für  $k' = 0$  in krumme Linien von derselben durch Fig. 10 veranschaulichten Gestalt, womit auch der geometrische Zusammenhang zwischen beiden Curvengruppen genügend klargelegt erscheint.

Im Gegensatze zur gewöhnlichen Parabel erstreckt sich jede der Grundgleichung (8) entsprechende parabolische Curve dritten Grades nach oben und unten in's Unendliche, durchschneidet also bei positivem  $e$ , d. h. für  $c^2 < 3 b d$  die Abscissenaxe  $XX'$  (vgl. die Fig. 7 und 9) in einem einzigen Punkte. Dagegen können für  $c^2 > 3 b d$  entweder noch der Scheitel oder zwei auf entgegengesetzten Seiten des letzteren gelegene Punkte des zweiten Curvenzweiges der Axe  $XX'$  angehören, weil  $XX'$  sich durch fortgesetzte Parallelverschiebung (vgl. die Fig. 7 und 11) längs der Axe  $YY'$  augenscheinlich sowohl in die Lagen der Tangenten  $T_1 T_1', T_2 T_2'$  als auch in jede Zwischenlage bringen lässt.

Hiebei genügt die graphische Darstellung der Curve  $W O' W'$  auf Grundlage der einfachen Relation (10), um zunächst für die Abscisse  $u$  jedes gemeinsamen Punktes von  $XX'$  und  $W O' W'$  im neuen Axensystem einen solchen Näherungswerth:  $t$  zu erhalten, dass die zweite und dritte Potenz des verbleibenden Unterschiedes:  $u - t = \delta$  ohne merklichen Fehler vernachlässigt, beziehungsweise

$$u^3 = (t + \delta)^3 \text{ mit: } t^3 + 3 t^2 \delta$$

vertauscht werden darf. Gleichzeitig muss die ursprüngliche Ordinate desselben Punktes:  $y = n + v$  verschwinden, d. h.:

$$n + d u (u^2 + e) = 0 \text{ oder: } u^3 + e u = -\frac{n}{d} = n'$$

werden, welche Gleichung vermöge der Werthe von  $u$  und  $u^3$  in:

$$t^3 + 3 t^2 \delta + e (t + \delta) = n'$$

übergeht, mithin zur Berechnung der fraglichen Correctur  $\delta$  die Formel:

$$(14) \quad \delta = \frac{n' - t (t^2 + e)}{3 t^2 + e}$$

liefert. Der zugehörige Werth von  $x$  ergibt sich dann aus der Beziehung:

$$(15) \quad x = m + u = t + \delta - \frac{c}{3 d},$$

während der einzige jeweilige Schnittpunkt der Curve  $W O' W'$  mit der ursprünglichen Ordinatenaxe  $YY'$  wie bei der gewöhnlichen Parabel unmittelbar durch die erste Constante:  $a$  der Grundgleichung (8) bestimmt bleibt.

Da neben  $a$  in (8) noch drei weitere disponible Coëfficienten:  $b, c, d$  auftreten, können die Constanten dieser Gleichung von Fall zu Fall derart specialisirt werden, dass der als Näherungcurve dienende parabolische Bogen dritten Grades nicht allein durch beide Endpunkte  $A, B$  und den Wendepunkt  $C$  des gegebenen Curvenstückes hindurchgeht, sondern auch

einen beliebigen weiteren Punkt des letzteren in sich aufnimmt. Um hierüber eine bestimmte Entscheidung zu treffen, verbinden wir  $C$  mit  $A$  und  $B$  durch Sehnen und wählen als vierten Punkt der Näherungcurve jenen, welcher von der längeren Sehne am weitesten entfernt liegt.

Sind dann  $x_1, x_2, x_3, x_4$  die Abscissen und  $y_1, y_2, y_3, y_4$  die Ordinaten der vier gewählten Punkte, so muss bei Einbeziehung derselben in den parabolischen Bogen dritten Grades zunächst zwischen den Coordinaten des ersten Punktes die Relation:

$$y_1 = a + b x_1 + c x_1^2 + d x_1^3$$

bestehen, aus welcher sich die Beziehungen zwischen den Coordinaten der drei übrigen Punkte bei der hier eingeführten Symbolik unmittelbar durch Vertauschung des Stellenzeigers 1 mit 2, 3, 4 ergeben. Infolgedessen hängen die Quotienten:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = q_1, \quad \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = q_2, \quad \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = q_3$$

nur mehr von  $b, c, d$  ab, wobei die charakteristischen Gleichungen für  $q_2$  und  $q_3$  aus jener für  $q_1$

$$b + c(x_2 + x_1) + d(x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2) = q_1$$

durch Erhöhung aller Stellenzeiger um 1 respective 2 hervorgehen. Es entfällt daher aus den Differenzen:  $q_2 - q_1, q_3 - q_2$  auch die zweite Constante  $b$ , so dass nach Division der ersteren durch  $x_3 - x_1, x_4 - x_2$  die einfachen Relationen:

$$c + d(x_3 + x_2 + x_1) = \frac{q_2 - q_1}{x_3 - x_1} = q'$$

$$c + d(x_4 + x_3 + x_2) = \frac{q_3 - q_2}{x_4 - x_2} = q''$$

übrig bleiben. Dieselben liefern für die vierte und dritte Constante die Ausdrücke:

$$d = \frac{q'' - q'}{x_4 - x_1}, \quad c = q' - d(x_3 + x_2 + x_1),$$

worauf sich  $b$  und  $a$  aus den Formeln:

$$b = q_1 - c(x_2 + x_1) - d(x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2)$$

$$a = y_1 - x_1(b + c x_1 + d x_1^2)$$

berechnen lassen. Schliesslich kann die Richtigkeit der ganzen Constantenbestimmung noch durch Substitution der gefundenen Specialwerthe von  $a, b, c, d$  in die für  $y_2, y_3, y_4$  bestehenden Grundgleichungen geprüft werden.

#### §. 4.

Nachdem hiemit gezeigt worden ist, in welcher Weise sich irgend welche Stücke von ebenen Curven bis zu der in unseren Vorbemerkungen präcisirten Grenze angenähert durch Bögen von möglichst einfachen Gleichungen ersetzen lassen, erscheint es mit Rücksicht auf das Problem der Stammcubirung noch geboten, die unmittelbar aus den drei wichtigsten Specialformen von (1), (3) und (8)  $y = b x, y = c x^2, y = d x^3$  entspringende Verallgemeinerung:

$$(16) \quad y = A x^r$$

näher zu untersuchen. Die beiden disponiblen Constanten:  $A, r$  dieser Gleichung sind bereits aus den Coordinaten der Endpunkte des betreffenden Curvenstückes:  $x_1, y_1; x_2, y_2$  bestimmbar, wobei die Coordinatenaxen stets derart gelegt werden können, dass alle Punkte desselben positive Coordinaten erhalten. Es bleibt dann auch  $A$  wesentlich positiv, während der Exponent  $r$  jeden beliebigen reellen Werth anzunehmen vermag. — Soll nämlich  $y$  für  $x = x_1, x_2$  mit:  $y_1, y_2$  zusammenfallen, d. h.:

$$y_1 = A x_1^r, \quad y_2 = A x_2^r$$

werden, so gelten für die Brigg'schen Logarithmen beider Ordinaten die Relationen:

$$\log y_1 = \log A + r \log x_1, \quad \log y_2 = \log A + r \log x_2,$$

deren Auflösung nach  $r$  und  $\log A$  die Ausdrücke:

$$(17) \quad \begin{cases} r = (\log y_2 - \log y_1) / (\log x_2 - \log x_1) \\ \log A = \log y_1 - r \log x_1 = \log y_2 - r \log x_2 \end{cases}$$

liefert. Vermöge des Umstandes, dass  $x_2$  wie früher die grössere der beiden Abscissen bezeichnet, hängt das Zeichen von  $r$  mithin nur davon ab, ob  $y_2$  grösser oder kleiner als  $y_1$  ist, ob also das betreffende Curvenstück einem steigenden oder fallenden Bogen angehört. Im ersten Falle erhält der Exponent  $r$  das positive, im zweiten das negative Zeichen und wird als Quotient zweier zumeist irrationaler Zahlen gemeiniglich nur näherungsweise durch eine ganze oder gebrochene Zahl auszudrücken sein. \*)

Hieraus geht hervor, dass  $r$  im Ganzen sechs verschiedene Formen:

$$\pm \frac{2m-1}{2n-1}, \quad \pm \frac{2m}{2n-1}, \quad \pm \frac{2m-1}{2n}$$

besitzen kann, von welchen die ersten vier speciell für  $n = 1, m = 1, 2, 3$  etc. die Reihe der ungeraden und geraden ganzen Zahlen liefern, wogegen die Einbeziehung beliebiger positiver ganzer Zahlen für  $m$  und  $n$  in sämtlichen sechs Formen alle überhaupt vorkommenden Brüche ergibt. Vertauschen wir ferner in den letzten zwei Fällen beide Coordinatenachsen mit einander, wodurch die Gleichung (16) in  $x = A y^r$  übergeht, so wird die Ordinate jedes Curvenpunktes:

$$y = \left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{x}{A}\right)^{\pm \frac{2n}{2m-1}}$$

wie im dritten und vierten Falle einer Potenz von  $x$  proportional, deren Exponent bei ungeradem Nenner einen geraden Zähler aufweist. Aus diesem Grunde entsprechen auch die zugehörigen Curven jenen des dritten und vierten Falles, wonach bei einer Discussion der durch (16) charakterisierbaren sogenannten Potenzcurven lediglich die ersten vier Exponentenformen in Betracht kommen.

Ist  $r$  speciell eine ungerade Zahl oder ein Quotient zweier ungerader Zahlen, so erhält die Abscisse:  $-x$  die Ordinate:

$$\bar{y} = A(-x)^r = -Ax^r = -y,$$

während bei den zwei übrigen Exponentenformen kraft der Identität:  $(-x)^2 = +x^2$  auch das Zeichen der Ordinate dasselbe bleibt. Alle zu untersuchenden Curven bestehen daher aus je zwei congruenten Zweigen, welche entweder dem ersten und dritten oder dem ersten und zweiten Quadranten des gewählten rechtwinkligen Coordinatensystems angehören, mithin bezüglich ihrer Gestalten vollkommen bekannt sind, sobald ihr Verlauf für positive Werthe von  $x$  festgestellt erscheint.

Die nähere Charakteristik desselben erfordert nunmehr noch die Berechnung jenes Winkels  $\tau$ , welchen die Tangente irgend eines Curvenpunktes mit der Abscissenaxe bildet, wobei wir mit Bezugnahme auf Fig. 8 wie in §. 3 von der goniometrischen Tangente des Sekantenwinkels  $\varphi$  ausgehen, jedoch die ursprünglichen Coordinatenachsen beibehalten, so dass den Curvenpunkten  $M, M'$  gemäss der Beziehung (16) die Coordinaten:

$$u = x, v = y = Ax^r \quad u' = x', v' = y' = Ax'^r$$

\*) Da jede Rechnung auf eine endliche Anzahl von Decimalen beschränkt bleibt, entfällt für die mathematische Praxis eine gesonderte Untersuchung irrationaler Zahlen.

zukommen. Der Relation (11) entspringt dann unter Einführung der Hilfsgrösse:  $z = x : x'$  die einfache Formel:

$$(18) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{A x'^r - A x^r}{x' - x} = A x'^{r-1} \left( \frac{1 - z^r}{1 - z} \right),$$

welche sich für  $x' = x$ ,  $z = 1$  direct in eine Bestimmungsgleichung für  $\operatorname{tg} \tau$  verwandelt, falls der zugehörige Specialwerth des Factors von  $A x'^{r-1}$  für  $z = 1$  und beliebige reelle Exponenten  $r$  bestimmbar bleibt.

Zu diesem Zwecke haben wir nur zwischen positiven ganzen, positiven gebrochenen und beliebigen negativen Specialisirungen von  $r$  zu unterscheiden und die durch Ausführung der angezeigten Multiplication unmittelbar erweisliche Identität:

$$(1 + z + z^2 + \dots + z^{r-1})(1 - z) = 1 - z^r$$

passend anzuwenden. Dieselbe lehrt vor Allem, dass der fragliche Factor für jedes positive ganze  $r$  der Summe:

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{r-1}$$

äquivalent ist, deren  $r$  Glieder für  $z = 1$  insgesamt der Einheit gleich werden, womit die wichtige Beziehung:

$$(19) \quad \operatorname{tg} \tau = A r x'^{r-1}$$

vorläufig für die erste Werthreihe von  $r$  ihre Begründung gefunden hat.

Entspricht dieser Exponent ferner irgend einem positiven echten oder unechten Bruche  $p : q$ , so gehen die Differenzen:  $1 - z$  und  $1 - z^r$  durch Substitution des jeweiligen numerischen Werthes von  $\sqrt[q]{z} = w$  offenbar in  $1 - w^q$  und  $1 - w^p$  über, wonach sich

$$\frac{1 - z^r}{1 - z} = \frac{1 - w^p}{1 - w^q}$$

durch Streichung des gemeinsamen Factors  $1 - w$  im Dividend und Divisor auf:

$$\frac{1 + w + w^2 + \dots + w^{p-1}}{1 + w + w^2 + \dots + w^{q-1}}$$

reducirt und daher für  $z = 1$ ,  $w = \sqrt[q]{1} = 1$  wieder dem Exponenten  $p : q = r$  gleich wird.

Ersetzen wir endlich die Grösse  $r$  durch eine beliebige negative Zahl:  $-k$  und consequent  $z^r$  durch  $z^{-k} = 1 : z^k$ , so gestattet der Factor von

$$A x'^{r-1} = A x'^{-k-1} = \frac{A}{x'^{k+1}}$$

allgemein die Darstellungsweise:

$$\frac{1 - z^r}{1 - z} = - \frac{1}{z^k} \left( \frac{1 - z^k}{1 - z} \right),$$

welcher Ausdruck für  $z = 1$  gemäss beiden früheren Ergebnissen den Werth:  $-k$  annimmt, d. i. die Gleichung (19) gilt in der That auch für gebrochene und negative Specialisirungen von  $r$ .

Im letzteren Falle, also für:

$$y = \frac{A}{x^k} \text{ wächst } \operatorname{tg} \tau = - \frac{A k}{x^{k+1}}$$

bei von 0 bis  $+\infty$  zunehmendem  $x$  augenscheinlich für beliebige positive Werthe der Grösse  $k$  von  $-\infty$  bis 0, während unter Voraussetzung positiver Exponenten deshalb eine Gliederung in zwei Unterfälle nöthig wird, weil sich  $x^{r-1} = 1 : x^{1-r}$  nur für  $r > 1$  zugleich mit  $x$  von 0 bis  $+\infty$  vergrössert, dagegen für  $r < 1$  von  $\infty$  bis 0 abnimmt.

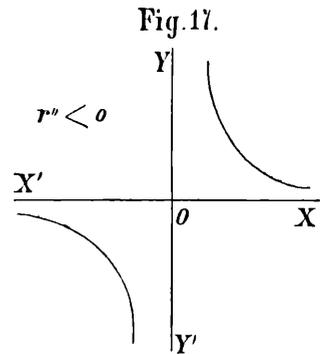
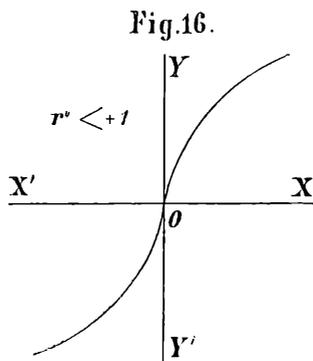
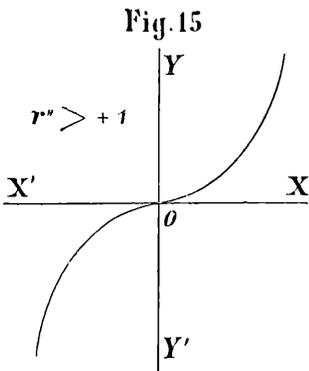
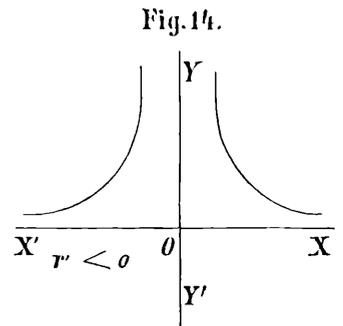
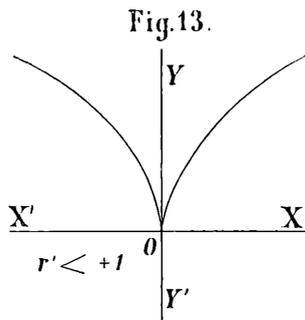
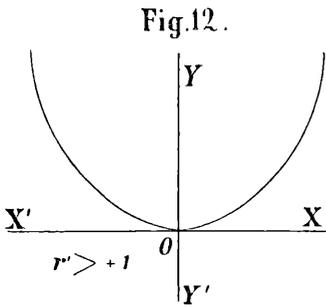
Auf solche Art besteht für die Gesamtheit aller sogenannten Potenzcurven folgendes Typenschema, welches speciell die dem ersten Quadranten des gewählten Coordinatensystems angehörigen Curvenzweige charakterisirt:

| Typus | Exponent | Ordinaten                    | Tangentenwinkel                        |
|-------|----------|------------------------------|----------------------------------------|
| A     | $r > +1$ | zunehmend von 0 bis $\infty$ | zunehmend von $0^\circ$ bis $90^\circ$ |
| B     | $r < +1$ | „ 0 $\infty$                 | abnehmend „ $90^\circ$ $0^\circ$       |
| C     | $r < 0$  | abnehmend $\infty$ „ 0       | zunehmend $90^\circ$ $180^\circ$       |

Die drei in diesem Schema vertretenen Bogentypen, nämlich convex oder concav nach unten steigende und convex fallende Curvenzweige, reproduciren sich für negative Abscissen aus bereits bekannten Gründen im zweiten oder dritten Quadranten, je nachdem  $r$  als Specialisirung von

$$\pm \frac{2m}{2n-1} = r' \quad \text{oder} \quad \pm \frac{2m-1}{2n-1} = r''$$

darstellbar ist, so dass der Verlauf sämtlicher Potenzcurven durch nachstehende zwei Gruppen schematischer Figuren gekennzeichnet wird:



Zur Veranschaulichung der allgemeinen Formverhältnisse der zweiten Curvengruppe genügt daher eine halbe Umdrehung der im zweiten Quadranten gelegenen Zweige der ersten Curvengruppe um die negative Hälfte der Abscissenaxe, wogegen der specielle Verlauf je zweier zu verschiedenen Gruppen, aber gleichem Typus gehörigen

Curven auch im ersten Quadranten deshalb ein verschiedener bleibt, weil die Exponenten  $r'$ ,  $r''$  vermöge der Bedeutung von  $m$  und  $n$  einander nie gleich werden können. Hierbei erhalten sämtliche mit demselben Parameter  $A$  versehenen Potenzcurven einen gemeinsamen Durchschnittspunkt mit der Abscisse:  $+1$  und der Ordinate:  $+A$ , während der Punkt mit den Coordinaten:  $x = -1$ ,  $y = +A$  ausschliesslich der ersten Curvengruppe und jener mit den Coordinaten:  $x = -1$ ,  $y = -A$  nur der zweiten Curvengruppe gemeinsam ist.

Um endlich aus der vorstehenden für unsere weiteren Betrachtungen zweckdienlichsten Gliederung der Potenzcurven deren einfachste geometrische Eintheilung abzuleiten, brauchen wir nur zu erwägen, dass der zu  $r''$  reciproke Exponent  $1:r''$  für  $r'' < 1$  natürlich stets grösser als 1 bleibt, dabei aber wie  $r''$  einen ungeraden Zähler und Nenner besitzt. Ertheilen wir mithin den Curven vom Typus der Fig. 15 vorerst eine halbe Umdrehung um die Abscissenaxe und drehen hierauf noch die ganze Figur in ihrer Ebene gleichsinnig mit dem Uhrzeiger um  $90^\circ$ , so werden durch Parallelverschiebung aller Axenkreuze nach einem gemeinsamen Ursprunge zugleich mit den ersteren auch sämtliche Curven von den in Fig. 15 und 16 versinnlichten Typen paarweise zur Deckung gebracht.

Alle überhaupt existirenden Potenzcurven zerfallen demnach in fünf wesentlich verschiedene Formenreihen, deren Anfangsglieder durch die einfachsten, für:

$$m = 1, n = 1; m = 1, n = 2; m = 2, n = 1$$

eintretenden Specialisirungen der Exponenten  $r'$ ,  $r''$  gebildet, also durch die Gleichungen:

$$(20) \quad y = Ax^2, \quad y = Ax^{\frac{2}{3}}, \quad y = \frac{A}{x^2};$$

$$(21) \quad y = Ax^3, \quad y = \frac{A}{x}$$

charakterisirt werden.

Da die Curven der ersten drei Formenreihen (vgl. Fig. 12, 13, 14) im Gegensatze zu jenen der vierten und fünften Formenreihe (vgl. Fig. 15, 17) symmetrisch zu beiden Seiten der Ordinatenaxe verlaufen, erscheint es behufs ihrer praktischen Verwerthung vortheilhafter, diese Axe künftighin als Abscissenaxe zu wählen, d. h. in den zugehörigen Gleichungen  $x$  mit  $y$  zu vertauschen. Lösen wir dann die entsprechenden Umformungen der Relation (20):

$$x = Ay^2, \quad x = Ay^{\frac{2}{3}}, \quad x = \frac{A}{y^2}$$

nach  $y^2$  auf, so können die Factoren  $1:A$  und  $1:A^3$  gleich der Constanten  $A$  jeden beliebigen positiven Zahlenwerth annehmen und vermöge dieser übereinstimmenden Bedeutung wieder mit demselben Symbole bezeichnet werden. Mit Rücksicht hierauf gestatten die in Rede stehenden Auflösungen auch die Schreibweise:

$$(22) \quad y^2 = Ax, \quad y^2 = Ax^3, \quad y^2 = \frac{A}{x},$$

womit die zweckmässigsten Gleichungsformen der gewöhnlichen semi-cubischen und reciproken Parabel gewonnen sind, während die Relationen (21) bereits in ihrer ursprünglichen Gestalt die praktisch brauchbarsten Gleichungsformen der sogenannten cubischen Parabel und gleichseitigen Hyperbel vorstellen.

Indem wir uns nunmehr der Frage zuwenden, ob der vergleichsweise grossen Mannigfaltigkeit von Curven, welche durch die Beziehung (16) charakterisirt sind, auch eine ebenso vielseitige Anwendbarkeit der letzteren zur näherungsweise Darstellung gegebener Curvenstücke entspricht, kommt gemäss den einleitenden Bemerkungen zur Discussion von (16) lediglich der

Verlauf der Potenzcurven im ersten Quadranten des gewählten Coordinatensystems in Betracht. — Wie nun das einschlägige Typenschema, beziehungsweise ein Vergleich sämtlicher schematischer Figuren 12--17 lehrt, gibt es keine einzige Potenzcurve, welche im ersten Quadranten einen concav nach unten fallenden Zweig besitzt, wonach die Relation (16) bei der näherungsweise Darstellung von concav nach unten fallenden Curvenstücken sogar der denkbar einfachsten Näherungsgleichung (1) an Genauigkeit nachstehen würde.

Um diese wichtige Thatsache auch durch ein Beispiel zu erläutern, seien für ein solches Curvenstück — etwa unter Zugrundelegung des Centimeters als Längeneinheit —

$$x_1 = 10, y_1 = 5.23; \quad x_2 = 11, y_2 = 4.34; \quad x_3 = 12, y_3 = 3.31$$

die Coordinaten beider Endpunkte und des von der Bogensehne am weitesten entfernten Punktes, so dass die einfachste, alle drei Punkte enthaltende Näherungcurve gemäss den Schlussformeln des §. 2 die Gleichung:

$$y = 6.43 + 0.58 x - 0.07 x^2$$

besitzt und vermöge des negativen Coefficienten von  $x^2$  wie das gegebene Bogenstück durchwegs concav nach unten fällt.

Verbinden wir dagegen die Coordinaten beider Endpunkte desselben Curvenstückes durch die Relationen (1) oder (16), so vermitteln die einschlägigen Ausdrücke zur Constantenbestimmung die speciellen Gleichungen:

$$y = 14.83 - 0.96 x, \quad y = \frac{1688.8988}{x^{2.5091019}},$$

in welchen der Abscisse:  $x_2 = 11$  an Stelle von  $y_2$  die Ordinaten:

$$y'_2 = 4.27, \quad y''_2 = 4.1175906$$

entsprechen. Hieraus resultiren für die zugehörigen Fehler die Werthe:

$$y_2 - y'_2 = +0.07, \quad y_2 - y''_2 = +0.2224094,$$

d. h. der bei Einführung von (16) entstehende Maximalfehler ist hier mehr als dreimal so gross wie bei Anwendung von (1).

Andererseits lehrt der Augenschein, dass beispielsweise bei Potenzcurven von den in Fig. 12 und 15 dargestellten Formen eine halbe Umdrehung um die Abscissenaxe zur Erzeugung beliebiger concav nach unten fallenden Bögen im vierten Quadranten genügt. Denken wir uns mithin ein zugleich mit der betreffenden Curve bewegliches Axenkreuz aus seiner mit den gegebenen Coordinatenaxen zusammenfallenden Anfangslage parallel zu sich selbst beliebig verschiebbar, so lassen sich die in Rede stehenden Curvenbögen ohneweiters in den Quadranten  $XOY$  übertragen und daselbst zur näherungsweise Darstellung gegebener Curvenstücke verwenden. Bei jeder derartigen Verschiebung muss jedoch gleichzeitig der Ursprung des beweglichen Axenkreuzes in Bezug auf das fixe Coordinatensystem irgend welche Coordinaten:  $x = m$ ,  $y = n$  erhalten, wonach die Relation (16) nicht mehr zwischen  $x$  und  $y$ , sondern zwischen  $x - m$  und  $y - n$  fortbesteht, d. h. für die neue Curvenlage wird allgemein:

$$(23) \quad y - n = A (x - m)^r.$$

Aber die Bestimmung der vier disponiblen Grössen:  $A$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $r$  wäre hier infolge des Auftretens einer Grösse als Exponent:  $r$  so schwierig, dass der letztere nunmehr nothgedrungen möglichst einfach specialisirt werden muss. Es entfallen daher für  $r$  von vornherein negative und gebrochene Zahlen wegen allzu grosser Complication, und selbst die positiven ganzen Zahlen bleiben in Anbetracht der praktischen Unbrauchbarkeit vielgliedriger Ausdrücke auf 1, 2 und 3 eingeschränkt.

Auf solche Art ergeben sich schliesslich nur drei allgemein verwendbare Specialformen von (23):

$$y = n + A(x - m); \quad y = n + A(x - m)^2; \quad y = n + A(x - m)^3,$$

welche, wie die Substitutionen:

$$a = n - Am, \quad b = A; \quad a = n + Am^2, \quad b = -2Am, \quad c = A; \\ a = n - Am^3, \quad b = 3Am^2, \quad c = -3Am, \quad d = A$$

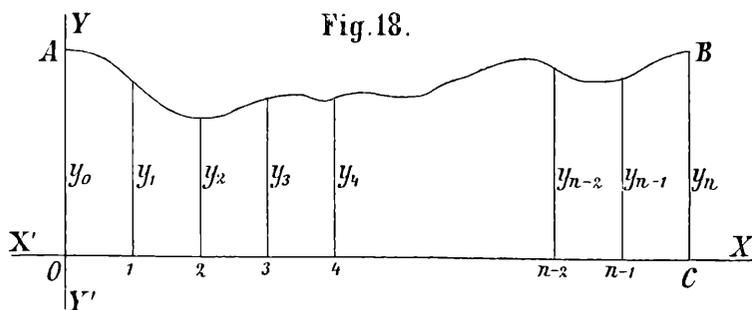
in den Gleichungen (1), (3) und (8) unmittelbar erkennen lassen\*), zugleich Specialfälle dieser Relationen vorstellen.

Gemäss den vorstehenden Erwägungen werden wir bei den in der Folge abzuleitenden allgemeinen Ausdrücken zur näherungsweise Flächen- und Körperberechnung principiell nicht über die Beziehung (8) hinausgehen und daher die ausschliesslich mit der Gleichung (16) zusammenhängenden Flächen- wie Volumformeln gesondert behandeln.

### §. 5.

Auf Grundlage unserer bisherigen Resultate lässt sich nunmehr das Problem der näherungsweise Berechnung ebener, krummlinig begrenzter Flächen völlig elementar erledigen, falls wir uns hiebei auf jene praktisch allein in Betracht kommenden Grenzcurven beschränken, welche über der ganzen Basis  $OC = l$  der betreffenden Fläche:  $OABC = F$  (vgl. die schematische Fig. 18) ohne Ecken resp. Spitzen verlaufen und für jede Abscisse  $x$  nur je eine positive Ordinate  $y$  besitzen.

Ob gleichzeitig zwischen  $x$  und  $y$  auch eine mathematisch präcisirbare



Relation besteht, bleibt völlig ungewiss, wonach von vornherein nur solche Lösungen der vorgelegten Aufgabe praktisch brauchbar erscheinen, in welche lediglich der directen Messung zugängliche Grössen, wie Abscissen und Ordinaten, nicht aber die Con-

stanten irgend welcher Curvengleichungen eintreten. Denken wir uns demgemäss die Flächenbasis  $l$  in irgend eine Anzahl:  $n$  aliquoter gleicher Theile zerlegt und in allen Theilpunkten: 1, 2, 3, ...,  $n - 1$  die zugehörigen Ordinaten errichtet, welche im Anschluss an die beiden Grenzordinaten:  $OA = y_0$ ,  $BC = y_n$  der Reihe nach mit:  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}$  bezeichnet werden mögen, so handelt es sich zunächst um die Ableitung von Formeln, welche eine näherungsweise Berechnung der fraglichen Fläche  $F$  aus der gemeinsamen Breite  $l : n = \delta$  aller  $n$  Flächenstreifen und deren Grenzordinaten:  $y_0, y_1, \dots, y_n$  ermöglichen.

Am leichtesten fällt dies natürlich, wenn  $n$  so gross gewählt wird, dass sich die einzelnen Flächenstreifen näherungsweise als Trapeze mit den Parallelseiten:  $y_0, y_1; y_1, y_2;$

\*) Hiebei genügt die dritte Reihe von Substitutionen zugleich der Bedingung:  $bd = c^2$ , d. h.  $3bd = c^2$ , da sich die allgemeine Relation (8), wie wir bereits gezeigt haben, ausschliesslich in diesem Falle auf die Gleichung einer cubischen Parabel zurückführen lässt.

$y_{n-1}, y_n$  auffassen lassen, deren Höhe:  $\delta$  für alle Flächenstreifen dieselbe bleibt. Es ist dann nach einem bekannten Satze der elementaren Geometrie:

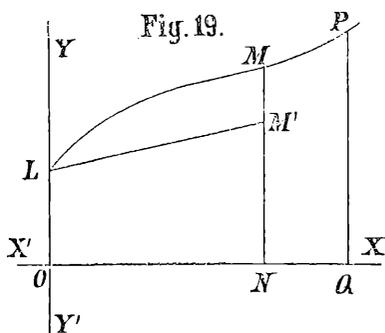
$$F = \frac{\delta}{2} (y_0 + y_1) + \frac{\delta}{2} (y_1 + y_2) + \dots + \frac{\delta}{2} (y_{n-1} + y_n)$$

oder nach Vereinigung je zweier unmittelbar aufeinanderfolgenden Glieder:

$$(24) \quad F = \delta \left\{ \frac{1}{2} (y_0 + y_n) + (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) \right\}.$$

Wesentlich schwieriger gestaltet sich die Ableitung einer analogen Näherungsformel, sobald jene Curvenstücke, welche die erwähnten Flächenstreifen begrenzen, eine merkliche Krümmung zeigen, beziehungsweise auch Wendepunkte enthalten, weil in solchen Fällen gemäss früheren Ergebnissen erst mit Hilfe der allgemeinen Relation (8) eine genügende Annäherung zu erzielen ist.

Es muss also vor Allem untersucht werden, nach welchem Gesetze für irgend eine durch (8) charakterisierbare krumme Linie als Grenzcurve die zu einer beliebigen Abscisse:  $ON = x$  gehörige Fläche  $OLMN = f$  (vgl. die schematische Fig. 19) von  $x$  abhängt, wobei die allgemeine Form der fraglichen Beziehung bereits durch die vorhin verwerthete Trapezformel nahegelegt erscheint.



Um hierüber Aufschluss zu gewinnen, stützen wir uns auf die Thatsache, dass die Relation (8) für  $c = 0, d = 0$  direct in die Gleichung einer Geraden:  $y = a + b x$  übergeht, folglich  $f$  sich gleichzeitig auf ein Trapez  $OLM'N$  mit den Paralleleseiten:  $OL = a, M'N = a + b x$  und der Höhe  $x$  reducirt und mit dem Producte:

$$\frac{1}{2} x \left\{ a + (a + b x) \right\} = x \left( a + \frac{1}{2} b x \right)$$

zusammenfällt. Gleichwie nun der zweite Factor dieses Productes beide Glieder:  $a$  und  $b x$  der entsprechenden Specialform von  $y$  beansprucht, wird derselbe für  $c \geq 0, d \geq 0$  voraussichtlich

in analoger Verbindung alle vier Glieder:  $a, b x, c x^2, d x^3$  des allgemeinen Ausdruckes für  $y$  enthalten, während der erste Factor:  $x$  als gemeinsame Abscisse beider Flächen keine Änderung erfahren wird. Verstehen wir mithin unter  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$  einstweilen noch unbekannte Coefficienten, welche gleich jenen von  $a$  und  $b x$  in der Trapezformel für jeden Werth von  $x$  constant bleiben, so gestattet die fragliche allgemeine Gleichung für  $f$  vorläufig die Schreibweise:

$$f = x (\epsilon_1 a + \epsilon_2 b x + \epsilon_3 c x^2 + \epsilon_4 d x^3).$$

Consequent ist weiter die zu einer beliebigen grösseren Abscisse:  $OQ = x'$  gehörige Fläche  $OLPQ = f'$  gleich:

$$f' = x' (\epsilon_1 a + \epsilon_2 b x' + \epsilon_3 c x'^2 + \epsilon_4 d x'^3),$$

so dass der Streifen  $MNPQ = f' - f$  den Flächeninhalt:

$$\epsilon_1 a (x' - x) + \epsilon_2 b (x'^2 - x^2) + \epsilon_3 c (x'^3 - x^3) + \epsilon_4 d (x'^4 - x^4)$$

besitzt. Die Division desselben durch die Breite des Streifens:  $NQ = x' - x$  liefert dann den Mittelwerth aller seiner Ordinaten:

$$\epsilon_1 a + \epsilon_2 b (x' + x) + \epsilon_3 c (x'^2 + x'x + x^2) + \epsilon_4 d (x'^3 + x'^2x + x'x^2 + x^3),$$

der sich für  $x' = x$  offenbar in:

$$\epsilon_1 a + 2 \epsilon_2 b x + 3 \epsilon_3 c x^2 + 4 \epsilon_4 d x^3$$

verwandelt und zugleich für beliebige Werthe von  $a, b, c, d$  und  $x$  mit der Ordinate des Grenzpunktes  $M$ :

$$MN = y = a + b x + c x^2 + d x^3$$

übereinstimmen muss. Hienach genügen die unbekanntten Coëfficienten der für  $f$  angenommenen Formel allgemein den Bedingungen:

$$\epsilon_1 = 1, \quad 2 \epsilon_2 = 1, \quad 3 \epsilon_3 = 1, \quad 4 \epsilon_4 = 1,$$

vermöge welcher diese selbst nunmehr in der Gestalt:

$$(25) \quad f = x \left( a + \frac{1}{2} b x + \frac{1}{3} c x^2 + \frac{1}{4} d x^3 \right)$$

vollständig präcisirt wird.

Um aber das erhaltene Resultat praktisch brauchbar zu machen, müssen aus bereits angegebenen Gründen noch die in demselben vorkommenden Constanten:  $a, b, c, d$  der ursprünglichen Curvengleichung (8) beseitigt werden, was im Anschlusse an die Trapezformel dadurch geschieht, dass wir den Factor von  $x$  auch hier als Aggregat von Ordinaten darzustellen suchen.

Dies ist zunächst für  $d = 0$  fast ohne jede Rechnung möglich, indem die zugehörigen Vereinfachungen von (8) und (25):

$$y = a + b x + c x^2, \quad f = x \left( a + \frac{1}{2} b x + \frac{1}{3} c x^2 \right)$$

durch die elementare Umformung:

$$a + \frac{1}{2} b x + \frac{1}{3} c x^2 = \frac{1}{4} a + \frac{3}{4} \left( a + \frac{2}{3} b x + \frac{4}{9} c x^2 \right)$$

direct auf einander beziehbar werden. Da nämlich im vorliegenden Falle der Abscisse

$$O N_1 = \frac{2}{3} x \text{ (Fig. 20) offenbar die Ordinate:}$$

$$M_1 N_1 = a + b \left( \frac{2}{3} x \right) + c \left( \frac{2}{3} x \right)^2 = y_{\frac{2}{3}}$$

entspricht, und die Constante  $a$  zugleich die Ordinate:  $O L = y_0$  des ersten Curvenpunktes  $L$  vorstellt, reducirt sich der Ausdruck für  $f$  auf:

$$(26) \quad f = x \left( \frac{1}{4} y_0 + \frac{3}{4} y_{\frac{2}{3}} \right) = \frac{1}{4} x \left( y_0 + 3 y_{\frac{2}{3}} \right)$$

und kann demnach völlig unabhängig von den jeweiligen Werthen der Constanten  $a, b, c$  berechnet werden.

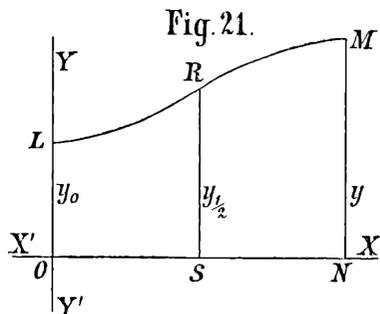
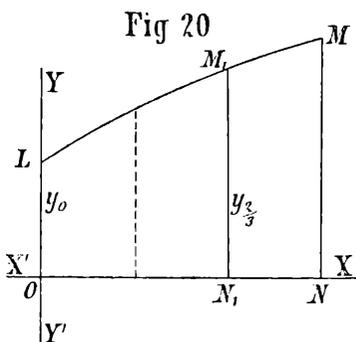
Um nunmehr auch für  $d \geq 0$  eine analoge Transformation der Gleichung (25) zu gewinnen, führen wir in dieselbe neben beiden Grenzordinaten:  $O L = a = y_0, MN = y$  (Fig. 21) noch die mittlere Ordinate:  $RS = y_{\frac{1}{2}}$  der Fläche  $OLMN = f$  ein und stellen uns die Aufgabe, den Factor von  $x$  in (25) — unter  $u_0, u_1, u_2$  drei vorläufig unbestimmte Coëfficienten verstanden — als ein Aggregat von der Form:

$$u_0 y_0 + u_1 y_{\frac{1}{2}} + u_2 y$$

darzustellen. Zu diesem Zwecke substituiren wir in dasselbe die allgemeinen Werthe von  $y_0$  und  $y$ , sowie jenen der zur Abscisse:  $OS = \frac{1}{2} x$  kraft der Relation (8) gehörigen mittleren Ordinate:

$$y_{\frac{1}{2}} = a + b \left( \frac{1}{2} x \right) + c \left( \frac{1}{2} x \right)^2 + d \left( \frac{1}{2} x \right)^3$$

und ordnen die Glieder des erhaltenen Polynomes ebenfalls nach steigenden Potenzen von  $x$ . Es zeigt sich dann, dass das eingeführte Aggregat mit:



$$(u_0 + u_1 + u_2) a + \left(\frac{1}{2} u_1 + u_2\right) b x + \left(\frac{1}{4} u_1 + u_2\right) c x^2 + \left(\frac{1}{8} u_1 + u_2\right) d x^3$$

identisch ist, also mit dem Factor von  $x$  in (25) völlig übereinstimmt, falls sich durch passende Wahl von  $u_0, u_1, u_2$  die Bedingungen:

$$u_0 + u_1 + u_2 = 1, \quad \frac{1}{2} u_1 + u_2 = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4} u_1 + u_2 = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{8} u_1 + u_2 = \frac{1}{4}$$

erfüllen lassen. Die letzte derselben gestattet die Umformung:

$$\frac{3}{2} \left(\frac{1}{4} u_1 + u_2\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} u_1 + u_2\right) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)$$

und ist daher eine nothwendige Folge der zweiten und dritten Gleichung, deren Combination mit der ersten Bedingung für  $u_0, u_1, u_2$  nach einigen leichten Reductionen die Werthe:

$$(27) \quad u_0 = \frac{1}{6}, \quad u_1 = \frac{4}{6}, \quad u_2 = \frac{1}{6}$$

liefert. Gemäss diesen Ergebnissen tritt an die Stelle von (25) die Formel:

$$(28) \quad f = \frac{1}{6} x \left(y_0 + 4 y_{\frac{1}{2}} + y\right),$$

welche die jeweiligen Coëfficienten der Relation (8) in der That nicht mehr enthält und besagt, dass sich die Fläche  $OLMN = f$  auch durch Multiplication des sechsten Theiles ihrer Breite mit der um die vierfache mittlere Ordinate vermehrten Summe beider Grenzordinaten berechnen lässt.

Denken wir uns ferner einen gleichartig begrenzten Doppelstreifen, dessen erste Ordinate nicht mit  $OY$  (Fig. 21) zusammenfällt, sondern eine beliebige positive Abscisse  $m$  besitzen mag, so besteht zwischen den Ordinaten seiner Grenzcurve und ihren um die gemeinsame Constante  $m$  verkleinerten Abscissen neuerdings die Beziehung (8), d. h. wir haben hier:

$$y = a + b(x - m) + c(x - m)^2 + d(x - m)^3$$

zu setzen. Dieser Ausdruck erhält nach Zusammenfassung aller mit gleichen Potenzen von  $x$  multiplicirten Glieder augenscheinlich die Gestalt:

$$y = a' + b'x + c'x^2 + d'x^3,$$

unterscheidet sich mithin von der ursprünglichen Relation zwischen  $x$  und  $y$  nur durch seine Coëfficienten. Da nun die Flächenformel (28) vermöge der Art ihrer Ableitung für alle möglichen Werthe von  $a, b, c, d$ , also auch für:

$$a = a', \quad b = b', \quad c = c', \quad d = d'$$

giltig bleibt, und die in (28) für  $x$  eintretende Differenz:  $x - m$  zugleich die Breite des neuen Streifens vorstellt, ist die vorhin präcisirte Regel auf sämtliche Doppelstreifen anwendbar, deren Grenzcurven näherungsweise der Gleichung (8) entsprechen.

Zerlegen wir hienach die empirisch gegebene Fläche  $F$  (Fig. 18) in eine gerade Anzahl gleich breiter Streifen, so wird der sechste Theil der Breite:  $2 \delta$  jedes Doppelstreifens zum gemeinsamen Factor aller Glieder der Summe:

$$(y_0 + 4 y_1 + y_2) + (y_2 + 4 y_3 + y_4) + \dots + (y_{n-2} + 4 y_{n-1} + y_n),$$

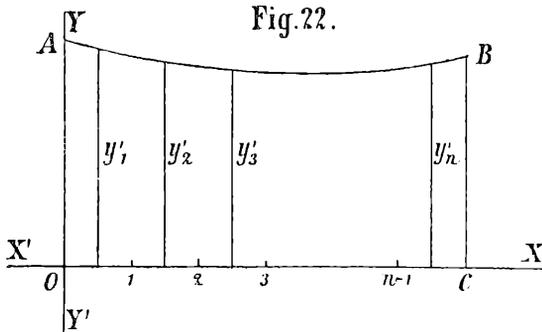
in welcher — abgesehen von  $y_0$  und  $y_n$  — jede Ordinate mit geradem Stellenzeiger als gemeinsame Grenzordinate je zweier Doppelstreifen zweimal vorkommt, während sämtliche Ordinaten mit ungeradem Index den Coëfficienten 4 aufweisen. Durch Vereinigung aller mit gleichen Coëfficienten versehenen Glieder ergibt sich schliesslich die nach ihrem Entdecker Simpson benannte Näherungsformel:

$$(29) \quad F = \frac{1}{3} \delta \left\{ (y_0 + y_n) + 4 (y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2 (y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) \right\},$$

deren vielseitige Verwerthbarkeit in dem allgemeinen Charakter der Relation (8) begründet erscheint. Hiezu tritt noch der weitere Umstand, dass die Anzahl der zur Flächenbestimmung erforderlichen Ordinaten bei gleicher Annäherung an den wahren Werth von  $F$  hier wesentlich kleiner bleibt als unter Anwendung der Formel (24), folglich auch die beim Messen von  $y_0, y_1, \dots, y_n$  unvermeidlichen Beobachtungsfehler in geringerer Anzahl der Rechnung einverleibt werden.

Dieselben Erwägungen führen mit Nothwendigkeit zu der Frage, ob nicht bereits die Grundformeln zur Bestimmung der Fläche jedes einzelnen Streifens ohne Schmälerung ihrer Strenge eine Reduction der Ordinatenanzahl ermöglichen?

Diese Frage ist speciell für alle Flächenstreifen von der Gestalt eines Trapezes



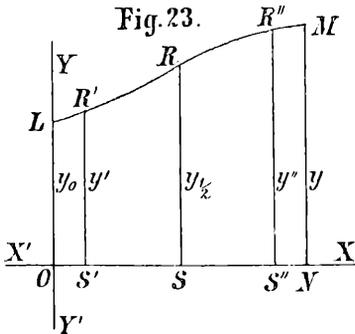
sofort zu bejahen, denn schon die elementare Geometrie lehrt, dass sich jede solche Fläche auch durch Multiplication ihrer Mittellinie mit ihrer Höhe berechnen lässt. Messen wir daher in den einzelnen Streifen von  $F$  (Fig. 22), deren gemeinsame Breite wie früher mit  $\delta$  bezeichnet werden mag, statt der Grenzordinaten die mittleren Ordinaten:  $y'_1, y'_2, y'_3, \dots, y'_n$ , so gilt unter denselben Beschränkungen wie bei (24) die Gleichung:

$$(30) \quad F = \delta (y'_1 + y'_2 + \dots + y'_n).$$

Allerdings ist die Anzahl der hier erforderlichen Ordinaten nur um 1 kleiner als in (24), wohl aber besitzt die neue Flächenformel gegenüber (24) insoferne einen wesentlichen Vorzug, als die Glieder des Factors von  $\delta$  nicht in zwei gesondert zu berechnende Gruppen zerfallen. Zugleich erhellt, dass die Abgrenzung der einzelnen Flächenstreifen vollkommen entbehrlich wird, indem wir, um die Fusspunkte aller mittleren Ordinaten zu erhalten, nach Bestimmung von  $\delta$  diese Theilstrecke vom Punkte mit der Abscisse  $\frac{1}{2} \delta$  aus nur  $(n - 1)$ mal aufzutragen brauchen.

Um im Anschluss hieran die zweite Grundformel (28) ebenfalls durch eine solche zu ersetzen, deren Berechnung eine kleinere Anzahl von Ordinaten erfordert, führen wir zunächst in die Flächengleichung (25) neben der mittleren Ordinate:  $RS = y_{\frac{1}{2}}$  (Fig. 23) zwei neue von der letzteren gleich weit abstehende Ordinaten:  $R'S' = y'$ ,  $R''S'' = y''$  ein und untersuchen, ob der Factor von  $x$  in (25) bei passender Wahl der disponiblen Coëfficienten  $\lambda$  und  $\mu$  allgemein mit dem Aggregate:

$$\lambda (y' + y'') + \mu y_{\frac{1}{2}}$$



vertauschbar ist. Zuzufolge der Bedingung  $SS'' = S'S'$  wird dann das Verhältnis der Abscissen von  $y'$  und  $y$  stets irgend einen zwischen 0 und  $\frac{1}{2}$  liegenden Werth  $\epsilon$  annehmen, mithin  $OS' = \epsilon x$  zu setzen sein, so dass auch die Abscisse von  $y''$ :

$$OS'' = \frac{1}{2} x + \left( \frac{1}{2} x - \epsilon x \right) = (1 - \epsilon) x$$

zu  $x$  proportional bleibt. Da ferner die Coordinaten der Curvenpunkte  $R', R''$  gleich jenen von  $R$  und  $M$  der Relation (8) genügen müssen, haben wir consequent:

$$y' = a + b \epsilon x + c \epsilon^2 x^2 + d \epsilon^3 x^3, \quad y'' = a + b (1 - \epsilon) x + c (1 - \epsilon)^2 x^2 + d (1 - \epsilon)^3 x^3,$$

wonach sich die Summe beider Ordinaten auf:

$$2 a + b x + (1 - 2 \epsilon + 2 \epsilon^2) c x^2 + (1 - 3 \epsilon + 3 \epsilon^2) d x^3$$

reducirt, und das fragliche Aggregat unter Einbeziehung des bereits bekannten Werthes von  $y_{\frac{1}{2}}$  die Gestalt:

$$(2 \lambda + \mu) a + \left( \lambda + \frac{1}{2} \mu \right) b x + \left\{ \lambda (1 - 2 \epsilon + 2 \epsilon^2) + \frac{1}{4} \mu \right\} c x^2 + \left\{ \lambda (1 - 3 \epsilon + 3 \epsilon^2) + \frac{1}{8} \mu \right\} d x^3$$

erhält. Seine allgemeine Vertauschbarkeit mit dem Ausdrucke:

$$a + \frac{1}{2} b x + \frac{1}{3} c x^2 + \frac{1}{4} d x^3$$

bleibt also an folgende Bedingungen geknüpft:

$$2 \lambda + \mu = 1, \quad \lambda + \frac{1}{2} \mu = \frac{1}{2}, \quad \lambda (1 - 2 \epsilon + 2 \epsilon^2) + \frac{1}{4} \mu = \frac{1}{3},$$

$$\lambda (1 - 3 \epsilon + 3 \epsilon^2) + \frac{1}{8} \mu = \frac{1}{4},$$

von welchen die erste und zweite übereinstimmend:  $\mu = 1 - 2 \lambda$  liefern, sowie aus der dritten und vierten Gleichung nach Substitution des Werthes von  $\mu$  ein und derselbe Ausdruck für  $\lambda$ , nämlich:

$$\lambda = \frac{1}{6 (1 - 2 \epsilon)^2}$$

hervorgeht. Die auf solche Art gewonnene Umformung von (25):

$$(31) \quad f = x \left\{ \lambda (y' + y'') + (1 - 2 \lambda) y_{\frac{1}{2}} \right\}$$

besitzt in  $\epsilon$  noch eine Grösse, welche zwischen den Grenzen 0 und  $\frac{1}{2}$  jedes beliebigen Zahlenwerthes fähig ist und vermöge dieser Unbestimmtheit nunmehr derart specialisirt werden kann, dass der Coëfficient von  $y_{\frac{1}{2}}$  verschwindet. Es besteht demnach für

$$\lambda = \frac{1}{2}, \quad \epsilon = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{1}{3}} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = 0.2113249$$

die durch ihren einfachen Bau bemerkenswerthe Formel:

$$(32) \quad \dots f = \frac{1}{2} x (y' + y''),$$

welche sich aus denselben Gründen wie (28) direct auf alle gleichartig begrenzten Flächenstreifen mit gemeinsamer Abscissenaxe übertragen lässt. Construiren wir hiebei über der Basis  $AB = \delta$  (Fig. 24) irgend eines solchen Streifens ein gleichseitiges Dreieck und tragen vom Fusspunkte  $D$  seiner Höhe:

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{\delta^2 - \frac{1}{4} \delta^2} = \frac{1}{2} \delta \sqrt{3}$$

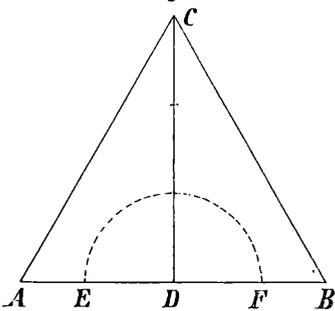
beiderseits den dritten Theil der letzteren auf, so ist augenscheinlich:

$$AE = AD - DE = \frac{1}{2} \delta - \frac{1}{6} \delta \sqrt{3} = \epsilon \delta,$$

$$AF = AB - BF = AB - AE = (1 - \epsilon) \delta,$$

d. h.  $AE$  und  $AF$  sind zugleich die Abscissen der Ordinaten  $y'$ ,  $y''$ , deren Fusspunkte mithin ohne jede Rechnung bestimmbar sind.

Fig. 24.

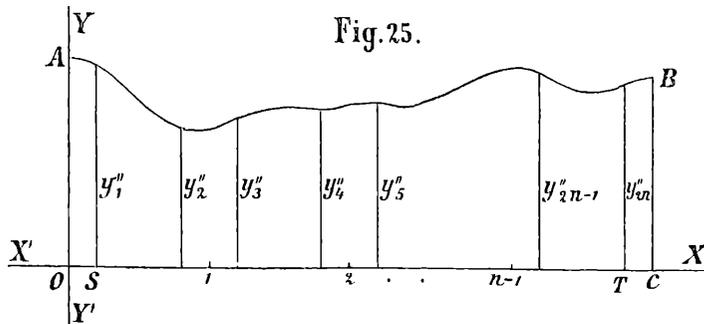


Soll dann irgend eine empirisch gegebene Fläche  $F$  mit Hilfe von (32) ebenso angenähert ermittelt werden, wie auf Grundlage der Simpson'schen Formel (29), so genügt hiezu eine Zerlegung von  $F$  in ebenso viele einfache Streifen, als bei Anwendung von (29) Doppelstreifen nothwendig waren. Weil jedoch in jedem Streifen zwei Ordinaten zu messen sind, verringert sich die Gesamtzahl der erforderlichen Ordinaten nur um die Einheit, wonach die erzielte Vereinfachung der Flächenberechnung hier hauptsächlich darin besteht, dass  $F$  direct durch Multiplication der halben Streifenbreite mit der Summe aller gemessenen Ordinaten erhalten wird.

Bei der mathematischen Formulirung dieser Regel erscheint es zur Unterscheidung der neuen, nicht mehr äquidistanten Ordinaten von jenen in (24), (29) und (30) zweckdienlich, als gemeinsames Symbol  $y''$  einzuführen, also der aufzustellenden Gleichung unter Beibehaltung des Buchstabens  $\delta$  für die gemeinsame Breite sämtlicher Streifen die Gestalt:

$$(33) \quad F = \frac{1}{2} \delta (y''_1 + y''_2 + \dots + y''_{2n-1} + y''_{2n})$$

zu geben. Abgesehen von  $y''_1$  und  $y''_{2n}$  liegen alle übrigen in (33) vorkommenden Ordinaten paarweise in gleichen Abständen von der gemeinsamen Grenzordinate je zweier aufeinanderfolgenden Streifen, aus welchem Grunde sich die jeweiligen Fusspunkte von  $y''_1, y''_2, \dots, y''_{2n}$  (Fig. 25) am raschesten ergeben, wenn wir nach Bestimmung der Theilstrecken  $\delta$  und  $\epsilon \delta$  von  $O$  und  $C$  aus das Stück  $OS = CT = \epsilon \delta$  abschneiden und hierauf die Theilstrecke  $\delta$  von beiden Schnittpunkten  $S$  und  $T$  aus in der Richtung der wachsenden respective abnehmenden Abscissen  $(n - 1)$ mal auftragen.



Dieses Verfahren bietet ausserdem den Vortheil, dass irgend ein kleiner bei Ermittlung der Abscisse  $OS$  begangener Fehler einen gegenseitigen Fehler von gleicher Grösse in  $OT$  erzeugt, folglich auch die den Ordinaten  $y''_1, y''_2, \dots, y''_{2n}$  anhaftenden Fehler sich paarweise bis auf geringfügige Reste aufheben werden. — Würden wir

z. B. für die durch Fig. 23 schematisch dargestellte Fläche einfach  $OS' = \frac{1}{5} x$ ,  $OS'' = \frac{4}{5} x$  annehmen, mithin in (32) statt  $y', y''$  die Ordinaten:

$$y_{\frac{1}{5}} = a + \frac{1}{5} b x + \frac{1}{25} c x^2 + \frac{1}{125} d x^3, \quad y_{\frac{4}{5}} = a + \frac{4}{5} b x + \frac{16}{25} c x^2 + \frac{64}{125} d x^3$$

einführen, so wäre der Unterschied zwischen dem berechneten Flächeninhalte:

$$f' = \frac{1}{2} x (y_{\frac{1}{5}} + y_{\frac{4}{5}}) = a x + \frac{1}{2} b x^2 + \frac{17}{50} c x^3 + \frac{13}{50} d x^4$$

und der nach Gleichung (25) bestimmten Fläche  $f$ :

$$f' - f = 0.00667 c x^3 + 0.01 d x^4$$

für kleine Werthe von  $c$  und  $d$  noch ohneweiters zu vernachlässigen.

Setzen wir ferner in der allgemeinen Relation (31), welche die vorstehenden wichtigen Resultate vermittelt hat,

$$\epsilon = 0, \text{ d. h. } \lambda = \frac{1}{6}, \quad 1 - 2\lambda = \frac{4}{6},$$

so fällt dieselbe unmittelbar mit der Grundgleichung (28) der Simpson'schen Näherungsformel zusammen, sowie auch jedem anderen zwischen 0 und  $\frac{1}{2}$  liegenden Zahlenwerthe von  $\epsilon$  eine charakteristische Specialisirung von (31) zugeordnet ist, deren Gültigkeitsgrenzen mit jenen von (28) übereinstimmen. Während mithin der Inhalt jedes von einem parabolischen Bogen dritten Grades begrenzten Flächenstreifens  $f$  aus den Ordinaten zweier Curvenpunkte nur auf eine einzige Art berechnet werden kann, sind bei Verwendung je dreier Ordinaten unendlich viele Flächenformeln — so z. B. für  $\epsilon = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$  der Reihe nach die Ausdrücke:

$$\frac{1}{2} x \left\{ 3 (y_{\frac{1}{3}} + y_{\frac{2}{3}}) - 4 y_{\frac{1}{2}} \right\}, \quad \frac{1}{3} x \left\{ 2 (y_{\frac{1}{4}} + y_{\frac{3}{4}}) - y_{\frac{1}{2}} \right\},$$

$$\frac{1}{54} x \left\{ 25 (y_{\frac{1}{5}} + y_{\frac{4}{5}}) + 4 y_{\frac{1}{2}} \right\}, \quad \frac{1}{8} x \left\{ 3 (y_{\frac{1}{6}} + y_{\frac{5}{6}}) + 2 y_{\frac{1}{2}} \right\}$$

— theoretisch gleich zulässig. Hiebei besitzt unter allen einschlägigen Beziehungen offenbar jene den einfachsten Bau, deren Ordinaten einen gemeinsamen Coëfficienten erhalten, was ausschliesslich für:

$$1 - 2\lambda = \lambda, \text{ d. h. } \lambda = \frac{1}{6(1 - 2\epsilon)^2} = \frac{1}{3},$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0.1464466$$

der Fall ist. Bezeichnen wir dann die zugehörigen Ordinaten zum Unterschiede von den übrigen Specialisirungen von  $y', y''$  mit  $\bar{y}', \bar{y}''$ , so verwandelt sich (31) in:

$$(34) \quad f = \frac{1}{3} x (\bar{y}' + y_{\frac{1}{2}} + \bar{y}''),$$

welche Gleichung auch insoferne bemerkenswerth ist, als sich die Fusspunkte der fraglichen Ordinaten analog wie in (32) durch eine elementare geometrische Construction auffinden lassen. Errichten wir nämlich (Fig. 26) über  $OH = \frac{1}{2} ON = \frac{1}{2} x$  als Grundlinie ein Quadrat und ziehen dessen Diagonalen:  $AO, BH$ , so wird wegen  $OC = CH$ :

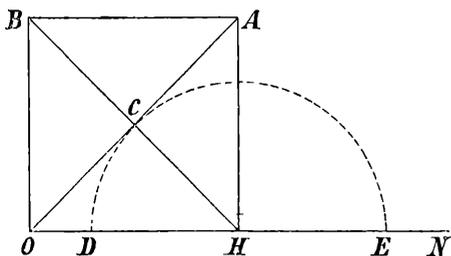
$$2 \overline{CH}^2 = \overline{OH}^2 = \frac{1}{4} x^2, \quad CH = \frac{1}{4} x \sqrt{2},$$

wonach wir, um die jeweiligen Fusspunkte:  $D, E$  von  $\bar{y}'$  und  $\bar{y}''$  zu ermitteln, nur die Theilstrecke  $CH$  von  $H$  aus beiderseits auf  $ON$  aufzutragen brauchen.

Gemäss den Schlussbetrachtungen in §. 3 erübrigt jetzt noch die Aufgabe, mit Hilfe der Gleichung (16) die speciell auf Potenzcurven bezüglichen Flächenformeln abzuleiten, wobei wir uns jedoch von vornherein auf positive Werthe des Exponenten  $r$  beschränken, indem bekanntlich alle Potenzcurven mit negativen Exponenten für  $x = 0$  unendlich grosse Ordinaten besitzen und daher als Grenzlilien für irgend welche Längsschnitte von Baumstämmen nicht in Betracht kommen.

Die ersten wichtigen Aufschlüsse über den allgemeinen Bau der fraglichen Flächenformeln sind übrigens bereits den Relationen (8) und (25) zu entnehmen, denn sobald in den letzteren je drei Constanten verschwinden, bestimmen die entsprechend vereinfachten Gleichungen für  $y$  und  $f$  direct je eine Potenzlinie und die zu einem Stücke derselben mit der Abscisse  $x$

Fig. 26.



und der Grenzordinate  $y$  gehörige Fläche. — In der That lehrt ein Blick auf das in Rede stehende System von Beziehungen:

$$a = c = d = 0 : y = b x, \quad f = \frac{1}{2} b x^2 = \frac{1}{2} x y;$$

$$a = b = d = 0 : y = c x^2, \quad f = \frac{1}{3} c x^3 = \frac{1}{3} x y;$$

$$a = b = c = 0 : y = d x^3, \quad f = \frac{1}{4} d x^4 = \frac{1}{4} x y,$$

dass  $f$  für alle drei Fälle der Fläche eines Rechteckes proportional bleibt, dessen Grundlinie und Höhe durch die Coordinaten des Endpunktes des betreffenden Linienstückes gebildet werden.

Betrachten wir ferner im zweiten und dritten Falle die der Grundlinie gegenüberliegende Seite dieses Rechteckes als Ordinate und dessen Höhe als Abscisse des letzten Curvenpunktes, welcher Vorgang offenbar einer Vertauschung von  $x$  mit  $y$  in den Gleichungen:  $y = c x^2, y = d x^3$  entspricht, so begrenzen die betreffenden Curven jene Flächen, deren Vergrößerung um  $\frac{1}{3} x y$  respective  $\frac{1}{4} x y$  das ganze Rechteck  $x y$  liefert. Es reihen sich mithin an die vorigen Gleichungen mit ganzzahligen Exponenten consequent die weiteren Relationen:

$$x = c y^2, \quad y = \sqrt{\frac{x}{c}}, \quad f = \frac{2}{3} x y; \quad x = d y^3, \quad y = \sqrt[3]{\frac{x}{d}}, \quad f = \frac{3}{4} x y,$$

welche die Proportionalität zwischen  $f$  und  $x y$  speciell für die gebrochenen Exponenten:  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$  beweisen.

Ausserdem wird ersichtlich, dass sich der Coëfficient des Productes  $x y$  nur mit dem Exponenten der zugehörigen Potenzcurve ändert, hingegen ihren jeweiligen Parameter überhaupt nicht enthält, wonach der allgemeinen Relation (16) — unter  $\eta$  irgend eine zwischen 0 und 1 gelegene Zahl verstanden — die Flächenformel:

$$f = \eta x y = \eta A x^{r+1}$$

entsprechen muss. Dieselbe präcisirt in dieser Gestalt lediglich das Gesetz, nach welchem die von dem Bogenstücke  $OM$  (vgl. die schematische Fig. 27) und den Coordinaten  $ON = x, MN = y$  seines Endpunktes  $M$  begrenzte Fläche  $OMN = f$  von  $x$  abhängt, erheischt also noch eine nähere Bestimmung von  $\eta$ .

Hiebei ist vor Allem zu erwägen, dass  $\eta$  bei gegebenem Exponenten  $r$  für beliebige Werthe von  $A$  und  $x$  constant bleibt. Es gilt daher für die zu irgend einer anderen Abscisse:

$OQ = x'$  gehörige Fläche  $OPQ = f'$  der gleichartige Ausdruck:

$$f' = \eta A x'^{r+1},$$

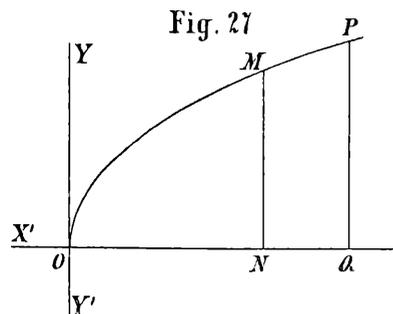
welcher nach Subtraction von  $f$  für den Flächenstreifen  $MNPQ$  die Gleichung:

$$f' - f = \eta A (x'^{r+1} - x^{r+1})$$

liefert. Der Mittelwerth aller seiner Ordinaten:

$$\frac{f' - f}{x' - x} = \eta A \left( \frac{x'^{r+1} - x^{r+1}}{x' - x} \right)$$

wird der Grenzordinate von  $f: MN = A x^r$  natürlich desto näher kommen, je mehr die Differenz:  $x' - x = NQ$  abnimmt, und für  $x' = x$  mit  $MN$  zusammenfallen. Um mithin eine allgemein



giltige Bestimmungsgleichung für  $\eta$  zu erhalten, ist nur noch der wahre Werth:  $w$  des Factors von  $\eta$  für  $x' = x$  festzustellen. Da nun der analoge Quotient:

$$A \left( \frac{x'^r - x^r}{x' - x} \right)$$

für  $x' = x$  bekanntlich (vgl. §. 4, Gleichung 19) in  $A r x^{r-1}$  übergeht, ergibt sich durch Vertauschung von  $r$  mit  $r + 1$  sofort:

$$w = A (r + 1) x^r,$$

und hieraus die von  $\eta$  zu erfüllende Bedingung in der Form:

$$A x^r = \eta A (r + 1) x^r, \text{ d. h. } \eta (r + 1) = 1,$$

womit zugleich der ursprüngliche Ausdruck für  $f$  vollständig präcisirt erscheint. Die so gewonnene Relation:

$$(35) \quad f = \frac{x y}{r + 1}$$

bleibt vermöge der Art ihrer Ableitung auf sämtliche Potenzcurven mit positiven Exponenten  $r$  anwendbar<sup>\*)</sup> und ergänzt die einschlägigen speciellen Flächenformeln für  $r = \frac{3}{2}$  noch durch die auf die semicubische Parabel als Grenzcurve bezügliche Gleichung:  $f = \frac{2}{5} x y$ , welche die Reihe der am häufigsten vorkommenden Specialfälle von (35) abschliesst.

## §. 6.

Gleichwie die angenäherte Inhaltsbestimmung empirisch gegebener Flächen auf gewissen, innerhalb scharf definirbarer Grenzen strenge giltigen Formeln beruht, erfordert auch die näherungsweise Volumberechnung zunächst die Ableitung von Relationen, welche sich insgesamt auf Körper von bestimmter geometrischer Entstehungsart beziehen.

Entsprechend dem Zwecke der vorliegenden Abhandlung kommen hier lediglich sogenannte elliptische Konoide, d. h. Körper in Betracht, welche durch Bewegung einer veränderlichen, elliptisch begrenzten Fläche längs einer, deren Mittelpunkt senkrecht durchschneidenden Geraden erzeugbar wird, falls zwei Scheitel der Ellipse gleichzeitig auf fixen ebenen Curven, den sogenannten Leitlinien, vorrücken. Als solche wählen wir im Hinblick auf die Einfachheit und Allgemeinheit der Schlussformeln von §. 5 vorläufig nur Potenzcurven mit zusammenfallenden Axen und Scheiteln, welche zur Bahn des Mittelpunktes der Ellipse auch einseitig verlaufen können, denn sobald ein Ellipsenscheitel auf einer derartigen Curve vorrückt, muss der gegenüberliegende Scheitel ohnehin eine congruente Curve beschreiben. Aus diesem Grunde sind für die Exponenten beider Leitlinien beliebige positive, aber untereinander gleiche Werthe:  $r$  zulässig, während ihre Parameter im Allgemeinen von einander verschieden bleiben, und mag der grössere derselben durchwegs mit  $A$ , der kleinere mit  $B$  bezeichnet werden,

Um die einschlägigen Gleichungen in möglichst einfacher Gestalt zu präcisiren, behalten wir für die Potenzcurve mit dem Parameter  $A$  das ursprüngliche rechtwinklige

---

<sup>\*)</sup> Ist dagegen  $r$  eine negative, die Einheit überschreitende Zahl:  $-k$ , so wird speciell der von  $x = 1$  bis  $x = x$  gerechnete Flächenstreifen gleich:  $\frac{A - x y}{k - 1}$  und besitzt daher auch für  $x = \infty$  einen endlichen Flächeninhalt:  $A : (k - 1)$ , indem das Product:  $x y = A x^{k-1}$  in diesem Falle verschwindet.

Coordinatensystem mit dem Anfangspunkte im Curvenscheitel  $O$  bei (vgl. die schematische

Fig. 28.

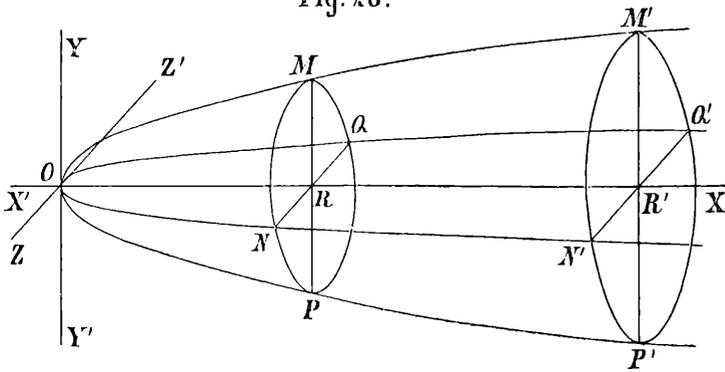


Fig. 28), so dass die Ebene  $X O Y$  von jener der zweiten Curve in der Abscissenaxe  $X X'$  senkrecht durchschnitten wird, mithin die auf  $X X'$  und  $Y Y'$  im Punkte  $O$  senkrecht stehende Gerade  $Z Z'$  die zweckmässigste Ordinatenaxe des zweiten Axenpaares:  $X X'$ ,  $Z Z'$  bildet. Es besitzen dann zwei beliebige, irgend einem elliptischen Querschnitte:  $M N P Q = g$  angehörige Punkte  $M, N$  der ersten

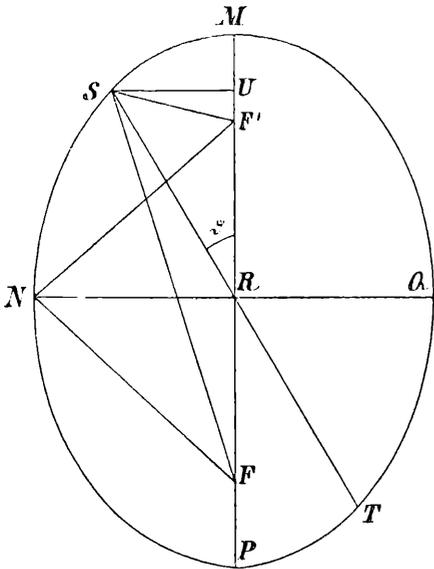
und zweiten Leitlinie bei gemeinsamer Abscisse:  $O R = x$  die Ordinaten:

$$(36) \quad MR = y = A x^r, \quad NR = z = B x^r,$$

welche zugleich die Halbaxen desselben Querschnittes bestimmen. Legen wir ferner durch die

Axe  $X X'$  des Konoides unter irgend einem spitzen Neigungswinkel  $\vartheta$  mit der Ebene  $X O Y$  eine neue Ebene, so wird die letztere die Querfläche  $g$  (vgl. die der Deutlichkeit wegen in grösserem Massstabe als Fig. 28 gezeichnete Fig. 29) gleich allen übrigen Querflächen in einer Geraden  $S T$  schneiden, welche mit dem grössten Durchmesser  $M P = 2 y$  von  $g$  ebenfalls den Winkel  $\vartheta$  einschliesst und sich aus den zur Abscisse  $x$  gehörigen Ordinaten:  $R S = w$ ,  $R T = -w$  der Grenzpunkte:  $S, T$  des Längsschnittes zusammensetzt.

Fig. 29.



Um daher die Grenzcurven sämtlicher Längsschnitte des Konoides zu charakterisiren, genügt es, die Ordinate  $w$  analog wie  $y$  und  $z$  allgemein durch  $x$  auszudrücken. — Zu diesem Zwecke verbinden wir  $S$  und  $N$  mit beiden Brennpunkten:  $F, F'$  der Ellipse  $M N P Q$  durch gerade Linien, die sogenannten Leitstrahlen von  $S$  und  $N$ , und erwägen, dass gemäss einer bekannten Grundeigenschaft dieser Curve für jeden Punkt die Summe seiner Leit-

strahlen der grossen Axe gleich sein muss. Es ist also im vorliegenden Falle:

$$(37) \quad F'S + F'N = 2y, \quad FN = F'N = y,$$

wonach die fragliche Bestimmungsgleichung für  $w$  gegeben erscheint, sobald zwischen den rechtwinkligen Coordinaten von  $S$  in Bezug auf das Axenpaar  $M P, N Q$ :

$$R U = w \cos \vartheta = u, \quad S U = w \sin \vartheta = v$$

eine allgemein gültige Relation hergestellt ist.

Ihre Ableitung gestaltet sich am einfachsten, wenn wir — unter  $e$  die sogenannte lineare Excentricität der Ellipse:

$$e = FR = F'R = \sqrt{F'N^2 - NR^2} = \sqrt{y^2 - z^2}$$

verstanden — die beiden Gleichungen:

$\overline{F'S^2} = \overline{F'U^2} + \overline{S'U^2} = (u + e)^2 + v^2, \quad \overline{F'S^2} = \overline{F'U^2} + \overline{S'U^2} = (u - e)^2 + v^2$   
 von einander subtrahiren und die nach Zerlegung der linksseitigen Differenz zweier Quadrate in:  
 $(FS + F'S)(FS - F'S) = 2y(FS - F'S)$

resultirende Beziehung:

$$FS - F'S = \frac{(u + e)^2 - (u - e)^2}{2y} = \frac{2eu}{y}$$

zu (37) addiren. Aus:

$$2FS = 2\sqrt{(u + e)^2 + v^2} = 2\left(y + \frac{eu}{y}\right)$$

folgt, da beim Wegschaffen des Wurzelzeichens das Product:  $2eu$  beiderseits wegfällt, und  $y^2 - e^2$  mit  $z^2$  identisch ist, zunächst:

$$(38) \quad \frac{u^2}{y^2} + \frac{v^2}{z^2} = 1,$$

welches Ergebnis hier vermöge der allgemeinen Werthe von  $u$  und  $v$  die Gestalt:

$$\frac{w^2 \cos^2 \vartheta}{y^2} + \frac{w^2 \sin^2 \vartheta}{z^2} = 1$$

gewinnt, also für  $w$  nach Einführung der Gleichungen (36) die wichtige Formel:

$$(39) \quad w = \frac{yz}{\sqrt{y^2 \sin^2 \vartheta + z^2 \cos^2 \vartheta}} = \frac{ABx^r}{\sqrt{A^2 \sin^2 \vartheta + B^2 \cos^2 \vartheta}}$$

liefert. Dieselbe lehrt, dass sämtliche Längsschnitte des Konoides von Potenzcurven mit gleichem Exponenten  $r$ , aber verschiedenen Parametern begrenzt werden\*) und hinsichtlich ihrer Formen vollständig bestimmt sind, falls man die Constanten  $A, B, r$  für beide Leitcurven kennt. Hiebei stehen die von den letzteren begrenzten Längsschnitte, die sogenannten Hauptschnitte des Konoides, immer auf einander senkrecht, und zwar enthält der eine Hauptschnitt die grössten, der andere die kleinsten Durchmesser der aufeinanderfolgenden Querschnitte.

Der Flächeninhalt jedes solchen Querschnittes wird dann nach einem bekannten Satze durch Multiplication des Productes seiner Halbaxen mit  $\pi$  gefunden, d. h. es gilt für  $g$  allgemein die Relation:

$$(40) \quad g = yz\pi = AB\pi x^{2r} = Cx^{2r},$$

wonach jede Querfläche des hier in Betracht gezogenen Konoides ebenso einer und derselben Potenz ihrer Abscisse  $x$  proportional bleibt\*\*), wie dies bei  $y$  in der Grundgleichung (16) der Fall ist.

\*) Nur für  $B = A$  wird  $w = y = z$ , so dass sich das Konoid in solchen Fällen auch durch Drehung der von der Curve:  $y = Ax^r$  begrenzten Fläche um die Abscissenaxe als Rotationsaxe erzeugen lässt. Ungleich complicirter würden sich die Verhältnisse gestalten, wenn beispielsweise zwei Curven mit verschiedenen Exponenten als Leitcurven gewählt würden, worauf wir jedoch hier nicht näher einzugehen brauchen.

\*\*) Dieselbe Relation ergibt sich, wenn wir — unter  $s$  irgend eine numerisch kleiner als  $r$  bleibende Zahl, unter  $X$  einen von  $x$  abhängigen zwei- oder mehrgliedrigen Ausdruck verstanden, welcher für alle in Betracht kommenden Werthe von  $x$  endlich und positiv bleiben muss, im Übrigen jedoch nach einem beliebigen Gesetze gebildet sein kann — die beiden Leitcurven durch die Gleichungen:

$$y = AXx^{r-s}, \quad z = \frac{Bx^{r+s}}{X}$$

charakterisiren, woraus die grosse Allgemeinheit von (40) sowie die Unmöglichkeit erhellt, auf Grundlage einer gegebenen Querflächenformel ohne weitere specielle Beschränkungen bezüglich des Formenkreises des untersuchten Körpers auf dessen Gestalt irgend einen sicheren Rückschluss zu ziehen.

Gleichwie mithin die Ableitung der einschlägigen Flächenformel für Potenzcurven als Grenzlilien lediglich die Berechnung jenes Coëfficienten:  $\eta$  erfordert hat, dessen Multiplication mit dem Inhalte  $yx$  eines Rechteckes von der Höhe  $y$  und derselben Grundlinie  $x$  den jeweiligen wahren Werth von  $f$  liefert, erscheint hier die Frage nach dem zur Abscisse  $x$  gehörigen Konoidvolumen  $V$  erledigt\*), sobald dessen Verhältnis zum Inhalte  $gx$  eines Cylinders von der Querfläche  $g$  und gleicher Axenlänge  $x$  ermittelt ist.

Die vorstehenden Erwägungen begründen — unter  $v$  den unbekanntem Zahlenwerth jenes Verhältnisses verstanden — zunächst den Ansatz:

$$V = v g x = v C x^{2r+1}$$

und weiter für das zur Abscisse:  $OR' = x'$  (vgl. Fig. 28) gehörige Volumen  $V'$  die Gleichung:

$$V' = v C x'^{2r+1},$$

woraus sich für das Volumen  $\bar{V}$  des von den Querflächen  $MNPQ = g$  und  $M'N'P'Q' = g'$  begrenzten Konoidstumpfes die Relation:

$$(41) \quad \bar{V} = V' - V = v C (x'^{2r+1} - x^{2r+1})$$

und für den Mittelwerth aller seiner Querflächen der Ausdruck:

$$\frac{V' - V}{x' - x} = v C \left( \frac{x'^{2r+1} - x^{2r+1}}{x' - x} \right)$$

ergibt. Derselbe fällt für  $x' = x$  offenbar mit  $g$  zusammen, während der Factor von  $v C$  unter neuerlicher Bezugnahme auf §. 4, Gleichung 19 in:  $(2r+1)x^{2r}$  übergeht. Es muss also für beliebige Werthe von  $x$ :

$$C x^{2r} = v C (2r+1) x^{2r}, \text{ d. h. } v (2r+1) = 1$$

sein, durch welche Bedingung die fragliche Volumformel zu einer völlig bestimmten wird und die einfache Gestalt:

$$(42) \quad V = \frac{g x}{2r+1}$$

annimmt. Consequent gelten für das cubische Paraboloid ( $r = \frac{1}{3}$ ), das gewöhnliche Paraboloid ( $r = \frac{1}{2}$ ), den Kegel ( $r = 1$ ) und das Neiloid ( $r = \frac{3}{2}$ ) die speciellen Cubirungsregeln\*\*):

$$V = \frac{3}{5} g x, \quad V = \frac{1}{2} g x, \quad V = \frac{1}{3} g x, \quad V = \frac{1}{4} g x$$

und zwar sowohl bei kreisförmigen als bei beliebigen elliptischen Querflächen.

Im Anschlusse hieran lässt sich vermöge der Proportion:

$$g : g' = x^{2r} : x'^{2r}$$

auch der Inhalt  $\bar{V}$  des Konoidstumpfes von der Axenlänge:  $x' - x = l$  durch das Volumen eines Cylinders von gleicher Axenlänge und der Querfläche  $g'$  ausdrücken, denn das Verhältnis von  $\bar{V}$  zu  $g' l$  gestattet auf Grundlage von (41) die Umformung:

$$\frac{v C (x'^{2r+1} - x^{2r+1})}{C x^{2r} (x' - x)} = \frac{v \{ 1 - (x : x')^{2r+1} \}}{1 - (x : x')}$$

\*) Der Gebrauch des Symbolen  $V$  statt des üblichen Buchstabens  $v$  ist deshalb unvermeidlich, weil  $v$  hier durchwegs die Bedeutung einer Ordinate besitzt.

\*\*\*) Beschränkt man sich von vornherein auf die Specialisirungen:  $r = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ , so wird der Werth des Factors von  $v C$  für  $x' = x$  nach Ausführung der angezeigten Division direct bestimmbar, mithin auch die Kenntnis der Gleichung (19) entbehrlich.

so dass  $\bar{V}$  selbst nach Einführung des Werthes von  $v$  und der zur logarithmischen Berechnung geeigneten Hilfszahl  $\omega = (g : g')^{1:2^r}$  durch die Gleichung:

$$(43) \quad \bar{V} = \left( \frac{1 - \omega^{2^r + 1}}{1 - \omega} \right) \frac{g' l}{2^r + 1}$$

gegeben erscheint. Ihre wichtigsten Specialisirungen beziehen sich auf die drei letzterwähnten Körper und ermöglichen folgende Reductionen:

$$(A) \quad r = \frac{1}{2}, \quad \omega = \frac{g}{g'} \quad \bar{V} = \frac{1}{2} g' l (1 + \omega) = \frac{1}{2} l (g' + g);$$

$$(B) \quad r = 1, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{g'}} \quad \bar{V} = \frac{1}{3} g' l (1 + \omega + \omega^2) = \frac{1}{3} l (g' + \sqrt{g'g} + g);$$

$$(C) \quad r = \frac{3}{2}, \quad \omega = \sqrt[3]{\frac{g}{g'}} \\ \bar{V} = \frac{1}{4} g' l (1 + \omega + \omega^2 + \omega^3) = \frac{1}{4} l \left( g' + \sqrt[3]{g'^2 g} + \sqrt[3]{g' g^2} + g \right).$$

Da jedoch  $\bar{V}$  auf dem hier eingeschlagenen Wege gemäss der Bedeutung von  $\omega$  nur dann ohne Einführung von Wurzelgrössen gefunden werden kann, wenn  $r$  den reciproken Werth einer geraden Zahl vorstellt, zeigen bereits die Ausdrücke (B) und (C) eine erhebliche Complication\*), so dass für die Erledigung der weiteren Aufgabe, möglichst einfache und allgemeine Gleichungen zur näherungsweise Körperberechnung aufzustellen, zunächst ausschliesslich die Volumformel für den Paraboloidstumpf in Betracht kommt. Dieselbe erlaubt mit Rücksicht auf die Relationen:

$$x' = x + l, \quad g = Cx, \quad g' = C(x + l)$$

noch eine weitere Vereinfachung, indem der Factor von  $l$ :

$$\frac{1}{2} (g' + g) = C \left( x + \frac{1}{2} l \right)$$

augenscheinlich die mittlere Querfläche:  $g_{\frac{1}{2}}$  des Paraboloidstumpfes bestimmt\*\*), d. h. sein Volumen entspricht zugleich dem Producte:  $g_{\frac{1}{2}} l$ .

Es besitzen mithin die Beziehungen zwischen  $\bar{V}$ ,  $g$ ,  $g'$  und  $g_{\frac{1}{2}}$  für den Paraboloidstumpf dieselbe Form wie jene zwischen der Fläche  $f$ , deren Grenzkordinaten und mittleren Ordinate für den trapezförmigen Flächenstreifen, wonach beide den ersteren entspringende Formeln zur Cubirung eines in  $n$  Sectionen von gleicher Länge:  $l : n = \delta$  zerlegten Stammes:

$$(44) \quad V = \delta \left\{ \frac{1}{2} (g_0 + g_n) + (g_1 + g_2 + \dots + g_{n-1}) \right\},$$

$$(45) \quad V = \delta (g'_1 + g'_2 + \dots + g'_n)$$

aus den Flächenformeln (24) und (30) unmittelbar durch Vertauschung der Ordinaten:  $y_0, y_1, \dots, y_n$ ;  $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$  mit den zu gleichen Abscissen gehörigen Querflächen:  $g_0, g_1, \dots, g_n$ ;  $g'_1, g'_2, \dots, g'_n$  hervorgehen. Diese Thatsache findet ihre mathematische Begründung

\*) Ihren einfachen analytischen Zusammenhang mit der gegenwärtig nach Riecke benannten Formel:  $\frac{1}{6} l (g' + 4 g_{\frac{1}{2}} + g)$  habe ich speciell für kreisförmige Querschnitte zuerst 1876 in meiner Abhandlung: „Über einige allgemeine für die Holzmesskunde belangreiche Cubirungsformeln“ (Centrablatt für das gesammte Forstwesen, II. Jahrg. S. 561 u. 562) klargelegt.

\*\*) Da das derzeit für  $g_{\frac{1}{2}}$  übliche Symbol  $\gamma$  in §. 7 zur Bezeichnung des Verhältnisses zweier Coefficienten verwendet werden muss, habe ich von demselben hier keinen Gebrauch gemacht.

darin, dass gemäss den Gleichungen für  $g$  und  $g'$  jede Querfläche einer solchen Stammsection nach dem Gesetze:

$$(46) \quad g = A + Bx$$

von  $x$  abhängt, wobei  $A, B$  ebenso wie  $a, b$  in der Relation (1) für ein und dasselbe Stammstück constant bleiben, dagegen von Section zu Section verschiedene Werthe erhalten.

Um nunmehr auf Grundlage von (46) das factische Anwendungsgebiet der bekanntlich nach Smalian und Huber benannten Ausdrücke (44) und (45) kennen zu lernen, ersetzen wir die beiden Leitcurven in Fig. 28 durch zwei gerade Linien von den Gleichungen:

$$y = a + bx, \quad z = c + dx,$$

wählen aber deren Winkel:  $\alpha, \beta$  mit der Abscissenaxe durchwegs so klein, dass wenigstens das Product:  $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$  ohneweiters zu vernachlässigen ist. Dasselbe gilt dann auch von  $b, d$ , weil gemäss §. 1 stets  $b = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $d = \operatorname{tg} \beta$  ist, und die zur Abscisse  $x$  gehörige Querfläche  $yz\pi$  bleibt näherungsweise gleich:

$$g = \pi \{ ac + (bc + ad)x \},$$

ergibt sich also aus (46) durch die Substitutionen:  $A = ac\pi$ ,  $B = (bc + ad)\pi$ . Aus diesem Grunde sind die Formeln von Smalian und Huber nicht allein auf jeden Paraboloidstumpf, sondern angenähert auch auf schwach konische Stammsectionen\*) mit kreisförmigen oder elliptischen Querflächen anwendbar.

Im Anschlusse hieran kommen aus der unbegrenzten Mannigfaltigkeit der übrigen Sectionsformen consequent jene in Betracht, deren Längsschnitte entweder ausgeprägte Trapeze vorstellen oder von Curvenstücken begrenzt werden, welche von den parabolischen Verbindungsbögen ihrer Endpunkte zwar bereits wesentlich abweichen, aber wenigstens für die aufeinanderfolgenden Querflächen  $g$  noch vergleichsweise einfache Bildungsgesetze liefern. Hierbei erfährt die Relation (46) durch das Hinzutreten neuer Glieder mit höheren Potenzen von  $x$  eine völlig analoge Verallgemeinerung wie (1), so dass wir durch Anpassung von  $g$  an zwei weitere, zwischen beiden Endquerschnitten gelegene charakteristische Querschnitte zu der mit (8) formal übereinstimmenden Beziehung:

$$(47) \quad g = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

gelangen. Als charakteristische Querflächen sind von Fall zu Fall solche zu betrachten, welche den Punkten stärkster Ausbauchung oder Einbauchung, beziehungsweise den Wendepunkten der Grenzcurven aller Längsschnitte entsprechen, und es ist in Anbetracht des gleichartigen Baues von (8) und (47) selbstverständlich, dass sich die vier disponiblen Constanten  $A, B, C, D$  aus je vier Werthpaaren von  $g$  und  $x$  stets nach denselben Regeln wie  $a, b, c, d$  in §. 3 ermitteln lassen.

Nachdem hiemit die allgemeine Bedeutung des Ausdruckes (47) sowie dessen Verhältnis zu (46) festgestellt ist, haben wir das zu einer beliebigen Abscisse  $x$  gehörige Volumen  $V$  zunächst durch  $x$  auszudrücken.

Zu diesem Zwecke vergleichen wir  $V$  wie bei der Berechnung des Konoidvolumens (42) mit dem Inhalte eines Cylinders von derselben Axenlänge  $x$  und der Querfläche  $g$ :

$$gx = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4$$

und suchen die Frage zu erledigen, welche Coefficienten:  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$  den einzelnen Theilproducten in dem unbekanntem Ausdrücke für  $V$ :

$$V = \nu_1 Ax + \nu_2 Bx^2 + \nu_3 Cx^3 + \nu_4 Dx^4$$

---

\*) Hierbei ist es durchaus nicht nöthig, dass die betreffende Stammsection ein Kegelstumpf im gewöhnlichen Sinne des Wortes ist, denn das Letztere tritt nur für  $a : b = c : d$  ein, während die Leitlinien in allen übrigen Fällen bei entsprechender Verlängerung die Abscissenaxe in verschiedenen Punkten mit den Abscissen:  $x_1 = -a : b$ ,  $x_2 = -c : d$  durchschneiden.

zukommen. Da die eingeführten Coëfficienten für beliebige Werthe von  $x$  und  $A, B, C, D$  gelten müssen, bleiben dieselben auch unverändert, falls die letzteren Grössen mit Ausnahme einer einzigen verschwinden, mithin  $V$  direct aus der Relation (42) gefunden werden kann. Auf solche Art liefert das einschlägige Formelsystem:

$$\begin{aligned} B = C = D = 0 : g &= A, & V &= g x = A x; \\ A = C = D = 0 : g &= B x, & V &= \frac{1}{2} g x = \frac{1}{2} B x^2; \\ A = B = D = 0 : g &= C x^2, & V &= \frac{1}{3} g x = \frac{1}{3} C x^3; \\ A = B = C = 0 : g &= D x^3, & V &= \frac{1}{4} g x = \frac{1}{4} D x^4 \end{aligned}$$

für  $v_1, v_2, v_3, v_4$  direct die Werthe:  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$  und für  $V$  selbst das Resultat:

$$(48) \quad V = x \left( A + \frac{1}{2} B x + \frac{1}{3} C x^2 + \frac{1}{4} D x^3 \right).$$

Das hier präcisirte Abhängigkeitsverhältnis zwischen  $V$  und  $x$  entspricht vollständig jenem zwischen  $f$  und  $x$  in (25), so dass die Relation (48) auch dieselben Umformungen wie (25) gestattet, wobei an die Stelle der Ordinaten ausnahmslos mit gleichen Abscissen versehene Querflächen treten.

Es gibt daher zunächst für  $D = 0$ , d. h. für alle Körper mit der Querflächengleichung:

$$(49) \quad g = A + B x + C x^2$$

im Anschluss an (26) die zuerst von W. Hossfeld\*) aufgestellte Cubirungsformel:

$$(50) \quad V = \frac{1}{4} x \left( g_0 + 3 g_{\frac{2}{3}} \right),$$

und weiter für  $D \geq 0$  in formaler Übereinstimmung mit (31) der allgemeine Ausdruck:

$$(51) \quad V = x \left\{ \lambda (g' + g'') + (1 - 2\lambda) g_{\frac{1}{2}} \right\},$$

in welchem  $g', g''$  die den Abscissen:  $\epsilon x$  und  $(1 - \epsilon)x$  zugehörigen Querflächen vorstellen, und  $\lambda$  wie früher den reciproken Werth von  $6(1 - 2\epsilon)^2$  bedeutet. Ebenso können auf Grundlage unserer Discussion der Beziehung (31) nunmehr aus den verschiedenen Specialisirungen von (51) unmittelbar jene Cubirungsformeln ausgeschieden werden, welche nachweisbar die einfachsten Coëfficienten besitzen und insoferne für die Rechnung am bequemsten sind. Es bleiben dann im Ganzen folgende vier Gleichungen übrig:

$$(52) \quad \epsilon = 0, \quad V = \frac{1}{6} x \left( g_0 + 4 g_{\frac{1}{2}} + g \right);$$

$$(53) \quad \epsilon = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} = 0.1464466, \quad V = \frac{1}{3} x \left( \bar{g}' + g_{\frac{1}{2}} + \bar{g}'' \right);$$

$$(54) \quad \epsilon = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} = 0.2113249, \quad V = \frac{1}{2} x (g' + g'');$$

$$(55) \quad \epsilon = \frac{1}{4}, \quad V = \frac{1}{3} x \left\{ 2 \left( g_{\frac{1}{2}} + g_{\frac{3}{4}} \right) - g_{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Die erste derselben bildet die längst bekannte Grundlage der Simpson'schen Formel zur näherungsweise Körperberechnung:

---

\*) Vgl. dessen 1812 in Leipzig erschienenes Werk: „Niedere und höhere praktische Stereometrie oder kurze und leichte Messung und Berechnung aller regel- und unregelmässigen Körper etc.“, S. 67, S. 123.

$$(56) \quad V = \frac{1}{3} \delta \left\{ (g_0 + g_n) + 4 (g_1 + g_3 + \dots + g_{n-1}) + 2 (g_2 + g_4 + \dots + g_{n-2}) \right\},$$

während die übrigen Relationen erst 1879 von mir in voller Allgemeinheit abgeleitet und in ihrer Anwendung auf einzelne Stämme ausdrücklich zur sectionsweisen Cubirung vorgeschlagen worden sind.\*)

Da nämlich die Stammquerschnitte unserer einheimischen Waldbäume gemeinlich erst über den Wurzelanläufen eine mehr oder weniger regelmässige Gestalt zeigen und in den beasteten Stammtheilen häufig wieder unregelmässig begrenzt sind, muss bei Stämmen von unbekannter Mittelform, wie ich zuerst in meinen einschlägigen analytischen Untersuchungen (a. a. O. S. 298, 299) auseinandergesetzt habe, zunächst der Möglichkeit Rechnung getragen werden, dass dieselben aus je drei Sectionen von verschiedenen Bildungsgesetzen bestehen können.

Aus diesem Grunde erscheint es bei Anwendung der Gleichungen (53), (54), (55) auf derartige Stämme unerlässlich, die letzteren so weit zu theilen, dass wenigstens je eine charakteristische Querfläche der ersten und dritten Stammsection in die Rechnung eintritt, und  $x$  demgemäss — unter  $l$  die Stammlänge verstanden — höchstens gleich  $\frac{1}{2} l$  zu wählen. Die näherungsweise Cubirung des ganzen Stammes auf Grundlage von (53) oder (55) erfordert dann je sechs, jene mit Hilfe von (54) je vier Querschnittsbestimmungen\*\*), wobei sich die jeweiligen Lagen der Querflächen:  $\bar{g}'$ ,  $\bar{g}''$ ;  $g'$ ,  $g''$  unter Benützung der beige-schlossenen Tabellen\*\*\*) ebenso rasch wie für Theilungen nach rationalen Verhältnissen feststellen lassen.

\*) Vgl. meine im II. Bde. der „Mittheilungen aus dem forstlichen Versuchswesen Österreichs“ (herausgeg. von weil. Dr. A. v. Seckendorff) erschienene Arbeit: „Über das Problem der Stammcubirung als Grundlage der Berechnung von Formzahlentabellen und Massentafeln“, S. 119, 157, 158 u. S. 173–176. Der Vollständigkeit wegen sei noch bemerkt, dass dieselbe Schlussweise, welche die Ableitung der Relation (48) mit Hilfe von (42) ermöglicht hat, auf jede Querflächengleichung anwendbar bleibt, welche  $g$  unter Beschränkung auf eine endliche Anzahl von mit positiven Exponenten  $a$ ,  $b$ ,  $k$  versehenen Gliedern durch ein Aggregat von der Form:

$$g = Ax^a + Bx^b + \dots + Kx^k$$

definiert. Es gilt nämlich in diesem Falle für das von  $x=0$  bis  $x=x$  gerechnete Volumen die Gleichung:

$$V = x \left( \frac{Ax^a}{a+1} + \frac{Bx^b}{b+1} + \dots + \frac{Kx^k}{k+1} \right),$$

so dass im Bedarfsfalle sämmtliche Grundformeln der eben citirten Abhandlung ebenfalls elementar beweisbar sind.

\*\*) Um jeder widersinnigen Anwendung der in Rede stehenden Formeln vorzubeugen, habe ich (a. a. O. S. 176) speciell die der Gleichung (55) für  $x = \frac{1}{2} l$  entspringende Cubirungsformel:

$$V = \frac{1}{6} l \left\{ 2 (g_{\frac{1}{8}} + g_{\frac{3}{8}} + g_{\frac{5}{8}} + g_{\frac{7}{8}}) - (g_{\frac{1}{4}} + g_{\frac{3}{4}}) \right\}$$

gesondert mit dem Zusatze angeführt, dass dieselbe namentlich bei Stämmen von geradem Wuchse eine bedeutende praktische Brauchbarkeit besitzen dürfte. — Bekanntlich werden ja die vorschriftsgemäss nach der Formel:  $\frac{\pi}{4} \left( \frac{D+d}{2} \right)^2$  berechneten Inhalte der Stammquerflächen im Durchschnitte etwas zu gross erhalten, so dass sich von vornherein die Anwendung solcher Cubirungsformeln empfiehlt, welche bei Einführung der richtigen Flächeninhalte etwas zu kleine Volumina liefern würden.

\*\*\*) Da deren Einrichtung wohl keiner näheren Erläuterung bedarf, sei hier nur erwähnt, dass alle vierstelligen Näherungswerthe vermöge ihrer Ableitung aus früher von mir berechneten achtstelligen Näherungswerthen mit Einschluss der letzten Decimale richtig sind. Besitzt dieselbe speciell den Werth 5, so zeigt ein bei der Ziffer 5 angebrachtes + an, dass der betreffende Näherungswerth etwas zu gross ist, mithin der Fünfer keine Correctur für die vorangehende Ziffer liefert.

## Vierstellige Tabelle der Werthe des Productes:

$$\frac{1}{4} (2 - \sqrt{2}) x = 0.1464466 x$$

von  $x = 0.00$  bis  $x = 4.99$ .

| x   | 0                   | 1                   | 2                   | 3                   | 4                   | 5                   | 6                   | 7                   | 8                   | 9                   |
|-----|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 0.0 | 0.0000              | 0.0015 <sup>+</sup> | 0.0029              | 0.0044              | 0.0059              | 0.0073              | 0.0088              | 0.0103              | 0.0117              | 0.0132              |
| 0.1 | 0.0146              | 0.0161              | 0.0176              | 0.0190              | 0.0205              | 0.0220              | 0.0234              | 0.0249              | 0.0264              | 0.0278              |
| 0.2 | 0.0293              | 0.0308              | 0.0322              | 0.0337              | 0.0351              | 0.0366              | 0.0381              | 0.0395              | 0.0410              | 0.0425 <sup>+</sup> |
| 0.3 | 0.0439              | 0.0454              | 0.0469              | 0.0483              | 0.0498              | 0.0513              | 0.0527              | 0.0542              | 0.0556              | 0.0571              |
| 0.4 | 0.0586              | 0.0600              | 0.0615              | 0.0630              | 0.0644              | 0.0659              | 0.0674              | 0.0688              | 0.0703              | 0.0718              |
| 0.5 | 0.0732              | 0.0747              | 0.0762              | 0.0776              | 0.0791              | 0.0805              | 0.0820              | 0.0835 <sup>+</sup> | 0.0849              | 0.0864              |
| 0.6 | 0.0879              | 0.0893              | 0.0908              | 0.0923              | 0.0937              | 0.0952              | 0.0967              | 0.0981              | 0.0996              | 0.1010              |
| 0.7 | 0.1025              | 0.1040              | 0.1054              | 0.1069              | 0.1084              | 0.1098              | 0.1113              | 0.1128              | 0.1142              | 0.1157              |
| 0.8 | 0.1172              | 0.1186              | 0.1201              | 0.1216              | 0.1230              | 0.1245 <sup>+</sup> | 0.1259              | 0.1274              | 0.1289              | 0.1303              |
| 0.9 | 0.1318              | 0.1333              | 0.1347              | 0.1362              | 0.1377              | 0.1391              | 0.1406              | 0.1421              | 0.1435              | 0.1450              |
| 1.0 | 0.1464              | 0.1479              | 0.1494              | 0.1508              | 0.1523              | 0.1538              | 0.1552              | 0.1567              | 0.1582              | 0.1596              |
| 1.1 | 0.1611              | 0.1626              | 0.1640              | 0.1655 <sup>+</sup> | 0.1669              | 0.1684              | 0.1699              | 0.1713              | 0.1728              | 0.1743              |
| 1.2 | 0.1757              | 0.1772              | 0.1787              | 0.1801              | 0.1816              | 0.1831              | 0.1845              | 0.1860              | 0.1875 <sup>+</sup> | 0.1889              |
| 1.3 | 0.1904              | 0.1918              | 0.1933              | 0.1948              | 0.1962              | 0.1977              | 0.1992              | 0.2006              | 0.2021              | 0.2036              |
| 1.4 | 0.2050              | 0.2065 <sup>+</sup> | 0.2080              | 0.2094              | 0.2109              | 0.2123              | 0.2138              | 0.2153              | 0.2167              | 0.2182              |
| 1.5 | 0.2197              | 0.2211              | 0.2226              | 0.2241              | 0.2255              | 0.2270              | 0.2285 <sup>+</sup> | 0.2299              | 0.2314              | 0.2329              |
| 1.6 | 0.2343              | 0.2358              | 0.2372              | 0.2387              | 0.2402              | 0.2416              | 0.2431              | 0.2446              | 0.2460              | 0.2475 <sup>+</sup> |
| 1.7 | 0.2490              | 0.2504              | 0.2519              | 0.2534              | 0.2548              | 0.2563              | 0.2577              | 0.2592              | 0.2607              | 0.2621              |
| 1.8 | 0.2636              | 0.2651              | 0.2665              | 0.2680              | 0.2695 <sup>+</sup> | 0.2709              | 0.2724              | 0.2739              | 0.2753              | 0.2768              |
| 1.9 | 0.2782              | 0.2797              | 0.2812              | 0.2826              | 0.2841              | 0.2856              | 0.2870              | 0.2885 <sup>+</sup> | 0.2900              | 0.2914              |
| 2.0 | 0.2929              | 0.2944              | 0.2958              | 0.2973              | 0.2988              | 0.3002              | 0.3017              | 0.3031              | 0.3046              | 0.3061              |
| 2.1 | 0.3075              | 0.3090              | 0.3105 <sup>+</sup> | 0.3119              | 0.3134              | 0.3149              | 0.3163              | 0.3178              | 0.3193              | 0.3207              |
| 2.2 | 0.3222              | 0.3236              | 0.3251              | 0.3266              | 0.3280              | 0.3295              | 0.3310              | 0.3324              | 0.3339              | 0.3354              |
| 2.3 | 0.3368              | 0.3383              | 0.3398              | 0.3412              | 0.3427              | 0.3441              | 0.3456              | 0.3471              | 0.3485              | 0.3500              |
| 2.4 | 0.3515 <sup>+</sup> | 0.3529              | 0.3544              | 0.3559              | 0.3573              | 0.3588              | 0.3603              | 0.3617              | 0.3632              | 0.3647              |
| 2.5 | 0.3661              | 0.3676              | 0.3690              | 0.3705              | 0.3720              | 0.3734              | 0.3749              | 0.3764              | 0.3778              | 0.3793              |
| 2.6 | 0.3808              | 0.3822              | 0.3837              | 0.3852              | 0.3866              | 0.3881              | 0.3895              | 0.3910              | 0.3925 <sup>+</sup> | 0.3939              |
| 2.7 | 0.3954              | 0.3969              | 0.3983              | 0.3998              | 0.4013              | 0.4027              | 0.4042              | 0.4057              | 0.4071              | 0.4086              |
| 2.8 | 0.4101              | 0.4115              | 0.4130              | 0.4144              | 0.4159              | 0.4174              | 0.4188              | 0.4203              | 0.4218              | 0.4232              |
| 2.9 | 0.4247              | 0.4262              | 0.4276              | 0.4291              | 0.4306              | 0.4320              | 0.4335              | 0.4349              | 0.4364              | 0.4379              |
| 3.0 | 0.4393              | 0.4408              | 0.4423              | 0.4437              | 0.4452              | 0.4467              | 0.4481              | 0.4496              | 0.4511              | 0.4525              |
| 3.1 | 0.4540              | 0.4554              | 0.4569              | 0.4584              | 0.4598              | 0.4613              | 0.4628              | 0.4642              | 0.4657              | 0.4672              |
| 3.2 | 0.4686              | 0.4701              | 0.4716              | 0.4730              | 0.4745 <sup>+</sup> | 0.4760              | 0.4774              | 0.4789              | 0.4803              | 0.4818              |
| 3.3 | 0.4833              | 0.4847              | 0.4862              | 0.4877              | 0.4891              | 0.4906              | 0.4921              | 0.4935              | 0.4950              | 0.4965 <sup>+</sup> |
| 3.4 | 0.4979              | 0.4994              | 0.5008              | 0.5023              | 0.5038              | 0.5052              | 0.5067              | 0.5082              | 0.5096              | 0.5111              |
| 3.5 | 0.5126              | 0.5140              | 0.5155 <sup>+</sup> | 0.5170              | 0.5184              | 0.5199              | 0.5213              | 0.5228              | 0.5243              | 0.5257              |
| 3.6 | 0.5272              | 0.5287              | 0.5301              | 0.5316              | 0.5331              | 0.5345              | 0.5360              | 0.5375 <sup>+</sup> | 0.5389              | 0.5404              |
| 3.7 | 0.5419              | 0.5433              | 0.5448              | 0.5462              | 0.5477              | 0.5492              | 0.5506              | 0.5521              | 0.5536              | 0.5550              |
| 3.8 | 0.5565 <sup>+</sup> | 0.5580              | 0.5594              | 0.5609              | 0.5624              | 0.5638              | 0.5653              | 0.5667              | 0.5682              | 0.5697              |
| 3.9 | 0.5711              | 0.5726              | 0.5741              | 0.5755              | 0.5770              | 0.5785 <sup>+</sup> | 0.5799              | 0.5814              | 0.5829              | 0.5843              |
| 4.0 | 0.5858              | 0.5873              | 0.5887              | 0.5902              | 0.5916              | 0.5931              | 0.5946              | 0.5960              | 0.5975              | 0.5990              |
| 4.1 | 0.6004              | 0.6019              | 0.6034              | 0.6048              | 0.6063              | 0.6078              | 0.6092              | 0.6107              | 0.6121              | 0.6136              |
| 4.2 | 0.6151              | 0.6165              | 0.6180              | 0.6195 <sup>+</sup> | 0.6209              | 0.6224              | 0.6239              | 0.6253              | 0.6268              | 0.6283              |
| 4.3 | 0.6297              | 0.6312              | 0.6326              | 0.6341              | 0.6356              | 0.6370              | 0.6385              | 0.6400              | 0.6414              | 0.6429              |
| 4.4 | 0.6444              | 0.6458              | 0.6473              | 0.6488              | 0.6502              | 0.6517              | 0.6532              | 0.6546              | 0.6561              | 0.6575              |
| 4.5 | 0.6590              | 0.6605 <sup>+</sup> | 0.6619              | 0.6634              | 0.6649              | 0.6663              | 0.6678              | 0.6693              | 0.6707              | 0.6722              |
| 4.6 | 0.6737              | 0.6751              | 0.6766              | 0.6780              | 0.6795              | 0.6810              | 0.6824              | 0.6839              | 0.6854              | 0.6868              |
| 4.7 | 0.6883              | 0.6898              | 0.6912              | 0.6927              | 0.6942              | 0.6956              | 0.6971              | 0.6986              | 0.7000              | 0.7015 <sup>+</sup> |
| 4.8 | 0.7029              | 0.7044              | 0.7059              | 0.7073              | 0.7088              | 0.7103              | 0.7117              | 0.7132              | 0.7147              | 0.7161              |
| 4.9 | 0.7176              | 0.7191              | 0.7205              | 0.7220              | 0.7234              | 0.7249              | 0.7264              | 0.7278              | 0.7293              | 0.7308              |

### Vierstellige Tabelle der Werthe des Productes:

$$\frac{1}{4} (2 - \sqrt{2}) x = 0.1464466 x$$

von  $x = 5.00$  bis  $x = 9.99$ .

| $x$ | 0       | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       | 9       |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 5.0 | 0.7322  | 0.7337  | 0.7352  | 0.7366  | 0.7381  | 0.7396  | 0.7410  | 0.7425+ | 0.7439  | 0.7454  |
| 5.1 | 0.7469  | 0.7483  | 0.7498  | 0.7513  | 0.7527  | 0.7542  | 0.7557  | 0.7571  | 0.7586  | 0.7601  |
| 5.2 | 0.7615  | 0.7630  | 0.7645+ | 0.7659  | 0.7674  | 0.7688  | 0.7703  | 0.7718  | 0.7732  | 0.7747  |
| 5.3 | 0.7762  | 0.7776  | 0.7791  | 0.7806  | 0.7820  | 0.7835+ | 0.7850  | 0.7864  | 0.7879  | 0.7893  |
| 5.4 | 0.7908  | 0.7923  | 0.7937  | 0.7952  | 0.7967  | 0.7981  | 0.7996  | 0.8011  | 0.8025  | 0.8040  |
| 5.5 | 0.8055+ | 0.8069  | 0.8084  | 0.8098  | 0.8113  | 0.8128  | 0.8142  | 0.8157  | 0.8172  | 0.8186  |
| 5.6 | 0.8201  | 0.8216  | 0.8230  | 0.8245+ | 0.8260  | 0.8274  | 0.8289  | 0.8304  | 0.8318  | 0.8333  |
| 5.7 | 0.8347  | 0.8362  | 0.8377  | 0.8391  | 0.8406  | 0.8421  | 0.8435  | 0.8450  | 0.8465+ | 0.8479  |
| 5.8 | 0.8494  | 0.8509  | 0.8523  | 0.8538  | 0.8552  | 0.8567  | 0.8582  | 0.8596  | 0.8611  | 0.8626  |
| 5.9 | 0.8640  | 0.8655+ | 0.8670  | 0.8684  | 0.8699  | 0.8714  | 0.8728  | 0.8743  | 0.8758  | 0.8772  |
| 6.0 | 0.8787  | 0.8801  | 0.8816  | 0.8831  | 0.8845  | 0.8860  | 0.8875+ | 0.8889  | 0.8904  | 0.8919  |
| 6.1 | 0.8933  | 0.8948  | 0.8963  | 0.8977  | 0.8992  | 0.9006  | 0.9021  | 0.9036  | 0.9050  | 0.9065  |
| 6.2 | 0.9080  | 0.9094  | 0.9109  | 0.9124  | 0.9138  | 0.9153  | 0.9168  | 0.9182  | 0.9197  | 0.9211  |
| 6.3 | 0.9226  | 0.9241  | 0.9255  | 0.9270  | 0.9285+ | 0.9299  | 0.9314  | 0.9329  | 0.9343  | 0.9358  |
| 6.4 | 0.9373  | 0.9387  | 0.9402  | 0.9417  | 0.9431  | 0.9446  | 0.9460  | 0.9475  | 0.9490  | 0.9504  |
| 6.5 | 0.9519  | 0.9534  | 0.9548  | 0.9563  | 0.9578  | 0.9592  | 0.9607  | 0.9622  | 0.9636  | 0.9651  |
| 6.6 | 0.9665  | 0.9680  | 0.9695+ | 0.9709  | 0.9724  | 0.9739  | 0.9753  | 0.9768  | 0.9783  | 0.9797  |
| 6.7 | 0.9812  | 0.9827  | 0.9841  | 0.9856  | 0.9871  | 0.9885  | 0.9900  | 0.9914  | 0.9929  | 0.9944  |
| 6.8 | 0.9958  | 0.9973  | 0.9988  | 1.0002  | 1.0017  | 1.0032  | 1.0046  | 1.0061  | 1.0076  | 1.0090  |
| 6.9 | 1.0105+ | 1.0119  | 1.0134  | 1.0149  | 1.0163  | 1.0178  | 1.0193  | 1.0207  | 1.0222  | 1.0237  |
| 7.0 | 1.0251  | 1.0266  | 1.0281  | 1.0295  | 1.0310  | 1.0324  | 1.0339  | 1.0354  | 1.0368  | 1.0383  |
| 7.1 | 1.0398  | 1.0412  | 1.0427  | 1.0442  | 1.0456  | 1.0471  | 1.0486  | 1.0500  | 1.0515+ | 1.0530  |
| 7.2 | 1.0544  | 1.0559  | 1.0573  | 1.0588  | 1.0603  | 1.0617  | 1.0632  | 1.0647  | 1.0661  | 1.0676  |
| 7.3 | 1.0691  | 1.0705  | 1.0720  | 1.0735+ | 1.0749  | 1.0764  | 1.0778  | 1.0793  | 1.0808  | 1.0822  |
| 7.4 | 1.0837  | 1.0852  | 1.0866  | 1.0881  | 1.0896  | 1.0910  | 1.0925+ | 1.0940  | 1.0954  | 1.0969  |
| 7.5 | 1.0983  | 1.0998  | 1.1013  | 1.1027  | 1.1042  | 1.1057  | 1.1071  | 1.1086  | 1.1101  | 1.1115  |
| 7.6 | 1.1130  | 1.1145+ | 1.1159  | 1.1174  | 1.1189  | 1.1203  | 1.1218  | 1.1232  | 1.1247  | 1.1262  |
| 7.7 | 1.1276  | 1.1291  | 1.1306  | 1.1320  | 1.1335+ | 1.1350  | 1.1364  | 1.1379  | 1.1394  | 1.1408  |
| 7.8 | 1.1423  | 1.1437  | 1.1452  | 1.1467  | 1.1481  | 1.1496  | 1.1511  | 1.1525  | 1.1540  | 1.1555+ |
| 7.9 | 1.1569  | 1.1584  | 1.1599  | 1.1613  | 1.1628  | 1.1643  | 1.1657  | 1.1672  | 1.1686  | 1.1701  |
| 8.0 | 1.1716  | 1.1730  | 1.1745  | 1.1760  | 1.1774  | 1.1789  | 1.1804  | 1.1818  | 1.1833  | 1.1848  |
| 8.1 | 1.1862  | 1.1877  | 1.1891  | 1.1906  | 1.1921  | 1.1935  | 1.1950  | 1.1965+ | 1.1979  | 1.1994  |
| 8.2 | 1.2009  | 1.2023  | 1.2038  | 1.2053  | 1.2067  | 1.2082  | 1.2096  | 1.2111  | 1.2126  | 1.2140  |
| 8.3 | 1.2155  | 1.2170  | 1.2184  | 1.2199  | 1.2214  | 1.2228  | 1.2243  | 1.2258  | 1.2272  | 1.2287  |
| 8.4 | 1.2302  | 1.2316  | 1.2331  | 1.2345  | 1.2360  | 1.2375+ | 1.2389  | 1.2404  | 1.2419  | 1.2433  |
| 8.5 | 1.2448  | 1.2463  | 1.2477  | 1.2492  | 1.2507  | 1.2521  | 1.2536  | 1.2550  | 1.2565  | 1.2580  |
| 8.6 | 1.2594  | 1.2609  | 1.2624  | 1.2638  | 1.2653  | 1.2668  | 1.2682  | 1.2697  | 1.2712  | 1.2726  |
| 8.7 | 1.2741  | 1.2755  | 1.2770  | 1.2785+ | 1.2799  | 1.2814  | 1.2829  | 1.2843  | 1.2858  | 1.2873  |
| 8.8 | 1.2887  | 1.2902  | 1.2917  | 1.2931  | 1.2946  | 1.2961  | 1.2975  | 1.2990  | 1.3004  | 1.3019  |
| 8.9 | 1.3034  | 1.3048  | 1.3063  | 1.3078  | 1.3092  | 1.3107  | 1.3122  | 1.3136  | 1.3151  | 1.3166  |
| 9.0 | 1.3180  | 1.3195+ | 1.3209  | 1.3224  | 1.3239  | 1.3253  | 1.3268  | 1.3283  | 1.3297  | 1.3312  |
| 9.1 | 1.3327  | 1.3341  | 1.3356  | 1.3371  | 1.3385  | 1.3400  | 1.3415+ | 1.3429  | 1.3444  | 1.3458  |
| 9.2 | 1.3473  | 1.3488  | 1.3502  | 1.3517  | 1.3532  | 1.3546  | 1.3561  | 1.3576  | 1.3590  | 1.3605+ |
| 9.3 | 1.3620  | 1.3634  | 1.3649  | 1.3663  | 1.3678  | 1.3693  | 1.3707  | 1.3722  | 1.3737  | 1.3751  |
| 9.4 | 1.3766  | 1.3781  | 1.3795  | 1.3810  | 1.3825+ | 1.3839  | 1.3854  | 1.3868  | 1.3883  | 1.3898  |
| 9.5 | 1.3912  | 1.3927  | 1.3942  | 1.3956  | 1.3971  | 1.3986  | 1.4000  | 1.4015  | 1.4030  | 1.4044  |
| 9.6 | 1.4059  | 1.4074  | 1.4088  | 1.4103  | 1.4117  | 1.4132  | 1.4147  | 1.4161  | 1.4176  | 1.4191  |
| 9.7 | 1.4205  | 1.4220  | 1.4235+ | 1.4249  | 1.4264  | 1.4279  | 1.4293  | 1.4308  | 1.4322  | 1.4337  |
| 9.8 | 1.4352  | 1.4366  | 1.4381  | 1.4396  | 1.4410  | 1.4425+ | 1.4440  | 1.4454  | 1.4469  | 1.4484  |
| 9.9 | 1.4498  | 1.4513  | 1.4528  | 1.4542  | 1.4557  | 1.4571  | 1.4586  | 1.4601  | 1.4615  | 1.4630  |

## Vierstellige Tabelle der Werthe des Productes:

$$\frac{1}{6} (3 - \sqrt{3}) x = 0.2113249 x$$

von  $x = 0.00$  bis  $x = 1.99$ .

| $x$ | 0                   | 1                   | 2                   | 3                   | 4                   | 5                   | 6                   | 7                   | 8                   | 9                   |
|-----|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 0.0 | 0.0000              | 0.0021              | 0.0042              | 0.0063              | 0.0085 <sup>+</sup> | 0.0106              | 0.0127              | 0.0148              | 0.0169              | 0.0190              |
| 0.1 | 0.0211              | 0.0232              | 0.0254              | 0.0275 <sup>+</sup> | 0.0296              | 0.0317              | 0.0338              | 0.0359              | 0.0380              | 0.0402              |
| 0.2 | 0.0423              | 0.0444              | 0.0465 <sup>+</sup> | 0.0486              | 0.0507              | 0.0528              | 0.0549              | 0.0571              | 0.0592              | 0.0613              |
| 0.3 | 0.0634              | 0.0655              | 0.0676              | 0.0697              | 0.0719              | 0.0740              | 0.0761              | 0.0782              | 0.0803              | 0.0824              |
| 0.4 | 0.0845              | 0.0866              | 0.0888              | 0.0909              | 0.0930              | 0.0951              | 0.0972              | 0.0993              | 0.1014              | 0.1035              |
| 0.5 | 0.1057              | 0.1078              | 0.1099              | 0.1120              | 0.1141              | 0.1162              | 0.1183              | 0.1205 <sup>+</sup> | 0.1226              | 0.1247              |
| 0.6 | 0.1268              | 0.1289              | 0.1310              | 0.1331              | 0.1352              | 0.1374              | 0.1395 <sup>+</sup> | 0.1416              | 0.1437              | 0.1458              |
| 0.7 | 0.1479              | 0.1500              | 0.1522              | 0.1543              | 0.1564              | 0.1585 <sup>+</sup> | 0.1606              | 0.1627              | 0.1648              | 0.1669              |
| 0.8 | 0.1691              | 0.1712              | 0.1733              | 0.1754              | 0.1775              | 0.1796              | 0.1817              | 0.1839              | 0.1860              | 0.1881              |
| 0.9 | 0.1902              | 0.1923              | 0.1944              | 0.1965              | 0.1986              | 0.2008              | 0.2029              | 0.2050              | 0.2071              | 0.2092              |
| 1.0 | 0.2113              | 0.2134              | 0.2156              | 0.2177              | 0.2198              | 0.2219              | 0.2240              | 0.2261              | 0.2282              | 0.2303              |
| 1.1 | 0.2325 <sup>+</sup> | 0.2346              | 0.2367              | 0.2388              | 0.2409              | 0.2430              | 0.2451              | 0.2473              | 0.2494              | 0.2515 <sup>+</sup> |
| 1.2 | 0.2536              | 0.2557              | 0.2578              | 0.2599              | 0.2620              | 0.2642              | 0.2663              | 0.2684              | 0.2705 <sup>+</sup> | 0.2726              |
| 1.3 | 0.2747              | 0.2768              | 0.2789              | 0.2811              | 0.2832              | 0.2853              | 0.2874              | 0.2895              | 0.2916              | 0.2937              |
| 1.4 | 0.2959              | 0.2980              | 0.3001              | 0.3022              | 0.3043              | 0.3064              | 0.3085              | 0.3106              | 0.3128              | 0.3149              |
| 1.5 | 0.3170              | 0.3191              | 0.3212              | 0.3233              | 0.3254              | 0.3276              | 0.3297              | 0.3318              | 0.3339              | 0.3360              |
| 1.6 | 0.3381              | 0.3402              | 0.3423              | 0.3445 <sup>+</sup> | 0.3466              | 0.3487              | 0.3508              | 0.3529              | 0.3550              | 0.3571              |
| 1.7 | 0.3593              | 0.3614              | 0.3635 <sup>+</sup> | 0.3656              | 0.3677              | 0.3698              | 0.3719              | 0.3740              | 0.3762              | 0.3783              |
| 1.8 | 0.3804              | 0.3825 <sup>+</sup> | 0.3846              | 0.3867              | 0.3888              | 0.3910              | 0.3931              | 0.3952              | 0.3973              | 0.3994              |
| 1.9 | 0.4015              | 0.4036              | 0.4057              | 0.4079              | 0.4100              | 0.4121              | 0.4142              | 0.4163              | 0.4184              | 0.4205              |
| 2.0 | 0.4226              | 0.4248              | 0.4269              | 0.4290              | 0.4311              | 0.4332              | 0.4353              | 0.4374              | 0.4396              | 0.4417              |
| 2.1 | 0.4438              | 0.4459              | 0.4480              | 0.4501              | 0.4522              | 0.4543              | 0.4565 <sup>+</sup> | 0.4586              | 0.4607              | 0.4628              |
| 2.2 | 0.4649              | 0.4670              | 0.4691              | 0.4713              | 0.4734              | 0.4755 <sup>+</sup> | 0.4776              | 0.4797              | 0.4818              | 0.4839              |
| 2.3 | 0.4860              | 0.4882              | 0.4903              | 0.4924              | 0.4945              | 0.4966              | 0.4987              | 0.5008              | 0.5030              | 0.5051              |
| 2.4 | 0.5072              | 0.5093              | 0.5114              | 0.5135              | 0.5156              | 0.5177              | 0.5199              | 0.5220              | 0.5241              | 0.5262              |
| 2.5 | 0.5283              | 0.5304              | 0.5325              | 0.5347              | 0.5368              | 0.5389              | 0.5410              | 0.5431              | 0.5452              | 0.5473              |
| 2.6 | 0.5494              | 0.5516              | 0.5537              | 0.5558              | 0.5579              | 0.5600              | 0.5621              | 0.5642              | 0.5664              | 0.5685 <sup>+</sup> |
| 2.7 | 0.5706              | 0.5727              | 0.5748              | 0.5769              | 0.5790              | 0.5811              | 0.5833              | 0.5854              | 0.5875 <sup>+</sup> | 0.5896              |
| 2.8 | 0.5917              | 0.5938              | 0.5959              | 0.5980              | 0.6002              | 0.6023              | 0.6044              | 0.6065              | 0.6086              | 0.6107              |
| 2.9 | 0.6128              | 0.6150              | 0.6171              | 0.6192              | 0.6213              | 0.6234              | 0.6255              | 0.6276              | 0.6297              | 0.6319              |
| 3.0 | 0.6340              | 0.6361              | 0.6382              | 0.6403              | 0.6424              | 0.6445              | 0.6467              | 0.6488              | 0.6509              | 0.6530              |
| 3.1 | 0.6551              | 0.6572              | 0.6593              | 0.6614              | 0.6636              | 0.6657              | 0.6678              | 0.6699              | 0.6720              | 0.6741              |
| 3.2 | 0.6762              | 0.6784              | 0.6805 <sup>+</sup> | 0.6826              | 0.6847              | 0.6868              | 0.6889              | 0.6910              | 0.6931              | 0.6953              |
| 3.3 | 0.6974              | 0.6995 <sup>+</sup> | 0.7016              | 0.7037              | 0.7058              | 0.7079              | 0.7101              | 0.7122              | 0.7143              | 0.7164              |
| 3.4 | 0.7185              | 0.7206              | 0.7227              | 0.7248              | 0.7270              | 0.7291              | 0.7312              | 0.7333              | 0.7354              | 0.7375              |
| 3.5 | 0.7396              | 0.7418              | 0.7439              | 0.7460              | 0.7481              | 0.7502              | 0.7523              | 0.7544              | 0.7565              | 0.7587              |
| 3.6 | 0.7608              | 0.7629              | 0.7650              | 0.7671              | 0.7692              | 0.7713              | 0.7734              | 0.7756              | 0.7777              | 0.7798              |
| 3.7 | 0.7819              | 0.7840              | 0.7861              | 0.7882              | 0.7904              | 0.7925 <sup>+</sup> | 0.7946              | 0.7967              | 0.7988              | 0.8009              |
| 3.8 | 0.8030              | 0.8051              | 0.8073              | 0.8094              | 0.8115 <sup>+</sup> | 0.8136              | 0.8157              | 0.8178              | 0.8199              | 0.8221              |
| 3.9 | 0.8242              | 0.8263              | 0.8284              | 0.8305              | 0.8326              | 0.8347              | 0.8368              | 0.8390              | 0.8411              | 0.8432              |
| 4.0 | 0.8453              | 0.8474              | 0.8495              | 0.8516              | 0.8538              | 0.8559              | 0.8580              | 0.8601              | 0.8622              | 0.8643              |
| 4.1 | 0.8664              | 0.8685              | 0.8707              | 0.8728              | 0.8749              | 0.8770              | 0.8791              | 0.8812              | 0.8833              | 0.8855 <sup>+</sup> |
| 4.2 | 0.8876              | 0.8897              | 0.8918              | 0.8939              | 0.8960              | 0.8981              | 0.9002              | 0.9024              | 0.9045 <sup>+</sup> | 0.9066              |
| 4.3 | 0.9087              | 0.9108              | 0.9129              | 0.9150              | 0.9172              | 0.9193              | 0.9214              | 0.9235              | 0.9256              | 0.9277              |
| 4.4 | 0.9298              | 0.9319              | 0.9341              | 0.9362              | 0.9383              | 0.9404              | 0.9425              | 0.9446              | 0.9467              | 0.9488              |
| 4.5 | 0.9510              | 0.9531              | 0.9552              | 0.9573              | 0.9594              | 0.9615              | 0.9636              | 0.9658              | 0.9679              | 0.9700              |
| 4.6 | 0.9721              | 0.9742              | 0.9763              | 0.9784              | 0.9805              | 0.9827              | 0.9848              | 0.9869              | 0.9890              | 0.9911              |
| 4.7 | 0.9932              | 0.9953              | 0.9975 <sup>+</sup> | 0.9996              | 1.0017              | 1.0038              | 1.0059              | 1.0080              | 1.0101              | 1.0122              |
| 4.8 | 1.0144              | 1.0165 <sup>+</sup> | 1.0186              | 1.0207              | 1.0228              | 1.0249              | 1.0270              | 1.0292              | 1.0313              | 1.0334              |
| 4.9 | 1.0355 <sup>+</sup> | 1.0376              | 1.0397              | 1.0418              | 1.0439              | 1.0461              | 1.0482              | 1.0503              | 1.0524              | 1.0545              |

## Vierstellige Tabelle der Werthe des Productes :

$$\frac{1}{6} (3 - \sqrt{3}) x = 0.2113249 x$$

von  $x = 5.00$  bis  $x = 9.99$ .

| x   | 0                   | 1                   | 2                   | 3                   | 4                   | 5                   | 6                   | 7                   | 8                   | 9                   |
|-----|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 5.0 | 1.0566              | 1.0587              | 1.0609              | 1.0630              | 1.0651              | 1.0672              | 1.0693              | 1.0714              | 1.0735              | 1.0756              |
| 5.1 | 1.0778              | 1.0799              | 1.0820              | 1.0841              | 1.0862              | 1.0883              | 1.0904              | 1.0925              | 1.0947              | 1.0968              |
| 5.2 | 1.0989              | 1.1010              | 1.1031              | 1.1052              | 1.1073              | 1.1095 <sup>+</sup> | 1.1116              | 1.1137              | 1.1158              | 1.1179              |
| 5.3 | 1.1200              | 1.1221              | 1.1242              | 1.1264              | 1.1285 <sup>+</sup> | 1.1306              | 1.1327              | 1.1348              | 1.1369              | 1.1390              |
| 5.4 | 1.1412              | 1.1433              | 1.1454              | 1.1475 <sup>+</sup> | 1.1496              | 1.1517              | 1.1538              | 1.1559              | 1.1581              | 1.1602              |
| 5.5 | 1.1623              | 1.1644              | 1.1665              | 1.1686              | 1.1707              | 1.1729              | 1.1750              | 1.1771              | 1.1792              | 1.1813              |
| 5.6 | 1.1834              | 1.1855              | 1.1876              | 1.1898              | 1.1919              | 1.1940              | 1.1961              | 1.1982              | 1.2003              | 1.2024              |
| 5.7 | 1.2046              | 1.2067              | 1.2088              | 1.2109              | 1.2130              | 1.2151              | 1.2172              | 1.2193              | 1.2215 <sup>+</sup> | 1.2236              |
| 5.8 | 1.2257              | 1.2278              | 1.2299              | 1.2320              | 1.2341              | 1.2363              | 1.2384              | 1.2405 <sup>+</sup> | 1.2426              | 1.2447              |
| 5.9 | 1.2468              | 1.2489              | 1.2510              | 1.2532              | 1.2553              | 1.2574              | 1.2595 <sup>+</sup> | 1.2616              | 1.2637              | 1.2658              |
| 6.0 | 1.2679              | 1.2701              | 1.2722              | 1.2743              | 1.2764              | 1.2785              | 1.2806              | 1.2827              | 1.2849              | 1.2870              |
| 6.1 | 1.2891              | 1.2912              | 1.2933              | 1.2954              | 1.2975              | 1.2996              | 1.3018              | 1.3039              | 1.3060              | 1.3081              |
| 6.2 | 1.3102              | 1.3123              | 1.3144              | 1.3166              | 1.3187              | 1.3208              | 1.3229              | 1.3250              | 1.3271              | 1.3292              |
| 6.3 | 1.3313              | 1.3335 <sup>+</sup> | 1.3356              | 1.3377              | 1.3398              | 1.3419              | 1.3440              | 1.3461              | 1.3483              | 1.3504              |
| 6.4 | 1.3525 <sup>+</sup> | 1.3546              | 1.3567              | 1.3588              | 1.3609              | 1.3630              | 1.3652              | 1.3673              | 1.3694              | 1.3715 <sup>+</sup> |
| 6.5 | 1.3736              | 1.3757              | 1.3778              | 1.3800              | 1.3821              | 1.3842              | 1.3863              | 1.3884              | 1.3905              | 1.3926              |
| 6.6 | 1.3947              | 1.3969              | 1.3990              | 1.4011              | 1.4032              | 1.4053              | 1.4074              | 1.4095              | 1.4117              | 1.4138              |
| 6.7 | 1.4159              | 1.4180              | 1.4201              | 1.4222              | 1.4243              | 1.4264              | 1.4286              | 1.4307              | 1.4328              | 1.4349              |
| 6.8 | 1.4370              | 1.4391              | 1.4412              | 1.4433              | 1.4455 <sup>+</sup> | 1.4476              | 1.4497              | 1.4518              | 1.4539              | 1.4560              |
| 6.9 | 1.4581              | 1.4603              | 1.4624              | 1.4645 <sup>+</sup> | 1.4666              | 1.4687              | 1.4708              | 1.4729              | 1.4750              | 1.4772              |
| 7.0 | 1.4793              | 1.4814              | 1.4835              | 1.4856              | 1.4877              | 1.4898              | 1.4920              | 1.4941              | 1.4962              | 1.4983              |
| 7.1 | 1.5004              | 1.5025              | 1.5046              | 1.5067              | 1.5089              | 1.5110              | 1.5131              | 1.5152              | 1.5173              | 1.5194              |
| 7.2 | 1.5215              | 1.5237              | 1.5258              | 1.5279              | 1.5300              | 1.5321              | 1.5342              | 1.5363              | 1.5384              | 1.5406              |
| 7.3 | 1.5427              | 1.5448              | 1.5469              | 1.5490              | 1.5511              | 1.5532              | 1.5554              | 1.5575 <sup>+</sup> | 1.5596              | 1.5617              |
| 7.4 | 1.5638              | 1.5659              | 1.5680              | 1.5701              | 1.5723              | 1.5744              | 1.5765 <sup>+</sup> | 1.5786              | 1.5807              | 1.5828              |
| 7.5 | 1.5849              | 1.5870              | 1.5892              | 1.5913              | 1.5934              | 1.5955              | 1.5976              | 1.5997              | 1.6018              | 1.6040              |
| 7.6 | 1.6061              | 1.6082              | 1.6103              | 1.6124              | 1.6145              | 1.6166              | 1.6187              | 1.6209              | 1.6230              | 1.6251              |
| 7.7 | 1.6272              | 1.6293              | 1.6314              | 1.6335              | 1.6357              | 1.6378              | 1.6399              | 1.6420              | 1.6441              | 1.6462              |
| 7.8 | 1.6483              | 1.6504              | 1.6526              | 1.6547              | 1.6568              | 1.6589              | 1.6610              | 1.6631              | 1.6652              | 1.6674              |
| 7.9 | 1.6695 <sup>+</sup> | 1.6716              | 1.6737              | 1.6758              | 1.6779              | 1.6800              | 1.6821              | 1.6843              | 1.6864              | 1.6885 <sup>+</sup> |
| 8.0 | 1.6906              | 1.6927              | 1.6948              | 1.6969              | 1.6991              | 1.7012              | 1.7033              | 1.7054              | 1.7075              | 1.7096              |
| 8.1 | 1.7117              | 1.7138              | 1.7160              | 1.7181              | 1.7202              | 1.7223              | 1.7244              | 1.7265              | 1.7286              | 1.7308              |
| 8.2 | 1.7329              | 1.7350              | 1.7371              | 1.7392              | 1.7413              | 1.7434              | 1.7455              | 1.7477              | 1.7498              | 1.7519              |
| 8.3 | 1.7540              | 1.7561              | 1.7582              | 1.7603              | 1.7624              | 1.7646              | 1.7667              | 1.7688              | 1.7709              | 1.7730              |
| 8.4 | 1.7751              | 1.7772              | 1.7794              | 1.7815 <sup>+</sup> | 1.7836              | 1.7857              | 1.7878              | 1.7899              | 1.7920              | 1.7941              |
| 8.5 | 1.7963              | 1.7984              | 1.8005 <sup>+</sup> | 1.8026              | 1.8047              | 1.8068              | 1.8089              | 1.8111              | 1.8132              | 1.8153              |
| 8.6 | 1.8174              | 1.8195              | 1.8216              | 1.8237              | 1.8258              | 1.8280              | 1.8301              | 1.8322              | 1.8343              | 1.8364              |
| 8.7 | 1.8385              | 1.8406              | 1.8428              | 1.8449              | 1.8470              | 1.8491              | 1.8512              | 1.8533              | 1.8554              | 1.8575              |
| 8.8 | 1.8597              | 1.8618              | 1.8639              | 1.8660              | 1.8681              | 1.8702              | 1.8723              | 1.8745 <sup>+</sup> | 1.8766              | 1.8787              |
| 8.9 | 1.8808              | 1.8829              | 1.8850              | 1.8871              | 1.8892              | 1.8914              | 1.8935 <sup>+</sup> | 1.8956              | 1.8977              | 1.8998              |
| 9.0 | 1.9019              | 1.9040              | 1.9062              | 1.9083              | 1.9104              | 1.9125              | 1.9146              | 1.9167              | 1.9188              | 1.9209              |
| 9.1 | 1.9231              | 1.9252              | 1.9273              | 1.9294              | 1.9315              | 1.9336              | 1.9357              | 1.9378              | 1.9400              | 1.9421              |
| 9.2 | 1.9442              | 1.9463              | 1.9484              | 1.9505              | 1.9526              | 1.9548              | 1.9569              | 1.9590              | 1.9611              | 1.9632              |
| 9.3 | 1.9653              | 1.9674              | 1.9695              | 1.9717              | 1.9738              | 1.9759              | 1.9780              | 1.9801              | 1.9822              | 1.9843              |
| 9.4 | 1.9865 <sup>+</sup> | 1.9886              | 1.9907              | 1.9928              | 1.9949              | 1.9970              | 1.9991              | 2.0012              | 2.0034              | 2.0055 <sup>+</sup> |
| 9.5 | 2.0076              | 2.0097              | 2.0118              | 2.0139              | 2.0160              | 2.0182              | 2.0203              | 2.0224              | 2.0245 <sup>+</sup> | 2.0266              |
| 9.6 | 2.0287              | 2.0308              | 2.0329              | 2.0351              | 2.0372              | 2.0393              | 2.0414              | 2.0435              | 2.0456              | 2.0477              |
| 9.7 | 2.0499              | 2.0520              | 2.0541              | 2.0562              | 2.0583              | 2.0604              | 2.0625              | 2.0646              | 2.0668              | 2.0689              |
| 9.8 | 2.0710              | 2.0731              | 2.0752              | 2.0773              | 2.0794              | 2.0815              | 2.0837              | 2.0858              | 2.0879              | 2.0900              |
| 9.9 | 2.0921              | 2.0942              | 2.0963              | 2.0985 <sup>+</sup> | 2.1006              | 2.1027              | 2.1048              | 2.1069              | 2.1090              | 2.1111              |

Gleichwie ferner das fragliche Volumen  $V$  für  $g = A + Bx$  direct durch das Product der Mittelfläche und Axenlänge, also durch einen eingliedrigen Ausdruck bestimmbar ist, folgt für  $A = D = 0$  \*), d. h.:

$$(57) \quad g = Bx + Cx^2$$

aus (50) vermöge des gleichzeitigen Verschwindens von  $g_0$  die vereinfachte Hossfeld'sche Formel zur Inhaltsberechnung unentwipfelter Stämme:

$$(58) \quad V = \frac{3}{4} g_{\frac{2}{3}} x,$$

wonach sich  $V$  voraussichtlich auch im dritten Falle:  $A = B = 0$ , d. h. für:

$$(59) \quad g = Cx^2 + Dx^3$$

auf ein Product von der Gestalt:  $\lambda g' x = \lambda x \{ C(\epsilon x)^2 + D(\epsilon x)^3 \}$  reduciren lässt.\*\*\*) In der That wird die correspondirende Specialisirung von (48), nämlich:

$$V = x \left( \frac{1}{3} Cx^2 + \frac{1}{4} Dx^3 \right) \text{ mit: } x(\epsilon^2 \lambda Cx^2 + \epsilon^3 \lambda Dx^3)$$

für alle Werthe von  $C, D, x$  identisch, wenn  $\epsilon$  und  $\lambda$  den Bedingungen:  $\epsilon^2 \lambda = \frac{1}{3}$ ,  $\epsilon^3 \lambda = \frac{1}{4}$

genügen, aus welchen  $\epsilon = \frac{3}{4}$ ,  $\lambda = \frac{16}{27}$  folgt. Die so gewonnene Cubirungsformel:

$$(60) \quad V = \frac{16}{27} g_{\frac{3}{4}} x$$

\*) Unter dieser speciellen Annahme hat Herr Oberforstmeister G. Oetzel jedenfalls völlig unabhängig von meinen vorerwähnten Untersuchungen dreizehn Jahre später (vgl. dessen 1892 in Wien bei W. Braumüller veröffentlichte Brochure: „Neue Formeln zur Berechnung des Rauminhaltes voller und abgestutzter Baumschäfte“, §. 35) nicht nur die Cubirungsformel (54) auf einem allerdings sehr langwierigen Wege abgeleitet, sondern auch die correspondirende Vereinfachung von (55) mathematisch strenge bewiesen.

Da nämlich die den Abscissen:  $\frac{1}{4} x, \frac{1}{2} x, \frac{3}{4} x$  entsprechenden Querflächen für  $A = D = 0$  die Werthe:

$$g_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} Bx + \frac{1}{16} Cx^2, \quad g_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} Bx + \frac{1}{4} Cx^2, \quad g_{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} Bx + \frac{9}{16} Cx^2$$

erhalten, wird  $g_{\frac{1}{2}}$  in diesem Falle gleich  $g_{\frac{1}{4}} + \frac{1}{3} g_{\frac{3}{4}}$ , also gemäss der Gleichung (55):

$$V = \frac{1}{9} x (2g_{\frac{1}{4}} + 2g_{\frac{3}{4}} - g_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} g_{\frac{3}{4}}) = \frac{1}{9} x (3g_{\frac{1}{4}} + 5g_{\frac{3}{4}}).$$

welches Resultat mit der Oetzel'schen Formel:  $V = \frac{1}{9} x (5F_1 + 3F_2)$  sachlich übereinstimmt. Ausserdem habe ich dieselbe in der citirten Abhandlung (S. 138) direct entwickelt.

\*\*) Dasselbe gilt — unter  $r, s$  irgend welche positive Exponenten, unter  $M, N$  beliebige empirische Constanten verstanden — für jede Querflächengleichung von der Gestalt:

$$g = Mx^r + Nx^s,$$

wobei  $s$  immer den grösseren der beiden Exponenten bezeichnen mag, und zwar bestehen, wie ich in der vorerwähnten Arbeit zuerst gezeigt habe, zur Ermittlung von  $\epsilon$  und  $\lambda$  allgemein die Formeln:

$$\epsilon = \left\{ \frac{r+1}{s+1} \right\}^{s-r}, \quad \lambda = \left\{ \frac{(s+1)^r}{(r+1)^s} \right\}^{\frac{1}{s-r}}$$

Hienach entsprechen den drei übrigen binomischen Specialisirungen der Querflächenrelation (42):

$$g = A + Cx^2, \quad g = A + Dx^3, \quad g = Bx + Dx^3$$

folgende Werthe von  $\epsilon$  und  $\lambda$ :

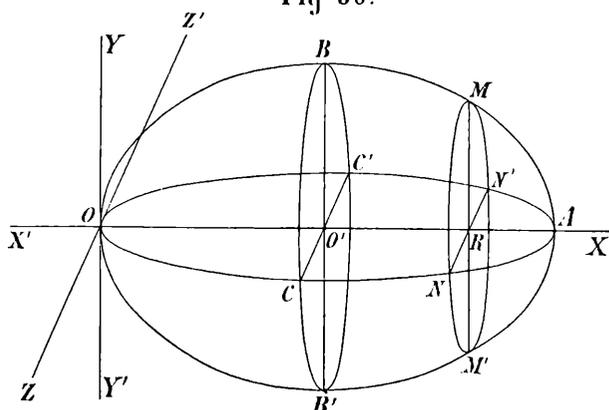
$$\epsilon = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0.5773503, \quad \lambda = 1; \quad \epsilon = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 0.6299604, \quad \lambda = 1; \quad \epsilon = \lambda = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0.7071068,$$

und sei schliesslich noch bemerkt, dass beide Grössen nur dann rational bleiben, wenn die Exponenten zwei um die Einheit verschiedene ganze Zahlen vorstellen.

besteht mithin u. A. gleichzeitig für den Kegel ( $D = 0$ ) und das Neiloid ( $C = 0$ ), während die Gleichung (58) sowohl auf den Kegel ( $B = 0$ ) als das Paraboloid ( $C = 0$ ) Anwendung findet. Es sei jedoch ausdrücklich hervorgehoben, dass beide Ausdrücke gemäss den Relationen (57) und (59) noch für verschiedene andere Körper mathematisch strenge gelten.

Um dies wenigstens für (58) durch ein besonders interessantes Beispiel zu erläutern,

Fig. 30.



wählen wir im Anschlusse an Fig. 28 als Leitlinien der veränderlichen Ellipse zwei Ellipsen mit gemeinsamer grosser Achse  $OA = 2a$  (Fig. 30), wogegen deren kleine Axen:  $BB' = 2b$ ,  $CC' = 2c$  von einander verschieden sein mögen.

Es sind dann für einen beliebigen zur Abscisse:  $OR = x$  gehörigen Querschnitt  $MNM'N' = g$  die Coordinaten des Grenzpunktes  $M$  in Bezug auf das Axenpaar  $OA$ ,  $BB'$  augenscheinlich:  $u = OR = x - a$ ,  $v = MR = y$ , und analog jene von  $N$  in Bezug auf das Axenpaar  $OA$ ,  $CC'$ :  $u = x - a$ ,  $v = NR = z$ ,

so dass die eingeführten Leitlinien gemäss der allgemeinen Relation (38) die Gleichungen:

$$\frac{(x - a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(x - a)^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

besitzen. Dieselben liefern für die Halbachsen und den Flächeninhalt von  $g$  die Ausdrücke:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{2ax - x^2}, \quad z = \frac{c}{a} \sqrt{2ax - x^2}, \quad g = yz\pi = \frac{bc\pi}{a^2} (2ax - x^2),$$

wonach die charakteristische Querschnittsgleichung des hier betrachteten dreiaxigen Ellipsoides bei Vertauschung der Coefficienten  $B$ ,  $C$  mit  $\frac{2bc\pi}{a}$  und  $-\frac{bc\pi}{a^2}$  unmittelbar aus (57) hervorgeht. Es muss sich also auch das zur Abscisse  $x$  gehörige Volumen  $V$  nach der Formel (58) berechnen lassen, indem wir die der Abscisse  $\frac{2}{3}x$  entsprechende Querfläche:

$$g_{\frac{2}{3}} = \frac{bc\pi}{a^2} \left( \frac{4}{3}ax - \frac{4}{9}x^2 \right)$$

mit  $\frac{3}{4}x$  multipliciren. Auf solche Art ergibt sich für  $V$  die einfache Beziehung \*):

\*) Besitzt hienach irgend ein unentworfener Stamm von der Länge  $l$  etwa die elliptische Grundfläche  $g_0$  mit den Hauptachsen:  $D$ ,  $d$  und das Volumen:  $V = \lambda g_0 l$ , so existirt für  $\frac{1}{2} < \lambda \leq \frac{2}{3}$  stets ein Ellipsoid mit den Halbachsen:

$$a = \frac{(3\lambda - 1)l}{3(2\lambda - 1)}, \quad b = \frac{(3\lambda - 1)D}{2\sqrt{3}(2\lambda - 1)}, \quad c = \frac{(3\lambda - 1)d}{2\sqrt{3}(2\lambda - 1)},$$

dessen aufeinanderfolgende Querschnitte von  $x = 0$  bis  $x = l$  ebenfalls stetig bis zu einem Querschnitte mit denselben Hauptachsen:  $D$ ,  $d$  zunehmen, während gleichzeitig die zur Abscisse:  $x = l$  gehörige Volumsection dieses Ellipsoides mit  $V$  zusammenfällt. Vom rein geometrischen Standpunkte aus liesse sich also z. B.

die Formel:  $V = \frac{3}{5}g_0 l$  ebensogut auf ein cubisches Paraboloid wie auf ein Ellipsoid mit den Halbachsen:

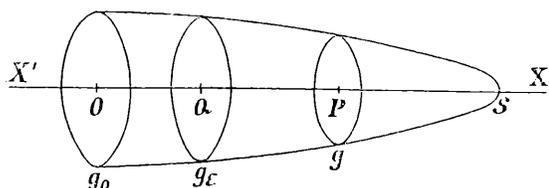
$$a = \frac{4}{3}l, \quad b = \frac{2}{15}D\sqrt{15}, \quad c = \frac{2}{15}d\sqrt{15} \text{ beziehen.}$$

$$V = \frac{b c \pi}{a^2} \left( a x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right),$$

und hieraus für  $x = 2 a$  als Volumen des ganzen Ellipsoides:  $\frac{4}{3} a b c \pi$ , welches Resultat speciell für  $a = b = c$  mit dem bekannten Ausdrücke:  $\frac{4}{3} a^3 \pi$  für den Cubikinhalte einer mit dem Radius  $a$  beschriebenen Kugel identisch wird.

Nachdem hiemit jene speciellen Fälle genügend discutirt worden sind, in welchen die Volumgleichung (48) infolge des Verschwindens je zweier Constanten durch eine eingliedrige Cubirungsformel ersetzbar ist, muss auch die allgemeinste ebenso geartete Specialisirung von (48) näher untersucht werden, zumal sich an dieselbe mehrere wichtige Folgerungen knüpfen lassen.

Fig. 31.



Es sei demgemäss ein elliptisches Konoid von beliebiger Grundfläche  $g_0$  und der Axenlänge  $OS = l$  (vgl. die schematische Fig. 31) gegeben, dessen charakteristische Querschnittsrelation — unter  $g$  die hier zur Abscisse:  $OP = x$  gehörige Querfläche verstanden — die Gestalt:

$$(61) \quad g = g_0 \left( 1 - \frac{k}{l} x + \frac{2(k + 6\lambda - 3)}{l^2} x^2 \right) \left( 1 - \frac{x}{l} \right) = \\ = g_0 \left( 1 - \frac{k+1}{l} x + \frac{3(k + 4\lambda - 2)}{l^2} x^2 - \frac{2(k + 6\lambda - 3)}{l^3} x^3 \right)$$

besitzt, also neben  $g_0$  und  $l$  noch zwei weitere Constanten  $k$  und  $\lambda$  enthält. Während jedoch die beiden erstgenannten Grössen jeden beliebigen positiven Werth annehmen können, mag  $\lambda$  durchwegs grösser als  $\frac{1}{6}$  bleiben, und die vierte Constante  $k$  gleichzeitig der Bedingung:

$$2 \{ 2 - \sqrt{2(6\lambda - 1)} \} < k < 2 \{ 2 + \sqrt{2(6\lambda - 1)} \}$$

genügen, so dass der Factor von  $g_0 \left( 1 - \frac{x}{l} \right)$ :

$$\left( 1 - \frac{k}{2l} x \right)^2 - \frac{k^2}{4l^2} x^2 + \frac{2(k + 6\lambda - 3)}{l^2} x^2 = \left( 1 - \frac{k}{2l} x \right)^2 + \frac{8(6\lambda - 1) - (k - 4)^2}{4l^2} x^2$$

gleich dem Zähler des zweiten Summanden eine wesentlich positive Grösse vorstellt. Das in Betracht gezogene Konoid besitzt dann von  $x = 0$  bis  $x = l$  lauter endliche Querflächen und ein Volumen  $V$ , welches, wie die Substitutionen:

$$x = l, \quad A = g_0, \quad B = -\frac{k+1}{l} g_0, \quad C = \frac{3(k + 4\lambda - 2)}{l^2} g_0, \quad D = -\frac{2(k + 6\lambda - 3)}{l^3} g_0$$

in (48) lehren, ebenfalls durch einen eingliedrigen Ausdruck, nämlich:

$$V = l \left\{ g_0 - \frac{1}{2} (k + 1) g_0 + (k + 4\lambda - 2) g_0 - \frac{1}{2} (k + 6\lambda - 3) g_0 \right\} = \lambda g_0 l$$

bestimmt wird. Dieselbe Cubirungsformel gilt übrigens nach (42) auch für ein Konoid von gleicher Grundfläche:  $g = g_0$  und der Axenlänge  $x = l$ , dessen Leitlinien zwei Potenzcurven mit dem gemeinsamen Exponenten:  $r = (1 - \lambda) - 2\lambda$  bilden, indem unter solchen Verhältnissen:

$$\frac{1}{2r + 1} = \frac{\lambda}{2\lambda r + \lambda} = \frac{\lambda}{(1 - \lambda) + \lambda} = \lambda$$

wird\*), d. h. der bekanntlich als absolute Formzahl bezeichnete Factor  $\lambda$  ermöglicht an und für sich noch keinen präcisen Aufschluss über die jeweilige Gestalt des cubirten Körpers. — So ist beispielsweise für:

$$\lambda = \frac{1}{2}, \quad 0 < k < 8:$$

$$(62) \quad g = g_0 \left( 1 - \frac{k+1}{l} x + \frac{3k}{l^2} x^2 - \frac{2k}{l^3} x^3 \right),$$

$$\lambda = \frac{1}{3}, \quad 2(2 - \sqrt{2}) = 1.1715729 < k < 2(2 + \sqrt{2}) = 6.8284271$$

$$(63) \quad g = g_0 \left( 1 - \frac{k+1}{l} x + \frac{3k-2}{l^2} x^2 - \frac{2(k-1)}{l^3} x^3 \right),$$

$$\lambda = \frac{1}{4}, \quad 2 < k < 6:$$

$$(64) \quad g = g_0 \left( 1 - \frac{k+1}{l} x + \frac{3(k-1)}{l^2} x^2 - \frac{2k-3}{l^3} x^3 \right),$$

aus welchen Resultaten\*\*) unter Einbeziehung des zur Gleichung (40) gegebenen Commentars ausserdem hervorgeht, dass selbst die einfachsten, in allen Lehrbüchern der Holzmesskunde speciell für das Paraboloid, den Kegel und das Neiloid abgeleiteten Cubirungsformeln ungleich weitere Giltigkeitsgrenzen besitzen, als dies die üblichen Deductionen vermuthen lassen.

Wenn aber eine Reihe gegebener Konoide selbst bei gleichen Grundflächen, Axenlängen und absoluten Formzahlen völlig verschiedene gestaltete Körper umfassen kann\*\*\*), drängt sich

\*) Behufs Auffindung der zugehörigen Specialform von (40) muss zunächst  $x$  mit  $l-x$  vertauscht und die Bedingung eingeführt werden, dass  $g$  für  $x=0$  hier den Werth  $g_0$  anzunehmen hat. Dividiren wir dann die Gleichung:  $g = C(l-x)^{2r}$  durch  $g_0 = Cl^{2r}$  so ergibt sich nach Substitution des für  $r$  angegebenen Quotienten:

$$g = g_0 \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

Es bestehen daher speciell für das Paraboloid, den Kegel und das Neiloid bei beliebiger Grundfläche  $g_0$  und Axenlänge  $l$  die Relationen:

$$g = g_0 \left( 1 - \frac{x}{l} \right), \quad g = g_0 \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^2, \quad g = g_0 \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^3,$$

welche für  $\lambda = \frac{1}{2}$ ,  $k=0$ ;  $\lambda = \frac{1}{3}$ ,  $k=1$ ;  $\lambda = \frac{1}{4}$ ,  $k=2$  ausserdem noch aus (61) ableitbar sind.

\*\*) Für  $\lambda = \frac{2}{3}$ ,  $2(2 - \sqrt{6}) = -0.8989795 < k < 2(2 + \sqrt{6}) = 8.8989795$  wird ferner:

$$g = g_0 \left( 1 - \frac{k+1}{l} x + \frac{3k+2}{l^2} x^2 - \frac{2(k+1)}{l^3} x^3 \right),$$

sowie auch das zur Abscisse:  $x=l$  gehörige halbe Volumen eines dreiaxigen Ellipsoides von dem mittleren Querschnitte:  $bc\pi = g_0$  und der grossen Halbaxe:  $a=l$  durch das Product:  $\frac{2}{3} g_0 l$  bestimmt erscheint. Derselbe Ausdruck besteht dann noch für die dem Exponenten:  $= \frac{1}{4}$  entsprechende Querflächen-gleichung:

$$g = g_0 \sqrt{1 - \frac{x}{l}},$$

wonach sich speciell die absolute Formzahl  $\frac{2}{3}$  selbst bei Beschränkung auf die hier betrachteten elementaren Konoide drei wesentlich verschiedenen Gruppen von geometrischen Körpern zuordnen lässt.

\*\*\*) Dass diese Mannigfaltigkeit thatsächlich eine unbegrenzt grosse ist, habe ich bereits 1877 in meinen analytischen Untersuchungen über den Zusammenhang geometrisch bestimmbarer Stammformen mit ihren Formzahlen (Centralblatt für das gesammte Forstwesen, III. Jahrg., S. 427, 428) bewiesen. Es wäre daher auch angemessen, nach Prof. Dr. Wimmenauer's Vorschlag (vgl. dessen 1898 im 74. Jahrg. der „Allgemeinen Forst- und Jagd-Zeitung“ erschienene Arbeit: „Schaffform und Formzahl“, S. 345) statt der Bezeichnung „Formzahl“ den Ausdruck: „Inhaltsfactor“ einzuführen.

mit Nothwendigkeit die Frage auf, ob dieselben nicht durch Einführung eines weiteren Bestimmungsstückes in Gruppen von gleichartig geformten Konoiden zu sondern sind?

Um dies für die zuletzt untersuchte Specialisirung von (47) zu erzielen, genügt es, eine beliebige zwischen  $g_0$  und dem mittleren Querschnitte des Konoides gelegene Querfläche  $g_\varepsilon$  mit der Abscisse:  $OQ = \varepsilon l$  (Fig. 31) auszuwählen und den Quotienten beider Querflächen:  $\sigma = g_\varepsilon : g_0$  zu ermitteln. Da nämlich  $\sigma$  gemäss der Beziehung (61) nach Substitution des hier geltenden Abscissenwerthes:  $x = \varepsilon l$  allgemein durch  $\lambda$  und  $k$  ausdrückbar ist, ergibt sich für die letztere Constante bei bekanntem  $\lambda$  und  $\sigma$  aus:

$$\sigma = 1 - \varepsilon (k + 1) + 3 \varepsilon^2 (k + 4 \lambda - 2) - 2 \varepsilon^3 (k + 6 \lambda - 3)$$

mit Hilfe einiger elementarer Reductionen die für sämtliche in Betracht kommenden Werthe von  $\varepsilon$  verwendbare Formel:

$$(65) \quad k = \frac{(1 - \varepsilon) \{ 1 + 6 (2 \lambda - 1) \varepsilon^2 \} - \sigma}{\varepsilon (1 - \varepsilon) (1 - 2 \varepsilon)}.$$

Es sind mithin alle in (61) vorkommenden Coefficienten und hiedurch die jeweilige Gestalt des zugehörigen Konoides vollständig bestimmt, sobald ausser  $\lambda$  noch das Querschnittsverhältnis  $\sigma$  angegeben wird, an dessen Stelle speciell bei kreisförmigen Querflächen natürlich auch der Quotient der Durchmesser:  $d_\varepsilon$  und  $d_0$  von  $g_\varepsilon$  und  $g_0$ :

$$(66) \quad \frac{d_\varepsilon}{d_0} = \sqrt[4]{\frac{g_\varepsilon}{\pi}} \sqrt[4]{\frac{g_0}{\pi}} = \sqrt{\sigma} = \omega$$

treten kann. — Das vorstehende Ergebnis lässt nunmehr erkennen, in welcher Weise die Inhaltsberechnung jedes Konoides, dessen Querschnitte wenigstens angenähert durch eine Relation von der Gestalt (47) bestimmbar sind, auf einen eingliedrigen Ausdruck zu reduciren ist. Da nämlich die allgemein giltige binomische Cubirungsformel (54) offenbar die Schreibweise:

$$V = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{g'}{g''} \right) g'' x$$

gestattet, brauchen wir zu diesem Zwecke nur das Verhältnis der beiden in den Abständen:  $\frac{1}{6} (3 + \sqrt{3}) x$  und  $\frac{1}{6} (3 - \sqrt{3}) x$  von  $g_0$  gelegenen Querschnitte:  $g' : g'' = \sigma$  einzuführen, um  $V$  als Product von  $g'' x$  und einer gleichzeitig mit  $\sigma$  veränderlichen echten Formzahl:

$$(67) \quad \Lambda = \frac{1}{2} (1 + \sigma)$$

darzustellen. Würden wir jedoch auf Grundlage irgend eines anderen Querflächenquotienten dieselbe Vereinfachung erzielen wollen, so wäre jeder derartige Versuch von vornherein aussichtslos, denn gemäss unseren früheren Betrachtungen bleibt die generelle Volumformel (51) für alle übrigen Querflächenpaare:  $g', g''$  dreigliedrig und würde daher bei analoger Umformung noch die Feststellung eines weiteren Querflächenquotienten:  $g_{\frac{1}{2}} : g'' = \sigma'$  erfordern, so dass die Berechnung von  $V$  aus dem transformirten Ausdrucke zeitraubender wäre als nach der ursprünglichen Gleichung.

Hiemit ist zugleich elementar bewiesen, dass sich selbst für relativ so einfach gestaltete Körper wie die hier untersuchten Konoide ohne Berücksichtigung der jeweiligen Werthe von  $\sigma$  keine brauchbaren Massentafeln aufstellen liessen, und es erscheint aus diesem Grunde völlig unwissenschaftlich, bei der Construction von Massentafeln für Holzarten von wesentlich complicirteren mittleren Stammformen ohne Einbeziehung irgend welcher Querflächenquotienten willkürlich die

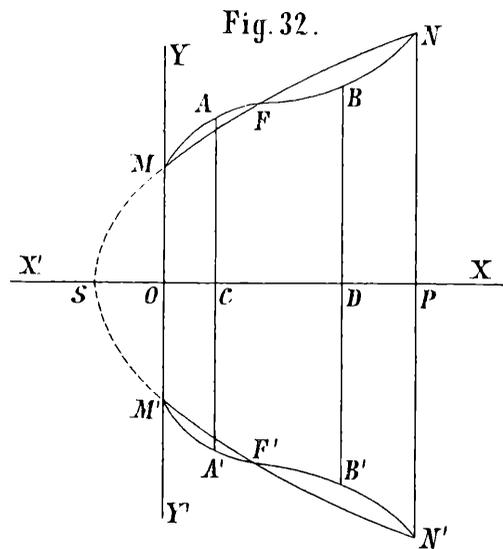
Giltigkeit eingliedriger Cubirungsformeln von dem Typus:  $\Lambda q'' x$  zu decretiren. — So hat sich denn auch bei der ersten volumetrisch detaillirteren Untersuchung über Form und Inhalt der Fichte\*), für welche der Quotient  $\sigma$  in Anbetracht der nahezu kreisförmigen Querschnitte dieser Holzart ohneweiters mit  $\omega$  vertauschbar ist, die Nothwendigkeit herausgestellt, in die einschlägige Massentafel gewisse Specialwerthe von  $\omega$  als charakteristische Formquotienten einzuführen, womit der erste Schritt zur Verwirklichung einer Forderung geschehen ist, welche ich in meiner früher citirten Abhandlung über das Problem der Stammcubirung bereits 1879 aufgestellt und eingehend begründet hatte.\*\*)

Es erübrigt jetzt noch, einen Trugschluss aufzudecken, welcher allerdings sehr nahe liegt, sobald die Ausdrücke (52) und (55) unabhängig von ihren wahren Giltigkeitsgrenzen lediglich als Combinationen der Gleichungen von Smalian und Huber aufgefasst werden, und demgemäss beispielsweise aus der unmittelbar evidenten Umformung:

$$(68) \quad \frac{1}{6} x (g_0 + 4g_{\frac{1}{2}} + g) = \frac{1}{3} \left\{ 2g_{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{2} x (g_0 + g) \right\}$$

gefolgert wird, dass auch das Fehlerprocent von (52) dem dritten Theile der Summe aus dem doppelten Fehlerprocente der Huber'schen und dem einfachen der Smalian'schen Formel entspreche.\*\*\*)

Wir gehen hiebei am zweckmässigsten von der Betrachtung einer beliebigen Volum-section irgend eines Rotationskörpers aus, welcher einer Reihe gleichartiger, aber individuell unregelmässig gestalteter Gebilde als empirische Mittelform zugehören mag. — Jede durch die Axe:  $OP = h$  einer solchen Section gelegte Ebene (vgl. die schematische Fig. 32) liefert dann einen von zwei congruenten Curvenstücken:  $MN$ ,  $M'N'$  und den Durchmessern:  $MM'$ ,  $NN'$  beider Endflächen begrenzten Längsschnitt, in welchem die Ordinaten der aufeinanderfolgenden Punkte von  $MN$  zugleich die Radien aller Querschnitte:  $g$  präcisiren.



Wenn mithin die Gleichung von  $MN$  unbekannt ist, lässt sich auch nicht angeben, nach welchem Gesetze  $g$  von seiner jeweiligen Abscisse  $x$  abhängt, so dass wir uns hier ebenso wie bei einer analytischen Charakteristik der Grenzcurven aller Längsschnitte vorläufig mit Näherungsformeln begnügen müssen, welche natürlich um so besser sind, je enger sich die den letzteren entsprechenden Werthreihen für  $g$  von  $x = 0$  bis  $x = h$  an die correspondirenden wahren Mittelwerthe von  $g$  anschliessen.

\*) Vgl. die 1899 als XXIV. Heft dieser „Mittheilungen“ erschienene gleichbetitelt Arbeit von Herrn Forstrath A. Schiffel, S. 97—139.

\*\*) Vgl. hierüber auch den 1879 im „Centralblatt für das gesammte Forstwesen“ (V. Jahrg. S. 447—451) veröffentlichten Aufsatz: „Über die mathematischen Vorbedingungen zur Construction praktisch brauchbarer Massentafeln und Formzahlentabellen für Baumstämme“, welcher eine übersichtliche Zusammenfassung der einschlägigen Sätze enthält.

\*\*\*) Vgl. die 1890 der „Österreichischen Vierteljahrsschrift für Forstwesen“ erschienene Arbeit von Herrn F. Holl: „Die Stammcubirungsformeln in der Praxis“ S. 354, 355.

Aus diesem Grunde verdient zunächst die Querflächengleichung (47) den Vorzug vor (46), denn ihre vier Constanten lassen sich nicht allein beiden Endquerflächen\*), sondern auch noch zwei weiteren charakteristischen Querschnitten, z. B. jenen mit den Radien  $AC$  und  $BD$ , anpassen.\*\*) Da nun mit wachsender Annäherung der angenommenen an die wahren Querflächen auch die Differenz zwischen dem berechneten und dem wahren Volumen abnimmt, muss consequent der wahre mittlere Fehler bei Anwendung der aus (47) abgeleiteten Cubirungsformeln auf die betreffende Volumsection kleiner ausfallen als für die aus (40) resultirenden Ausdrücke von Smalian und Huber. Dagegen ist für kleinere Gruppen von Stämmen sehr leicht das Gegentheil möglich, weil die individuellen Unregelmässigkeiten der Stammformen an kein wie immer geartetes Gesetz gebunden sind, mithin gerade die der Rechnung zu Grunde gelegten Querschnitte von den zu gleichen Abscissen gehörigen Querflächen der wahren Mittelform wesentlich verschieden sein können.

Zu diesen individuellen Abweichungen treten dann noch bei praktischer Verwerthung der verglichenen Cubirungsformeln die jeder empirischen Querflächenbestimmung anhaftenden Fehler hinzu, welche mit den Formeln ebensowenig in einem inneren Zusammenhange stehen. Es wäre daher auch müssig, die aus den einschlägigen Rechnungen hervorgegangenen mittleren Fehler durch allgemein gültige mathematische Relationen verbinden zu wollen, zumal die Umformung (68) schon an und für sich ganz willkürlich bleibt und ebenso gut mit der folgenden:

$$\frac{1}{3} \left\{ g_{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{2} x (g_0 + g_{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} x (g_{\frac{1}{2}} + g) \right\}$$

vertauscht werden könnte.

In Wirklichkeit wird wohl jeder Holzart mit einer charakteristischen mittleren Stammform eine spezifische Cubirungsformel zukommen, welche bei Beschränkung auf möglichst wenige Querflächen den kleinsten mittleren Fehler aufweist, sich aber selbstverständlicher Weise erst nach Feststellung jener Mittelform präcisiren lässt.

Unter diesem Gesichtspunkte sind daher auch Cubirungsformeln zweckentsprechend, welche neben der voraussichtlich stets verwendbaren Mittelfläche lauter Querschnitte mit disponiblen Abscissen enthalten, und als deren einfachster Typus die hier zuerst abgeleitete Volumgleichung (51) betrachtet werden muss.

Dass die forstliche Praxis nach wie vor eine möglichst weitgehende Vereinfachung ihres mathematischen Hilfsapparates anstrebt, erscheint ebenso begreiflich als berechtigt, aus

\*) Besitzen dieselben beispielsweise die Werthe:  $g_0, g_1$ , so finden die Forderungen, dass  $g$  für  $x = 0$  gleich  $g_0$ , für  $x = h$  gleich  $g_1$  sein soll, ihren analytischen Ausdruck in den Gleichungen:

$$g_0 = A + B \cdot 0, \quad g_1 = A + B h.$$

Die Substitution der den letzteren entsprechenden Specialisirungen von  $A, B$  in  $g$  liefert dann weiter:

$$g = g_0 + \frac{g_1 - g_0}{h} x, \quad y^2 = \frac{g_0}{\pi} + \frac{g_1 - g_0}{h \pi} x,$$

wonach die Grenzcurve  $MN$  im vorliegenden Falle mit dem Bogen  $MFN$  einer gewöhnlichen Parabel vertauscht wird, deren Scheitel  $S$  die Abscisse:  $OS = -g_0 h (g_1 - g_0)$  besitzt, während der Parameter dem Quotienten:  $(g_1 - g_0) : h \pi$  gleichkommt.

\*\*) Natürlich bleibt dann ausschliesslich die erste Constante  $A$  wie früher gleich  $g_0$ , während die übrigen Constanten lauter charakteristische Werthe erhalten. Setzen wir hiebei allgemein:  $OC = h'$ ,  $OD = h''$  und bezeichnen die Flächen beider Querschnitte mit  $g', g''$ , so bestehen für  $B, C, D$  nach Berechnung dreier Hilfsgrössen:

$$\frac{g_1 - g_0}{h} = k, \quad \frac{g' - g_0}{h'} = k', \quad \frac{g'' - g_0}{h''} = k''$$

die Beziehungen:

$$B + Ch + Dh^2 = k, \quad B + Ch' + Dh'^2 = k', \quad B + Ch'' + Dh''^2 = k'',$$

so dass sich die fraglichen Constanten mit Hilfe der Schlussformeln von §. 2 jedesmal leicht auffinden lassen.

welchem Grunde ich bereits 1879 die combinirten Formeln von Smalian und Huber an die Spitze der Ausdrücke zur sectionsweisen Stammcubirung gestellt und für ungleich mannigfaltigere Konoidformen bewiesen habe, als solche seither in irgend einem Lehrbuche der Holzmesskunde in Betracht gezogen worden sind.

Dagegen wird man bei strengeren wissenschaftlichen Untersuchungen über mittlere Stammformen und einschlägige Zuwachsprobleme früher oder später eingehender analytischer Betrachtungen nicht entrathen können, denn wie in anderen exacten Disciplinen wird in der Holzmesskunde ebenfalls die Forderung immer allgemeiner zur Geltung kommen, empirisch ermittelte Werthreihen zusammengehöriger Grössen innerhalb möglichst weiter Grenzen durch eine gemeinsame Gleichung zu verbinden.

In letzterer Hinsicht muss an dieser Stelle vor Allem ein Problem hervorgehoben werden, welches mit jenem der Stammcubirung in engem Zusammenhange steht, jedoch dessenungeachtet vorläufig noch für keine einzige Holzart experimentell bearbeitet worden ist.

Bekanntlich hat Dr. F. Grundner, nachdem unter den forstlichen Praktikern W. Schmidtborn schon 1863 die Querflächen unserer einheimischen Waldbäume auf die Ellipse als Grundtypus bezogen hatte \*), 1882 unter Verwerthung weiterer wissenschaftlicher Beobachtungen von Ch. Musset\*\*), Sachs, Nördlinger u. A., sowie auf Grundlage eigener Messungen dargethan\*\*\*), „dass die kreisförmige Querscheibenform nur selten — von den untersuchten Holzarten am ehesten noch bei der Fichte — vorkommt und namentlich, dass die Durchmesser weit häufiger in einer bestimmten Richtung prävaliren als bisher ziemlich allgemein angenommen wurde“. — Auf solche Art ist die Thatsache, dass das Stammkonoid in vielen Fällen zwei deutlich ausgeprägte Hauptschnitte zeigt, seit Decennien vielseitig festgestellt, und es erscheint daher bei exacten Untersuchungen von mittleren Stammformen geboten, zunächst die mittleren Formen beider Leitcurven des Stammkonoides für verschiedene Holzarten und Holzalter mit Hilfe ausreichender empirischer Daten mathematisch zu präcisiren.

Ob diese Leitcurven ungleichartig oder gleichartig sind, lässt sich a priori keineswegs behaupten, wohl aber beweisen, warum einschlägige Studien gerade für das Problem der Stammcubirung eine principielle Bedeutung besitzen. — Sind nämlich im ersten Falle — unter  $X, X'$  irgend welche von  $x$  und gewissen empirischen Coëfficienten abhängige Ausdrücke verstanden —  $y = X, z = X'$  die Gleichungen der Leitcurven, und  $w$  die zu derselben Abscisse  $x$  gehörige Ordinate der Grenzcurve eines beliebigen Längsschnittes, dessen Ebene mit jener des ersten Hauptschnittes etwa den Winkel  $\vartheta$  einschliesst, so besteht gemäss (39) für  $w$  die Relation:

$$(69) \quad w = \frac{X X'}{\sqrt{X^2 \sin^2 \vartheta + X'^2 \cos^2 \vartheta}}$$

\*) Vgl. dessen 39. Jahrg. der „Allgemeinen Forst- und Jagd-Zeitung“ (S. 408—413) veröffentlichten Aufsatz: „Soll man die Stärke (Querfläche) der Modellstämme nach dem Durchmesser oder nach dem Umfang ermitteln?“

\*\*) Die 1867 im 65. Bande der „Comptes Rendus“ unter dem Titel: „Influence présumée de la rotation de la Terre sur la forme des troncs d'arbres“ auszugsweise veröffentlichten Beobachtungen dieses Forschers hatten mich unter Berücksichtigung weiterer merkwürdiger Querflächenformen tropischer Holzgewächse zuerst bestimmt, Stammquerflächen von der allgemeinen Gleichung:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^p + \left(\frac{y}{B}\right)^q = 1$$

einzuführen und meine analytischen Untersuchungen hiedurch leider derart zu compliciren, dass wichtige, denselben enthaltene Folgerungen bisher völlig unbeachtet geblieben sind.

\*\*\*)) Vgl. die 1882 zu Berlin im Verlage von Julius Springer erschienene Brochure: „Untersuchungen über die Querflächen — Ermittlung der Holzbestände“, S. 13.

Dagegen gewinnt bei gleichartigen Leitcurven der Quotient je zweier mit gleicher Abscisse versehenen Ordinaten für sämtliche Curvenpunkte einen und denselben constanten Werth:  $z = y = \kappa$ , wonach unter der zweiten Annahme die Beziehungen:

$$(70) \quad y = X, \quad z = \kappa X, \quad w = \frac{\kappa X}{\sqrt{\sin^2 \vartheta + \kappa^2 \cos^2 \vartheta}}$$

gelten, d. h. die Grenzcurven aller Längsschnitte verlaufen hier im Gegensatze zu den durch (69) charakterisirten Curven gleichartig.

Die allgemeine Querflächengleichung lautet dann mit Bezugnahme auf (40):

$$(71) \quad g = yz\pi = \kappa\pi X^2,$$

fällt also mit (47) so oft zusammen, als  $X$  durch einen Ausdruck von der Gestalt:

$$(72) \quad X = \sqrt{\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3}{\kappa\pi}}$$

bestimmt wird. Ersetzen wir ferner im Anschlusse an die gegenwärtig bestehende Gepflogenheit jeden Stammquerschnitt durch eine Kreisfläche mit dem arithmetisch-mittleren Durchmesser, folglich  $g$  allgemein durch die Fläche:

$$\bar{g} = \frac{1}{4} (y + z)^2 \pi = \frac{1}{4} (1 + \kappa)^2 \pi X^2,$$

so muss jene Curve, deren Drehung um die Abscissenaxe die Mantelfläche des an Stelle des Stammkonoides eingeführten Rotationskörpers erzeugt, derart beschaffen sein, dass die einem beliebigen Curvenpunkte mit der Abscisse  $x$  entsprechende Ordinate  $\bar{y}$  vermöge der Beziehung:  $\bar{g} = \bar{y}^2 \pi$  der Relation:

$$(73) \quad \bar{y} = \frac{1}{2} (1 + \kappa) X$$

genügt, mithin ebenfalls dem Ausdrucke  $X$  proportional bleibt. Aus diesem Grunde kann im zweiten Falle aus den bisher gewonnenen graphischen Darstellungen mittlerer Schaftcurven ohneweiters auch der allgemeine Verlauf der Grenzcurven sämtlicher Längsschnitte des Stammkonoides beurtheilt werden, während im ersten Falle gemäss den einschlägigen Formeln:

$$(74) \quad \bar{y} = \frac{1}{4} (X + X')^2 \pi, \quad \bar{y} = \frac{1}{2} (X + X')$$

aus solchen Darstellungen nicht einmal ein Rückschluss auf die Beschaffenheit beider Leitlinien möglich wäre. — So würde sich  $\bar{y}$  z. B. für:

$$X = a + bx + c \sin \frac{\pi x}{2l}, \quad X' = a + bx - c \sin \frac{\pi x}{2l}$$

auf:  $\bar{y} = a + bx$  reduciren, welche Gleichung nach §. 1 ausnahmslos einer Geraden entspricht, während beide Leitlinien in diesem Falle transcendente Curven vorstellen würden.

## §. 7.

Nachdem hiemit die Wichtigkeit der zuletzt erhobenen Forderung genügend motivirt worden ist, wollen wir unter der Annahme, dass speciell die Leitlinien der bisher untersuchten mittleren Stammformen einheimischer Waldbäume gleichartig verlaufen, anhangsweise noch die Frage nach den einfachsten Gleichungen erörtern, welche für eine angenäherte analytische Charakteristik dieser Leitlinien in Betracht kommen.

Es muss dann der vorläufig unbestimmt gelassene Ausdruck  $X$  in den Beziehungen (70) natürlich näher detaillirt werden, wobei die bekannten graphischen Darstellungen mittlerer Stammformen als Rotationskörper folgende allgemeine Directiven liefern:

- (1) Die Erzeugungscurve der Mantelfläche jedes solchen Rotationskörpers besitzt zwischen dem mittleren Querschnitte und der Grundfläche desselben einen Wendepunkt.
- (2) Wird dieser Wendepunkt als Ursprung eines in der Ebene der Erzeugungscurve gelegenen rechtwinkligen Coordinatensystems gewählt, dessen Abscissenaxe zur Rotationsaxe parallel läuft, so erhalten Curvenpunkte mit numerisch gleichen positiven und negativen Abscissen numerisch ungleiche positive und negative Ordinaten.
- (3) Die Flächeninhalte der aufeinanderfolgenden Querschnitte wachsen wenigstens bei allen bisher festgestellten mittleren Stammformen europäischer Waldbäume\*) — unter  $l$  die jeweilige Axenlänge des Stammes verstanden — stetig von  $x = 0$  bis  $x = l$ , so dass die der Abscisse  $l$  entsprechende Grundfläche des Stammes zugleich dessen grösster Querschnitt ist.

Der erste Satz lehrt, dass sich die fraglichen Leitlinien keinesfalls als Potenzcurven definiren lassen, denn alle derartigen Curven verlaufen, wie aus deren elementaren Discussion in §. 4 zu entnehmen ist, über der positiven Hälfte der Abscissenaxe ohne einen einzigen Inflexionspunkt\*\*) — eine Thatsache, deren Berücksichtigung bei den bisherigen empirischen Studien über mittlere Stammformen viele unnütze Rechnungen erspart haben würde.

Der zweite Satz begründet die Folgerung, dass jene Leitlinien auch nicht als parabolische Curven dritten Grades von der Gleichung (8) darstellbar sind, indem die letztgenannten Curven gemäss §. 3 (S. 9 u. 10) durch ihre Inflexionspunkte in je zwei congruente Zweige getheilt werden, während die Wendepunkte der in Rede stehenden Erzeugungscurven dieselben in je zwei verschieden gestaltete Zweige zerlegen.

Andererseits lehrt die Erfahrung, dass die Inhaltsberechnung unentwipelter Stämme, bei welchen  $g$  gleichzeitig mit  $x$  verschwindet, sowohl nach der Huber'schen Mittelflächenformel als auch nach der vereinfachten Hossfeld'schen Gleichung:  $\frac{3}{4} g \frac{x}{3}$  in vielen Fällen mit genügender Genauigkeit durchführbar ist\*\*\*), dass also die zugehörigen Querflächenrelationen:

$$g = Bx, \quad g = Bx + Cx^2$$

wenigstens in volumetrischer Hinsicht brauchbare Resultate vermitteln. — Sobald demnach der aus den jeweiligen Gleichungen beider Leitlinien für  $g$  resultirende Ausdruck gemäss den Forderungen der forstlichen Praxis vor Allem eine möglichst elementare und angenäherte Cubirung der betreffenden Stämme begründen soll, erscheint die einfachste Verallgemeinerung der letzterwähnten Querflächenformeln durch:

$$(75) \quad g = Bx + Cx^r$$

gegeben, womit gemäss der Beziehung (71) zugleich  $X$  als Wurzelgrösse von der Gestalt:

$$(76) \quad X = \sqrt{\frac{Bx + Cx^r}{\kappa\pi}}$$

defnirt wird. Im Folgenden betrachten wir gemäss dem dritten Erfahrungssatze beide Quotienten:

$$\frac{B}{\kappa\pi} = p, \quad \frac{C}{\kappa\pi} = q$$

\*) Auf die tonnenförmigen Stammformen mancher tropischer Holzgewächse habe ich bereits in meinen analytischen Untersuchungen (a. a. O. S. 244) hingewiesen und auch (S. 425—427) eine diesbezügliche Gleichung entwickelt.

\*\*) Einen allgemeinen analytischen Beweis hierfür habe ich bereits 1877 in meinen analytischen Untersuchungen über Stammformen (a. a. O. S. 353, 354) gegeben.

\*\*\*) Vgl. hierüber z. B. die einschlägigen Ausführungen in Prof. Dr. Udo Müller's 1899 zu Leipzig erschienenem Lehrbuche der Holzmesskunde, I. Theil, S. 27—32.

gleich dem Exponenten  $r$  als wesentlich positive Grössen und setzen, um die Coordinaten jedes Curvenpunktes im Bedarfsfalle als aliquote Theile der Axenlänge  $l$  des Stammes darstellen zu können, nach Einführung zweier einstweilen unbestimmter empirischer Coëfficienten:  $\alpha, \beta$

$$(77) \quad p = \alpha l, \quad q = \beta : l^{r-2},$$

so dass die allgemeinen Gleichungen (70) für die hier in Betracht gezogenen Leiteurven nachstehende Specialformen annehmen: \*)

$$(78) \quad y = \sqrt{\alpha l x + \beta l^2 \left(\frac{x}{l}\right)^r}, \quad z = \kappa \sqrt{\alpha l x + \beta l^2 \left(\frac{x}{l}\right)^r}$$

Dagegen bleibt für eine analytische Discussion des Verlaufes dieser Linien die Beibehaltung der ursprünglichen Symbole:  $p, q$  zweckentsprechend, wobei wir vermöge der Gleichartigkeit beider Curven lediglich die erste der Beziehungen (78) in der Schreibweise:

$$(79) \quad y^2 = p x + q x^r = x^r \left( q + \frac{p}{x^{r-1}} \right)$$

nach derselben Methode zu untersuchen haben, welche sich bereits bei der Charakteristik der Potenzcurven (vgl. §. 4, S. 13–16) bewährt hat.

Wir bestimmen daher unter Beibehaltung der gewählten Coordinatenaxen, deren Ursprung mit dem jeweiligen Curvenscheitel zusammenfällt, zunächst jenen Winkel  $\varphi$  (vgl. die schematische Fig. 8), welchen die Sekante der Curvenpunkte  $M, M'$  für:

$$u = x, \quad v = y = \sqrt{p x + q x^r}; \quad u' = x', \quad v' = y' = \sqrt{p x' + q x'^r}$$

mit der Abscissenaxe  $U U' = X X'$  bildet, und gewinnen aus:

$$y'^2 - y^2 = (y' + y) (y' - y) = p (x' - x) + q (x'^r - x^r)$$

für die goniometrische Tangente von  $\varphi$  direct das Resultat:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y' - y}{x' - x} = \frac{1}{y' + y} \left\{ p + q \left( \frac{x'^r - x^r}{x' - x} \right) \right\},$$

wonach der charakteristische Tangentenwinkel  $\tau$  des Punktes  $M$  für  $x' = x, y' = y$  mit Rücksicht auf (19) der Gleichung:

$$(80) \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{p + q r x^{r-1}}{2 y} = \frac{p}{2 y} + \frac{q r}{2} \sqrt{\frac{x^{2r-2}}{y^2}} = \frac{p}{2 y} + \frac{q r}{2} \sqrt{x^{r-2} : \left( q + \frac{p}{x^{r-1}} \right)}$$

genügt. Dieselbe macht ersichtlich, dass wir, um in Anpassung an den ersten Erfahrungssatz Curven mit je einem Inflexionspunkte zu erhalten, nur den Exponenten  $r$  grösser als 2 zu wählen brauchen.

Da nämlich der erste Summand des für  $\operatorname{tg} \tau$  geltenden Ausdruckes bei von 0 bis  $\infty$  wachsendem  $x$  stetig von  $\infty$  bis 0 abnimmt, während sich dessen zweiter Summand für  $r > 2$  gleichzeitig von 0 bis  $\infty$  vergrössert, werden die Winkel der aufeinanderfolgenden Tangenten mit der Abscissenaxe in diesem Falle von ihrem gemeinsamen Anfangswerthe im Curvenscheitel:  $90^\circ$  nur bis zu einem gewissen Punkte mit den vorläufig unbekanntem Coordinaten:  $x = m, y = n$  stetig kleiner, wogegen sich die Tangenten der weiteren Curvenpunkte immer steiler aufrichten und für  $x = \infty$  die Abscissenaxe senkrecht durchschneiden. Es verlaufen mithin alle derartigen Curven für  $x < m$  concav, für  $x > m$  convex gegen die Abscissenaxe, womit der vorerwähnte Grenzpunkt als Wendepunkt gekennzeichnet ist.

\*) Hiebei entsprechen jeder positiven Specialisirung von  $x$  je zwei gleiche, entgegengesetzt bezeichnete Werthe von  $y$  und  $z$ , d. h. es bestehen alle derartigen Curven aus je zwei congruenten, über und unter der positiven Hälfte der Abscissenaxe sich erstreckenden Zweigen, so dass der Verlauf des oberen Zweiges zugleich jenen des unteren bestimmt.

Da ferner  $\operatorname{tg} \tau$  für sämtliche dem ersten Quadranten angehörige Winkel zugleich mit  $\tau$  wächst und abnimmt, entspricht dem charakteristischen Tangentenwinkel  $\tau_0$  dieses Inflectionspunktes jederzeit der kleinste Werth von  $\operatorname{tg} \tau$ , welche Thatsache sich unmittelbar zur Bestimmung der fraglichen Coordinaten:  $m, n$  verwerthen lässt.

Wir gehen hiebei am besten von der Erwägung aus, dass die den verschiedenen Specialisirungen von  $x$  correspondirenden Zahlenwerthe:  $t$  von  $\operatorname{tg} \tau$  ihrerseits eine neue krumme Linie liefern, deren tiefster Punkt gemäss unseren letzten Bemerkungen dieselbe Abscisse:  $m$  wie der Inflectionspunkt der ursprünglichen Curve besitzen muss. Ist dann unter abermaliger Bezugnahme auf Fig. 8 allgemein  $\bar{\varphi}$  jener Winkel, welchen die Sekante der durch ihre Coordinaten:

$$u = x, \quad v = t = \frac{p + q r x^{r-1}}{2 y}, \quad u' = x', \quad v' = t' = \frac{p + q r x'^{r-1}}{2 y'}$$

gegebenen Punkte  $M, M'$  der neuen Curve mit  $U U' = X X'$  einschliesst, so ergibt sich aus:

$$t'^2 - t^2 = (t' + t) (t' - t) = \frac{(p + q r x'^{r-1})^2}{4 y'^2} - \frac{(p + q r x^{r-1})^2}{4 y^2}$$

für  $\operatorname{tg} \bar{\varphi}$  zunächst die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \bar{\varphi} = \frac{t' - t}{x' - x} = \frac{(p + q r x'^{r-1})^2 y^2 - (p + q r x^{r-1})^2 y'^2}{4 (t' + t) (x' - x) y^2 y'^2},$$

deren weitere Reduction die Einführung der Werthe von  $y^2$  und  $y'^2$  in den Zähler des rechter Hand stehenden Bruches erheischt. Hiedurch geht der Minuend des ersteren in das Polynom:

$$p^3 x + 2 p^2 q r x x'^{r-1} + p q^2 r^2 x x'^{2r-2} + p^2 q x^r + 2 p q^2 r x^r x'^{r-1} + q^3 r^2 x^r x'^{2r-2}$$

über, aus welchem der zugehörige Subtrahend direct durch Vertauschung von  $x, x'$  mit  $x, x'$  erhalten wird, so dass der ganze Zähler dem Ausdrucke:

$$\begin{aligned} & - p^3 (x' - x) + 2 p^2 q r x x' (x'^{r-2} - x^{r-2}) + p q^2 r^2 x x' (x'^{2r-3} - x^{2r-3}) - \\ & - p^2 q (x'^r - x^r) - 2 p q^2 r (x x')^{r-1} (x' - x) + q^3 r^2 (x x')^r (x'^{r-2} - x^{r-2}) \end{aligned}$$

entspricht, und  $\operatorname{tg} \bar{\varphi}$  nach Division des letzteren durch  $x' - x$  und Vereinigung der mit gleichen Quotienten multiplicirten Glieder folgende Darstellungsweise gestattet:

$$\operatorname{tg} \bar{\varphi} = \frac{1}{4 (t' + t) y^2 y'^2} \left\{ - p^3 - 2 p q^2 r (x x')^{r-1} - p^2 q \left( \frac{x'^r - x^r}{x' - x} \right) + \right. \\ \left. + [2 p^2 q r x x' + q^3 r^2 (x x')^r] \left( \frac{x'^{r-2} - x^{r-2}}{x' - x} \right) + p q^2 r^2 x x' \left( \frac{x'^{2r-3} - x^{2r-3}}{x' - x} \right) \right\}.$$

Auf Grundlage dieser Umformung ist nunmehr auch der charakteristische Tangentenwinkel  $\bar{\tau}$  jedes Punktes der neuen Curve leicht zu berechnen, denn gemäss der Formel (19) reduciren sich die Quotienten:

$$\frac{x'^r - x^r}{x' - x}, \quad \frac{x'^{r-2} - x^{r-2}}{x' - x}, \quad \frac{x'^{2r-3} - x^{2r-3}}{x' - x}$$

für  $x' = x$  der Reihe nach auf:

$$r x^{r-1}, \quad (r - 2) x^{r-3}, \quad (2r - 3) x^{2r-4},$$

während gleichzeitig  $y' = y, t' = t, \bar{\varphi} = \bar{\tau}$  wird, also die Relation:

$$\operatorname{tg} \bar{\tau} = \frac{1}{8 t y^4} \left\{ - p^3 - 2 p q^2 r x^{2r-2} - p^2 q r x^{r-1} + \right.$$

$$\left. + (2 p^2 q r x^2 + q^3 r^2 x^{2r}) (r - 2) x^{r-3} + p q^2 r^2 x^2 (2r - 3) x^{2r-4} \right\}$$

besteht. Führen wir hierauf die rechter Hand angezeigten Multiplicationen aus und ordnen das Resultat nach steigenden Potenzen von  $x$ , so sind in dem Polynome:

$$\begin{aligned} & - p^3 - p^2 q r x^{r-1} + 2 p^2 q r (r - 2) x^{r-1} - 2 p q^2 r x^{2r-2} + \\ & + p q^2 r^2 (2r - 3) x^{2r-2} + q^3 r^2 (r - 2) x^{3r-3} \end{aligned}$$

speciell die mit dem Factor:  $p q^2 r x^{2r-2}$  versehenen Glieder vermöge der einfachen Identität:  
 $-2 + r(2r - 3) = 2r(r - 2) + (r - 2)$  mit der Summe:

$$2 p q^2 r^2 (r - 2) x^{2r-2} + p q^2 r (r - 2) x^{2r-2}$$

vertauschbar, wodurch je zwei aufeinanderfolgende Glieder einen gemeinsamen Factor gewinnen, und der Zähler von  $\text{tg } \tau$  nunmehr die Gestalt:

$-p^2(p + q r x^{r-1}) + 2 p q r (r - 2) x^{r-1}(p + q r x^{r-1}) + q^2 r (r - 2) x^{2r-2}(p + q r x^{r-1})$   
 annimmt. Da ferner der Nenner des ganzen Ausdruckes:

$$8 t y^3 = 4 (p + q r x^{r-1}) y^3$$

ebenfalls den Factor:  $p + q r x^{r-1}$  aufweist, erhalten wir schliesslich:

$$(81) \quad \text{tg } \tau = \frac{-p^2 + 2 p q r (r - 2) x^{r-1} + q^2 r (r - 2) x^{2r-2}}{4 y^3}$$

Hieraus geht hervor, dass  $\text{tg } \tau$  negativ oder positiv ausfällt, je nachdem die Summe:

$$S = q^2 r (r - 2) x^{2r-2} + 2 p q r (r - 2) x^{r-1}$$

kleiner oder grösser als  $p^2$  ist, und für  $S = p^2$ , d. h.:

$$(x^{r-1})^2 + 2 \frac{p}{q} (x^{r-1}) = \frac{p^2}{q^2 r (r - 2)}$$

verschwindet. Diese Gleichung liefert für  $x^{r-1}$  gemäss den Formeln (6) die beiden Werthe:

$$x_1 = -\frac{p}{q} - \sqrt{\frac{p^2}{q^2} + \frac{p^2}{q^2 r (r - 2)}} = -\frac{p}{q} \left( \frac{r-1}{\sqrt{r(r-2)}} + 1 \right),$$

$$x_2 = \frac{p}{q} \left( \frac{r-1}{\sqrt{r(r-2)}} - 1 \right),$$

von welchen der erste als eine wesentlich negative Grösse hier nicht in Betracht kommt, wogegen sich der zweite jederzeit positive Werth augenscheinlich auf die Abscisse  $x$  jenes Punktes bezieht, dessen Tangente zur Axe  $XX'$  parallel läuft, während die Tangenten seiner Nachbarpunkte mit derselben Axe für  $x^{r-1} < x_2$  stumpfe, für  $x^{r-1} > x_2$  spitze Winkel bilden. Die Relation:

$$x^{r-1} = x_2, \text{ d. h.: } x = \left( \frac{r-1}{\sqrt{r(r-2)}} - 1 \right)^{\frac{1}{r-1}} \left( \frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{r-1}}$$

präcisirt daher zugleich die Abscisse des tiefsten Punktes der den aufeinanderfolgenden Zahlenwerthen von  $\text{tg } \tau$  entsprechenden Curve, womit nach unseren früheren Bemerkungen auch  $m$  gegeben erscheint. Hiebei lässt sich der Quotient  $p : q$  mittelst der Substitutionen (77) stets durch:

$$\alpha l : \frac{\beta}{l^{r-2}} = \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) l^{r-1}$$

ersetzen, so dass beide Coordinaten des Inflexionspunktes der jeweiligen Axenlänge  $l$  proportional bleiben und nach Einführung der Abkürzungen:

$$(82) \quad \frac{r-1}{\sqrt{r(r-2)}} - 1 = \Delta, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \gamma$$

aus den einfachen Gleichungen:

$$(83) \quad m = (\gamma \Delta)^{\frac{1}{r-1}} l, \quad n = \sqrt{p m + q m^r} = l (\gamma \Delta)^{\frac{1}{2(r-1)}} \sqrt{\alpha (1 + \Delta)}$$

zu berechnen sind, zu welchen noch die Formel für den charakteristischen Tangentenwinkel des Inflexionspunktes:

$$(84) \quad \text{tg } \tau_0 = \frac{p + q r m^{r-1}}{2 n} = \frac{1 + r \Delta}{2 (\gamma \Delta)^{\frac{1}{2(r-1)}}} \sqrt{\frac{\alpha}{1 + \Delta}}$$

hinzutritt. Ausserdem erhellt, dass die Tangentenwinkel der in Rede stehenden Curven von ihrem Anfangswerte: 90° bis auf  $\tau_0$  viel rascher abnehmen, als sie jenseits des Wendepunktes wachsen, denn  $\tau$  wird erst für  $x = \infty$  neuerdings gleich 90°.

Es zerfällt mithin jede krumme Linie von der Gleichung (79) durch ihren Inflexionspunkt in zwei verschieden verlaufende Zweige, welches Verhalten dem zweiten allgemeinen Erfahrungssatze entspricht.

Die praktische Verwerthbarkeit der Curve als Leitlinie bleibt jedoch selbstverständlicher Weise an die Bedingung gebunden, dass die Abscisse ihres jeweiligen Wendepunktes stets kleiner als  $l$  ausfällt, denn sonst würde die Leitlinie im Widerspruche mit dem ersten Erfahrungssatze gegen die ganze Stammaxe concav verlaufen. Da nun diese Bedingung gemäss (83) offenbar der Forderung:  $\gamma \Delta < 1$  äquivalent ist, darf  $\gamma$  nie den reciproken Werth von  $\Delta$  erreichen und besitzt daher für jede Specialisirung von  $r$  eine charakteristische obere Grenze:

$$\Gamma = \frac{1}{\Delta} = r(r-2) + (r-1)\sqrt{r(r-2)}, \text{ welche schon für: } r = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} = 2.1547005$$

der Einheit gleich wird und bei weiterer Zunahme von  $r$  ungemein rasch wächst, so dass sich die Verhältniszahl  $\gamma$  jeder beliebigen Lage des Inflexionspunktes anpassen lässt. — Nähere einschlägige Aufschlüsse bietet die nachstehende Tabelle, welche für die wichtigsten Specialisirungen des Exponenten  $r$  die zugehörigen Werthe von  $\log \Delta$ ,  $\Gamma$  und  $(\gamma \Delta)^{\frac{1}{r-1}}$  enthält\*).

| $r$ | $\log \Delta$ | $\Gamma$ | $(\gamma \Delta)^{\frac{1}{r-1}}$ | $r$             | $\log \Delta$ | $\Gamma$    | $(\gamma \Delta)^{\frac{1}{r-1}}$ |
|-----|---------------|----------|-----------------------------------|-----------------|---------------|-------------|-----------------------------------|
| 2.2 | 0.9079851 — 1 | 1.23599  | 0.83815 $\gamma^{\frac{5}{6}}$    | 3.5             | 0.9594681 — 2 | 10.97822    | 0.38352 $\gamma^{\frac{2}{5}}$    |
| 2.3 | 0.7520608 — 1 | 1.76986  | 0.64458 $\gamma^{\frac{10}{13}}$  | 3.6             | 0.9208187 — 2 | 12.00000    | 0.38453 $\gamma^{\frac{5}{13}}$   |
| 2.4 | 0.6323247 — 1 | 2.33171  | 0.54623 $\gamma^{\frac{5}{7}}$    | 3.7             | 0.8840046 — 2 | 13.06157    | 0.38607 $\gamma^{\frac{10}{27}}$  |
| 2.5 | 0.5335697 — 1 | 2.92705  | 0.48870 $\gamma^{\frac{2}{3}}$    | 3.8             | 0.8488463 — 2 | 14.16295    | 0.38804 $\gamma^{\frac{5}{14}}$   |
| 2.6 | 0.4487453 — 1 | 3.55840  | 0.45234 $\gamma^{\frac{5}{8}}$    | 3.9             | 0.8151899 — 2 | 15.30418    | 0.39034 $\gamma^{\frac{10}{29}}$  |
| 2.7 | 0.3739561 — 1 | 4.22711  | 0.42829 $\gamma^{\frac{10}{17}}$  | 4.0             | 0.7829036 — 2 | 16.48528    | 0.39292 $\gamma^{\frac{1}{3}}$    |
| 2.8 | 0.3068015 — 1 | 4.93399  | 0.41199 $\gamma^{\frac{5}{9}}$    | 4.5             | 0.6384731 — 2 | 22.98936    | 0.40831 $\gamma^{\frac{2}{7}}$    |
| 2.9 | 0.2456866 — 1 | 5.67954  | 0.40086 $\gamma^{\frac{10}{19}}$  | 5               | 0.5158151 — 2 | 30.49193    | 0.42555 $\gamma^{\frac{1}{4}}$    |
| 3.0 | 0.1894917 — 1 | 6.46410  | 0.39332 $\gamma^{\frac{1}{2}}$    | 10              | 0.7945292 — 3 | 160.49845   | 0.56878 $\gamma^{\frac{1}{9}}$    |
| 3.1 | 0.1373978 — 1 | 7.28790  | 0.38836 $\gamma^{\frac{10}{21}}$  | 50              | 0.3187135 — 4 | 4800.4999   | 0.84115 $\gamma^{\frac{1}{49}}$   |
| 3.2 | 0.0887837 — 1 | 8.15110  | 0.38531 $\gamma^{\frac{5}{11}}$   | 10 <sup>2</sup> | 0.7077329 — 5 | 19600.500   | 0.90499 $\gamma^{\frac{1}{99}}$   |
| 3.3 | 0.0431677 — 1 | 9.05383  | 0.38369 $\gamma^{\frac{10}{23}}$  | 10 <sup>3</sup> | 0.6998394 — 7 | 1996000.50  | 0.98558 $\gamma^{\frac{1}{999}}$  |
| 3.4 | 0.0001659 — 1 | 9.99618  | 0.38318 $\gamma^{\frac{5}{12}}$   | 10 <sup>4</sup> | 0.6990569 — 9 | 199960000.5 | 0.99809 $\gamma^{\frac{1}{9999}}$ |

\*) Hiedurch wird eine analytische Discussion von (83) entbehrlich, welche sich auch nicht mehr elementar durchführen liesse, weil die präzise Bestimmung jenes Exponenten  $r_0$ , für welchen  $\Delta^{1:(r-1)}$  seinen kleinsten Werth:  $\Delta_0^{1:(r_0-1)}$  annimmt, zunächst die Auflösung der mit einer einzigen Constanten:  $\log e = \log 2.7182818 = 0.4342945$  versehenen transcendenten Gleichung:

Nachdem hiemit die allgemeine Beschaffenheit der den Gleichungen (78) zugehörigen Curven genügend charakterisirt worden ist\*), haben wir weiter zu zeigen, in welcher Weise sich die Coëfficienten:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\kappa$  und der Exponent  $r$  bei irgend einer Holzart zunächst für Stämme von übereinstimmendem Holzalter, gleicher Axenlänge  $l$  und Grundfläche  $g_0$  auffinden lassen.

Vor Allem muss natürlich für eine Reihe von Querschnitten das Verhältnis des kleinsten zum grössten Durchmesser empirisch festgestellt werden, um hieraus die Constante  $\kappa$  als Mittelwerth abzuleiten — es sei denn, dass die betreffende Holzart, wie dies z. B. bei der Fichte der Fall ist, ausgesprochen kreisförmige Querflächen besitzt, mithin  $\kappa$  von vornherein näherungsweise der Einheit gleichgesetzt werden darf. — Die Division von (75) durch  $\kappa \pi l^2$  liefert dann unter Einbeziehung der Relationen (77) die allgemeine Gleichung:

$$(85) \quad \alpha \left(\frac{x}{l}\right) + \beta \left(\frac{x}{l}\right)^r = \frac{g}{\kappa \pi l^2},$$

vermöge welcher die drei übrigen Unbekannten:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $r$  ohne Schwierigkeit bestimmbar sind, sobald wir — unter  $\mu$  irgend eine zwischen 0.5 und 1 gewählte Verhältniszahl verstanden, deren Quadrat jedoch stets unter 0.5 liegen muss — ausser  $g_0$  noch die Mittelwerthe der den Abscissen  $\mu l$  und  $\mu^2 l$  entsprechenden Querflächen  $g_1$ ,  $g_2$  empirisch abgeleitet haben.

Soll nämlich  $g$  speciell für  $x = l$ ,  $\mu l$ ,  $\mu^2 l$  der Reihe nach die vorgeschriebenen Werthe:  $g_0$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  annehmen, so bestehen zwischen  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $r$  nach Einführung der Quotienten:

$$\log \left( \frac{1}{\sqrt{1-u}} - 1 \right) + \log e \left( \frac{1}{\sqrt{1-u}} + \frac{1}{1-u} \right) = 0$$

erfordert, worauf beide fragliche Grössen aus den Formeln:

$$r_0 = 1 + \frac{1}{\sqrt{u}}, \quad \Delta_0^{1:(r_0-1)} = \left( \frac{1}{\sqrt{1-u}} - 1 \right)^{\sqrt{u}}$$

zu berechnen sind. Es mag daher hier nur noch hervorgehoben werden, dass  $\Gamma$  für grosse Specialisirungen von  $r$  ohneweiters mit:  $2(r-1)^2 - 1.5$  vertauschbar ist, während der Factor:

$$\Delta^{1:(r-1)} = \left\{ 1 \quad 2(r-1)^2 \right\}^{1:(r-1)}$$

gleichzeitig ausserordentlich langsam — z. B. von  $r = 10^1$  bis  $r = 10^5$  nur mehr um 0.00167 — wächst und erst für  $r = \infty$  neuerdings der Einheit gleich wird.

\*) Wäre an Stelle von (79) unter denselben Beschränkungen hinsichtlich der Grössen  $p$ ,  $q$ ,  $r$  die Relation:

$$y^2 = px - qx^r = x(p - qx^{r-1})$$

eingeführt worden, so hätten sich lauter geschlossene Curven ergeben, welche die positive Hälfte der Abscissenaxe nicht nur im Ursprunge, sondern auch noch in einem zweiten Punkte mit der Abscisse:

$$x = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{r-1}} = \gamma^{\frac{1}{r-1}} l = 2a$$

senkrecht durchschneiden. Diese Abscisse bildet zugleich die Hauptaxe jeder solchen Curve, gegen welche die letztere ohne einen einzigen Inflexionspunkt durchwegs concav verläuft. Die geradlinige Verbindung des höchsten mit dem tiefsten Curvenpunkte liefert dann die zur Hauptaxe senkrechte Nebenaxe, welche die Länge:

$$2b = 2l \left(\frac{\gamma}{r}\right)^{\frac{1}{2(r-1)}} \sqrt{\frac{\alpha(r-1)}{r}}$$

besitzt und durch die Hauptaxe halbirt wird, während diese selbst durch die Nebenaxe in zwei Stücke von im Allgemeinen verschiedenen Längen:

$$c = \left(\frac{\gamma}{r}\right)^{\frac{1}{r-1}} l, \quad d = \gamma^{\frac{1}{r-1}} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{r-1}} \right\} l$$

zerfällt — den Specialfall:  $= 2$  ausgenommen, welchem die Curve eine Ellipse mit den Halbachsen:

$a = \frac{1}{2} \gamma l$ ,  $b = \frac{1}{2} l \sqrt{\alpha \gamma}$  bildet. Es würden daher die Curven dieser Kategorie für die Lösung des in Rede stehenden Problems ebenso unbrauchbar sein wie Potenzlinien, aus welchem Grunde ich das zweite Glied der binomischen Gleichung (79) von vornherein positiv gewählt habe.

$$\frac{g_0}{\alpha \pi l^2} = \eta_0, \quad \frac{g_1}{\alpha \pi l^2} = \eta_1, \quad \frac{g_2}{\alpha \pi l^2} = \eta_2$$

kraft (85) augenscheinlich die elementaren Beziehungen:

$$(86) \quad \alpha + \beta = \eta_0, \quad \alpha \mu + \beta \mu^r = \eta_1, \quad \alpha \mu^2 + \beta \mu^{2r} = \eta_2,$$

aus welchen sich für die Differenzen:

$$\beta (\mu - \mu^r) \text{ und: } \beta (\mu^2 - \mu^{2r}) = \beta (\mu - \mu^r) (\mu + \mu^r)$$

die Werthe:  $\mu \eta_0 - \eta_1$  und  $\mu^2 \eta_0 - \eta_2$  ergeben. Hiernach gilt für  $\mu^r$  die einfache Bestimmungs-  
gleichung:

$$(\mu \eta_0 - \eta_1) (\mu + \mu^r) = \mu^2 \eta_0 - \eta_2 \text{ oder: } \mu^r = \frac{\mu \eta_1 - \eta_2}{\mu \eta_0 - \eta_1},$$

so dass der Exponent  $r$  völlig unabhängig von  $\alpha$  und  $\beta$  nach der Formel:

$$(87) \quad r = \frac{\log (\mu \eta_0 - \eta_1) - \log (\mu \eta_1 - \eta_2)}{\log \left( \frac{1}{\mu} \right)}$$

ermittelt werden kann, sowie sich die Coefficienten  $\alpha$ ,  $\beta$  gemäss den Ausdrücken:

$$(88) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\eta_1 - \mu^r \eta_0}{\mu - \mu^r} = \frac{\eta_0 \eta_2 - \eta_1^2}{\mu^2 \eta_0 - 2 \mu \eta_1 + \eta_2} \\ \beta = \frac{\mu \eta_0 - \eta_1}{\mu - \mu^r} = \frac{(\mu \eta_0 - \eta_1)^2}{\mu^2 \eta_0 - 2 \mu \eta_1 + \eta_2} \end{cases}$$

ebenfalls direct aus  $\eta_0$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  berechnen lassen.

Um nunmehr noch die wichtigsten Vereinfachungen von (87) und (88) kennen zu lernen, brauchen wir nur die Thatsache zu verwerthen, dass je drei zusammengehörige Specialisirungen von  $\eta_0$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  vermöge ihres gemeinsamen Divisors:  $\alpha \pi l^2$  mit einander stets durch die Proportion:

$$(89) \quad \eta_0 : \eta_1 : \eta_2 = g_0 : g_1 : g_2$$

verbunden bleiben. Sobald demnach für irgend eine Gruppe gleichartiger Stämme wenigstens näherungsweise die Relationen:

$$g_0 = B l + C, \quad g_1 = \mu B l + C, \quad g_2 = \mu^2 B l + C$$

zutreffen, bedingt die hieraus entspringende Beziehung zwischen  $g_0$ ,  $g_1$ ,  $g_2$ :

$$\mu g_0 + g_2 = (1 + \mu) g_1 \text{ nothwendig die folgende: } \mu \eta_0 + \eta_2 = (1 + \mu) \eta_1, \text{ d. h.:}$$

$$(90) \quad \mu \eta_0 - \eta_1 = \mu \eta_1 - \eta_2.$$

Es wird dann zugleich mit dem Zähler in (87) offenbar  $r = 0$  und  $\mu^r = \mu^0 = 1$ , wodurch sich  $\alpha$  und  $\beta$  auf:

$$(91) \quad \alpha = \frac{\eta_0 - \eta_1}{1 - \mu}, \quad \beta = \frac{\eta_1 - \mu \eta_0}{1 - \mu}$$

reduciren, und die zugehörige Querflächenrelation (75) in:  $g = B x + C$  übergeht, welches Resultat sachlich mit (46) zusammenfällt. In diesem Sinne liefert die Gleichung (87) mittelbar auch ein Kriterium dafür, inwieweit für die untersuchten Stämme speciell die Anwendung der Huber'schen Mittelflächenformel geometrisch berechtigt ist.

Würden dagegen die Querflächen:  $g_0$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  der in Betracht gezogenen Stämme aus drei Beziehungen von der Gestalt:

$$g_0 = B l + C l^2, \quad g_1 = \mu B l + \mu^2 C l^2, \quad g_2 = \mu^2 B l + \mu^4 C l^2$$

näherungsweise bestimmbar sein, so wäre allgemein:

$$\mu^3 g_0 + g_2 = \mu (1 + \mu) g_1 \text{ und consequent: } \mu^3 \eta_0 + \eta_2 = \mu (1 + \mu) \eta_1, \text{ d. h.:}$$

$$(92) \quad \mu \eta_0 - \eta_1 = \frac{\mu \eta_1 - \eta_2}{\mu^2}$$

wonach sich die Relationen (87) und (75) unter den neuen Annahmen in:

$$r = -2 \log \mu : \log \left( \frac{1}{\mu} \right) = 2, \quad g = Bx + Cx^2$$

verwandeln würden. Da nun die so erhaltene Querflächenformel bekanntlich die Gültigkeitsgrenzen der vereinfachten Hossfeld'schen Gleichung präcisirt, ist hiemit der Beweis erbracht, dass auf Grundlage von (87) auch die Zulässigkeit der Cubirungsregel:  $\frac{3}{4} g_2 l$  bei empirisch gegebenen Stammformen analytisch geprüft werden kann.

Hätten wir es endlich mit Potenzcurven zu thun, so müssten sich für  $g_0, g_1, g_2$  immer drei Gleichungen von den Formen:

$$g_0 = C l^r, \quad g_1 = C \mu^r l^r, \quad g_2 = C \mu^{2r} l^r$$

aufstellen lassen, aus welchen gemäss (89) folgende Beziehungen zwischen  $\eta_0, \eta_1, \eta_2$  hervorgehen:

$$(93) \quad \frac{\eta_1}{\eta_0} = \frac{g_1}{g_0} = \mu^r, \quad \frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{g_2}{g_1} = \mu^r, \quad \eta_1^2 = \eta_0 \eta_2.$$

Die Differenzen:  $\mu \cdot \eta_0 - \eta_1 = (\mu - \mu^r) \eta_0$ ,  $\mu \eta_1 - \eta_2 = (\mu - \mu^r) \eta_1$  werden dann dem gemeinsamen Nenner von  $\alpha$  und  $\beta$  in (88) proportional, so dass  $\beta$  mit  $\eta_0$  zusammenfällt, während der Coefficient  $\alpha$  zugleich mit seinem Zähler verschwindet. Die Relationen (87) und (75) liefern mithin auch die charakteristischen Ausdrücke für Potenzcurven:

$$(94) \quad r = \frac{\log \eta_0 - \log \eta_1}{\log \left( \frac{1}{\mu} \right)} = \frac{\log g_0 - \log g_1}{\log \left( \frac{1}{\mu} \right)}, \quad g = C x^r$$

und ersparen solchermassen jede gesonderte Untersuchung, falls derartige Curven in der Folge wenigstens bei einzelnen Holzarten als typische Leitlinien constatirt werden sollten.

Wir haben jetzt noch die zur allgemeinen Querflächengleichung (75) gehörigen Cubirungsformeln elementar zu entwickeln und auf Grundlage der letzteren festzustellen, aus welcher Specialisirung von (87) sich der jeweilige Werth des Exponenten  $r$  bei Beschränkung auf volumetrische Bestimmungen am bequemsten berechnen lässt.

Da die aufeinanderfolgenden Querflächen des zu cubirenden Konoides vermöge der Bedeutung der Constanten  $B, C$  von  $x = 0$  bis  $x = l$  stetig von 0 bis  $g_0 = Bl + Cl^r$  wachsen, ist dessen Volumen  $V$  natürlich stets kleiner als jenes eines Cylinders von der Grundfläche  $g_0$  und gleicher Axenlänge  $l$ :

$$V < g_0 l = B l^2 + C l^{r+1}$$

und muss daher unter Einführung zweier zwischen 0 und 1 liegenden Coefficienten  $\nu_1, \nu_2$  allgemein die Darstellungsweise:

$$V = \nu_1 B l^2 + \nu_2 C l^{r+1}$$

gestatten. Hiebei bleiben  $\nu_1, \nu_2$  infolge ihrer Unabhängigkeit von  $B, C$  auch dann unverändert, wenn eine dieser Constanten verschwindet, also ausserdem die Cubirungsformel (42) in Kraft tritt, welche das einer beliebigen Abscisse  $x$  zugehörige Konoidvolumen für  $C = 0, g = B$  beziehungsweise  $B = 0, g = Cx^r$  durch die Ausdrücke:

$$\frac{1}{2} g x = \frac{1}{2} B x^2 \quad \text{und:} \quad \frac{g x}{r+1} = \frac{C x^{r+1}}{r+1}$$

bestimmt. Auf solche Art ergeben sich für  $x = l$  die Gleichungen:

$$\nu_1 B l^2 = \frac{1}{2} B l^2, \quad \nu_2 C l^{r+1} = \frac{C l^{r+1}}{r+1}, \quad \text{d. h.:} \quad \nu_1 = \frac{1}{2}, \quad \nu_2 = \frac{1}{r+1} \quad \text{und:}$$

$$(95) \quad V = \frac{1}{2} B l^2 + \frac{1}{r+1} C l^{r+1}.$$

Das vorstehende Resultat lässt sich nunmehr nach empirischer Ermittlung zweier beliebiger etwa den Abscissen  $\delta l$  und  $\varepsilon l$  ( $\varepsilon > \delta$ ) zugehörigen Querflächen  $g'$ ,  $g''$  leicht in eine Beziehung von der Gestalt:

$$(96) \quad V = l \{ \lambda_1 g' + \lambda_2 g'' \}$$

umformen, für deren praktische Verwerthung die Kenntniss der Constanten  $B, C$  völlig entbehrlich wird. — Vertauschen wir nämlich  $g', g''$  unter Anwendung der Relation (75) mit:

$$B (\delta l) + C (\delta l)^r \quad \text{und:} \quad B (\varepsilon l) + C (\varepsilon l)^r,$$

so verwandelt sich das für  $V$  angenommene Product (96) allgemein in:

$$(\delta \lambda_1 + \varepsilon \lambda_2) B l^2 + (\delta^r \lambda_1 + \varepsilon^r \lambda_2) C l^{r+1}$$

und stimmt mit (95) offenbar für beliebige Werthe von  $B, C, l, r$  überein, sobald die beiden ursprünglich disponiblen Coëfficienten  $\lambda_1, \lambda_2$  den Bedingungen:

$$\delta \lambda_1 + \varepsilon \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \delta^r \lambda_1 + \varepsilon^r \lambda_2 = \frac{1}{r+1}$$

genügen, mithin die lediglich von  $\delta$ , und  $r$  abhängigen Werthe:

$$(97) \quad \lambda_1 = \frac{\frac{1}{2} \varepsilon^{r-1} - \frac{1}{r+1}}{\delta (\varepsilon^{r-1} - \delta^{r-1})}, \quad \lambda_2 = \frac{\frac{1}{r+1} - \frac{1}{2} \delta^{r-1}}{\varepsilon (\varepsilon^{r-1} - \delta^{r-1})}$$

besitzen. — Gesetzt nun den Fall, dass man die der Grundfläche  $g_0$  zunächst liegende Querfläche  $g''$  ausnahmslos in constanter Höhe (z. B. 1.3<sup>m</sup>) über dem Boden messen würde, so könnte eine präcise Volumberechnung auf Grundlage einer eingliedrigen Cubirungsformel von dem Typus:  $\Lambda g'' l$  gemäss dem allgemeinen Werthe von  $\Lambda$ :

$$(98) \quad \Lambda = \lambda_2 + \lambda_1 \frac{g'}{g''} = \lambda_2 + \lambda_1 \sigma$$

nur erfolgen, wenn neben  $g''$  und  $l$  noch der jeweilige Werth der Verhältniszahl  $\sigma$ , beziehungsweise bei kreisförmigen Querflächen der Werth des zugehörigen Durchmesserquotienten:  $\sqrt{\sigma} = \omega$  bekannt wäre.

Bleibt es dagegen unserer Willkür überlassen, in welcher Höhe:  $h = (1 - \varepsilon) l$  über dem Boden wir die Querfläche  $g''$  zu messen haben, so erscheint die geeignetste Wahl von  $\varepsilon$  unmittelbar durch die Gleichung:

$$\lambda_1 = 0, \quad \text{d. h.:} \quad \frac{1}{2} \varepsilon^{r-1} - \frac{1}{r+1} = 0$$

vorgeschrieben, indem sich  $\lambda_2$  dann vermöge der diesfalls geltenden Umformung:

$$\varepsilon^{r-1} - \delta^{r-1} = 2 \left( \frac{1}{r+1} - \frac{1}{2} \delta^{r-1} \right)$$

auf den reciproken Werth von  $2 \varepsilon$  reducirt, folglich von  $\delta$  völlig unabhängig wird. Die so gewonnene eingliedrige Cubirungsformel\*):

$$(99) \quad V = \frac{1}{2} \left( \frac{r+1}{2} \right)^{\frac{1}{r-1}} g'' l \quad \text{für} \quad \varepsilon = \left( \frac{2}{r+1} \right)^{\frac{1}{r-1}}$$

bleibt auch von der Verhältniszahl  $\sigma$  unabhängig, so dass sich einschlägige Massentafeln ungleich compendiöser als bei constanter Messpunkthöhe construiren liessen.

\*) Hieraus ergeben sich für  $r=0, r=2$  direct die Huber'sche Mittelflächenformel und die vereinfachte Hossfeld'sche Gleichung, während die übrigen Specialisierungen von (99) bisher noch keine praktische Verwerthung gefunden haben.

Um endlich die für beide Relationen (98) und (99) geeignetste Darstellungsweise des Exponenten  $r$  kennen zu lernen, gehen wir von der zweifachen Forderung aus, dass die Abscissen  $\mu l$ ,  $\mu^2 l$  möglichst bequem bestimmbar sein, und die den letzteren entsprechenden Querflächen  $g_1$ ,  $g_2$  wenigstens angenähert symmetrisch zur Mittelfläche liegen sollen. Die zweite Bedingung findet ihren mathematischen Ausdruck in der Gleichung:

$$\mu^2 l = l - \mu l, \quad \text{d. h. } \mu^2 + \mu = 1, \quad \mu = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0.6180340,$$

von welcher Irrationalzahl jedoch mit Rücksicht auf die erste Forderung nur der rohe Näherungswert 0.6 in Betracht kommt. Es ist dann  $\log\left(\frac{1}{\mu}\right) = \log\left(\frac{5}{3}\right)$ , während der Zähler von  $r$  als Logarithmus des Quotienten:

$$\frac{\mu \eta_0 - \eta_1}{\mu \eta_1 - \eta_2} = \left(\mu - \frac{\eta_1}{\eta_0}\right) \left(\mu \frac{\eta_1}{\eta_0} - \frac{\eta_2}{\eta_1}\right)$$

nach Einführung der mit  $\eta_1$ ,  $\eta_0$ ,  $\eta_2$ ,  $\eta_1$  gleichwerthigen Verhältniszahlen:

$$\frac{g_1}{g_0} = \sigma_1, \quad \frac{g_2}{g_0} = \sigma_2 \quad \text{für } \mu = 0.6 \text{ in: } \log\left(\frac{0.6 - \sigma_1}{0.6 \sigma_1 - \sigma_2}\right)$$

übergeht. Die zweckmässigste Specialisirung von (87) ist demnach folgende:

$$(100) \quad r = 4.5075756 \left\{ \log(0.6 - \sigma_1) - \log(0.6 \sigma_1 - \sigma_2) \right\},$$

womit zugleich der Nachweis abgeschlossen erscheint, dass bei der Berechnung von Massentafeln für sämtliche durch (75) charakterisierbare Konoide lediglich Querflächen- beziehungsweise Durchmesserquotienten, nicht aber irgend welche Dimensionsquotienten erforderlich sind.

Würde man jedoch aus den Gleichungen (99), (100) weiter folgern, dass derartige Dimensionsquotienten nicht nur in volumetrischer, sondern auch in morphologischer Hinsicht belanglos seien, so wäre dies ein grober Fehlschluss, denn  $\eta_0$ ,  $\eta_1$  erhalten bei kreisförmigen Querflächen:  $g_0$ ,  $g_1$  — unter  $d_0$ ,  $d_1$  deren Durchmesser verstanden — die Werthe:

$$(101) \quad \eta_0 = \left(\frac{1}{2} \frac{l}{d_0}\right)^2, \quad \eta_1 = \left(\frac{1}{2} \frac{l}{d_1}\right)^2,$$

wonach gemäss den Formeln (88) beide Coëfficienten  $\alpha$ ,  $\beta$  ebenfalls von je zwei Dimensionsquotienten:  $q_0 = \frac{l}{d_0}$ ,  $q_1 = \frac{l}{d_1}$  abhängen. Dasselbe gilt vermöge der Relationen (78) und (80) von den Ordinaten und Tangentenwinkeln aller mit positiven Abscissen versehenen Curvenpunkte, welche mithin für verschiedene Werthpaare  $q_0$ ,  $q_1$  auch verschiedenen verlaufenden Leitlinien angehören. Andererseits würde ein einziger Dimensionsquotient — z. B. etwa  $q_0$  — selbst bei bekanntem Exponenten  $r$  zu einer näheren Charakteristik der betreffenden Konoidform völlig unzureichend sein, weil sich unter solchen Verhältnissen für  $\alpha$  und  $\beta$  noch keine bestimmten Zahlenwerthe ableiten liessen.

Hieraus geht hervor, wie sehr gerade die in neuester Zeit vielseitig discutirte Frage nach dem Zusammenhange zwischen dem Volumen, der Form und dem Dimensionsquotienten eines gegebenen Stammkonoides eingehender analytischer Untersuchungen bedarf, sobald man hiebei an Stelle von mehr oder minder unsicheren Inductionsschlüssen \*) wissen-

\*) Dieselben scheinen einander häufig auszuschliessen, was nach unseren letzten Erörterungen kaum überraschen wird. — So gelangt z. B. Director Dr. F. Grundner seiner Veröffentlichung der Horn'schen Formzahlen und Massentafeln für die Buche (Berlin 1898, Verlag von Paul Parey) zu der Folgerung, dass die Vollholzigkeit wesentlich von dem Verhältnisse zwischen der Höhe und dem Grund-

schaftlich begründbare Resultate erzielen will. Es ist eben das zu lösende Problem viel zu complicirt, um selbst bei grossem natürlichen Scharfblick und reicher praktischer Erfahrung ohne die Hilfsmittel der Analysis eine erfolgreiche Bearbeitung zu ermöglichen, welche hier umso wünschenswerther erscheint, als die einschlägigen Ergebnisse zugleich für die praktische Verwerthbarkeit der bisherigen Massentafeln bedeutungsvoll werden können.

In Anbetracht des Umstandes, dass sich unsere letzten Folgerungen vorläufig nur auf Konoide mit der Querschnittsgleichung (75) beziehen, mag daher noch untersucht werden, ob dieselben Schlüsse auch für Stämme gültig bleiben, welche infolge starker Beastung oberhalb ihrer Mittelflächen mehr oder weniger eingebaucht sind, also wie beispielsweise die Rothbuche \*) Leitlinien mit je zwei Inflexionspunkten besitzen.

Da jedoch der untere Wendepunkt in solchen Fällen gemeiniglich nur schwach ausgeprägt ist, lässt sich eine in volumetrischer Hinsicht genügende Annäherung an die Wirklichkeit bereits durch Einführung von Leitlinien erzielen, welche — unter  $m$  die Abscisse des oberen Wendepunktes verstanden — für  $x > m$  durchwegs concav gegen die Abscissenaxe verlaufen, sobald nur jener Volumdefect, welcher für  $x < m$  durch allzu engen Anschluss der Leitcurven an die Abscissenaxe bedingt wird, näherungsweise dem Volumüberschuss der untersten Konoidsection gleichkommt.

Die einfachste diesbezügliche Querflächenrelation:

$$(102) \quad g = B x^r - C x^{r+1}$$

enthält dann wie (75) neben einem stets grösser als 2 bleibenden Exponenten  $r$  zwei wesentlich positive Constanten  $B, C$  und vermittelt auf Grundlage von (71) und (70) unter Anwendung der Substitutionen:

$$(103) \quad \frac{B}{\alpha \pi} = p = \frac{\alpha}{l^{r-2}}, \quad \frac{C}{\alpha \pi} = q = \frac{\beta}{l^{r-1}}$$

die Gleichungen der Leitlinien des Konoides in der Gestalt:

$$(104) \quad y = l \sqrt{\left(\alpha - \beta \frac{x}{l}\right) \left(\frac{x}{l}\right)^r}, \quad z = \alpha l \sqrt{\left(\alpha - \beta \frac{x}{l}\right) \left(\frac{x}{l}\right)^r}$$

so dass zur Charakteristik des jeweiligen Verlaufes beider Curven eine Discussion der in

$$(105) \quad y^2 = p x^r - q x^{r+1} = x^r (p - q x)$$

umgeformten Beziehung für  $y$  hinreicht. Zu diesem Zwecke entwickeln wir nach der früher gegebenen Anleitung zunächst wieder die Hilfsgleichungen für  $\operatorname{tg} \tau$  und  $\operatorname{tg} \bar{\tau}$ , welche hier nach zahlreichen leichten Reductionen die Darstellungsweise:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{p r x^{r-1} - q (r+1) x^r}{2 y} = \frac{1}{2} \{ p r - q (r+1) x \} \sqrt{\frac{x^{r-2}}{p - q x}}$$

flächendurchmesser abhängen, und dass daher die Formzahlen von Stämmen mit gleichen oder nahezu gleichen Dimensionsquotienten je eine selbständige Gruppe bilden (a. a. O. S. 64), während der Autor der ersten wissenschaftlich begründeten Massentafel, Forstrath A. Schiffel, in seiner bereits citirten Arbeit über die Fichte (S. 15) ausdrücklich hervorhebt, dass der Dimensionsquotient mit der Schaftform und Formzahl nichts zu schaffen habe, zumal die Unabhängigkeit der Form eines Kegelkörpers von dessen Dimensionsquotienten sofort aus der blossen Erwägung hervorgehe, dass beispielsweise das Neiloid und cubische Paraboloid bei gleichem Dimensionsquotienten grundverschiedene Formen besitzen.

\*) Vgl. in erster Linie die lehrreichen graphischen Darstellungen mittlerer Schaftcurven dieser Holzart in Oberforstrath K. Schuberg's 1894 zu Tübingen [Verlag der H. Laupp'schen Buchhandlung] erschienenen Monographie: „Die Rothbuche im natürlich verjüngten, geschlossenen Hochwalde“, S. 38—40.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \bar{\tau} &= \frac{2 \{ p r (r - 1) - q r (r + 1) x \} x^{r-2} y^2 - \{ p r - q (r + 1) x \}^2 x^{2r-2}}{4 y^3} = \\ &= \frac{p^2 r (r - 2) - 2 p q r (r - 1) x + q^2 (r^2 - 1) x^2}{4 (p - q x)} \sqrt{\frac{x^{r-4}}{p - q x}} \end{aligned}$$

gestatten, und bestimmen hierauf mittelst der Formeln (6) jene Abscissenwerthe, für welche der Zähler von  $\operatorname{tg} \bar{\tau}$  verschwindet:

$$x_1 = \frac{p r}{q (r + 1)} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{2}{r (r - 1)}} \right\}, \quad x_2 = \frac{p r}{q (r + 1)} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{2}{r (r - 1)}} \right\}.$$

Die zweite Specialisirung von  $x$  liefert für das Quadrat der zugehörigen Ordinate  $y_2$  gemäss (105) den wesentlich negativen Ausdruck:

$$y_2^2 = - \frac{p x_2^r}{r + 1} \left\{ \sqrt{1 + \frac{r + 1}{r - 1}} - 1 \right\}$$

und besitzt demnach überhaupt keine geometrische Bedeutung, wogegen  $x_1$  mit dem jeweiligen Werthe von  $m$  identisch ist.

Die vorstehenden Resultate lassen erkennen, dass jede durch (105) charakterisirbare Curve eine geschlossene krumme Linie mit dem grössten Durchmesser:

$$L = \frac{p}{q} = \frac{\alpha}{\beta} l = \gamma l$$

bildet und eine mit dem Coordinatenursprunge zusammenfallende Spitze besitzt. Jeder zwischen 0 und  $L$  gelegenen Abscisse entsprechen zwei gleiche, entgegengesetzt bezeichnete Ordinaten, deren Längen bis zu einem der Abscisse:

$$m' = \frac{p r}{q (r + 1)} = \frac{\gamma r l}{r + 1} \text{ zugehörigen Maximum: } l \sqrt{\frac{\alpha (\gamma r)^r}{(r + 1)^{r+1}}}$$

wachsen und hierauf rasch bis 0 abnehmen, indem die Curve die Abscissenaxe für  $x = \gamma l$  senkrecht durchschneidet. Um also nicht gegen den dritten Erfahrungssatz zu verstossen, muss  $m'$  mindestens gleich oder grösser als  $l$  sein, wonach der Exponent  $r$  der Bedingung:

$$(106) \quad \frac{\gamma r l}{r + 1} \geq l, \quad \text{d. h.: } r \geq \frac{\beta}{\alpha - \beta}$$

unterworfen bleibt, und ausschliesslich der zur Abscisse  $m'$  gehörige Theil jedes Curvenzweiges als Leitlinie in Betracht kommt. Die letztere zerfällt dann im Einklange mit dem zweiten Erfahrungssatze durch ihren Inflexionspunkt in zwei ungleichartige Zweige und verläuft in der gewünschten Weise für  $x < m$  convex, für  $x > m$  concav gegen die Abscissenaxe, wobei sich die Coordinaten:  $x = m$ ,  $y = n$  des Wendepunktes, sowie dessen charakteristischer Tangentenwinkel  $\tau_0$  nach Berechnung der Differenz:

$$(107) \quad \frac{1}{r + 1} \left\{ r - \sqrt{\frac{2 r}{r - 1}} \right\} = \Delta'$$

aus den einfachen Formeln:

$$(108) \quad m = \gamma \Delta' l, \quad n = l \sqrt{\alpha (1 - \Delta') (\gamma \Delta')^r}, \quad \operatorname{tg} \tau_0 = \frac{r - (r + 1) \Delta'}{2} \sqrt{\frac{\alpha (\gamma \Delta')^{r-2}}{1 - \Delta'}}$$

ergeben. — So oft also  $r = \frac{\alpha}{\beta}$  irgend einen unechten rationalen Bruch verstanden, dessen numerischer Werth zwischen  $\sqrt{2} \doteq 1.4142136$  und 2 gelegen ist — die Form:

$$r = \frac{a^2}{a^2 - 2 b^2} \text{ besitzt, wird } m = \frac{a (2 b - a) \gamma l}{2 b (a - b)}, \quad m' = \frac{a^2 \gamma l}{2 (a + b) (a - b)},$$

wonach für sämtliche Leitlinien mit dem angegebenen Exponenten die Proportion:

$$m : m' \quad L = a(a + b) (2b - a) \quad a^2 b \quad 2b(a + b) (a - b)$$

gilt, d. h. die Abscissen der Wendepunkte und Culminationspunkte jeder solchen Curve stehen zu deren grösstem Durchmesser im Verhältnisse ganzer Zahlen.

Während ferner die jeweilige Abscisse  $m$  des Inflexionspunktes bei den durch (79) charakterisirebaren krummen Linien eine zugleich mit  $r$  veränderliche Potenz der Verhältniszahl  $\gamma$  als Factor aufweist, ist  $m$  hier für sämtliche Werthe von  $r$  der ersten Potenz von  $\gamma$  proportional und bleibt für alle zwischen 0 und:

$$\Gamma' = \frac{1}{\Delta'} = \frac{r-1}{r-2} \left( 1 + \sqrt{\frac{2}{r(r-1)}} \right)$$

liegenden Specialisirungen von  $\gamma$  kleiner als  $l$ , wobei  $\Gamma'$  im Gegensatze zu  $\Gamma$  mit wachsendem  $r$  stetig abnimmt \*) und für  $r = \infty$  mit der Einheit zusammenfällt. Die Berechnung von  $\Gamma'$  und  $\Delta'$  für die wichtigsten, bereits bei der Discussion von (79) zusammengestellten Werthe des Exponenten  $r$  liefert dann folgende Tabelle, welche das eigenthümliche Abhängigkeitsverhältnis beider Hilfsgrössen von  $r$  genügend detaillirt:

| $r$ | $\Gamma'$ | $\Delta'$ | $r$ | $\Gamma'$ | $\Delta'$ | $r$             | $\Gamma'$ | $\Delta'$ |
|-----|-----------|-----------|-----|-----------|-----------|-----------------|-----------|-----------|
| 2·1 | 21·235326 | 0·04709   | 3·0 | 3·154701  | 0·31699   | 3·9             | 2·168158  | 0·46122   |
| 2·2 | 11·222330 | 0·08911   | 3·1 | 2·967250  | 0·33701   | 4·0             | 2·112372  | 0·47340   |
| 2·3 | 7·877397  | 0·12695   | 3·2 | 2·810503  | 0·35581   | 4·5             | 1·898888  | 0·52662   |
| 2·4 | 6·200309  | 0·16128   | 3·3 | 2·677425  | 0·37349   | 5·0             | 1·754970  | 0·56981   |
| 2·5 | 5·190890  | 0·19265   | 3·4 | 2·562984  | 0·39017   | 10              | 1·292705  | 0·77357   |
| 2·6 | 4·515667  | 0·22145   | 3·5 | 2·463486  | 0·40593   | 50              | 1·050000  | 0·95238   |
| 2·7 | 4·031668  | 0·24804   | 3·6 | 2·376157  | 0·42085   | 10 <sup>2</sup> | 1·024562  | 0·97603   |
| 2·8 | 3·667367  | 0·27268   | 3·7 | 2·298871  | 0·43500   | 10 <sup>3</sup> | 1·002418  | 0·99759   |
| 2·9 | 3·383003  | 0·29560   | 3·8 | 2·229974  | 0·44844   | 10 <sup>4</sup> | 1·000241  | 0·99976   |

Was endlich die bisher stillschweigend als bekannt vorausgesetzten Werthe von  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $r$  betrifft, so tritt hier an Stelle von (85) offenbar die Relation:

$$(109) \quad \alpha \left( \frac{x}{l} \right)^r - \beta \left( \frac{x}{l} \right)^{r+1} = \frac{g}{\alpha \pi l^2},$$

welche für die genannten Grössen unter Beibehaltung der früher gewählten Symbolik von Fall zu Fall je drei Bestimmungsgleichungen:

$$(110) \quad \alpha - \beta = \eta_0, \quad \alpha \mu^r - \beta \mu^{r+1} = \eta_1, \quad \alpha \mu^{2r} - \beta \mu^{2r+2} = \eta_2$$

liefert, mithin etwas complicirtere Lösungen als (85) bedingt. Wie nämlich die Elimination

\*) Vermöge der Identität  $2 : r(r-1) = 8 \{ (2r-1)^2 - 1 \}$  lässt sich hiebei die Wurzelgrösse:

$$W = \sqrt{\frac{2}{r(r-1)}} = \frac{2\sqrt{2}}{2r-1} \left\{ 1 + \frac{1}{2(2r-1)^2} + \frac{3}{8(2r-1)^4} + \dots \right\}$$

stets durch:  $2·8284271 (2r-1)$  ersetzen, sobald die dritte und höhere Potenzen von  $1 (2r-1)$  ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden können. — So ist z. B. für  $r = 1000$  bereits auf neun Stellen genau  $W = 2\sqrt{2} \cdot 1999 = 0·001414921$ .

von  $\alpha$  und  $\beta$  aus (110) lehrt, steht  $\mu^r$  zu  $\eta_0, \eta_1, \eta_2$  nicht mehr in einer linearen Beziehung, sondern in einer solchen zweiten Grades:

$$\mu \eta_0 (\mu^r)^2 - (1 + \mu) \eta_1 \mu^r + \eta_2 = 0,$$

von deren beiden aus (6) für  $a = \eta_2, b = -(1 + \mu) \eta_1, c = \mu \eta_0$  ableitbaren Wurzeln:

$$\mu_1 = \frac{(1 + \mu) \eta_1 - \sqrt{(1 + \mu)^2 \eta_1^2 - 4 \mu \eta_0 \eta_2}}{2 \mu \eta_0}, \quad \mu_2 = \frac{(1 + \mu) \eta_1 + \sqrt{(1 + \mu)^2 \eta_1^2 - 4 \mu \eta_0 \eta_2}}{2 \mu \eta_0}$$

jedoch nur jene den jeweiligen wahren Werth von  $\mu^r$  bestimmt, welche sich speciell für Konoide mit der Querschnittsgleichung:  $g = B x^r$  auf den diesfalls geltenden Quotienten  $\eta_1 / \eta_0$  reducirt. Dieser Forderung genügt, da der Ausdruck:

$$(111) \quad \Omega = (1 + \mu)^2 \eta_1^2 - 4 \mu \eta_0 \eta_2$$

gemäss (93) gleichzeitig mit dem Quadrate der wesentlich positiven Grösse:  $(1 - \mu) \eta_1$  identisch wird, nur die erste Wurzel  $\mu_1$ , so dass nunmehr für sämtliche Constanten  $\alpha, \beta, r$  folgende eindeutige Bestimmungsgleichungen \*) resultiren:

$$(112) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{\eta_1 - \mu^{r+1} \eta_0}{\mu^r (1 - \mu)} = \frac{\eta_1 \{ (1 + \mu) \eta_1 + \sqrt{\Omega} \} - 2 \mu \eta_0 \eta_2}{2 (1 - \mu) \eta_2}, \\ \beta &= \frac{\eta_1 - \mu^r \eta_0}{\mu^r (1 - \mu)} = \frac{\eta_1 \{ (1 + \mu) \eta_1 + \sqrt{\Omega} \} - 2 \eta_0 \eta_2}{2 (1 - \mu) \eta_2}, \\ r &= \frac{\log (2 \mu) + \log \eta_0 - \log \{ (1 + \mu) \eta_1 - \sqrt{\Omega} \}}{\log \left( \frac{1}{\mu} \right)}. \end{aligned} \right.$$

Hiebei muss der jeweilige Zahlenwerth von  $r$  natürlich stets der Bedingung (106) entsprechen, also  $\geq \beta / \eta_0$  bleiben, und kann für jedes  $\mu$  auch aus den Verhältniszahlen  $\sigma_1, \sigma_2$  berechnet werden, indem die einschlägige Formel in (112) vermöge der Relation:

$$\frac{\eta_0}{(1 + \mu) \eta_1 - \sqrt{\Omega}} = \frac{1}{(1 + \mu) \sigma_1 - \sqrt{(1 + \mu)^2 \sigma_1^2 - 4 \mu \sigma_2}}$$

allgemein in der Gestalt:

$$(113) \quad r = \frac{\log (2 \mu) - \log \{ (1 + \mu) \sigma_1 - \sqrt{(1 + \mu)^2 \sigma_1^2 - 4 \mu \sigma_2} \}}{\log \left( \frac{1}{\mu} \right)}$$

\*) Die Richtigkeit der hier für  $\alpha, \beta$  und  $\mu^r$  gefundenen Werthe lässt sich mit Hilfe der interessanten Formeln:

$$\alpha \mu^r = \frac{\sqrt{\Omega} + (1 - \mu) \eta_1}{2 (1 - \mu)}, \quad \beta \mu^{r+1} = \frac{\sqrt{\Omega} - (1 - \mu) \eta_1}{2 (1 - \mu)};$$

$$\alpha \mu^{2r} = \frac{2 \eta_0 \eta_2 - \eta_1 \{ (1 + \mu) \eta_1 - \sqrt{\Omega} \}}{2 (1 - \mu) \eta_0}, \quad \beta \mu^{2r+2} = \frac{2 \mu \eta_0 \eta_2 - \eta_1 \{ (1 + \mu) \eta_1 - \sqrt{\Omega} \}}{2 (1 - \mu) \eta_1}$$

auch direct beweisen, indem deren Substitution in die Bedingungsgleichungen (110) das Zutreffen der letzteren fast ohne jede Rechnung ersichtlich macht. — Weitere besonders bemerkenswerthe Specialisirungen der Ausdrücke (112) entsprechen den sachlich mit (90) und (92) übereinstimmenden Relationen:

$$(1 + \mu) \eta_1 = \eta_2 + \mu \eta_0, \quad (1 + \mu) \eta_1 = \frac{\eta_2 + \mu^3 \eta_0}{\mu},$$

für welche sich  $\sqrt{\Omega}$  auf:  $\eta_2 - \mu \eta_0$  beziehungsweise:  $(\eta_2 - \mu^3 \eta_0) / \mu$  reducirt. Im ersten Falle ist nämlich:

$$r = \frac{\log (2 \mu) + \log \eta_0 - \log (2 \mu \eta_0)}{\log \left( \frac{1}{\mu} \right)} = 0, \quad \text{im zweiten: } r = \frac{\log (2 \mu) + \log \eta_0 - \log (2 \mu^3 \eta_0)}{\log \left( \frac{1}{\mu} \right)} = 1,$$

wonach sich die Zulässigkeit der Huber'schen Mittelflächenformel sowie jene der vereinfachten Hossfeld'schen Gleichung auch auf Grundlage von (112) constatiren lässt.

darstellbar ist. Ebenso lässt sich das zuvor präcisirte Kriterium für die praktische Brauchbarkeit von  $r$ :

$$r \geq \frac{\beta}{\eta_0}, \text{ d. h. } r \geq \frac{\sigma_1 \left\{ (1 + \mu) \sigma_1 + \sqrt{(1 + \mu)^2 \sigma_1^2 - 4 \mu \sigma_2} \right\} - 2 \sigma_2}{2 (1 - \mu) \sigma_2}$$

unmittelbar auf  $\mu$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  beziehen, wonach der fragliche Exponent  $r$  hier wie bei der Querschnittsgleichung (75) völlig unabhängig von  $\alpha$  und  $\beta$  festgestellt werden kann.

Sobald aber einmal  $r$  bekannt ist, genügt die empirische Bestimmung zweier beliebiger Querflächen  $g'$ ,  $g''$  mit den Abscissen  $\delta l$ ,  $\varepsilon l$ , um auch jedes Konoid von der Querschnittsgleichung (102) mittelst einer zweigliedrigen Formel vom Typus (96) zu cubiren. — Es ergibt sich nämlich aus (102) zunächst nach dem zur Ableitung von (95) benützten Verfahren durch Vergleichung des Konoides mit einem Cylinder von derselben Grundfläche:  $g_0 = B l^r - C l^{r+1}$  und der Axenlänge  $l$  der Ausdruck:

$$(114) \quad V = \frac{B l^{r+1}}{r+1} - \frac{C l^{r+2}}{r+2},$$

so dass die Beziehung (96) nach Substitution der hier geltenden Relationen:

$$g' = B (\delta l)^r - C (\delta l)^{r+1}, \quad g'' = B (\varepsilon l)^r - C (\varepsilon l)^{r+1}$$

für sämtliche überhaupt vorkommende Specialisirungen von  $B$ ,  $C$  und  $l$  mit (114) übereinstimmt, wenn  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  im vorliegenden Falle den Bedingungen:

$$\delta^r \lambda_1 + \varepsilon^r \lambda_2 = \frac{1}{r+1}, \quad \delta^{r+1} \lambda_1 + \varepsilon^{r+1} \lambda_2 = \frac{1}{r+2}$$

angepasst werden, folglich die mit (97) gleichartigen Werthe:

$$(115) \quad \lambda_1 = \frac{\varepsilon}{r+1} - \frac{1}{r+2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{r+2} - \frac{\delta}{r+1}$$

erhalten. Obwohl demnach die Formen der zuletzt betrachteten Konoide von jenen mit der Querschnittsgleichung (75) wesentlich abweichen, lassen sich unter Einbeziehung der Verhältniszahl  $g' : g'' = \sigma$  auch hier Massentafeln mit constanter Messpunkthöhe nach dem Typus  $\Lambda g'' l$  aufstellen, sowie bei veränderlicher Messpunkthöhe wieder eine eingliedrige, von  $\sigma$  unabhängige Cubirungsformel\*) von der Gestalt:

$$(116) \quad V = \frac{1}{r+1} \left( \frac{r+2}{r+1} \right)^r g'' l \quad \text{für } \varepsilon = \frac{r+1}{r+2}$$

in Kraft tritt. Da ferner die Grössen  $\eta_0$ ,  $\eta_1$  nur in den Zählern beider Coefficienten  $\alpha$ ,  $\beta$  gesondert vorkommen, gelten hinsichtlich des Zusammenhanges von Form und Inhalt der in Rede stehenden Konoide mit deren Dimensionsquotienten  $q_0$ ,  $q_1$  ebenfalls dieselben Folgerungen wie unter Voraussetzung der Querschnittsgleichung (75), und sei ausserdem hervorgehoben, dass die hier discutirten Schlüsse selbst noch für die allgemeinste binomische Querschnittsrelation:

$$(117) \quad g = M x^r + N x^s$$

zutreffen, welche ich — lediglich auf eigene vergleichende Beobachtungen an verschiedenen Stammformen gestützt — schon 1877 aufgestellt und zunächst volumetrisch eingehend untersucht hatte.

\*) Dieselbe liefert für  $r = 2$  augenscheinlich die Formel (60) und umfasst, wie die Substitutionen  $r = 0$ ,  $r = 1$  lehren, gleichzeitig die Huber'sche Mittelflächenformel, sowie die vereinfachte Hossfeld'sche Gleichung.

Zugleich erscheint durch (117) die allgemeinste algebraische Beziehung zwischen  $g$  und  $x$  präcisirt, welche die Anwendung eingliedriger, unabhängig von den jeweiligen Werthen der Verhältniszahlen  $\sigma$  wie  $\omega$  geltenden Cubirungsformeln ermöglicht \*) und daher in erster Linie in Betracht kommt, wenn die Frage nach der Construction möglichst einfacher und compendiöser Massentafeln eine wissenschaftlich begründbare Lösung finden soll.

Soll dagegen auch in morphologischer Hinsicht eine grössere Annäherung an die Wirklichkeit erzielt werden, so sind vor Allem solche Curven als Leitlinien geeignet, für welche möglichst viele Konoidquerschnitte mit den zu gleichen Abscissen gehörigen mittleren Stammquerflächen übereinstimmen. Gleichzeitig bleibt natürlich nach wie vor die Forderung möglicher Einfachheit massgebend, durch welche wir nunmehr mit Nothwendigkeit dazu geführt werden, die fraglichen Näherungscurven durch eine consequente Verallgemeinerung der Relation (8) abzuleiten, also die rechte Seite der letzteren durch Glieder mit höheren Potenzen von  $x$  entsprechend zu ergänzen. Hiedurch gewinnen die Gleichungen der als Leitlinien einzuführenden Näherungscurven bei Beschränkung auf je zwei Zusatzglieder die Formen:

$$(118) \quad \begin{cases} y = a + b x + c x^2 + d x^3 + e x^4 + f x^5, \\ z = a' + b' x + c' x^2 + d' x^3 + e' x^4 + f' x^5, \end{cases}$$

so dass die zugehörige Querfläche  $g = y z \pi$  offenbar durch ein Polynom von der Gestalt:

$$(119) \quad g = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{10} x^{10}$$

bestimmt wird, dessen Coëfficienten stets je elf empirisch gegebenen Querschnitten angepasst werden können. Ebenso gross ist dann die Anzahl der zur Cubirung erforderlichen äquidistanten Querflächen, welche in den einschlägigen Volumformeln \*\*) ausserdem noch mit vier- bis sechsziffrigen ganzen Zahlen zu multipliciren sind, während sich, wie bereits die Discussion von (51) gelehrt hat, lediglich binomische Ausdrücke vom Typus (96) zur Aufstellung von Massentafeln eignen.

Aus diesem Grunde erheischen sämtliche Fälle, in welchen derartige Formeln durch theilweises Verschwinden der in (119) auftretenden Coëfficienten ermöglicht werden, eine einheitliche Zusammenfassung, wobei sich in letzter Linie die mit sechs disponiblen Constanten:  $r, k; M, N, P, Q$  versehene Relation:

$$(120) \quad g = M x^r + N x^{r+k} + P x^{r+2k} + Q x^{r+3k}$$

\*) Vgl. „Centralblatt für das gesammte Forstwesen“, III. Jahrg., S. 503–515 u. „Mittheilungen aus dem forstlichen Versuchswesen Österreichs“, II. Bd., S. 135–139. — Da die Gleichungen der Mantelflächen aller hier betrachteten Konoide partikuläre Integrale einer und derselben partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung bilden, habe ich bereits 1880 eine mechanische Deutung der letzteren versucht und bin hiebei zur Einführung von Kräften gelangt, welche nicht allein von den Entfernungen der bewegten Moleküle, sondern auch von den Quadraten ihrer Geschwindigkeiten und von der Zeit abhängen, aber dessenungeachtet (vgl. meine im 81. Bde. der Sitzungsberichte der math.-naturw. Classe der k. Wiener Akademie veröffentlichte Arbeit: „Über eine Erweiterung der Gültigkeitsgrenzen einiger allgemeiner Sätze der Mechanik“) dem Principe der Erhaltung der Energie, sowie jenem der Erhaltung des Schwerpunktes genügen. Ausserdem glückte mir im selben Jahre die Entdeckung verschiedener merkwürdiger topologischer Thatsachen, deren wissenschaftliche Bearbeitung so umfangreiche und schwierige mathematische Untersuchungen erheischte (vgl. z. B. die im 85., 87., 88. u. 96. Bde. der citirten Sitzungsberichte erschienenen Abhandlungen über eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze, sowie über den Zusammenhang gewisser topologischer Thatsachen mit neuen Sätzen der höheren Arithmetik und dessen theoretische Bedeutung), dass ich in der Folge meine forstmathematischen Arbeiten für lange Zeit unterbrechen musste. Es ist daher auch in erster Linie meine Schuld, dass dieselben bisher durchaus keine entsprechende Verwerthung gefunden haben.

\*\*) Vgl. die Ausdrücke (24) u. (39) in meiner bereits citirten Abhandlung im II. Jahrg. des „Centralblattes für das gesammte Forstwesen“, S. 566, 625.

als allgemeinste Querschnittsgleichung sämtlicher Konoide ergibt, zu deren Inhaltsbestimmung noch zweigliedrige Ausdrücke genügen. — Die vollständige mathematische Detaillirung des hier angedeuteten Gedankenganges ist bereits in meiner Arbeit über das Problem der Stammcubirung enthalten und erscheint nach dem Gesagten wohl nicht mehr als müßige theoretische Speculation, sondern als eine nothwendige Vorarbeit zur weiteren Ausgestaltung der wissenschaftlichen Holzmesskunde.

Möge die vorliegende, nach Thunlichkeit elementar gehaltene Arbeit auch weiteren forstlichen Kreisen die Einsicht vermitteln, welch' hohe Wichtigkeit für die Lösung gewisser praktischer Fragen eingehende Studien über deren theoretische Grundlagen besitzen, denn es gibt kein Gebiet empirischer Forschung, in welchem unzulängliche beziehungsweise falsche theoretische Gesichtspunkte bei der Durchführung und Zusammenfassung von Beobachtungen selbst bei noch so gewaltiger Häufung der letzteren exakte Resultate liefern könnten.

---

## Schlusswort.

Gleich meinen Untersuchungen über das Problem der Stammcubirung bietet auch die vorliegende Arbeit eine Reihe von Ergebnissen, welche an und für sich nur in theoretischer Hinsicht bemerkenswerth erscheinen, hingegen für die forstliche Praxis erst durch ihre Verwerthung bei der Construction von Massentafeln eine namhafte Wichtigkeit gewinnen können.

Ich fühle mich daher gedrängt, der Direction der k. k. forstlichen Versuchsanstalt in Mariabrunn für die Aufnahme dieser Abhandlung in die „Mittheilungen aus dem forstlichen Versuchswesen Österreichs“ als selbständiges Heft öffentlich meinen wärmsten Dank abzustatten.

Da mein Manuscript seitens der Herren E. Kainz und R. Liebhart als gegenwärtigen Eigenthümern der vormals J. B. Wallishauser'schen k. u. k. Hof-Buchdruckerei einem ebenso sachkundigen Setzer als zuverlässigen Correctoren überwiesen worden ist, sind sämtliche Formeln und Zahlenangaben, wie mich eine gründliche Revision des Reindruckes gelehrt hat, fehlerfrei, obwohl ich infolge starker Inanspruchnahme durch zehn wöchentliche Vortragsstunden und anderweitige heterogene Verpflichtungen — vor Allem durch die Sichtung und Ausarbeitung meiner während der jüngsten österreichischen Expedition nach Süd-Arabien und Sokótra gemachten botanischen und zoologischen Notizen — die Correcturbogen nicht mit ungetheilter Aufmerksamkeit durchzulesen vermochte.

Im Hinblicke hierauf sei es mir gestattet, auch das verständnisvolle Entgegenkommen der genannten Firma dankbar anzuerkennen.

Wien, 26. Februar 1901.

**Der Verfasser.**

~~~~~  
BUCHDRUCKEREI E. KAINZ & R. LIEBHART, VORM. J. B. WALLISHAUSER, WIEN.
~~~~~

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Mitteilungen der forstlichen Bundes-Versuchsanstalt Wien](#)

Jahr/Year: 1901

Band/Volume: [26\\_1901](#)

Autor(en)/Author(s): Simony Oskar

Artikel/Article: [Die näherungsweise Flächen- und Körperberechnung in der wissenschaftlichen Holzmesskunde. 1-64](#)