

3

Ueber das Problem der Stammcubirung als Grundlage der Berechnung von Formzahlentabellen und Massentafeln.

Von

Dr. Oskar Simony,

a. ö. Professor an der Hochschule für Bodencultur, Privatdocent an der Wiener Universität.

Einleitung.

Die grosse Regelmässigkeit, welche die Formen vieler organischer Gebilde bei normaler Entwicklung zeigen, hat seit den ältesten Zeiten zur Forschung angeregt, und zwar war es vor Allem die menschliche Gestalt, deren Formverhältnisse — in erster Linie zum Zwecke künstlerischer Nachbildung — eingehender untersucht worden sind. Schon die alten Egyptianer gelangten, wie durch glaubwürdige historische Nachrichten verbürgt wird, in den Besitz gewisser Regeln über die Proportionen des menschlichen Körpers, desgleichen die Griechen, wofür unter Anderem die Thatsache einen Beleg liefert, dass bereits Polyklet eine Schrift, den Kanon, über diesen Gegenstand verfasste und die in ihr aufgestellten Regeln speciell an zwei Musterstatuen, dem „*Διὰ δούμμενος*“ und „*Δορυφόρος*“, zur Anschauung brachte. Aber eine breitere empirische Grundlage erhielt das Studium der Maassverhältnisse der menschlichen Gestalt erst durch Lionardo da Vinci und Albrecht Dürer, und es mag uns desshalb gestattet sein, wenigstens die Proportionslehre des letztgenannten grossen Künstlers kurz zu charakterisiren. Dieselbe erschien 1528 unter dem Titel: „Hierinn sind begriffen vier Bücher von menschlicher Proportion, durch Albrechten Dürer von Nürnberg erfunden und beschriben, zu nutz allen denen, so zu diser kunst lieb tragen“ und stützt sich auf genaue, an fünf Männern und fünf Frauen von verschiedenem Körperbaue vorgenommene Messungen, welchen als jeweilige Maasseinheit die vom Scheitel bis zur Sohle gerechnete Gesamtlänge des betreffenden Individuums zu Grunde gelegt wurde. Auf diese Art ergab sich für gewisse, genügend scharf präcisirbare Dimensionen verschiedener Körpertheile ein System rationaler Brüche, so beispielsweise für die Länge des Ober- resp. Unterkörpers, von der Spaltung aus gerechnet, die Zahl $\frac{1}{2}$, für die Kopflänge (vom Scheitel bis zum Kinn) $\frac{1}{8}$, für die Gesichtslänge (vom Kinn bis zum Haarwuchs) $\frac{1}{10}$, etc.; hingegen

bemühte sich Dürer vergeblich, zwischen seinen Verhältnisszahlen einen inneren, gesetzlichen Zusammenhang herzustellen.

Die seinen Untersuchungen zu Grunde liegende Idee, die Entfernungen verschiedener, ihrer Lage nach wenigstens näherungsweise bestimmbarer Oberflächenpunkte der menschlichen Gestalt durch eine dieser selbst entnommene Längeneinheit¹⁾ zu messen, und so deren eigenthümliche Formverhältnisse durch Zahlen zu kennzeichnen, wurde später noch vielfach und insoferne vollständiger realisirt, als einerseits die jeweiligen numerischen Angaben aus einer grösseren Zahl von Einzelbeobachtungen abgeleitet, andererseits in der Gruppierung der gewonnenen Resultate auch Nationalität, Geschlecht, Alter, Lebensberuf etc. der gemessenen Individuen berücksichtigt wurden.²⁾ Da sich ferner hiebei mit Nothwendigkeit die Einsicht aufdrängen musste, dass die Oberfläche des menschlichen Körpers keine Fixpunkte im strengen Sinne des Wortes liefere³⁾, so wurden in der Folge parallel mit diesen Forschungen auch die Maassverhältnisse des menschlichen Skelettes und einzelner Theile desselben — wir erinnern hier nur an die in der Neuzeit besonders eifrig gepflegte Wissenschaft der Kraniologie⁴⁾ — nach analogen Gesichtspunkten eingehend studirt, ohne dass es bisher möglich geworden wäre, die für eine analytische Charakteristik der in Betracht gezogenen Gebilde wesentlichen empirischen Daten festzustellen.

Ein um so grösseres Interesse verdient daher die Thatsache, dass es A. Zeising⁵⁾ gelang, viele die Form des menschlichen Körpers betreffende numerische Ergebnisse wenigstens untereinander in eine analytisch ausdrückbare Verbindung zu bringen. Zu diesem Zwecke ging er von folgenden Voraussetzungen aus:

1. Die menschliche Gestalt lässt sich in ihrer normalen Ausbildung als eine formell schöne Erscheinung definiren.

2. Ihre formelle Schönheit entspringt der Proportionalität ihrer Gliederung in ungleiche Theile.

¹⁾ Statt der Längeneinheit Dürer's, welche in neuerer Zeit wieder von J. Trost („Proportionslehre mit einem Kanon der Längen-, Breiten- und Profilmass aller Theile des menschlichen Körpers“. Wien, 1866) adoptirt wurde, kamen in der Folge noch diverse andere Maasse zur Verwendung, in dem z. B. H. Lavater („Anleitung zur anatomischen Kenntniss des menschlichen Körpers für Zeichner und Bildhauer“. Zürich, 1790) die Gesichtslänge, G. Carus („Symbolik der menschlichen Gestalt“. Leipzig, 1853) den dritten Theil der Wirbelsäule des Erwachsenen als Grundmaass, respective als „organischen Modul“ einführte.

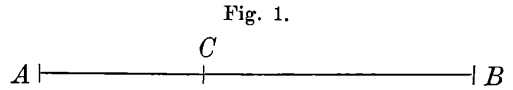
²⁾ Diess geschah in gründlicher Weise zuerst durch G. Schadow, dessen Werk: „Polyklet oder von den Maassen des Menschen nach dem Geschlecht und Alter“ (Berlin, 1834) ausserdem eine sehr genaue Uebersicht über die auf sein Thema bezügliche Literatur enthält.

³⁾ Die Erkenntniss dieser Thatsache führte beispielsweise den Historienmaler C. Schmidt zur Aufstellung des Satzes: „Die Stütz- und Mittelpunkte der Bewegung (Drehungspunkte) und die diese Punkte verbindenden (gedachten) geraden Linien sind die an sich unveränderlichen Grundlagen aller Formverhältnisse“, welchen er auch seinem 1849 in Stuttgart erschienenen „Proportionschlüssel“ zu Grunde legte.

⁴⁾ Mit welcher Gründlichkeit die Formverhältnisse einzelner Schädel bereits untersucht worden sind, ist unter Anderem aus der im fünften Bande des „Archivs für Anthropologie“ (pag. 267—324) veröffentlichten Abhandlung von J. Kopernicki: „Ueber den Bau der Zigeunerschädel“ oder aus der Arbeit von Dr. J. Gildemeister: „Ein Beitrag zur Kenntniss nordwestdeutscher Schädelformen“ (Archiv für Anthropologie, 11. Band, pag. 25—63) zu entnehmen.

⁵⁾ Siehe hierüber dessen fundamentales Werk: „Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers, aus einem bisher unerkannt gebliebenen, die ganze Natur und Kunst durchdringenden morphologischen Grundgesetze entwickelt“. — Leipzig, 1854.

3. Die Gliederung eines gegebenen Ganzen in ungleiche Theile erscheint nur dann als proportional, wenn das Ganze zum grösseren Theile in demselben Verhältnisse, wie der grössere Theil zum kleineren steht, oder analytisch ausgedrückt: Jede beliebige Strecke $\overline{AB} = l$ (s. Fig. 1) ist im Punkte C proportional getheilt, falls die Gleichungen:



$$\overline{AC} + \overline{CB} = l, \overline{CB}^2 = \overline{AB} \times \overline{AC} \text{ respective } \overline{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} l = 0.618033989 l,$$

$$\overline{AC} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} l = 0.381966011 l$$

gelten, wonach die geforderte Theilung mit jener durch den bekannten „goldenen Schnitt“ zusammenfällt.

Indem nun Zeising an gewissen Längen- und Breitenmaassen des menschlichen Körpers und seiner Theile die „sectio aurea“ wiederholt ausführte, fand er, dass die durch dieses Verfahren erhaltenen Schnittpunkte in der weiteren Gliederung der untersuchten Gebilde¹⁾ sich vielfach sehr präcis ausprägten, und schloss hieraus, dass die von ihm als „proportional“ bezeichnete Theilung für die Beurtheilung der menschlichen Körperformen wirklich die Bedeutung eines morphologischen Grundgesetzes besitze.²⁾ Andererseits erkannte er aber auch, dass dasselbe am einzelnen Individuum nie mathematisch strenge zum Ausdrucke gelange, indem die durch directe Messungen constatirten Verhältnisszahlen theilweise nur die ersten Näherungsbrüche: $\frac{5}{8}, \frac{3}{8}; \frac{8}{13}, \frac{5}{13}; \frac{13}{21}, \frac{8}{21}; \frac{21}{34}, \frac{13}{34}; \frac{34}{55}, \frac{21}{55};$
 $\frac{55}{89}, \frac{34}{89}$ der den beiden Irrationalzahlen: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ äquivalenten unendlichen Kettenbrüche:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} \quad \text{und:} \quad \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

vorstellten.³⁾ — Während mithin die Untersuchungen Zeising's in mathematischer Hinsicht noch auf den Nachweis gewisser, a priori fixirter Verhältnisse zwischen den Maasszahlen verschiedener Körperteile beschränkt blieben, stellte sich schliesslich F. Liharžik in den

¹⁾ Hiebei beschränkte sich Zeising nicht etwa auf lebende Menschen, sondern wies die Richtigkeit seines Proportionalgesetzes auch an getreuen Copien berühmter Kunstwerke, wie des Apollo von Belvedere, des Antinous, der mediceischen Venus, der Eva Raphael's etc. nach.

²⁾ Im Anschlusse hieran suchte Zeising die Giltigkeit seines Gesetzes auch für gewisse, der Zoologie, Botanik und Mineralogie, der Chemie, Astronomie und Geographie etc. angehörige Complexe von Thatsachen nachzuweisen, wobei er dessen factisches Anwendungsgebiet allerdings oft weit überschätzte. — Siehe hierüber unter Anderen noch seine 1856 in Leipzig erschienene Schrift: „Das Normalverhältniss der chemischen und morphologischen Proportionen“. — Was speciell die Bedeutung des „Grundgesetzes“ von Zeising für das Studium gewisser thierischer Körperformen anbelangt, so verweisen wir in erster Linie auf das 1878 in Wien erschienene Werk von Prof. Dr. M. Wilckens: „Form und Leben der landwirthschaftlichen Hausthiere“, pag. 721—756.

³⁾ In neuester Zeit ist das System des goldenen Schnittes zur Beurtheilung der menschlichen Normalgestalt durch J. Bochenek („Die männliche und weibliche Normalgestalt nach einem neuen System“, Berlin, 1875) noch weiter ausgebildet worden.

auf die Form des menschlichen Körpers bezüglichen Abschnitten seiner beiden Hauptwerke ¹⁾ die Aufgabe:

1. sämtliche zur geometrischen Construction der menschlichen Gestalt in einer bestimmten Normalstellung erforderliche Daten zu eruiren und dieselben zur Aufstellung eindeutiger Constructionsregeln zu verwerthen;

2. die Variationen dieser Bestimmungsstücke für jedes Alter und beide Geschlechter empirisch zu ermitteln;

3. die charakteristischen Längenmaasse des menschlichen Körpers womöglich aus einer im geometrischen Sinne regelmässigen Figur constructiv abzuleiten.

Näher auf die theilweise überraschenden Resultate ²⁾ einzugehen, zu welchen Liharžik durch die Bearbeitung dieser Probleme gelangte, kann hier natürlich nicht unsere Aufgabe sein; hatten ja doch unsere bisherigen Betrachtungen lediglich den Zweck, an einem passenden Beispiele zu zeigen, unter welch' verschiedenartigen Gesichtspunkten selbst die Formen eines einzigen organischen Gebildes studirt werden können, und welche Schwierigkeiten einer analytischen Charakteristik seiner Gestalt manchmal entgegenstehen.

Was nun speciell jene Gebilde anbelangt, auf welche sich die vorliegende Arbeit bezieht, so war ein für das Studium ihrer Formen vorzüglich geeigneter Standpunkt durch das Bedürfniss der forstlichen Praxis, vor Allem die Volumina der betreffenden Stämme möglichst genau und mit möglichst geringem Zeitaufwande kennen zu lernen, gewissermaassen schon im Vorhinein präcisirt. Da nämlich das Volumen eines Körpers nur auf Grundlage mathematischer Ausdrücke oder physikalischer Cubirungsmethoden gefunden werden kann, so bedingte die Erfüllung dieses Bedürfnisses in erster Linie eine mathematische Untersuchung der Stammformen, indem speciell die Inhaltsbestimmung stehender Stämme die Anwendung eines physikalischen Verfahrens a priori ausschloss. Zugleich mussten manche Erfahrungsthatfachen, wie beispielsweise das öftere Auftreten konischer und paraboloidischer Stammformen mit fast kreisförmigen Querflächen gerade zu derartigen Betrachtungen anregen, wobei man sich freilich zunächst damit begnügte, die für den Kreiskegel und das Rotationsparaboloid bestehenden Cubirungsregeln ³⁾ direct zur Inhaltsberechnung ganzer Stämme, respective einzelner Sectionen derselben zu benützen und deren jeweilige Formen lediglich durch Angabe ihrer für verschiedene Vollholzigeitclasses und Stammhöhen stark variirenden unechten Formzahlen zu charakterisiren suchte.

¹⁾ „Das Gesetz des Wachsthumes und der Bau des Menschen“. Wien, 1862. — „Das Quadrat, die Grundlage aller Proportionalität in der Natur und das Quadrat aus der Zahl Sieben die Uridee des menschlichen Körperbaues“. Wien, 1865.

²⁾ So fand F. Liharžik u. A. auf Grundlage zahlreicher und sorgfältiger Messungen, dass zur Construction jeder menschlichen Figur lediglich folgende sieben Grössen empirisch gegeben sein müssten: 1. Die Kopflänge vom Scheitel bis zur Kinnspitze; 2. die Halslänge von der Kinnspitze bis zum oberen Rande des Brustbeines; 3. die Länge des Brustbeines von seinem oberen Rande bis zum Endpunkte des Schwertknorpels; 4. die Entfernung des Schwertknorpels vom oberen Rande der Schoossbeinverbindung; 5. die Gesamtlänge des Ober- und Unterschenkels; 6. die Höhe von der Sohle bis zum Mittelpunkte des inneren Knöchels; 7. die Länge des Schlüsselbeines.

³⁾ So wurde z. B. die Regel: Das Volumen jedes geraden Kreiskegels ist gleich seiner Grundfläche, multiplicirt mit dem dritten Theile seiner Höhe, schon von Oettelt („Praktischer Beweis, dass die Mathesis bey dem Forstwesen unentbehrliche Dienste thue“. Eisenach, 1765) für die Cubirung unentwipfelter Baumstämme empfohlen.

Erst L. Smalian gebührt das Verdienst, in demselben Decennium, in welchem gründliche mathematische Betrachtungen auch in der Botanik¹⁾ und Zoologie²⁾ Eingang fanden, durch Einführung von echten Formzahlen³⁾ und eine neue, analytisch präcisirbare Auffassungsweise der Stammformen die Erkenntniss der letzteren wesentlich vertieft zu haben. Seine wichtigsten, hierauf bezüglichen allgemeinen Ergebnisse, welche bereits in seinem 1837 in Stralsund erschienenen Werke: „Beitrag zur Holzmesskunst“ enthalten sind, lassen sich kurz, wie folgt, zusammenfassen:

1. Die Stammquerflächen sind in der Regel so gestaltet, dass man sie näherungsweise mittelst jener Formeln quadriren kann, welche den Flächeninhalt eines beliebigen Kreises in Function seines Durchmessers oder Umfanges ausdrücken. Hiebei ergeben sich, je nachdem man von den mittleren Durchmessern oder von den Umfängen der betreffenden Querflächen ausgeht, verschiedene, gemeiniglich zu grosse Resultate, und zwar sind deren Abweichungen von den wahren Querflächen⁴⁾ im ersteren Falle durchschnittlich geringer als im letzteren.

2. Bei im Schlusse erwachsenen Hochwaldbäumen variiren die aufeinanderfolgenden Querflächen eines und desselben Stammes von der Grundfläche bis zur Spitze zumeist derart, dass er wenigstens in seinem mittleren Theile approximativ als ein gleichmässig abnehmender „Afterkegel“ betrachtet werden darf, bei welchem sich die Entfernungen seiner Querflächen von der Spitze wie gewisse Potenzen ihrer Durchmesser verhalten. Der diesen Potenzen gemeinsame Exponent (m) ist eine nur von der Form des in Betracht gezogenen Baumschaftes abhängige, positive Zahl, mithin für verschiedene Stammformen gleichfalls verschieden und insoferne zu einer mathematischen Charakteristik derselben verwendbar.

3. Dasselbe gilt von dem „Schaftwalzensatze“ (σ), respective der echten Formzahl⁵⁾ des betreffenden Stammes, welche im Allgemeinen zwischen 0.36 und 0.60 schwankt. Da schliesslich zwischen m und σ jederzeit die Gleichung: $m = \sigma(2 + m)$ besteht, so kann,

1) So erschienen u. A. 1831 die umfangreichen, vergleichenden Untersuchungen A. Braun's über die Ordnung der Schuppen an den Tannenzapfen (Verhandlungen der kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Akademie der Naturforscher, 15. Bd. 1. Abthlg.) und 1837 in den „Annales des sciences naturelles“ die in mathematischer Hinsicht besonders interessanten Aufsätze der Brüder L. und A. Bravais über die geometrische Anordnung der Blätter und der Blütenstände, welche 1839 von G. Walpers in deutscher Sprache veröffentlicht wurden.

2) Als Beleg hiefür mag vor Allem die 1838 in den „Philosophical transactions of the royal society of London, part. II.“ publicirte Abhandlung von H. Moseley: „On the geometrical forms of turbinated and discoid shells“ dienen, an welche sich 1840 die beiden Arbeiten F. Naumann's: „Beitrag zur Conchyliometrie“ und: „Ueber die Spiralen der Ammoniten“ (Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie, Bd. 50 und 51) anschlossen.

3) Eine nähere Erörterung der Begriffe: „Echte und unechte Formzahl“ zu geben, wäre hier wohl überflüssig, da man sich hierüber in jedem Lehrbuche der Holzmesskunde — wir erinnern hier nur an jene von Prof. M. Kunze und Prof. Dr. F. Baur — eingehend informiren kann.

4) Ihre Bedeutung für gewisse forstliche Untersuchungen wird auf pag. 20 ausdrücklich hervorgehoben, wo es u. A. heisst: „dass die Abweichungen der Durchmesser- oder Umfangersquerfläche von der wahren Querschnittfläche des Holzes bei Forstabschätzungen, wo es darauf ankommt, die wahre Holzmasse zu erfahren und hierauf Zuwachs- und Ertragsberechnungen zu gründen, nicht unberücksichtigt gelassen werden dürfen, leidet keinen Zweifel“.

5) Die Einführung derselben an Stelle der unechten Formzahlen wird von Smalian (pag. 22) in folgender Weise motivirt: „Hierdurch erlangt man den Vortheil, dass für alle, nach einerlei Gesetz gleichmässig abnehmende Baumschäfte, eine und dieselbe Raumformel angewendet werden kann, was unzulässig ist, wenn man die Stärke der Baumschäfte nicht bei einem gleichvielten Theil der Länge, sondern, ohne Rücksicht auf deren Länge, stets bei einer bestimmten Höhe in Fussen oder bei der Bruthöhe des Messenden abnimmt, weil man alsdann den Körperraum nicht aus ähnlich liegenden Abmessungen berechnet.“

sobald eine der beiden Grössen empirisch ermittelt ist, die andere durch Rechnung gefunden werden.

Hiernach lassen sich also die Mantelflächen vieler Stämme näherungsweise als Rotationsflächen auffassen, und die Gleichungen ihrer Erzeugungscurven leicht auffinden. Betrachtet man nämlich die Spitze eines solchen Stammes als Ursprung, dessen Achse als Abscissenachse eines ebenen, rechtwinkeligen Coordinatensystemes und bezeichnet mit x die Abscisse, mit y die Ordinate eines beliebigen Punktes jener Linie, in welcher die Coordinatenebene die Mantelfläche des Stammes durchschneidet, und die zugleich die fragliche Erzeugungscurve vorstellt, so ist zufolge des zweiten Satzes x immer einer gewissen Potenz von y proportional, d. h. es muss y mit x stets durch eine Relation von der Gestalt: $y = Ax^k$, ($A, k > 0$) zusammenhängen. — Diese einfachen Schlüsse wurden in der Folge allen analytischen Discussionen über Stammformen zu Grunde gelegt, ja vielfach nur die drei wichtigsten Specialfälle der erwähnten Beziehung: $y = Ax^{\frac{1}{2}}$, $y = Ax$, $y = Ax^{\frac{3}{2}}$ eingehender besprochen, obwohl verschiedene Erfahrungsthatsachen, über welche ich in meinen analytischen Untersuchungen über den Zusammenhang geometrisch bestimmbarer Stammformen mit ihren Formzahlen¹⁾ eine gedrängte Uebersicht gegeben habe, eine Verallgemeinerung der eben charakterisirten mathematischen Anschauungen nahe legten. Um so bedeutendere Fortschritte wurden dafür seit Smalian in der Ermittlung und Systemisirung unechter und echter Formzahlen unserer Waldbäume gemacht, und durch die Construction praktisch brauchbarer Massentafeln die Möglichkeit dargethan, Stämme derselben Holzart auf Grundlage gewisser empirischer Daten in solche Gruppen zu sondern, dass alle einer Gruppe angehörige Stammindividuen im Mittel nur wenig von einander abweichende Volumina besitzen. Diese merkwürdige Thatsache veranlasste mich zu den in der zuvor citirten Abhandlung enthaltenen Studien über Stammformen, wobei sich je nach der Beschaffenheit und Zahl der zu ihrer empirischen Charakteristik erforderlichen Angaben in erster Linie drei Gleichungen:

$$(1) \dots \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left(\frac{z}{l}\right)^{\frac{pqr}{p+q}}, \quad (2) \dots \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left\{ \frac{ct^s z^r + l^r z^s}{(c\delta^r + \delta^s) l^{r+s}} \right\}^{\frac{pq}{p+q}},$$

$$(3) \dots \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left\{ \frac{z(l^m + c_1 l^{m-1} z + c_2 l^{m-2} z^2 + \dots + c_m z^m)}{\delta_k (1 + c_1 \delta_k + c_2 \delta_k^2 + \dots + c_m \delta_k^m) l^{m+1}} \right\}^{\frac{pq}{p+q}}$$

als einfachste, analytische Definitionen ihrer Mantelflächen ergaben. Dieselben sind insgesamt Specialisirungen der allgemeinen Relation:

$$(4) \dots \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left\{ \frac{z [\Psi_0(l^{-1}z, r_0, r'_0, \dots) + c_1 \Psi_1(l^{-1}z, r_1, r'_1, \dots) + \dots + c_m \Psi_m(l^{-1}z, r_m, r'_m, \dots)]}{\delta_k l [\Psi_0(\delta_k, r_0, r'_0, \dots) + c_1 \Psi_1(\delta_k, r_1, r'_1, \dots) + \dots + c_m \Psi_m(\delta_k, r_m, r'_m, \dots)]} \right\}^{\frac{pq}{p+q}}$$

beziehungsweise particuläre Integrale der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(5) \dots \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{p-1}{x} \frac{\partial z}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{q-1}{y} \frac{\partial z}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$$

und beziehen sich auf ein rechtwinkeliges dreiachsiges Coordinatensystem, dessen Z-Achse mit der Achse des betreffenden Stammes, dessen Ursprung mit dessen Spitze zusammenfällt,

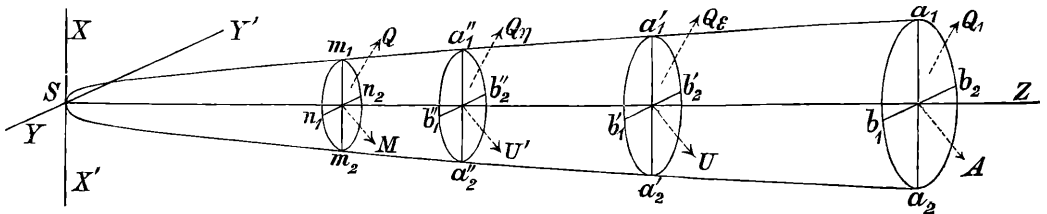
¹⁾ Diese Arbeit erschien 1877 im 5., 6., 7., 8., 9., 10. und 11. Hefte des dritten Jahrganges der Zeitschrift: „Centralblatt für das gesammte Forstwesen“.

während die X-Achse der die Z-Achse und den grössten Durchmesser des letzten Stammquerschnittes enthaltenden Ebene angehört. Was ferner die in (1), (2) und (3) auftretenden Constanten: a, b, l , etc. anbelangt, so repräsentiren a, b stets die Hauptachsen einer bestimmten Querfläche, l die Achsenlänge des in Betracht gezogenen Stammes, p, q entweder positive gerade Zahlen oder Brüche mit geraden Zählern aber ungeraden Nennern, r, s, m wesentlich positive Exponenten, endlich $\delta, \delta_k, c, c_1, c_2, \dots c_m$ gewisse numerische Grössen. — Hieraus erhellt, dass das Problem der Stammcubirung, da die zur Inhaltsberechnung eines Körpers ableitbaren mathematischen Ausdrücke selbstverständlich von den Formen seiner Begrenzungsflächen abhängen, eine Unterscheidung von vier Hauptfällen nöthig macht, je nachdem es sich um die Feststellung des Gesamtvolumens einer grösseren Anzahl von Stämmen handelt, deren Mantelflächen im Mittel durch eine der Relationen (1), (2), (3) charakterisirt werden können, oder speciell die Inhaltsberechnung eines einzelnen Stammes von analytisch undefinirbarer Gestalt erfordert wird. Diese vier Hauptfälle werden in den vier ersten Paragraphen der vorliegenden Arbeit behandelt; der fünfte und letzte Paragraph betrifft die Aufstellung von Formzahlentabellen und Massentafeln.

§. 1.

Der erste und einfachste Hauptfall des zu erledigenden Problems ist gemäss unseren einleitenden Betrachtungen jener, in welchen die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z jedes Punktes der Mantelfläche des zu cubirenden Körpers (siehe die schematische Fig. 2) einer Relation von

Fig. 2.



der Gestalt (1) Genüge leisten. Es sind dann die Hauptachsen seines letzten Querschnittes $Q_1: \overline{a_1 a_2} = 2a, \overline{b_1 b_2} = 2b$ und jene seiner im Abstände $SM = z$ von S gelegenen Querfläche Q^1 : $\overline{m_1 m_2} = 2a \left(\frac{z}{l}\right)^{\frac{qr}{p+q}}, \overline{n_1 n_2} = 2b \left(\frac{z}{l}\right)^{\frac{pr}{p+q}}$, so dass Q nach Einführung der Abkürzungen ²⁾:

$$(6) \dots \frac{4 \Gamma \left(1 + \frac{1}{p}\right) \Gamma \left(1 + \frac{1}{q}\right)}{\Gamma \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)} = \varphi(p, q), \quad (7) \dots \frac{a b \varphi(p, q)}{l^r} = \frac{Q_1}{l^r} = B_r$$

durch die Gleichung:

$$(8) \dots Q = Q_1 \frac{z^r}{l^r} = B_r z^r$$

bestimmt erscheint. Dieselbe ist insoferne beachtenswerth, als man sich über ihre Anwendbarkeit auf eine gegebene Stammform leicht empirisch informiren kann. Zu diesem Zwecke

1) Vergl.: „Analytische Untersuchungen etc.“, pag. 347, 348.
 2) Vergl.: „Analytische Untersuchungen etc.“, pag. 294, 295.

braucht man nämlich nur irgend welche in den Abständen; $l', l'', l''', \dots, l^{(n-1)}, l^{(n)}$ von S gelegene Querflächen: $Q', Q'', Q''', \dots, Q^{(n-1)}, Q^{(n)}$ zu ermitteln und die Quotienten.

$$\frac{\log Q' - \log Q'}{\log l' - \log l'} = r', \quad \frac{\log Q'' - \log Q'}{\log l'' - \log l'} = r'', \dots \quad \frac{\log Q^{(n-1)} - \log Q'}{\log l^{(n-1)} - \log l'} = r^{(n-2)},$$

$$\frac{\log Q^{(n)} - \log Q'}{\log l^{(n)} - \log l'} = r^{(n-1)}$$

zu berechnen. Differiren die hiebei erhaltenen Zahlen nur unbedeutend von ihrem arithmetischen Mittel:

$$(9) \dots r = \frac{1}{n-1} \{ r' + r'' + \dots + r^{(n-2)} + r^{(n-1)} \},$$

so muss — wenigstens näherungsweise — auch die mit (8) sachlich zusammenfallende Relation:

$$\frac{\log Q - \log Q'}{\log z - \log l'} = r, \text{ d. h.: } \log \frac{Q}{Q'} = r \log \frac{z}{l'}, \text{ oder: } Q = \frac{Q'}{l'^r} z^r$$

gelten, während in jedem anderen Falle die Aufstellung einer derartigen Beziehung zwischen Q und z unstatthaft sein würde. Auf Grundlage von (8) erhält man ferner für das von $z = 0$ bis $z = SA = l$ gerechnete Volumen V des zu cubirenden Stammes den Ausdruck:

$$V = \int_0^l Q dz = B_r \int_0^l z^r dz = \frac{B_r l^{r+1}}{r+1},$$

aus welchem sich die Constante B_r durch Einführung einer beliebigen Querfläche Q_ϵ , deren Distanz von $S:SU$ allgemein mit ϵl bezeichnet werden mag, ohne Schwierigkeit eliminiren lässt. — Denn substituirt man in demselben den für B_r aus der Identität: $Q_\epsilon = B_r \epsilon^r l^r$ resultirenden Werth: $\frac{Q_\epsilon}{\epsilon^r l^r}$, so ergibt sich:

$$(10) \quad V = \frac{Q_\epsilon l}{(r+1) \epsilon^r},$$

welche Formel unmittelbar auf folgende Sätze führt:

1. Die Cubirung eines durch (1) charakterisirbaren Stammes ist jederzeit möglich, sobald man ausser r und l noch den Inhalt einer einzigen, willkürlich gewählten Querfläche nebst deren Entfernung von der Stammspitze kennt, und gestaltet sich am einfachsten für $\epsilon = 1$, d. h. wenn speciell die letzte Querfläche des betreffenden Stammes hinlänglich genau quadriert werden kann. Unter dieser Annahme verwandelt sich nämlich (10) in:

$$(11) \quad V = \frac{Q_1 l}{r+1},$$

wonach V für $r = 1, 2, 3, 4, \dots$ successive mit $\frac{1}{2} Q_1 l, \frac{1}{3} Q_1 l, \frac{1}{4} Q_1 l, \frac{1}{5} Q_1 l, \dots$ coincidirt. Es verhalten sich demnach die Volumina jener Körper, deren Mantelflächen der Reihe nach durch die Gleichungen:

$$(12) \dots \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left(\frac{z}{l}\right)^{\frac{pq}{p+q}}, \quad (13) \dots \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left(\frac{z}{l}\right)^{\frac{2pq}{p+q}},$$

$$(14) \dots \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left(\frac{z}{l}\right)^{\frac{3pq}{p+q}}, \quad (15) \dots \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left(\frac{z}{l}\right)^{\frac{4pq}{p+q}}, \text{ etc.}$$

analytisch präcisirt werden, bei gleichen Endflächen und Achsenlängen wie die reciproken Werthe der auf 1 folgenden ganzen Zahlen: 2, 3, 4, 5, etc.

2. Zur Feststellung einer Stammformzahl (λ_1), welche sich auf irgend eine, in der Höhe al über der Grundfläche des Stammes gelegene Querfläche \bar{Q} bezieht,¹⁾ genügt die Angabe von r und α , indem λ_1 als das Verhältniss von V zu dem Inhalte einer Walze von der Grundfläche $\bar{Q} = Q_{1-\alpha}$ und der Länge l kraft der Relation (10) die Darstellungsweise:

$$(16) \quad \lambda_1 = \frac{V}{Q_{1-\alpha} l} = \frac{1}{(r+1)(1-\alpha)^r}$$

gestattet, mithin unabhängig von V , p und q berechnet werden kann.

Für „echte“ Formzahlen im engeren Sinne (λ'_1) ist $\alpha = \frac{1}{20}$, für „Brusthöhenformzahlen“ (λ''_1), falls l in Metern ausgedrückt wird, gleich $\frac{1.3}{l}$, so dass speciell zur Ermittlung von λ'_1 , λ''_1 die Ausdrücke:

$$(17) \quad \lambda'_1 = \frac{1}{r+1} \left(\frac{20}{19} \right)^r, \quad (18) \quad \lambda''_1 = \frac{1}{r+1} \left(\frac{l}{l-1.3} \right)^r \text{ bestehen.}$$

Ausserdem veranlasst das Auftreten eines willkürlichen Divisors: ε^r in (10) die Frage, ob sich vielleicht eine Gleichung derselben Form:

$$(19) \quad V = \Lambda Q_\varepsilon l$$

durch zweckmässige Wahl von ε und Λ gleichzeitig zwei Specialisierungen von r anpassen lässt, von welchen die kleinere mit r_1 , die grössere mit r_2 bezeichnet werden mag. Diese Forderung ist augenscheinlich erfüllbar, wenn die beiden Beziehungen: $\Lambda Q_\varepsilon l = \frac{Q_\varepsilon l}{(r_1+1)\varepsilon^{r_1}}$, $\Lambda Q_\varepsilon l = \frac{Q_\varepsilon l}{(r_2+1)\varepsilon^{r_2}}$, respective:

$$(20) \quad \varepsilon^{r_1} \Lambda = \frac{1}{r_1+1}, \quad (21) \quad \varepsilon^{r_2} \Lambda = \frac{1}{r_2+1}$$

durch einen positiven, zwischen 0 und 1 gelegenen Werth von ε und eine reelle Substitution für Λ befriedigt werden können, welche Eigenschaften die Annahmen:

$$(22) \quad \varepsilon = \left\{ \frac{r_1+1}{r_2+1} \right\}^{\frac{1}{r_2-r_1}}, \quad (23) \quad \Lambda = \left\{ \frac{(r_2+1)^{r_1}}{(r_1+1)^{r_2}} \right\}^{\frac{1}{r_2-r_1}}$$

in der That besitzen.²⁾ Denn da $r_2 > r_1$, folglich $r_2+1 > r_1+1$ und $r_2-r_1 > 0$ ist, so bleibt ε stets kleiner als 1, und Λ eine wesentlich positive Grösse. Durch Einführung

¹⁾ Vergl.: „Analytische Untersuchungen etc.“, pag. 299, 300.

²⁾ Sind r_1, r_2 speciell zwei um die Einheit von einander verschiedene positive, ganze Zahlen: $k, k+1$, so verwandeln sich die Ausdrücke (22) und (23) in:

$$\varepsilon = \frac{k+1}{k+2}, \quad \Lambda = \frac{(k+2)^k}{(k+1)^{k+1}},$$

repräsentiren also für jeden Werth von k echte, rationale Brüche. Die Richtigkeit dieser Behauptung ist bezüglich ε unmittelbar evident, lässt sich aber auch für die Grösse Λ leicht nachweisen, indem man ihren natürlichen Logarithmus: $\text{Log } \Lambda = k \text{ Log } (k+2) - (k+1) \text{ Log } (k+1)$ nach k differentiirt und die so erhaltene Gleichung:

$$\frac{d\Lambda}{\Lambda dk} = - \left(\frac{2}{k+2} - \text{Log } \frac{k+2}{k+1} \right) \text{ in:}$$

von (22) und (23) in (19) erhält man demnach eine Cubirungsformel, welche auf alle unter die Relationen:

$$(24) \dots \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left(\frac{z}{l}\right)^{\frac{pqr_1}{p+q}}, \quad (25) \dots \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q = \left(\frac{z}{l}\right)^{\frac{pqr_2}{p+q}}$$

subsumirbaren Stammformen anwendbar erscheint. Ihre wichtigsten Specialisirungen¹⁾ sind folgende:

1. $V = \frac{3}{4} Q_2 l$, giltig für die Gleichungen (12) und (13), indem für $r_1 = 1, r_2 = 2 : \epsilon = \frac{2}{3}$, $\Lambda = \frac{3}{2^2} = \frac{3}{4}$ wird.

2. $V = \frac{16}{27} Q_3 l$, welche Formel den Beziehungen (13) und (14) zugehört, da unter den Annahmen: $r_1 = 2, r_2 = 3$ ϵ mit $\frac{3}{4}$, Λ mit $\frac{4^2}{3^3} = \frac{16}{27}$ coincidirt.

3. $V = \frac{1}{\sqrt{2}} Q_{\frac{1}{\sqrt{2}}} l$, anwendbar auf (12) und (14), wobei die Irrationalzahl: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ auf sieben Stellen genau durch 0.7071068 ersetzt werden kann. Sobald jedoch bei der Berechnung von V keine sehr grosse Genauigkeit verlangt wird, empfiehlt es sich, statt 0.7071068 einen jener Näherungsbrüche: $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{12}{17}, \frac{29}{41}, \frac{70}{99}, \frac{169}{239}, \frac{408}{577}$, einzuführen, welche sich auf Grundlage der Identität:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1 + (\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2}-1)}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

direct gewinnen lassen, also beispielsweise von der Näherungsformel: $\bar{V} = \frac{70}{99} Q_{\frac{70}{99}} l$ auszugehen. — Unter der Voraussetzung: $\epsilon = \frac{70}{99}$ sind nämlich gemäss (10) die den Substitutionen $r_1 = 1, r_2 = 3$ entsprechenden wahren Volumina V_1, V_3 durch die Gleichungen:

$$V_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{99}{70}\right) Q_{\frac{70}{99}} l, \quad V_3 = \frac{1}{4} \left(\frac{99}{70}\right)^3 Q_{\frac{70}{99}} l$$

$$\frac{d\Lambda}{dk} = -\Lambda \left\{ \left(\frac{2}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right) + \left(\frac{1}{2[k+1]^2} - \frac{1}{3[k+1]^3}\right) + \left(\frac{1}{4[k+1]^4} - \frac{1}{5[k+1]^5}\right) + \dots \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2n[k+1]^{2n}} - \frac{1}{[2n+1][k+1]^{2n+1}}\right) + \left\{ = -\Lambda \left\{ \frac{k}{(k+1)(k+2)} + \frac{3k+1}{2 \cdot 3(k+1)^3} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{5k+1}{4 \cdot 5(k+1)^5} + \frac{(2n+1)k+1}{2n(2n+1)(k+1)^{2n+1}} + \right\} \right.$$

transformirt. Dieselbe lehrt nämlich, dass Λ bei von 1 bis ∞ variirendem k immer mehr und mehr abnimmt, also für jedes positive, ganze k zwischen

$$\lim_{k=1} \Lambda = \frac{3}{4} \quad \text{und} \quad \lim_{k=\infty} \Lambda = \lim_{k=\infty} \left\{ \frac{1}{k+2} \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \right\} = \lim_{k=\infty} \left(\frac{e}{k+2}\right) = 0 \text{ gelegend ist.}$$

¹⁾ Ausserdem mögen hier noch folgende Specialfälle von (19) kurz erwähnt werden:

$$(a) \dots r_1 = 1, r_2 = \frac{3}{2} : V = \frac{25}{32} Q_{\frac{16}{25}} l; \quad (b) \dots r_1 = \frac{3}{2}, r_2 = 2 : V = \frac{432}{625} Q_{\frac{26}{36}} l; \\ (c) \dots r_1 = 2, r_2 = \frac{5}{2} : V = \frac{2401}{3888} Q_{\frac{36}{49}} l; \quad (d) \dots r_1 = \frac{5}{2}, r_2 = 3 : V = \frac{65536}{117649} Q_{\frac{49}{64}} l.$$

gegeben, so dass die Quotienten: $\frac{V_1}{\bar{V}}, \frac{V_3}{\bar{V}}$ in diesem Falle die Werthe: $\frac{1}{2} \left(\frac{99}{70}\right)^2, \frac{1}{4} \left(\frac{99}{70}\right)^4$ erhalten, respective V_1, V_3 in folgender Weise in Function von \bar{V} ausdrückbar sind:

$$V_1 = \bar{V} + \frac{1}{9800} \bar{V} = \bar{V} + 0.0001020 \bar{V}, V_3 = \bar{V} + \frac{19601}{96040000} \bar{V} = \bar{V} + 0.0002041 \bar{V}.$$

Hieraus erhellt, dass der Unterschied zwischen V und \bar{V} höchstens 0.02 Procent des jeweiligen Resultates beträgt und daher in sehr vielen Fällen ohne weiters vernachlässigt werden darf.

Im Anschlusse hieran soll nunmehr gezeigt werden, dass sich auch Kubirungsformeln aufstellen lassen, welche ebenso wie (19) nur eine einzige Querfläche enthalten, aber dessenungeachtet gleichzeitig für drei Specialisirungen von r gelten. Zu diesem Zwecke müssen für V zunächst Ausdrücke construiert werden, in welchen neben Λ und ϵ noch ein dritter, ursprünglich unbestimmt gelassener Factor auftritt. Man erreicht diess auf sehr einfache Art, indem man, von der Querfläche Q_ϵ ausgehend, jene Querfläche Q_η (s. Fig. 2) aufsucht, deren Maximalstärke $\overline{a'_1 a''_2}$ der μ -fachen Maximalstärke: $\mu \overline{a'_1 a'_2}$ von Q_ϵ gleich ist, und in die betreffende Volumformel entweder den Abstand: $SU' = \eta l$ der Querfläche Q_η von der Stammspitze S oder die Entfernung: $UU' = (\epsilon - \eta)l$ des Querschnittes Q_ϵ von Q_η einführt. Identificirt man hierauf V mit einem der Producte:

$$\Lambda Q_\eta \overline{S U'}, \Lambda Q_\epsilon \overline{S U'}, \Lambda Q_\eta \overline{U U'}, \Lambda Q_\epsilon \overline{U U'},$$

so ergeben sich, da η gemäss der Bedingung: $\overline{a'_1 a''_2} = \mu \overline{a'_1 a'_2}$, respective: $2a\eta^{\frac{qr}{p+q}} = 2a\mu\epsilon^{\frac{qr}{p+q}}$ allgemein den Werth:

$$(26) \dots \eta = \epsilon \mu^{\frac{p+q}{qr}}$$

besitzt, mit Rücksicht auf die Formel (11) der Reihe nach die Gleichungen:

$$\Lambda Q_\eta \overline{S U'} = \eta^{r+1} \Lambda Q_1 l = V, \text{ d. h.: } (27) \dots \epsilon^{r+1} \mu^{\frac{(p+q)(r+1)}{qr}} \Lambda = \frac{1}{r+1},$$

$$\Lambda Q_\epsilon \overline{S U'} = \epsilon^r \eta \Lambda Q_1 l = V, \text{ d. h.: } (28) \dots \epsilon^{r+1} \mu^{\frac{p+q}{qr}} \Lambda = \frac{1}{r+1},$$

$$\Lambda Q_\eta \overline{U U'} = \eta^r (\epsilon - \eta) \Lambda Q_1 l = V, \text{ d. h.: } (29) \dots \epsilon^{r+1} \mu^{\frac{p+q}{q}} (1 - \mu^{\frac{p+q}{qr}}) \Lambda = \frac{1}{r+1},$$

$$\Lambda Q_\epsilon \overline{U U'} = \epsilon^r (\epsilon - \eta) \Lambda Q_1 l = V, \text{ d. h.: } (30) \dots \epsilon^{r+1} (1 - \mu^{\frac{p+q}{qr}}) \Lambda = \frac{1}{r+1},$$

so dass durch zweckmässige Wahl von ϵ, μ und Λ offenbar jedes der angeführten Producte drei Specialisirungen von r angepasst werden kann. — Im Folgenden mag die kleinste derselben stets mit r_1 , die grösste mit r_3 bezeichnet, und speciell das jeder Cubirungsformel von der Gestalt:

$$(31) \dots V = \Lambda Q_\eta \overline{S U'}$$

correspondirende Werthsystem von ϵ, μ und Λ festgestellt werden. Die das letztere bestimmenden Relationen:

$$(32) \dots \epsilon^{r_1+1} \mu^{\frac{(p+q)(r_1+1)}{qr_1}} \Lambda = \frac{1}{r_1+1}, \quad (33) \dots \epsilon^{r_2+1} \mu^{\frac{(p+q)(r_2+1)}{qr_2}} \Lambda = \frac{1}{r_2+1},$$

$$(34) \dots \epsilon^{r_3+1} \mu^{\frac{(p+q)(r_3+1)}{qr_3}} \Lambda = \frac{1}{r_3+1}$$

gehen aus (27) durch Vertauschung von r mit r_1, r_2, r_3 hervor und lassen sich nach ϵ, μ

und Λ ohne Schwierigkeit auflösen. Dividirt man nämlich (33) durch (32), ferner (34) durch (33) und erhebt die erste der hiedurch gewonnenen Transformationsgleichungen auf die Potenz $\frac{1}{r_2-r_1}$, die zweite auf die Potenz $\frac{1}{r_3-r_2}$, so gelangt man nach Einführung der Abkürzungen:

$$(35) \dots \frac{p+q}{qr_1r_2} = \frac{1}{r_1r_2} \left(1 + \frac{p}{q}\right) = s_1, \quad (36) \dots \frac{p+q}{qr_2r_3} = \frac{1}{r_2r_3} \left(1 + \frac{p}{q}\right) = s_2,$$

$$(37) \quad \left(\frac{r_1+1}{r_2+1}\right)^{\frac{1}{r_3-r_1}} = \omega_1, \quad (38) \dots \left(\frac{r_2+1}{r_3+1}\right)^{\frac{1}{r_3-r_2}} = \omega_2$$

zu den einfachen Beziehungen: $\varepsilon\mu^{-s_1} = \omega_1$, $\varepsilon\mu^{-s_2} = \omega_2$, welche im Verein mit (33) für ε , μ und Λ die nachstehenden Quotienten liefern:

$$(39) \dots \varepsilon = \left\{ \frac{\omega_2 r_3}{\omega_1 r_1} \right\}^{\frac{1}{r_3-r_1}}, \quad (40) \dots \mu = \left\{ \frac{\omega_2}{\omega_1} \right\}^{\frac{1}{s_1-s_2}}, \quad (41) \dots \Lambda = \frac{1}{r_2+1} \left\{ \frac{\omega_1 r_1 (r_3+1)}{\omega_2 r_3 (r_1+1)} \right\}^{\frac{r_2+1}{r_3-r_1}}.$$

Hieraus folgt, dass ε und Λ von den jeweiligen Werthen der Exponenten p, q nicht beeinflusst werden, hingegen μ eine Function von $\frac{p}{q}$ ist, indem die in (40) auftretende Differenz:

$$s_1 - s_2 = \frac{1}{r_1r_2} \left(1 + \frac{p}{q}\right) - \frac{1}{r_2r_3} \left(1 + \frac{p}{q}\right) = \frac{r_3-r_1}{r_1r_2r_3} \left(1 + \frac{p}{q}\right)$$

augenscheinlich mit $\frac{p}{q}$ variirt. Die unter (31) subsumirbaren Cubirungsformeln bleiben mithin lediglich für die $\frac{p}{q}$ bei ihrer Aufstellung zu Grunde gelegten Specialisirungen dieses Quotienten richtig, und besitzen insoferne ein kleineres Anwendungsgebiet als die aus (19) entspringenden Cubirungsformeln, deren Giltigkeit an keine bestimmte Annahme hinsichtlich der Grösse $\frac{p}{q}$ gebunden erscheint. Hiezu tritt noch der Umstand, dass η für gewisse Specialwerthe von r grösser als 1 ausfällt, respective je drei willkürlichen Substitutionen für r keineswegs immer ein zur Inhaltsberechnung ganzer Stämme geeigneter Ausdruck von der Gestalt (31) zugeordnet werden kann. — Zur Erläuterung des Gesagten dürften folgende drei Beispiele dienen:

1. Wie sind die Grössen ε, μ und Λ in der Gleichung (31) zu wählen, damit dieselbe zur Cubirung aller Stämme verwendbar wird, deren Mantelflächen sich durch eine der Relationen:

$$(42) \dots \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^p = \left(\frac{z}{l}\right)^{\frac{p}{2}}, \quad (43) \dots \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^p = \left(\frac{z}{l}\right)^{\frac{3p}{4}},$$

$$(44) \dots \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^p = \left(\frac{z}{l}\right)^p$$

analytisch charakterisiren lassen? — In diesem Falle bestehen, da $\frac{p}{q} = 1, r_1 = 1, r_2 = \frac{3}{2}, r_3 = 2$ ist, zur Ermittlung von $\varepsilon, \mu, \Lambda$ die Beziehungen:

$$\varepsilon^2 \mu^4 \Lambda = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon^{\frac{5}{2}} \mu^{\frac{10}{3}} \Lambda = \frac{2}{5}, \quad \varepsilon^3 \mu^3 \Lambda = \frac{1}{3},$$

für welche die Identitäten (39), (40) und (41) wegen $s_1 = \frac{4}{3}, s_2 = \frac{2}{3}, \omega_1 = \frac{16}{25}, \omega_2 = \frac{25}{36}$ in:

$$\epsilon = \frac{5^6}{2^8 \times 3^4} = 0.7535204, \quad \mu = \frac{5^6}{2^9 \times 3^3} = 1.1302807, \quad \Lambda = \frac{2^{51} \times 3^{20}}{5^{36}} = 0.5395538$$

übergehen und so den Satz begründen: das Volumen jedes, den hier gemachten Voraussetzungen entsprechenden Stammes ist gleich dem Producte: $0.5395538 Q_\eta \overline{SU}'$, wenn Q_η mit jener Querfläche identificirt wird, welche eine 1.1302807 mal so lange Hauptachse als der im Abstände: $0.7535204l$ von der Stammspitze S gelegene Querschnitt besitzt. Da endlich η gemäss der Relation (26) für $p = q$, $r = 1, \frac{3}{2}, 2$ der Reihe nach die Werthe:

$$\epsilon\mu^2 = \frac{5^{18}}{2^{26} \times 3^{10}} = 0.9626483, \quad \epsilon\mu^{\frac{4}{3}} = \frac{5^{14}}{2^{20} \times 3^8} = 0.8871767, \quad \epsilon\mu = \frac{5^{12}}{2^{17} \times 3^7} = 0.8516896$$

annimmt, so bleibt \overline{SU}' stets kleiner als l , womit die Möglichkeit einer empirischen Bestimmung von Q_η und \overline{SU}' allgemein nachgewiesen ist.

2. Welche Specialisirung von (31) entspricht den Annahmen: $\frac{p}{q} = 1$, $r_1 = 2$, $r_2 = \frac{5}{2}$, $r_3 = 3$, d. h. der Gleichung (44) und den beiden Relationen:

$$(45) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^p = \left(\frac{z}{l}\right)^{\frac{5p}{4}}, \quad (46) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^p = \left(\frac{z}{l}\right)^{\frac{3p}{2}}?$$

Zur Beantwortung dieser Frage erscheint es nothwendig, ϵ , μ und Λ den Forderungen:

$$\epsilon^3\mu^3\Lambda = \frac{1}{3}, \quad \epsilon^{\frac{7}{2}}\mu^{\frac{14}{5}}\Lambda = \frac{2}{7}, \quad \epsilon^4\mu^{\frac{8}{3}}\Lambda = \frac{1}{4}$$

anzupassen, welche, wie man sich leicht überzeugen kann, durch die Substitutionen: ¹⁾

$$\epsilon = \frac{7^{10}}{2^{22} \times 3^4} = 0.8314487, \quad \mu = \frac{7^{30}}{2^{60} \times 3^{15}} = 1.3624565, \quad \Lambda = \frac{2^{246} \times 3^{56}}{7^{120}} = 0.2293002$$

befriedigt werden. Hiedurch ist natürlich zugleich die gewünschte Cubirungsformel gefunden, nach welcher jedoch nie ganze Stämme cubirt werden können, indem die aus (26) hervorgehenden Producte:

$$\epsilon\mu = \frac{7^{40}}{2^{82} \times 3^{19}} = 1.1328127, \quad \epsilon\mu^{\frac{4}{5}} = \frac{7^{34}}{2^{70} \times 3^{16}} = 1.0648626, \quad \epsilon\mu^{\frac{2}{3}} = \frac{7^{30}}{2^{62} \times 3^{14}} = 1.0218424$$

insgesammt die Einheit überschreiten.²⁾

3. Es sei drittens $\frac{p}{q} = 1$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$, respective das durch ϵ , μ , Λ zu erfüllende System von Bedingungen:

$$\epsilon^2\mu^4\Lambda = \frac{1}{2}, \quad \epsilon^3\mu^3\Lambda = \frac{1}{3}, \quad \epsilon^4\mu^{\frac{8}{3}}\Lambda = \frac{1}{4}.$$

¹⁾ Die wahren Werthe der Grössen ϵ , μ , Λ wurden hier desshalb nicht in expliciter Form gegeben, weil die durch Berechnung der Potenzen: 7^{30} , 2^{60} etc. erhaltenen Zahlen zu gross sind, um die Richtigkeit unserer Angaben für ϵ , μ , Λ bequem prüfen zu können. So führt beispielsweise die Entwicklung von $\frac{2^{246} \times 3^{56}}{7^{120}}$ auf einen Bruch, dessen Zähler hundert und eine, dessen Nenner hundert und zwei Ziffern aufweist.

²⁾ Die Probleme 1. und 2. verdienen insoferne ein besonderes Interesse, als für die in denselben gewählten Specialisirungen von $\frac{p}{q}$ und r ausser ϵ , μ und Λ auch die Abstandsverhältnisse: $\overline{SU}':\overline{SU}$, $\overline{SU}':\overline{SA}$ rational sind.

Dasselbe liefert für die genannten Grössen die Resultate:

$$\varepsilon = \frac{9\sqrt{2}}{16} = 0.7954951, \quad \mu = \frac{27\sqrt{2}}{32} = 1.1932427, \quad \Lambda = \frac{2^{24}}{3^{16}} = 0.3897443,$$

wonach η für $r = 1, 2, 3$ successive mit:

$$\varepsilon\mu^2 = \frac{6561\sqrt{2}}{8192} = 1.1326483, \quad \varepsilon\mu = \frac{243}{256} = 0.9492187, \quad \varepsilon\mu^3 = \frac{81\sqrt{2}}{128} = 0.8949320$$

zusammenfällt,¹⁾ also die diesen Werthen von $\varepsilon, \mu, \Lambda$ correspondirende Specialform von (31) zur Inhaltsberechnung ganzer Stämme nur dann brauchbar ist, wenn deren Mantelflächen einer der beiden Bedingungen (44) oder (46) genügen.

Die eigenthümlichen Beschränkungen, unter welchen hienach die auf Grundlage von (31) abgeleiteten Lösungen der Aufgaben 2. und 3. allein zulässig sind, führen jetzt selbstverständlicher Weise auf die Vermuthung, ob nicht vielleicht eines der drei übrigen Postulate:

$$(47) \dots V = \Lambda Q_\varepsilon \overline{SU}, \quad (48) \quad V = \Lambda Q_\eta \overline{UU'}, \quad (49) \quad V = \Lambda Q_\varepsilon \overline{UU'}$$

eine vollständige Erledigung von 2. und 3. ermöglichen würde.

Um hierüber Aufschluss zu erhalten, ist es nöthig, vorerst auf die für diese Formeln charakteristischen Relationen: (28), (29) und (30) zurückzugehen und das Verhältniss der letzteren zu (27) festzustellen. Vertauscht man nämlich in (28) den Factor Λ mit dem Producte: $\mu^{\frac{p+q}{q}} \Lambda'$, so verwandelt sich (28) in:

$$\varepsilon^{r+1} \mu^{\frac{(p+q)(r+1)}{qr}} \Lambda' = \frac{1}{r+1},$$

welche Gleichung sich von (27) nur insoferne unterscheidet, als Λ' an die Stelle von Λ getreten ist. Ein Uebergang von (31) zu (47) bedingt daher keine Aenderung der Werthe von ε und μ , während Λ durch den von (41) wesentlich differirenden Quotienten:

$$(50) \dots \Lambda = \frac{\mu^{\frac{p+q}{q}}}{r_2 + 1} \left\{ \begin{matrix} \omega_1 r_1 (r_3 + 1) \\ \omega_2 r_3 (r_1 + 1) \end{matrix} \right\}^{\frac{r_2 + 1}{r_3 - r_1}} = \frac{1}{r_2 + 1} \left\{ \begin{matrix} \omega_1 r_1 (r_2 + r_3 + 1) \\ \omega_2 r_3 (r_1 + r_2 + 1) \end{matrix} \right\}^{\frac{1}{r_3 - r_1}}$$

ersetzt werden muss. Ebenso sind die Bedingungen (29) und (30) insoferne mit einander verwandt, als sich (29) durch die Substitution: $\mu^{\frac{p+q}{q}} \Lambda = \Lambda'$ in die mit (30) sachlich zusammenfallende Identität:

$$\varepsilon^{r+1} \left(1 - \mu^{\frac{p+q}{qr}}\right) \Lambda' = \frac{1}{r+1}$$

umgestalten lässt. Sobald mithin die Relationen (48) und (49) gleichen Specialisirungen von $\frac{p}{q}$ und r angepasst werden, bleibt das für ε und μ unter Voraussetzung von (49) gefundene Werthsystem zugleich für (48) giltig, d. h. es besitzen die beiden auf diesem Wege erhaltenen Cubirungsformeln stets dasselbe Anwendungsgebiet, weil ja das letztere ausschliesslich durch die für ε und $\varepsilon\mu^{\frac{p+q}{qr}} = \eta$ resultirenden Zahlen bestimmt wird.

Hingegen ist es unmöglich, die Gleichung (30) durch Einführung eines anderen, von r unabhängigen Factors für Λ auf (27) zu transformiren, wonach die zuvor angeregte

¹⁾ Die letzte Stelle des für $\varepsilon\mu$ angegebenen Decimalbruches kann auch zu 8 angenommen werden, indem der vollständige Werth von $\varepsilon\mu: 0.94921875$ ist.

Frage nunmehr dahin präcisirt werden kann, ob sich den durch die Gleichungen: (44), (45) und (46) respective (42), (44) und (46) charakterisierbaren Flächen etwa zwei Cubirungsformeln von der Gestalt (49) allgemein zuordnen lassen.

Setzt man zunächst, entsprechend den Annahmen des zweiten Beispiels, in (30) $p = q$ und $r = 2, \frac{5}{2}, 3$, so ergeben sich zur Feststellung der auf die erste Gruppe von Flächen bezüglichen Specialform von (49) die Beziehungen:

$$\varepsilon^3 (1 - \mu) \Lambda = \frac{1}{3}, \quad \varepsilon^{\frac{7}{2}} (1 - \mu^{\frac{4}{5}}) \Lambda = \frac{2}{7}, \quad \varepsilon^4 (1 - \mu^{\frac{2}{3}}) \Lambda = \frac{1}{4},$$

welche nach Elimination von ε und Λ für μ die Bestimmungsgleichung:

$$(1 - \mu^{\frac{4}{5}})^2 = \frac{48}{49} (1 - \mu) (1 - \mu^{\frac{2}{3}})$$

und zur nachträglichen Berechnung der beiden übrigen Unbekannten die Formeln:

$$\varepsilon = \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \mu}{1 - \mu^{\frac{2}{3}}} \right), \quad \Lambda = \frac{1}{3 \varepsilon^3 (1 - \mu)}$$

liefern. Die Grössen $\varepsilon, \mu, \Lambda$ besitzen daher in diesem

Falle die Werthe:

$$\varepsilon = 1.0113546, \quad \mu = 0.4925318, \quad \Lambda = 0.6349793,$$

so dass Q_ε hier regelmässig jenseits der Querfläche Q_1 , Q_n jedoch zwischen S und Q_1 gelegen ist, indem die Producte:¹⁾

$$\varepsilon \mu = 0.4981243, \quad \varepsilon \mu^{\frac{4}{5}} = 0.5739194, \quad \varepsilon \mu^{\frac{2}{3}} = 0.6307535$$

insgesammt kleiner als 1 bleiben.

Zu analogen Schlüssen gelangt man durch Auflösung des letzten, bei der Discussion der vorgelegten Frage in Betracht kommenden Systems von Bedingungen:

$$\varepsilon^2 (1 - \mu^2) \Lambda = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon^3 (1 - \mu) \Lambda = \frac{1}{3}, \quad \varepsilon^4 (1 - \mu^{\frac{2}{3}}) \Lambda = \frac{1}{4},$$

welches aus (30) für $p = q, r = 1, 2, 3$ entspringt und hinsichtlich des Factors ε in erster

Linie auf die beiden coexistirenden Relationen: $\varepsilon = \frac{2}{3} (1 + \mu)$, $\varepsilon = \frac{3}{4} \left(\frac{1 + \mu^{\frac{1}{3}} + \mu^{\frac{2}{3}}}{1 + \mu^{\frac{1}{3}}} \right)$ führt.

Hieraus folgt weiter:

$$(1 + \mu) (1 + \mu^{\frac{1}{3}}) = \frac{9}{8} (1 + \mu^{\frac{1}{3}} + \mu^{\frac{2}{3}}),$$

respective zur Ermittlung der Grösse: $\sqrt[3]{\mu} = u$ die biquadratische Gleichung:

$$u^4 + u^3 - \frac{9}{8} u^2 - \frac{1}{8} u - \frac{1}{8} = 0,$$

welche nur eine einzige positive Wurzel: $u = 0.8111401801$ aufweist. Auf Grundlage dieses Ergebnisses und der keiner weiteren Auseinandersetzung bedürftigen Formeln:

$$\varepsilon = \frac{2}{3} (1 + u^3), \quad \mu = u^3, \quad \Lambda = \frac{9}{8 (1 - u^3) (1 + u^3)^3}$$

¹⁾ Bei der Berechnung dieser Producte wurden, um die siebente Stelle des jeweiligen Resultates sicher angeben zu können, die zehnstelligen Werthe von $\varepsilon, \mu, \mu^{\frac{4}{5}}$ und $\mu^{\frac{2}{3}}$: $\varepsilon = 1.0113546135$, $\mu = 0.4925318031$, $\mu^{\frac{4}{5}} = 0.5674759006$, $\mu^{\frac{2}{3}} = 0.6236719123$ benützt.

erhält man endlich für ε , μ , Λ und die den jeweiligen Werth von η bestimmenden Producte: $\varepsilon\mu^2$, $\varepsilon\mu$, $\varepsilon\mu^{\frac{2}{3}}$ die Irrationalzahlen ¹⁾):

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1.0224589, & \mu &= 0.5336884, & \Lambda &= 0.6687517; \\ \varepsilon\mu^2 &= 0.2912201, & \varepsilon\mu &= 0.5456744, & \varepsilon\mu^{\frac{2}{3}} &= 0.6727252, \end{aligned}$$

womit der Beweis der nachstehenden Sätze abgeschlossen erscheint.

Für Stämme, deren Oberflächen sich durch eine der Gleichungen (44), (45), (46) analytisch charakterisiren lassen, existirt keine gemeinsame Cubirungsformel, welche zur Berechnung des jeweiligen Gesamtvolumens nur die Kenntniss einer einzigen Querfläche erfordern würde. Dasselbe gilt von den unter die Relationen (42), (44) und (46) subsumirbaren Stammformen, so dass es unter Anderem auch unmöglich ist, für das Rotationsparaboloid, den Kreiskegel und das Neiloid eine gemeinsame Cubirungsformel von der eben angedeuteten Beschaffenheit aufzustellen. Würde hingegen für dieselben Klassen von Stammformen beispielsweise die Aufgabe gestellt sein, speciell die von $z = 0$ bis $z = \frac{19}{20}l$ gerechneten Stammstücke zu cubiren, so wäre diess mit Hilfe der beiden hier abgeleiteten Specialisirungen von (49) immer möglich, wobei die in die Rechnung eintretende Querfläche Q_ε jedesmal dem an das zu cubirende sich anschliessenden Stammstücke entnommen werden müsste. In derartigen Fällen können dann auch je nach dem Grade der anzustrebenden Genauigkeit an Stelle der wahren Werthe von ε , μ , Λ jene einfacheren, rationalen Brüche substituirt werden, welche sich nach Verwandlung der betreffenden Irrationalzahlen in unendliche Kettenbrüche durch Berechnung ihrer aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche ergeben. So entsprechen z. B. dem letzten, für ε , μ , Λ gefundenen Werthsysteme die Kettenbrüche:

$$\varepsilon = 1 + \frac{1}{44 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9 + \dots}}}}, \quad \mu = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \dots}}}}, \quad \Lambda = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{52 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

respective die Näherungsbrüche: $\frac{1}{1}, \frac{45}{44}, \frac{46}{45}, \frac{91}{89}, \frac{1}{2}, \frac{7}{13}, \frac{8}{15}, \frac{2}{3}, \frac{105}{157}, \frac{107}{160}$,

wonach dieser irrationalen Specialisirung von (49) unendlich viele Näherungsformeln mit rationalen Constanten zugeordnet werden können, welche natürlich eine desto schärfere Ermittlung des jeweiligen Volumens V gestatten, je grössere Nenner die für ε , μ , Λ gewählten Näherungsbrüche besitzen. Die bemerkenswertesten dieser Näherungsformeln sind folgende:

1. Der Ausdruck: $\bar{V} = \frac{2}{3}Q_1\overline{AU'}$, in welchem AU' die Distanz der Endfläche Q_1 des zu cubirenden Stammstückes von jener Querfläche Q_η vorstellt, deren grösster Durchmesser der halben Maximalstärke von Q_1 gleichkommt. — Um den bei einer Vertauschung von V

¹⁾ Die zehnstelligen Werthe von ε , μ und Λ sind folgende:

$\varepsilon = 1.0224589180, \mu = 0.5336883770, \Lambda = 0.6687517061.$

mit \bar{V} noch erreichbaren Genauigkeitsgrad mathematisch streng feststellen zu können, berücksichtige man, dass — unter l hier die Axenlänge des Stammstückes verstanden — das Product: $\frac{2}{3}Q_1\bar{A}\bar{U}' = \frac{2}{3}Q_1(l - r_l) = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{r}}\right\}Q_1l$ für $r = 1, 2, 3$ der Reihe nach mit $\frac{1}{2}Q_1l, \frac{1}{3}Q_1l, \frac{2(\sqrt[3]{4}-1)}{3\sqrt[3]{4}}Q_1l$ coincidirt, während das wahre Volumen V gleichzeitig die Werthe: $V_1 = \frac{1}{2}Q_1l, V_2 = \frac{1}{3}Q_1l, V_3 = \frac{1}{4}Q_1l$ erhält.

Es ergeben sich nämlich hieraus unmittelbar die Beziehungen:

$$V_1 = \bar{V}, V_2 = V, V_3 = \frac{3\sqrt[3]{4}}{8(\sqrt[3]{4}-1)}\bar{V} = \bar{V} + \frac{8-5\sqrt[3]{4}}{8(\sqrt[3]{4}-1)}\bar{V} = \bar{V} + 0.0134054\bar{V},$$

d. h. die durch die Annahme: $\bar{V} = V$ bedingten Fehler verschwinden völlig, sobald $r = 1$ oder 2 ist; für $r = 3$ hingegen betragen sie 1.34054 Procent des gefundenen Resultates.

2. Die Näherungsformel: $\bar{V} = \frac{107}{160}Q_{46}\bar{U}\bar{U}'$, worin ebenfalls zwei, empirisch zu bestimmende Factoren auftreten und zwar: a) die Querfläche Q_{46} , welche von der Spitze des Stammes um $\frac{1}{45}$ der Achsenlänge l des Stammstückes weiter entfernt ist als die Endfläche Q_1 des letzteren; b) der Abstand UU' des Querschnittes Q_{46} von jener Stammquerfläche Q_1 , deren Hauptachse sich zu dem grössten Durchmesser von Q_{46} wie 8 zu 15 verhält. — Da ε hier mit $\frac{46}{45}$, μ mit $\frac{8}{15}$ zusammenfällt, so erlaubt der Quotient: $\frac{V}{\bar{V}}$ gemäss den Gleichungen:

$$Q_{46} = \left(\frac{46}{45}\right)^r Q_1, UU' = \varepsilon l - r_l = \frac{46}{45}\left\{1 - \left(\frac{8}{15}\right)^{\frac{2}{r}}\right\}l \text{ allgemein die Darstellungsweise:}$$

$$\frac{V}{\bar{V}} = \frac{Q_1 l}{r+1} : \frac{107}{160}\left(\frac{46}{45}\right)^{r+1}\left\{1 - \left(\frac{8}{15}\right)^{\frac{2}{r}}\right\}Q_1 l = \frac{160}{107(r+1)}\left(\frac{45}{46}\right)^{r+1}\left\{1 - \left(\frac{8}{15}\right)^{\frac{2}{r}}\right\}^{-1}$$

mittelt welcher Relation sich V_1, V_2, V_3 ohne Schwierigkeit durch \bar{V} ausdrücken lassen. Man gelangt hiebei zu den nachstehenden Ergebnissen:

$$V_1 \text{ und } V_2 = \frac{9112500}{9113083}\bar{V} = \bar{V} - 0.0000640\bar{V},$$

$$V_3 = \frac{307546875}{59885974(15-4\sqrt[3]{15})}\bar{V} = V + 0.0000758\bar{V},$$

so dass die durch Anwendung der zweiten Näherungsformel verursachten Fehler höchstens 0.00758 Procent des jeweiligen Werthes von \bar{V} erreichen können.

Nachdem hiemit die wichtigsten, aus einer gründlichen Discussion von (10) hervorgegangenen Fragen ihre Beantwortung gefunden haben, muss in Kürze noch auf eine Gruppe von Problemen hingewiesen werden, welche namentlich für die theoretische Verwerthung gegebener Stammformzahlen von Bedeutung sind, jedoch in mathematischer Hinsicht theilweise eine sehr complicirte Gestalt besitzen. Anstatt nämlich auf Grundlage von (1) die irgend welchen Substitutionen für $\frac{p}{q}$ und r correspondirenden Specialformen von (11), (19), (31), (47), (48) oder (49) zu eruiren, kann man sich auch umgekehrt die Aufgabe stellen, die einer beliebigen Specialisirung von (11) oder (19), (31) etc. zugehörigen Werthe von $\frac{p}{q}$ und r ausfindig zu machen. Die Erfüllung dieser Forderung fällt bei (11) insoferne leicht, als r

dann mit dem jeweiligen Factor von $Q_1 l$ durch eine lineare Gleichung zusammenhängt¹⁾, und $\frac{p}{q}$ ganz willkürlich bleibt, ist aber sonst jederzeit an die Auflösung transcendenten Relationen zwischen r und Λ geknüpft, von welchen sich nur die für (19) charakteristische Beziehung: $(1 + r) \varepsilon^r = \frac{1}{\Lambda}$ allgemein erledigen lässt²⁾. Die vier übrigen, den Cubirungsformeln (31), (47), (48) und (49) eigenthümlichen Bedingungen: (27), (28), (29) und (30) verlangen je nach der Beschaffenheit der für ε , μ und Λ vorliegenden numerischen Angaben eine verschiedene Behandlung, so dass die Aufstellung umfassender Regeln hier unmöglich erscheint.

Zur Motivirung der letzten Bemerkung mag beispielsweise die Identität:

$$(51) \quad \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{r}} \right\} = \frac{1}{r + 1}$$

untersucht werden, die dem Ausdrucke: $\bar{V} = \frac{2}{3} Q_1 \bar{A} \bar{U}'$ entspricht und darüber Aufschluss ertheilt, für welche, unter $\left(\frac{x}{a} \right)^p + \left(\frac{y}{b} \right)^p = \left(\frac{z}{l} \right)^{\frac{pr}{2}}$ subsumirbaren Stammformen die Annahme: $\frac{2}{3} Q_1 \bar{A} \bar{U}' = V$ vollkommen strenge gilt.

Ersetzt man zunächst in der mit (51) coincidirenden Gleichung: $2^{\frac{2}{r}} = \frac{2(r+1)}{2r-1}$ die Unbekannte r durch den Quotienten: $\frac{1 + 3\sqrt{w}}{1 - \sqrt{w}}$, so resultirt zu Ermittlung von w die einfache Beziehung³⁾: $8^{\sqrt{w}} = \frac{1 + \sqrt{w}}{1 - \sqrt{w}}$ oder: $\sqrt{w} \text{ Log } 8 = \text{Log} \left(\frac{1 + \sqrt{w}}{1 - \sqrt{w}} \right)$, wonach das Product:

$$\sqrt{w} \left\{ (\text{Log } 8 - 2) - 2 \left(\frac{1}{3} w + \frac{1}{5} w^2 + \frac{1}{7} w^3 + \frac{1}{9} w^4 + \frac{1}{11} w^5 + \frac{1}{13} w^6 + \dots \right) \right\}$$

durch passende Wahl von w auf Null zu reduciren ist. Diess geschieht erstens für $w = w_1 = 0$, zweitens für jene Specialisirung von w , w_2 , welche die Relation:

$$w_2 + \frac{3}{5} w_2^2 + \frac{3}{7} w_2^3 + \frac{1}{3} w_2^4 + \frac{3}{11} w_2^5 + \frac{3}{13} w_2^6 + \dots = \frac{3}{2} (\text{Log } 8 - 2) = \omega$$

befriedigt, mithin den Werth⁴⁾:

$$\begin{aligned} w_2 &= \omega - \frac{3}{5} \omega^2 + \frac{51}{175} \omega^3 - \frac{67}{525} \omega^4 + \frac{17751}{336875} \omega^5 - \frac{65531}{3128125} \omega^6 + \dots \\ &= 0.1191623 - 0.0085198 + 0.0004931 - 0.0000257 + 0.0000013 - 0.0000001 + \dots \\ &= 0.1111111 = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

1) Siehe hierüber: „Analytische Untersuchungen etc.“, pag. 348.

2) Ueber die Auflösung dieser mit $(1 + u) \delta^u = \lambda_1^{-1}$ sachlich identischen Gleichung siehe: „Analytische Untersuchungen etc.“, pag. 506, 507, 511, 512 und 513.

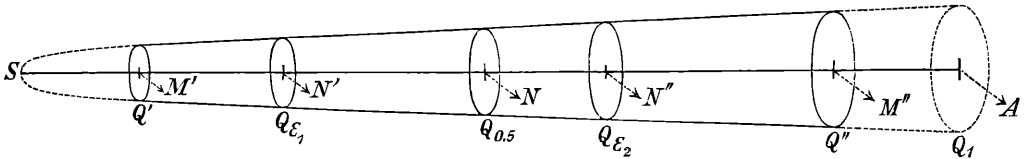
3) Das Symbol: „Log“ bedeutet hier ebenso wie in der Anmerkung 2) Seite 121 den natürlichen Logarithmus der betreffenden Grösse, welche Abweichung von dem gewöhnlichen Usus sich durch den Umstand rechtfertigt, dass der Buchstabe l in der vorliegenden Arbeit bereits anderweitig in Anspruch genommen wurde.

4) Die zur Ableitung dieses Resultates nöthigen algebraischen Entwicklungen finden sich unter Anderem in dem im zweiten Jahrgange der Zeitschrift: „Centralblatt für das gesammte Forstwesen“ veröffentlichten Aufsätze des Verfassers: „Ueber zwei fundamentale Probleme der Zinseszins-Rechnung“, pag. 200 und 201.

besitzt. Da endlich die Grösse: $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ zwei Brüchen: $+\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$ äquivalent ist, so kommen der Identität (51) im Ganzen drei positive Wurzeln: 2, 1 und $+\infty$ zu ¹⁾, von welchen die letzte mit der vorgelegten Frage selbstverständlicher Weise in keinem Zusammenhange steht. Die Formel: $\bar{V} = \frac{2}{3} Q_1 \bar{A}U'$ bleibt also lediglich für Stammformen von den Gleichungen (42) oder (44) absolut richtig, welche Folgerung mit den Ergebnissen früherer Untersuchungen übereinstimmt.

Alle in §. 1 bisher entwickelten Cubirungsregeln beziehen sich auf die Inhaltsberechnung ganzer Stämme und solcher Theile derselben, deren Achsen die Spitze des betreffenden Stammes enthalten, verlieren jedoch ihre Giltigkeit, falls die Achse: $M M'' = h$

Fig. 3.



des zu cubirenden Stammstückes (siehe die schematische Figur 3) durch zwei Stammquerschnitten: Q, Q' begrenzt wird.

Um nun unter Voraussetzung der Beziehung (8) das Volumen V eines derartigen Körpers in Function von r, h und zwei beliebigen, in den Entfernungen: $M' N' = \epsilon_1 h$, $M' N'' = \epsilon_2 h$ von Q' gelegenen Querschnitten: $Q_{\epsilon_1}, Q_{\epsilon_2}$ zu finden, genügt eine entsprechende Transformation der Identität:

$$V = \int_{SM'}^{SM''} Q dz = B_r \int_{SM'}^{SM'+h} z^r dz = \frac{B_r \{ (SM' + h)^{r+1} - (SM')^{r+1} \}}{r + 1}$$

1) Man kann zu diesen Resultaten auch leicht auf geometrischem Wege gelangen, indem man zwei, einander in irgend einem Punkte O senkrecht durchschneidende gerade Linien: XX', YY' zieht und auf Grundlage des hiedurch erhaltenen Coordinatensystems die den Gleichungen:

$$(\alpha) \dots y = \frac{2(x+1)}{2x-1} \quad \text{und:} \quad (\beta) \dots y = 4^{\frac{1}{x}}$$

entsprechenden Curven construirt. — Da (α) durch die Substitutionen: $x = x_1 + \frac{1}{2}, y = y_1 + 1$ in: $x_1 y_1 = \frac{5}{2}$ übergeht, so charakterisirt die erste Relation eine gleichseitige Hyperbel mit der linearen Excentricität: $E = \sqrt{6}$, deren Mittelpunkt O' die Coordinaten: $\xi = \frac{1}{2}, \eta = 1$ besitzt, und deren Asymptoten AA', BB' zu XX' und YY' parallel laufen. Was ferner die durch (β) gekennzeichnete reciproke logarithmische Linie anbelangt, so besteht dieselbe aus zwei, sehr verschieden gestalteten Aesten: Ihr erster, dem Quadranten XOY angehöriger Zweig verläuft in seiner ganzen Ausdehnung convex zu OX und berührt in unendlichen Entfernungen von O einerseits die Ordinatenachse, andererseits die Asymptote AA' ; ihr zweiter, in O entspringender Zweig bleibt bis zu seinem, durch die Coordinaten: $\xi_1 = -\text{Log } 2 = -0.6931472, \eta_1 = 4^{-\frac{1}{\text{Log } 2}} = \frac{1}{e^2} = 0.1353353$ bestimmten Inflexionspunkte I convex, von I an concav gegen OX' und erhebt sich gleichzeitig langsam immer höher und höher über die Abscissenachse, um für $x = -\infty$ ebenfalls die Gerade AA' zu erreichen. Mit Hilfe dieser wohl keiner erläuternden Figur bedürftigen Daten findet man schliesslich, dass sich die beiden Curven in zwei Punkten: M_1, M_2 mit den Coordinaten: $x_1 = 1, y_1 = 4; x_2 = 2, y_2 = 2$ durchschneiden und für $x = x_3 = +\infty$, respective $x = x_4 = -\infty$ gemeinsame Tangenten besitzen. Die Identität (51) hat also in der That nur drei positive Wurzeln: $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = +\infty$ und ausserdem noch eine negative: $r_4 = -\infty$.

aus welcher die auf S bezügliche Distanz: $SM' = u$ und die von l abhängige Constante B_r mit Hilfe der Gleichungen:

$$Q_{\varepsilon_1} = B_r (SN')^r = B_r (u + \varepsilon_1 h)^r, \quad Q_{\varepsilon_2} = B_r (SN'')^r = B_r (u + \varepsilon_2 h)^r$$

leicht zu eliminiren sind. Die letzteren liefern nämlich nach Einführung der Abkürzungen:

$\left(\frac{Q_{\varepsilon_1}}{Q_{\varepsilon_2}}\right)^{\frac{1}{r}} = \sigma$, $1 - \varepsilon_1 = \zeta_1$, $1 - \varepsilon_2 = \zeta_2$ hinsichtlich der Grössen: u , $u + h$ und B_r successive die Resultate:

$$u = \left(\frac{\varepsilon_2 \sigma - \varepsilon_1}{1 - \sigma}\right) h, \quad u + h = \left(\frac{\zeta_1 - \zeta_2 \sigma}{1 - \sigma}\right) h, \quad B_r = \left(\frac{1 - \sigma}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}\right)^r \frac{Q_{\varepsilon_2}}{h^r},$$

deren Substitution in den für V aufgestellten Ausdruck die endgiltige Formel:

$$(52) \dots V = \frac{1}{r+1} \left\{ \frac{(\zeta_1 - \zeta_2 \sigma)^{r+1} - (\varepsilon_2 \sigma - \varepsilon_1)^{r+1}}{(1 - \sigma) (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^r} \right\} Q_{\varepsilon_2} h$$

bedingt. Dieselbe vereinfacht sich bedeutend, wenn man Q_{ε_1} mit Q' , Q_{ε_2} mit Q'' identificirt, indem (52) für $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$; $\zeta_1 = 1$, $\zeta_2 = 0$ in:

$$(53) \dots V = \frac{1}{r+1} \left(\frac{1 - \sigma^{r+1}}{1 - \sigma} \right) Q'' h$$

übergeht. Hieraus folgt nach Ausführung der Division von $1 - \sigma^{r+1} = 1 - \left(\frac{Q'}{Q''}\right)^{\frac{r+1}{r}}$ durch $1 - \sigma = 1 - \left(\frac{Q'}{Q''}\right)^{\frac{1}{r}}$ schliesslich die merkwürdige Beziehung:

$$(54) \dots V = \frac{1}{r+1} (1 + \sigma + \sigma^2 + \sigma^3 + \dots + \sigma^{r-1} + \sigma^r) Q'' h = \\ = \frac{h}{r+1} \left\{ Q'' + (Q')^{\frac{1}{r}} (Q'')^{\frac{r-1}{r}} + (Q')^{\frac{2}{r}} (Q'')^{\frac{r-2}{r}} + (Q')^{\frac{3}{r}} (Q'')^{\frac{r-3}{r}} + \dots + (Q')^{\frac{r-1}{r}} (Q'')^{\frac{1}{r}} + Q' \right\},$$

respective für $r = 1, 2, 3$ das Gleichungssystem¹⁾:

$$V = \frac{h}{2} (Q'' + Q'), \quad V = \frac{h}{3} (Q'' + V \overline{Q'Q''} + Q'), \quad V = \frac{h}{4} (Q'' + \sqrt[3]{Q'Q''^2} + \sqrt[3]{Q'^2Q''} + Q'),$$

welches unter Anderem auch zur Cubirung gegebener Sectionen von Rotationsparaboloiden, Kreiskegeln und Neiloiden verwerthet werden kann, vorausgesetzt, dass die Endflächen jedes derartigen Stumpfes auf der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte senkrecht stehen.

Ausserdem lehrt ein Vergleich von (52) und (53) mit (10) und (11), dass die Inhaltsberechnung von Stammstücken für $Q' > 0$ gemeiniglich bedeutend mehr Zeit erfordert als für $Q' = 0$, insbesondere wenn der Exponent r nicht bereits für unentwipfelte Stämme derselben Form festgestellt worden ist. In diesem Falle beansprucht die Bestimmung von r mindestens die Kenntniss dreier Querflächen und gestaltet sich am einfachsten, sobald man speciell Q' , Q'' und die in der Mitte zwischen Q' und Q'' gelegene Querfläche: $Q_{0.5}$

¹⁾ Man kann diese Gleichungen übrigens noch auf einem wesentlich anderen Wege ableiten, wie diess aus der im zweiten Jahrgange der Zeitschrift: „Centralblatt für das gesammte Forstwesen“ erschienenen Abhandlung des Verfassers: „Ueber einige allgemeine, für die Holzmesskunde belangreiche Cubirungsformeln“, pag. 560–562 zu entnehmen ist.

empirisch ermittelt hat. Eliminirt man nämlich aus den für Q' , $Q_{0.5}$ und Q'' geltenden Ausdrücken: $Q' = B_r u^r$, $Q_{0.5} = B_r \left(u + \frac{h}{2}\right)^r$, $Q'' = B_r (u + h)^r$ die Grössen B_r , u und h , so ergibt sich die Beziehung:

$$(55) . \quad 2 \left(\frac{Q_{0.5}}{Q''}\right)^{\frac{1}{r}} - \left(\frac{Q'}{Q''}\right)^{\frac{1}{r}} = 1,$$

respective für $\left(\frac{Q_{0.5}}{Q''}\right)^{\frac{1}{r}} = w$ die Gleichung: $w = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} w^{\mu+1}$, in welcher μ den Quotienten: $\frac{\log Q_{0.5} - \log Q'}{\log Q'' - \log Q_{0.5}}$ vorstellt. Dieselbe liefert nach Anwendung des Reversionstheorems von Lagrange für den Briggs'schen Logarithmus von $\frac{1}{w}$ die unendliche Reihe ¹⁾:

$$(56) \dots \log \left(\frac{1}{w}\right) = 0.3010300 - \frac{0.4342945}{2^{\mu+1}} \left\{ 1 + \frac{2\mu + 1}{2! 2^{\mu+1}} + \frac{(3\mu + 2)(3\mu + 1)}{3! 2^{2\mu+2}} + \right. \\ \left. + \frac{(4\mu + 3)(4\mu + 2)(4\mu + 1)}{4! 2^{3\mu+3}} + \dots + \frac{([k + 1]\mu + k)([k + 1]\mu + k - 1) \dots ([k + 1]\mu + 1)}{(k + 1)! 2^{k\mu+k}} + \dots \right\}$$

mit der Convergenzbedingung: $\frac{1}{2} < \frac{\mu^{\mu+1}}{\mu + 1}$, welche, da $\frac{d}{d\mu} \left\{ \frac{\mu^{\mu+1}}{\mu + 1} \right\} = \frac{\text{Log } \mu}{(\mu + 1)^3} \mu^{\mu+1}$ für

$1 < \mu < \infty$ positiv bleibt, also $\frac{\mu^{\mu+1}}{\mu + 1}$ bei von 1 bis ∞ wachsendem μ stetig von $\frac{1}{2}$ bis 1

zunimmt, durch jede die Einheit überschreitende Specialisirung von μ befriedigt wird. Nachdem nun der Quotient:

$$\frac{\log Q_{0.5} - \log Q'}{\log Q'' - \log Q_{0.5}} = \frac{\log \left(u + \frac{h}{2}\right) - \log u}{\log (u + h) - \log \left(u + \frac{h}{2}\right)} = \log \left(1 + \frac{h}{2u}\right) : \log \left(1 + \frac{h}{2u + h}\right)$$

in der That stets grösser als 1 ausfällt, lässt sich der jeweilige Werth von $\log \left(\frac{1}{w}\right)$ bei bekanntem Q' , $Q_{0.5}$, Q'' immer mit beliebiger Genauigkeit finden, und auf Grundlage der Relation:

$$(57) \dots r = \frac{\log Q'' - \log Q_{0.5}}{\log \left(\frac{1}{w}\right)}$$

auch r eindeutig bestimmen, weil die beiden anderen reellen Wurzeln der Identität (55): $r_2 = +\infty$, $r_3 = -\infty$ hiebei natürlich nicht in Betracht kommen.

Ehe wir nunmehr zur Cubirung neuer, unter (1) nicht subsumirbarer Stammformen übergehen, ist es zur Orientirung des Lesers noch nöthig, für jene hier abgeleiteten Formeln,

¹⁾ Wollte man w direct bestimmen, so wäre hiezu ausser der Formel:

$$w = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{2^{\mu+1}} + \frac{\mu + 1}{2^{2\mu+2}} + \frac{(3\mu + 2)(\mu + 1)}{2! 2^{3\mu+3}} + \frac{(4\mu + 3)(4\mu + 2)(\mu + 1)}{3! 2^{4\mu+4}} + \dots \right\}$$

insbesonders jenes Verfahren geeignet, welches Gauss in seinen Beiträgen zur Theorie der algebraischen Gleichungen (Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, IV. Bd. 2. Abth. Abhandl. der mathem. Cl. pag. 3—34) speciell zur Berechnung der reellen Wurzeln jeder Relation von der Gestalt: $x^{m+n} - ex^m + f = 0$ entwickelt hat.

welche — allerdings nur unter der beschränkenden Annahme kreisförmiger Querschnitte — bereits früher bekannt geworden sind, die erforderlichen Literaturnachweise zu bringen.

Was zunächst die wichtige Formel (11) anbelangt, so wurde ein derselben äquivalenter Ausdruck schon von Th. Simpson im ersten Theile seines 1750 zu London erschienenen Werkes: „The doctrine and application of fluxions“ entwickelt, indem auf pag. 173 der von $x = 0$ bis $x = x$ gerechnete Inhalt s eines Conoides bestimmt wird, dessen Mantelfläche durch Drehung einer Curve von der Gleichung: $y^m = a^{m-n}x^n$ um die Abscissenachse des gewählten Coordinatensystems entsteht. Dort heisst es nämlich ¹⁾:

„Then, from the Equation $a^{m-n}x^n = y^m$, of the generating Curve, we get $y = a^{\frac{m-n}{m}} \times x^{\frac{n}{m}}$, and $\dot{s} (= py^2\dot{x}) = pa^{\frac{2m-2n}{m}} \times \dot{x}x^{\frac{2n}{m}}$; and therefore $s = pa^{\frac{2m-2n}{m}} \times \frac{x^{\frac{2n}{m}+1}}{\frac{2n}{m}+1} = pa^{\frac{2m-2n}{m}} \times \frac{mx^{\frac{2n}{m}+1}}{2n+m}$
 $= pa^{\frac{2m-2n}{m}} \times x^{\frac{2n}{m}} \times \frac{mx}{2n+m} = py^2 \times \frac{mx}{2n+m} =$ the Content of the Solid; which

therefore is to (py^2x) the Content of the circumscribing Cylinder, as m to $2n+m$. Der zuletzt ausgesprochene Satz wurde dann später noch wiederholt auf ganz analogem Wege, jedoch in anderer Fassung bewiesen, so beispielsweise im zweiten Bande von A. L. Cauchy's ²⁾: „Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie“, pag. 103, 104 und in L. Smalian's „Beitrag zur Holzmesskunst“, pag. 23, 24.

Die Formel (16) wurde speciell für $r = 1, 2, 3$ zuerst von M. Kunze aufgestellt, welcher auf Grundlage der hiebei gewonnenen Ausdrücke das Verhalten der echten und unechten Formzahlen des Kreiskegels, Rotationsparaboloides und Neiloides bei variirender Achsenlänge l untersuchte, ³⁾ während die Relationen (17) und (18) bereits von H. Riniker allgemein für $r = \frac{2}{m}$ (m eine beliebige positive Zahl) angegeben worden sind, um die eigenthümlichen Schwierigkeiten einer Bestimmung von m aus λ'_1 oder λ''_1 darzuthun. ⁴⁾

Die Gleichungen (19), (31), (47), (48), (49) und deren hier betrachtete Specialisirungen sind mit Ausnahme der Formeln: $V = \frac{3}{4} Q_2 l$, $\bar{V} = \frac{2}{3} Q_1 \overline{AU}$ bisher unbekannt geblieben. Die erstere rührt, wie schon anderen Orts hervorgehoben wurde, ⁵⁾ von W. Hossfeld her, die letztere hat R. Pressler zuerst im eilften Bande des „Tharander forstlichen Jahrbuches“ in Nr. 2 seiner „Beiträge zur Forstmathematik“, pag. 77—90 entwickelt und auf dieselbe seine „Richtpunktslehre“ gegründet. ⁶⁾ Ausserdem veranlasste das Bestreben, die Giltigkeitsgrenzen

¹⁾ In dem Citate bedeutet p nach einer von Simpson auf pag. 172 gemachten Bemerkung den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius 1, während \dot{s} und \dot{x} gemäss der damals üblichen Symbolik mit den Differentialien ds und dx identisch sind.

²⁾ Diese Vorlesungen erschienen in Paris in dem Zeitraume von 1826—1828 und wurden ausserdem 1840 von C. H. Schnuse in deutscher Sprache veröffentlicht.

³⁾ Siehe hierüber dessen Lehrbuch der Holzmesskunst, zweite Ausgabe, pag. 114—117 und pag. 121, 122.

⁴⁾ Siehe hierüber dessen 1873 in Aarau erschienene Abhandlung: „Ueber Baumform und Bestandesmasse“, pag. 6—8.

⁵⁾ Siehe hierüber die Abhandlung des Verfassers: „Ueber einige allgemeine, für die Holzmesskunde belangreiche Cubirungsformeln“, pag. 622, Anm. 15, 16 und pag. 562, Anm. 7.

⁶⁾ Siehe hierüber z. B. das bekannte Werk Pressler's: „Das Gesetz der Stammbildung und dessen forstwirtschaftliche Bedeutung insbesondere für den Waldbau höchsten Reinertrags“, pag. 93—104 oder seine im dritten Jahrgange des „Centralblattes für das gesammte Forstwesen“ veröffentlichte Abhandlung: „Zur Baum- und Waldmassenschätzung, mit Bezug auf die Standpunkte der Herren Baur, Borggreve, Ganghofer u. A.“, pag. 616—625.

der Pressler'schen Cubirungsregel endgiltig festzustellen, nachträglich M. Kunze zur Ableitung und Discussion der Identität (51), wobei sich jedoch infolge einer unzuweckmässigen Transformation derselben in: $2^{\frac{2}{r}} \cdot r - 2^{\frac{2}{r}-1} - r - 1 = 0$ nur ihre beiden endlichen reellen Wurzeln: $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ ergaben.¹⁾

Schliesslich muss hier noch ein mit der Chiffre: „Thln“ gezeichneter Aufsatz²⁾ „Ueber die Bestimmung des Inhaltes der runden Hölzer“ erwähnt werden, dessen Verfasser unter der Annahme: $y = ax^m$ nicht nur einen mit (53) sachlich zusammenfallenden Ausdruck beweist, sondern auch die der Gleichung (55) völlig gleichwerthige Beziehung: $\delta^{\frac{1}{m}} = \frac{D^{\frac{1}{m}} + d^{\frac{1}{m}}}{2}$ zur Ermittlung von m gewinnt, in welcher d , δ und D die Durchmesser der Querflächen Q' , $Q_{0.5}$ und Q'' vorstellen. Nur die hieraus für $\frac{1}{m} = n$ abgeleitete Näherungsformel: $n = \frac{\log 2}{\log D - \log \delta}$ erscheint insoferne unzulässig, als die der erwähnten Beziehung entspringende Gleichung:

$$n (\log D - \log \delta) + \log \left\{ 1 + \left(\frac{d}{D} \right)^n \right\} = \log 2$$

auch nicht approximativ mit: $n (\log D - \log \delta) = \log 2$ identificirt werden kann. Denn da die Voraussetzungen des Verfassers die Proportionalität jeder Stammquerfläche mit der $2m$ -ten Potenz ihres Abstandes von der Stammspitze bedingen, gelten für die Grössen $\left(\frac{D}{\delta} \right)^n$ und $\left(\frac{d}{D} \right)^n$ in diesem Falle die Relationen:

$$\left(\frac{D}{\delta} \right)^n = \left(\frac{D^2}{\delta^2} \right)^{\frac{1}{2m}} = \left(\frac{Q''}{Q_{0.5}} \right)^{\frac{1}{2m}} = 1 + \frac{h}{2u + h}, \quad \left(\frac{d}{D} \right)^n = \left(\frac{d^2}{D^2} \right)^{\frac{1}{2m}} = \left(\frac{Q'}{Q''} \right)^{\frac{1}{2m}} = \frac{u}{u + h},$$

wonach die Differenz:

$$\left(\frac{D}{\delta} \right)^n - \left\{ 1 + \left(\frac{d}{D} \right)^n \right\} = \frac{h}{2u + h} - \frac{u}{u + h} = \frac{h^2 - 2u^2}{(u + h)(2u + h)}$$

für $h < u\sqrt{2}$ offenbar negativ ist, also die Vernachlässigung von $\log \left\{ 1 + \left(\frac{d}{D} \right)^n \right\}$ gegen $n (\log D - \log \delta)$ einen Widerspruch involviren würde.

§. 2.

Der zweite Hauptfall des Problems der Stammeubirung erfordert zu seiner Erledigung die Ableitung umfassender Regeln für die Inhaltsberechnung aller Stämme, deren Mantelflächen sich — wenigstens näherungsweise — durch eine Gleichung von der Form (2) characterisiren lassen, und bedingt daher zunächst die Frage, mittelst welcher empirischer Daten man sich darüber Gewissheit verschaffen kann, ob eine gegebene Stammform unter (2) subsumirbar ist oder nicht. Da im ersteren Falle für die im Abstände z von der Spitze des betreffenden Stammes gelegene Querfläche Q allgemein die Relation:

¹⁾ Siehe hierüber den in Dr. W. Pfeil's „Kritischen Blättern“, 46. Band, 2. Heft erschienenen Aufsatz Kunze's: „Ueber die Anwendbarkeit der Richthöhenmethode“, pag. 183—187.

²⁾ Derselbe findet sich im fünften Jahrgange von St. Behlen's „Allgemeiner Forst- und Jagd-Zeitung“, pag. 489—491.

$$(58) \dots Q = \left\{ \frac{abc l^s \varphi(p, q)}{(c\delta^r + \delta^s) l^{r+s}} \right\} z^r + \left\{ \frac{abl^r \varphi(p, q)}{(c\delta^r + \delta^s) l^{r+s}} \right\} z^s = B_r z^r + B_s z^s$$

gilt, so lässt sich die erwähnte Frage offenbar durch die einfachere ersetzen, unter welchen Bedingungen die aufeinanderfolgenden Stammquerflächen wirklich einer Beziehung von der Gestalt (58) genügen.

Um nun dieselben in einer zur numerischen Berechnung möglichst geeigneten Form zu erhalten, bestimme man im Ganzen fünf Stammquerflächen: Q, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 , deren z — Koordinaten: l, l_1, l_2, l_3, l_4 jedoch derart gewählt werden müssen, dass — unter ε hier irgend einen, zwischen 1 und $\sqrt[4]{\frac{l}{l'}}$, gelegenen unechten Bruch verstanden — $l_1 = \varepsilon l, l_2 = \varepsilon l_1 = \varepsilon^2 l, l_3 = \varepsilon l_2 = \varepsilon^3 l, l_4 = \varepsilon l_3 = \varepsilon^4 l$ wird. Ausserdem hat man bei der Feststellung von l und ε jedesmal darauf zu achten, dass die den Distanzen l, l_1 , etc. zugehörigen Querflächen Q, Q_1 , etc. eine möglichst bequeme und genaue Inhaltsbestimmung gestatten und nicht zu nahe aufeinander folgen, wonach unter Anderem die Specialisirungen:

$$l = \frac{1}{4} l, \varepsilon = \frac{4}{3}, \text{ d. h.: } l_1 = 0.3333333l, l_2 = 0.4444444l, l_3 = 0.5925926l, l_4 = 0.7901235l;$$

$$l = \frac{1}{3} l, \varepsilon = \frac{5}{4}, \text{ d. h.: } l_1 = 0.4166667l, l_2 = 0.5208333l, l_3 = 0.6510417l, l_4 = 0.8138021l$$

eine bedeutende praktische Brauchbarkeit besitzen dürften. Sobald einmal auf Grundlage dieser Andeutungen $Q, \dots Q_4$ empirisch ermittelt sind, lassen sich natürlich auch die Verhältnisszahlen: $\frac{Q_1}{Q} = \gamma_1, \frac{Q_2}{Q} = \gamma_2, \frac{Q_3}{Q} = \gamma_3, \frac{Q_4}{Q} = \gamma_4$ leicht finden, und mit Hilfe der letzteren die gewünschten Bedingungen, wie folgt, mathematisch präcisiren: Vorerst ist klar, dass Q, Q_1 , etc., weil die in (58) auftretenden Factoren B_r und B_s von z völlig unabhängig erscheinen, die Relationen:

$$Q = B_r l^r + B_s l^s = L_r + L_s, \quad Q_1 = B_r \varepsilon^r l^r + B_s \varepsilon^s l^s = L_r \varepsilon^r + L_s \varepsilon^s, \\ Q_2 = L_r \varepsilon^{2r} + L_s \varepsilon^{2s}, \quad Q_3 = L_r \varepsilon^{3r} + L_s \varepsilon^{3s}, \quad Q_4 = L_r \varepsilon^{4r} + L_s \varepsilon^{4s}$$

zu erfüllen haben, deren Combination mit den drei identischen Gleichungen:

$$(L_r \varepsilon^r + L_s \varepsilon^s) (\varepsilon^r + \varepsilon^s) - (L_r + L_s) \varepsilon^{r+s} = L_r \varepsilon^{2r} + L_s \varepsilon^{2s}, \\ (L_r \varepsilon^{2r} + L_s \varepsilon^{2s}) (\varepsilon^r + \varepsilon^s) - (L_r \varepsilon^r + L_s \varepsilon^s) \varepsilon^{r+s} = L_r \varepsilon^{3r} + L_s \varepsilon^{3s}, \\ (L_r \varepsilon^{3r} + L_s \varepsilon^{3s}) (\varepsilon^r + \varepsilon^s) - (L_r \varepsilon^{2r} + L_s \varepsilon^{2s}) \varepsilon^{r+s} = L_r \varepsilon^{4r} + L_s \varepsilon^{4s}$$

für die Grössen: $\varepsilon^r + \varepsilon^s = w_1, \varepsilon^{r+s} = w_2$ unmittelbar die coexistirenden Beziehungen:

$$Q_1 w_1 - Q w_2 = Q_2, \quad Q_2 w_1 - Q_1 w_2 = Q_3, \quad Q_3 w_1 - Q_2 w_2 = Q_4, \\ \text{respective:}$$

$$(59) \dots \gamma_1 w_1 - w_2 = \gamma_2, \quad (60) \quad \gamma_2 w_1 - \gamma_1 w_2 = \gamma_3, \quad (61) \dots \gamma_3 w_1 - \gamma_2 w_2 = \gamma_4$$

liefert. Dieselben sind aber nur dann widerspruchsfrei, wenn die für w_1 und w_2 aus (59) und (60) hervorgehenden Ausdrücke:

$$(62) \quad w_1 = \frac{\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_3}{\gamma_1^2 - \gamma_2}, \quad (63) \quad w_2 = \frac{\gamma_2^2 - \gamma_1 \gamma_3}{\gamma_1^2 - \gamma_2}$$

auch die Differenz: $\gamma_3 w_1 - \gamma_2 w_2 - \gamma_4$ auf Null reduciren, d. h. wenn $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ mit einander durch die Gleichung:

$$(64) \quad \gamma_2 (\gamma_2^2 - \gamma_1 \gamma_3) - \gamma_3 (\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_3) + \gamma_4 (\gamma_1^2 - \gamma_2) = 0$$

zusammenhängen. Hiezu tritt in Hinblick auf die aus $\varepsilon^r + \varepsilon^s = w_1, \varepsilon^{r+s} = w_2$ entspringenden Formeln:

$$(65) \dots r = \frac{\log \left\{ \frac{w_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{w_1}{2}\right)^2 - w_2} \right\}}{\log \varepsilon}, \quad (66) \dots s = \frac{\log \left\{ \frac{w_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{w_1}{2}\right)^2 - w_2} \right\}}{\log \varepsilon}$$

schliesslich noch die Forderung, dass die Grössen: w_1 , w_2 und $w_1^2 - 4w_2$ immer positiv bleiben müssen, indem negative oder complexe Werthe der Exponenten r , s mit (58) unvereinbar wären.

Nachdem hiemit die analytischen Kriterien für die Anwendbarkeit von (58) und demzufolge auch von (2) auf gegebene Stammformen vollständig entwickelt worden sind, mag den weiteren Betrachtungen unmittelbar die Relation (58) zu Grunde gelegt, und bei der Ableitung der auf (2) bezüglichen Cubirungsformeln r , s stets als bekannt angesehen werden, zumal die empirische Bestimmbarkeit dieser für (2) charakteristischen Constanten ¹⁾ aus \varkappa_1 , \varkappa_2 , \varkappa_3 , \varkappa_4 durch die Ergebnisse (65) und (66) allgemein bewiesen erscheint. Unter solchen Voraussetzungen enthält die für das Gesamtvolumen V des betreffenden Stammes bestehende Gleichung:

$$V = \int_0^l Q dz = \int_0^l (B_r z^r + B_s z^s) dz = \frac{B_r l^{r+1}}{r+1} + \frac{B_s l^{s+1}}{s+1}$$

nur in B_r , B_s vorläufig unbestimmte Factoren, welche übrigens in jedem gegebenen Falle durch zwei beliebige, beispielsweise in den Abständen $\varepsilon_1 l$, $\varepsilon_2 l$ von der Stammspitze gelegene Querflächen: Q_{ε_1} , Q_{ε_2} ausgedrückt werden können. Da nämlich zwischen B_r , B_s und Q_{ε_1} , Q_{ε_2} gemäss (58) die Beziehungen: $Q_{\varepsilon_1} = B_r \varepsilon_1^r l^r + B_s \varepsilon_1^s l^s$, $Q_{\varepsilon_2} = B_r \varepsilon_2^r l^r + B_s \varepsilon_2^s l^s$ stattfinden, so lassen sich $B_r l^r$ und $B_s l^s$ in V durch die Quotienten:

$$B_r l^r = \frac{\varepsilon_2^s Q_{\varepsilon_1} - \varepsilon_1^s Q_{\varepsilon_2}}{\varepsilon_1^r \varepsilon_2^s - \varepsilon_2^r \varepsilon_1^s}, \quad B_s l^s = \frac{\varepsilon_1^r Q_{\varepsilon_2} - \varepsilon_2^r Q_{\varepsilon_1}}{\varepsilon_1^r \varepsilon_2^s - \varepsilon_2^r \varepsilon_1^s}$$

wiedergeben, wodurch die zuvor für V aufgestellte Fundamentalformel nunmehr in:

$$V = \frac{l}{\varepsilon_1^r \varepsilon_2^s - \varepsilon_2^r \varepsilon_1^s} \left\{ \left(\frac{\varepsilon_2^s}{r+1} - \frac{\varepsilon_2^r}{s+1} \right) Q_{\varepsilon_1} + \left(\frac{\varepsilon_1^r}{s+1} - \frac{\varepsilon_1^s}{r+1} \right) Q_{\varepsilon_2} \right\}$$

übergeht, respective nach Einführung der Abkürzungen: $(r+1) \varepsilon_1^r = r'$, $(r+1) \varepsilon_2^r = r''$; $(s+1) \varepsilon_1^s = s'$, $(s+1) \varepsilon_2^s = s''$ auch die Darstellungsweise:

$$(67) \dots V = \frac{l}{r's'' - r''s'} \{ (s'' - r'') Q_{\varepsilon_1} + (r' - s') Q_{\varepsilon_2} \} = l \{ \Lambda_1 Q_{\varepsilon_1} + \Lambda_2 Q_{\varepsilon_2} \}$$

gestattet. Verfügt man mithin über die arbiträre Grösse ε_1 derart, dass $r' = s'$, d. h. $\varepsilon_1 = \left\{ \frac{r+1}{s+1} \right\}^{\frac{1}{s-r}}$ wird, so fällt das Product: $(r' - s') Q_{\varepsilon_2}$ weg, der Nenner von l verwandelt sich in $r' (s'' - r'')$, und an die Stelle von (67) tritt die einfache Relation:

$$(68) \dots V = \frac{Q_{\varepsilon_1} l}{r'} = \frac{Q_{\varepsilon_1} l}{(r+1) \varepsilon_1^r} = \left\{ \frac{(s+1)^r}{(r+1)^s} \right\}^{\frac{1}{s-r}} Q_{\varepsilon_1} l,$$

welche augenscheinlich dieselbe Gestalt wie (10) und (19) besitzt. Aus (67) und (68) ergeben sich jetzt unter Bezugnahme auf §. 1 ohne Schwierigkeit die nachstehenden Sätze:

¹⁾ Der eigenthümliche Zusammenhang zwischen den Exponenten r , s und der Formzahl λ_1 ist bereits a. O. („Analytische Untersuchungen etc.“, pag. 506) festgestellt worden.

1. Jeder durch (2) definirbaren Stammform kommt eine, ihr speciell eigenthümliche Cubirungsformel zu, welche ausser r , s und l nur noch die Kenntniss einer einzigen Querfläche voraussetzt, aber bezüglich der Position der letzteren jede Willkür ausschliesst, während die Inhaltsberechnung eines durch (1) charakterisirbaren Stammes bei bekanntem r und l auf Grundlage einer beliebigen Querfläche ausgeführt werden kann.

2. Hingegen lässt sich das fragliche Stammvolumen unter Voraussetzung von (2) auf unendlich viele Arten eruiren, falls man statt einer Querfläche deren zwei in die Rechnung einführt, indem die Coëfficienten Λ_1 , Λ_2 in (67) für alle überhaupt denkbaren Positionen von Q_{ε_1} , Q_{ε_2} endlich und eindeutig bleiben. Sind r , s speciell positive, ganze Zahlen, und ε_1 , ε_2 rational, so erhalten Λ_1 , Λ_2 immer rationale Werthe, mithin die betreffenden Specialisirungen von (67) zumeist eine sehr einfache Gestalt, wofür beispielsweise die den Gleichungen:

$$(69) \dots Q = B_1 z + B_2 z^2, \quad (70) \dots Q = B_2 z^2 + B_3 z^3, \quad (71) \dots Q = B_1 z + B_3 z^3$$

zugehörigen Cubirungsformeln:

$$\begin{aligned} V &= \frac{l}{3} \left(5 Q_{\frac{1}{2}} - 4 Q_{\frac{1}{4}} \right) = \frac{l}{2} \left(4 Q_{\frac{1}{2}} - 3 Q_{\frac{1}{3}} \right) = \frac{l}{9} \left(4 Q_{\frac{3}{4}} + 3 Q_{\frac{1}{2}} \right) = \frac{l}{9} \left(5 Q_{\frac{3}{4}} + 3 Q_{\frac{1}{4}} \right) = \\ &= \frac{5l}{216} \left(63 Q_{\frac{4}{5}} - 32 Q_{\frac{9}{10}} \right) = \dots \text{etc., respective} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{8l}{3} \left(Q_{\frac{1}{2}} - 2 Q_{\frac{1}{4}} \right) = \frac{l}{6} \left(20 Q_{\frac{1}{2}} - 27 Q_{\frac{1}{3}} \right) = \frac{l}{24} \left(27 Q_{\frac{2}{3}} - 16 Q_{\frac{1}{2}} \right) = \frac{3l}{16} \left(5 Q_{\frac{2}{3}} - 4 Q_{\frac{1}{3}} \right) = \\ &= \frac{25l}{7776} \left(243 Q_{\frac{4}{5}} - 64 Q_{\frac{9}{10}} \right) = \dots \text{etc., respective} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{l}{3} \left(7 Q_{\frac{1}{2}} - 8 Q_{\frac{1}{4}} \right) = \frac{l}{8} \left(7 Q_{\frac{2}{3}} - 2 Q_{\frac{1}{3}} \right) = \frac{l}{15} \left(8 Q_{\frac{3}{4}} + 3 Q_{\frac{1}{2}} \right) = \frac{l}{12} \left(7 Q_{\frac{3}{4}} + 3 Q_{\frac{1}{4}} \right) = \\ &= \frac{5l}{1224} \left(279 Q_{\frac{4}{5}} - 112 Q_{\frac{9}{10}} \right) = \dots \text{etc.} \end{aligned}$$

einen Beleg liefern mögen.

3. Bestimmt man in dem Producte: $\Lambda Q_{\varepsilon l}$ die Grössen Λ und Q durch die Ausdrücke (22) und (23), so ist das erhaltene Resultat nicht allein für die Gleichungen (24) und (25), sondern auch unter der allgemeineren Annahme verwerthbar, dass sich die Mantelfläche des betreffenden Stammes durch eine Relation von der Form:

$$(72) \dots \left(\frac{x}{a} \right)^p + \left(\frac{y}{b} \right)^q = \left\{ \frac{c l^{r_2} z^{r_1} + l^{r_1} z^{r_2}}{(c \delta^{r_1} + \delta^{r_2}) l^{r_1+r_2}} \right\}^{\frac{pq}{p+q}}$$

analytisch beschreiben lässt, wonach unter Anderem die Cubirungsregel: $V = \frac{3}{4} Q_{\frac{2}{3}} l$ auch für (69), und der Ausdruck: $V = \frac{16}{27} Q_{\frac{3}{4}} l$ analog für (70) seine Giltigkeit behauptet.

Ausserdem führt der Mangel jedes willkürlichen Elementes in (68) zu der Einsicht, dass es unmöglich ist, eine eingliedrige Cubirungsformel gleichzeitig zwei Specialisirungen von (58): $Q = B_{r_1} z^{r_1} + B_{s_1} z^{s_1}$, $Q = B_{r_2} z^{r_2} + B_{s_2} z^{s_2}$ anzupassen, wohl aber wäre diess auf Grundlage eines binomischen Ausdruckes, wie (67), durchführbar, indem dessen vier arbiträre Factoren: ε_1 , ε_2 ; Λ_1 , Λ_2 stets vier von einander unabhängige Bedingungen erfüllen können. — Näher auf das eben angedeutete Problem einzugehen, erscheint hier deshalb über-

flüssig, weil die Vortheile, welche das Rechnen mit eingliedrigen Volumformeln gegenüber jenem nach binomischen Cubirungsregeln bietet, zu bedeutend sind, um einen Uebergang von den ersteren zu den letzteren in praktischer Hinsicht rechtfertigen zu können. Was endlich die Inhaltsberechnung von Stammstücken anbelangt, deren Achsen von zwei Querflächen: Q' , Q'' begrenzt sind, so führen die diessbezüglichen Entwicklungen unter Voraussetzung von (2) auf so complicirte Resultate, dass man am besten thut, die Inhaltsberechnung der betreffenden Stammsectionen ohne jede Bezugnahme auf (2) nach den allgemein anwendbaren Methoden des §. 4 vorzunehmen. Es besteht nämlich für das Volumen eines derartigen Körpers, wenn man die in §. 1 bei dem analogen Probleme gewählte Symbolik beibehält, die Identität:

$$V = \int_u^{u+h} (B_r z^r + B_s z^s) dz = \frac{B_r \{ (u+h)^{r+1} - u^{r+1} \}}{r+1} + \frac{B_s \{ (u+h)^{s+1} - u^{s+1} \}}{s+1},$$

in welcher u , B_r , B_s erst noch durch direct bestimmbare Grössen ausgedrückt werden müssen. Da nun selbst die drei einfachsten, hiezu geeigneten Gleichungen:

$$Q' = B_r u^r + B_s u^s, \quad Q_{0.5} = B_r \left(u + \frac{h}{2} \right)^r + B_s \left(u + \frac{h}{2} \right)^s, \quad Q'' = B_r (u+h)^r + B_s (u+h)^s$$

zur Ermittlung der ersten fraglichen Unbekannten u die einer weiteren Reduction unfähige Beziehung:

$$Q' \left\{ \left(u + \frac{1}{2} h \right)^r \left(u + h \right)^s - \left(u + \frac{1}{2} h \right)^s \left(u + h \right)^r \right\} - Q_{0.5} \left\{ u^r \left(u + h \right)^s - u^s \left(u + h \right)^r \right\} + Q'' \left\{ u^r \left(u + \frac{1}{2} h \right)^s - u^s \left(u + \frac{1}{2} h \right)^r \right\} = 0$$

liefern, so ist eine allgemeine Darstellung von V in Function dreier Querflächen in geschlossener Form unmöglich, und damit die vorhin getroffene Entscheidung hinlänglich motivirt.

§. 3.

Wir wenden uns nunmehr zur Discussion des dritten Hauptfalles, in welchem die Mantelfläche des gegebenen Stammes einer Gleichung von der Gestalt (3) genügt, mithin Q nach Einführung der Abkürzungen:

$$m+1 = n; \quad \frac{a b \varphi(p, q)}{\delta_k (1 + c_1 \delta_k + \dots + c_{n-1} \delta_k^{n-1}) l} = C_1, \dots, \frac{a b c_{n-1} \varphi(p, q)}{\delta_k (1 + c_1 \delta_k + \dots + c_{n-1} \delta_k^{n-1}) l^n} = C_n$$

bekanntlich¹⁾ durch den Ausdruck:

$$(73) \dots Q = C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \dots + C_n z^n$$

bestimmt erscheint. Verlegt man hiebei den Ursprung des gewählten Coordinatensystems ohne Aenderung der Richtungen der Coordinatenachsen von der Stammspitze in den Mittelpunkt einer beliebigen Stammquerfläche, z. B. in jenen von Q' , so resultirt für Q nach Vertauschung von z mit $SM' + z = u + z$ (siehe die schematische Fig. 3) wieder ein in Bezug auf z rationales, ganzes Polynom n -ten Grades, welches jedoch für $z = 0$ nicht verschwindet,

¹⁾ Vergl.: „Analytische Untersuchungen etc.“, pag. 555, 556.

sondern den Werth: $C_1u + C_2u^2 + C_3u^3 + \dots + C_nu^n = Q' = B_0$ annimmt und sich von (73) ausserdem dadurch unterscheidet, dass auch die Coëfficienten von $z, z^2, z^3, \dots z^{n-1}$ infolge dieser Transformation andere geworden sind. Wenn demnach der Erledigung des dritten Falles statt der Beziehung (73) die allgemeinere, mit $n + 1$ völlig unbestimmten, möglicherweise zum Theile verschwindenden Constanten: $B_0, B_1, B_2, B_3, \dots B_n$ versehene Relation:

$$(74) \dots Q = B_0 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 + \dots + B_nz^n$$

zu Grunde gelegt wird, und sämmtliche auf (74) basirte Cubirungsregeln derart formulirt werden, dass sie eine Inhaltsbestimmung der betreffenden Stämme unabhängig von den jeweiligen Werthen der Factoren $B_0, B_1, B_2, \dots B_n$ gestatten, so erspart man hiedurch die Aufstellung besonderer Regeln für die Cubirung irgend welcher, von zwei Querflächen begrenzter Stammstücke.

Gemäss diesen Ueberlegungen besteht die hier zu lösende Aufgabe¹⁾ darin, die aus (74) entspringende Fundamentalformel:²⁾

$$(75) \dots V = \int Qdz = B_0l + \frac{1}{2} B_1l^2 + \frac{1}{3} B_2l^3 + \frac{1}{4} B_3l^4 + \dots + \frac{1}{n+1} B_nl^{n+1}$$

durch Einführung gewisser, in den Abständen: $\varepsilon_1l, \varepsilon_2l, \varepsilon_3l, \dots \varepsilon_sl$ vom Ursprunge des Coordinatensystems gelegenen Querflächen: $Q_{\varepsilon_1}, Q_{\varepsilon_2}, Q_{\varepsilon_3}, \dots Q_{\varepsilon_s}$ in einen Ausdruck von der Gestalt:

$$(76) \dots V = l \{ \Lambda_1 Q_{\varepsilon_1} + \Lambda_2 Q_{\varepsilon_2} + \Lambda_3 Q_{\varepsilon_3} + \dots + \Lambda_s Q_{\varepsilon_s} \}$$

umzuformen und die hiebei für $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots \varepsilon_s; \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots \Lambda_s$ sich ergebenden Bedingungsgleichungen für alle wichtigen Specialisirungen von (74) vollständig aufzulösen. — Der analytische Zusammenhang zwischen (75) und (76) ist mit Hilfe der jederzeit giltigen Relationen:

$$\begin{aligned} Q_{\varepsilon_1} &= B_0 + \varepsilon_1 B_1 l + \varepsilon_1^2 B_2 l^2 + \varepsilon_1^3 B_3 l^3 + \dots + \varepsilon_1^n B_n l^n, \\ Q_{\varepsilon_2} &= B_0 + \varepsilon_2 B_1 l + \varepsilon_2^2 B_2 l^2 + \varepsilon_2^3 B_3 l^3 + \dots + \varepsilon_2^n B_n l^n, \\ Q_{\varepsilon_s} &= B_0 + \varepsilon_s B_1 l + \varepsilon_s^2 B_2 l^2 + \varepsilon_s^3 B_3 l^3 + \dots + \varepsilon_s^n B_n l^n \end{aligned}$$

leicht näher zu präcisiren. Substituirt man nämlich dieselben in (76), so liefert die Forderung, dass das erhaltene Resultat:

$$\begin{aligned} V &= (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \dots + \Lambda_s) B_0 l + (\varepsilon_1 \Lambda_1 + \varepsilon_2 \Lambda_2 + \dots + \varepsilon_s \Lambda_s) B_1 l^2 + \\ &+ (\varepsilon_1^2 \Lambda_1 + \varepsilon_2^2 \Lambda_2 + \dots + \varepsilon_s^2 \Lambda_s) B_2 l^3 + \dots + (\varepsilon_1^n \Lambda_1 + \varepsilon_2^n \Lambda_2 + \dots + \varepsilon_s^n \Lambda_s) B_n l^{n+1} \end{aligned}$$

für beliebige Werthe von $B_0, B_1, B_2, B_3, \dots B_n$ mit (75) übereinzustimmen hat, direct die $n + 1$ Beziehungen:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \dots + \Lambda_s &= 1, \quad \varepsilon_1 \Lambda_1 + \varepsilon_2 \Lambda_2 + \varepsilon_3 \Lambda_3 + \dots + \varepsilon_s \Lambda_s = \frac{1}{2}, \\ \varepsilon_1^2 \Lambda_1 + \varepsilon_2^2 \Lambda_2 + \varepsilon_3^2 \Lambda_3 + \dots + \varepsilon_s^2 \Lambda_s &= \frac{1}{3}, \quad \varepsilon_1^3 \Lambda_1 + \varepsilon_2^3 \Lambda_2 + \varepsilon_3^3 \Lambda_3 + \dots + \varepsilon_s^3 \Lambda_s = \frac{1}{4}, \\ \varepsilon_1^n \Lambda_1 + \varepsilon_2^n \Lambda_2 + \varepsilon_3^n \Lambda_3 + \dots + \varepsilon_s^n \Lambda_s &= \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

¹⁾ Die Kriterien für die Anwendbarkeit der wichtigsten Specialisirungen von (3) zur Charakteristik gegebener Stammformen habe ich bereits in der zuvor citirten Arbeit auf pag. 557 und 558 entwickelt.

²⁾ In Folge der Verallgemeinerung von (73) in (74) repräsentirt l jetzt nicht mehr speciell die Gesamtlänge eines gegebenen Stammes, sondern überhaupt die jeweilige Achsenlänge des zu cubirenden Körpers.

oder in kürzerer Schreibweise:

$$(I) \dots \sum_{k=1}^{k=s} \Lambda_k = 1, \sum_{k=1}^{k=s} \epsilon_k \Lambda_k = \frac{1}{2}, \sum_{k=1}^{k=s} \epsilon_k^2 \Lambda_k = \frac{1}{3}, \sum_{k=1}^{k=s} \epsilon_k^3 \Lambda_k = \frac{1}{4}, \dots \sum_{k=1}^{k=s} \epsilon_k^n \Lambda_k = \frac{1}{n+1}.$$

Ihre Zahl reducirt sich nur dann, wenn in (74) einer oder mehrere der Coëfficienten: $B_0, B_1, B_2, \dots B_n$ verschwinden, so zwar, dass allgemein für $B_r = 0$ auch die auf das Glied: $B_r z^r$ bezügliche Bedingung: $\sum_{k=1}^{k=s} \epsilon_k^r \Lambda_k = \frac{1}{r+1}$ entfällt. Für die weitere Verwerthung des Gleichungssystemes (I) sind, da die unter Voraussetzung von (74) ableitbaren Cubirungsformeln zugleich eine möglichst grosse praktische Brauchbarkeit besitzen sollen, lediglich folgende zwei Gesichtspunkte massgebend:

1. Man verfügt über $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots \epsilon_s$ derart, dass sich die den verschiedenen Specialisirungen von (76) zugehörigen Querflächen: $Q_{\epsilon_1}, Q_{\epsilon_2}, Q_{\epsilon_3}, \dots Q_{\epsilon_s}$ hinsichtlich ihrer Lage möglichst rasch feststellen lassen, oder aber:

2. Man wählt die Grössen $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots \epsilon_s$ so, dass die Anzahl der in die betreffenden Cubirungsformeln eintretenden Querflächen und demgemäss auch jene der bei Querflächenbestimmungen unvermeidlichen Beobachtungsfehler thunlichst verringert wird.

Um zunächst dem ersten Gesichtspunkte gerecht zu werden, betrachte man $Q_{\epsilon_1}, Q_{\epsilon_2}, Q_{\epsilon_3}, \dots Q_{\epsilon_s}$ als äquidistant und unterscheide zwei Fälle, je nachdem der Coëfficient des letzten Gliedes in (74): B_n von der Nulle verschieden ausfällt oder verschwindet. Ist erstlich $B_n \geq 0$, so verwandeln sich die Gleichungen (I) unter den Annahmen: $s = n + 1$,

$$\epsilon_1 = 0, \epsilon_2 = \frac{1}{n}, \epsilon_3 = \frac{2}{n}, \epsilon_4 = \frac{3}{n}, \dots \epsilon_s = \epsilon_{n+1} = \frac{n}{n} = 1 \text{ in:}$$

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \dots + \Lambda_{n+1} = 1, \Lambda_2 + 2\Lambda_3 + 3\Lambda_4 + \dots + n\Lambda_{n+1} = \frac{n}{2},$$

$$\Lambda_2 + 2^2\Lambda_3 + 3^2\Lambda_4 + \dots + n^2\Lambda_{n+1} = \frac{n^2}{3}, \dots \Lambda_2 + 2^n\Lambda_3 + 3^n\Lambda_4 + \dots + n^n\Lambda_{n+1} = \frac{n^n}{n+1}$$

und gestatten, wie bereits anderen Orts gezeigt wurde, ¹⁾ stets eine eindeutige Bestimmung von $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots \Lambda_{n+1}$ durch eine Reihe reeller Brüche: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, deren Substitution in (76) allgemein auf eine Relation von der Gestalt:

$$(77) \quad V = l \left\{ \alpha_0 Q_0 + \alpha_1 \frac{Q_1}{n} + \alpha_2 \frac{Q_2}{n} + \dots + \alpha_n Q_1 \right\}$$

führt. Ist zweitens $B_n = 0$, so kommt die letzte Beziehung in (I) überhaupt nicht in Betracht, d. h. man kann jetzt einen der Factoren: $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots \Lambda_{n+1}$ nach Belieben wählen. Hiebei erscheint es, um möglichst brauchbare Resultate zu erzielen, am vortheilhaftesten, Λ_1 der Nulle gleichzusetzen, respective von den n Bedingungen:

$$\Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4 + \dots + \Lambda_{n+1} = 1, \Lambda_2 + 2\Lambda_3 + 3\Lambda_4 + \dots + n\Lambda_{n+1} = \frac{n}{2},$$

$$\Lambda_2 + 2^2\Lambda_3 + 3^2\Lambda_4 + \dots + n^2\Lambda_{n+1} = \frac{n^2}{3}, \dots \Lambda_2 + 2^{n-1}\Lambda_3 + 3^{n-1}\Lambda_4 + \dots + n^{n-1}\Lambda_{n+1} = n^{n-2}$$

auszugehen, welche bekanntlich ²⁾ ebenfalls für jedes positive ganze n durch gewisse rationale

1) Siehe hierüber den Aufsatz des Verfassers: „Ueber einige allgemeine für die Holzmesskunde belangreiche Cubirungsformeln“, pag. 559 und 560.

2) Siehe die zuvor citirte Arbeit, pag. 621 und 622.

Substitutionen: $\Lambda_2 = \beta_1, \Lambda_3 = \beta_2, \Lambda_4 = \beta_3, \dots, \Lambda_{n+1} = \beta_n$ zu befriedigen sind und auf diese Art die Aufstellung von Cubirungsformeln nach dem Schema:

$$(78) \dots V = l \left\{ \beta_1 Q_1 + \beta_2 \underline{Q_2} + \beta_3 \underline{Q_3} + \dots + \beta_n Q_n \right\}$$

ermöglichen. Es erfordert also die Realisirung des ersten Gesichtspunktes keine neue analytische Untersuchung, ja nicht einmal neue Rechnungen, indem für die hier zu berücksichtigenden Specialisirungen von n auch die numerischen Werthe der Coëfficienten α und β bereits ermittelt worden sind.

Wesentlich anders gestaltet sich die Behandlung der Relationen (I), sobald gemäss dem zweiten Gesichtspunkte alle in (I) auftretenden Grössen: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_s; \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots, \Lambda_s$ ursprünglich als unbestimmt angesehen werden. Man hat dann den Variationen der Coëfficienten $B_0, B_1, B_2, B_3, \dots$ von (74) in höherem Maasse als unter der Annahme äquidistanter Querflächen Rechnung zu tragen, weil das Gleichungssystem (I) sowohl für $B_0 = 0$ als auch in jenen Fällen, in welchen die betreffende Specialisirung von (74) entweder nur gerade oder ausschliesslich ungerade Potenzen der Veränderlichen z enthält, eigenthümliche Modificationen erleidet. Dasselbe reducirt sich nämlich unter den Voraussetzungen: $B_0 = 0; B_1, B_3, B_5, B_7, \dots = 0; B_0, B_2, B_4, B_6, \dots = 0$ auf die Identitäten:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=s} \varepsilon_k \Lambda_k &= \frac{1}{2}, \quad \sum_{k=1}^{k=s} \varepsilon_k^2 \Lambda_k = \frac{1}{3}, \quad \sum_{k=1}^{k=s} \varepsilon_k^3 \Lambda_k = \frac{1}{4}, \quad \sum_{k=1}^{k=s} \varepsilon_k^4 \Lambda_k = \frac{1}{5}, \dots \text{ respective} \\ \sum_{k=1}^{k=s} \Lambda_k &= 1, \quad \sum_{k=1}^{k=s} \varepsilon_k^2 \Lambda_k = \frac{1}{3}, \quad \sum_{k=1}^{k=s} \varepsilon_k^4 \Lambda_k = \frac{1}{5}, \quad \sum_{k=1}^{k=s} \varepsilon_k^6 \Lambda_k = \frac{1}{7}, \dots \text{ beziehungsweise} \\ \sum_{k=1}^{k=s} \varepsilon_k \Lambda_k &= \frac{1}{2}, \quad \sum_{k=1}^{k=s} \varepsilon_k^3 \Lambda_k = \frac{1}{4}, \quad \sum_{k=1}^{k=s} \varepsilon_k^5 \Lambda_k = \frac{1}{6}, \quad \sum_{k=1}^{k=s} \varepsilon_k^7 \Lambda_k = \frac{1}{8}, \dots \end{aligned}$$

wonach es hier, da die Factoren ε und Λ natürlich stets eindeutig bestimmbar sein müssen, darauf ankommt, vier Gleichungssysteme von der Gestalt:

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad \sum_{k=1}^{k=r} \Lambda_k &= 1, \quad \sum_{k=1}^{k=r} \varepsilon_k \Lambda_k = \frac{1}{2}, \quad \sum_{k=1}^{k=r} \varepsilon_k^2 \Lambda_k = \frac{1}{3}, \dots \sum_{k=1}^{k=r} \varepsilon_k^{2r-1} \Lambda_k = \frac{1}{2^r}; \\ \text{(III)} \quad \sum_{k=1}^{k=r} \varepsilon_k \Lambda_k &= \frac{1}{2}, \quad \sum_{k=1}^{k=r} \varepsilon_k^2 \Lambda_k = \frac{1}{3}, \quad \sum_{k=1}^{k=r} \varepsilon_k^3 \Lambda_k = \frac{1}{4}, \dots \sum_{k=1}^{k=r} \varepsilon_k^{2r} \Lambda_k = \frac{1}{2r+1} \\ \text{(IV)} \quad \dots \sum_{k=1}^{k=r} \Lambda_k &= 1, \quad \sum_{k=1}^{k=r} \varepsilon_k^2 \Lambda_k = \frac{1}{3}, \quad \sum_{k=1}^{k=r} \varepsilon_k^4 \Lambda_k = \frac{1}{5}, \dots \sum_{k=1}^{k=r} \varepsilon_k^{4r-2} \Lambda_k = \frac{1}{4r-1}; \\ \text{(V)} \quad \dots \sum_{k=1}^{k=r} \varepsilon_k \Lambda_k &= \frac{1}{2}, \quad \sum_{k=1}^{k=r} \varepsilon_k^3 \Lambda_k = \frac{1}{4}, \quad \sum_{k=1}^{k=r} \varepsilon_k^5 \Lambda_k = \frac{1}{6}, \dots \sum_{k=1}^{k=r} \varepsilon_k^{4r-1} \Lambda_k = \frac{1}{4r} \end{aligned}$$

für beliebige positive ganze Werthe von r nach $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_r; \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots, \Lambda_r$ aufzulösen. Setzt man nun allgemein in (III): $\varepsilon_k = t_k, \Lambda_k = \frac{u_k}{t_k}$, in (IV): $\varepsilon_k = \sqrt{t_k}, \Lambda_k = u_k$ und in (V): $\varepsilon_k = \sqrt{t_k}, \Lambda_k = \frac{u_k}{2\sqrt{t_k}}$, so erhalten die für $t_1, t_2, t_3, \dots, t_r; u_1, u_2, u_3, \dots, u_r$ sich ergebenden Reihen von Bedingungen:

$$(VI) \quad \sum_{k=1}^{k=r} u_k = \frac{1}{2}, \quad \sum_{k=1}^{k=r} t_k u_k = \frac{1}{3}, \quad \sum_{k=1}^{k=r} t_k^2 u_k = \frac{1}{4}, \quad \sum_{k=1}^{k=r} t_k^{2r-1} u_k = \frac{1}{2r+1};$$

$$(VII) \dots \sum_{k=1}^{k=r} u_k = 1, \quad \sum_{k=1}^{k=r} t_k u_k = \frac{1}{3}, \quad \sum_{k=1}^{k=r} t_k^2 u_k = \frac{1}{5}, \dots \sum_{k=1}^{k=r} t_k^{2r-1} u_k = \frac{1}{4r-1};$$

$$(VIII) \dots \sum_{k=1}^{k=r} u_k = 1, \quad \sum_{k=1}^{k=r} t_k u_k = \frac{1}{2}, \quad \sum_{k=1}^{k=r} t_k^2 u_k = \frac{1}{3}, \dots \sum_{k=1}^{k=r} t_k^{2r-1} u_k = \frac{1}{2r}$$

insgesammt denselben Bau wie (II), ja die letzte sogar dieselben numerischen Constanten, so dass die zur Erledigung des zweiten Gesichtspunktes nöthigen analytischen Untersuchungen mit der Beantwortung der folgenden Frage ihren Abschluss finden: Ist es möglich, das Gleichungssystem:

$$(IX) \dots \sum_{k=1}^{k=r} u_k = a_0, \quad \sum_{k=1}^{k=r} t_k u_k = a_1, \quad \sum_{k=1}^{k=r} t_k^2 u_k = a_2, \dots \sum_{k=1}^{k=r} t_k^{2r-1} u_k = a_{2r-1}$$

für die Specialisirungen:

$$a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{3}, \quad a_{2r-1} = \frac{1}{2r}; \quad a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{1}{4}, \dots a_{2r-1} = \frac{1}{2r+1};$$

$$a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{1}{5}, \dots a_{2r-1} = \frac{1}{4r-1}$$

durch reelle Werthe von $u_1, u_2, u_3, \dots, u_r$ und positive, zwischen 0 und 1 gelegene Substitutionen für $t_1, t_2, t_3, \dots, t_r$ zu befriedigen oder nicht?

Um hierüber zu entscheiden, wird die Kenntniss gewisser allgemeiner Eigenschaften von (IX) erforderlich, behufs deren Ableitung wir vorerst das einfachste, für $r = 2$ aus (IX) entspringende Bedingungssystem:

$$(X) \dots u_1 + u_2 = a_0, \quad t_1 u_1 + t_2 u_2 = a_1, \quad t_1^2 u_1 + t_2^2 u_2 = a_2, \quad t_1^3 u_1 + t_2^3 u_2 = a_3$$

betrachten. Dasselbe liefert, da zwischen je drei Summen von der Gestalt:

$$t_1^i u_1 + t_2^i u_2, \quad t_1^{i+1} u_1 + t_2^{i+1} u_2, \quad t_1^{i+2} u_1 + t_2^{i+2} u_2$$

stets die Beziehung¹⁾:

$$(t_1^i u_1 + t_2^i u_2) t_1 t_2 - (t_1^{i+1} u_1 + t_2^{i+1} u_2) (t_1 + t_2) + (t_1^{i+2} u_1 + t_2^{i+2} u_2) = 0$$

stattfindet, folglich speciell für $i = 0, u_1 + u_2 = a_0$, etc., respective $i = 1, t_1 u_1 + t_2 u_2 = a_1$, etc. die Gleichungen:

$$a_0 t_1 t_2 - a_1 (t_1 + t_2) + a_2 = 0, \quad \text{respective} \quad a_1 t_1 t_2 - a_2 (t_1 + t_2) + a_3 = 0$$

gelten, für die Grössen: $t_1 + t_2 = T_1, t_1 t_2 = T_2$ sofort die Werthe:

$$(79) \dots T_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1^2 - a_0 a_2}, \quad (80) \dots T_2 = \frac{a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^2 - a_0 a_2},$$

d. h. es coincidiren die Factoren t_1, t_2 in diesem Falle mit den beiden Wurzeln der quadratischen Relation:

¹⁾ Führt man nämlich die angezeigten Multiplicationen aus, so heben sich die Glieder des Resultates für alle denkbaren endlichen Werthe von $t_1, t_2; u_1, u_2$ und i gegenseitig auf.

$$(81) \dots t^2 - T_1 t + T_2 = 0,$$

nach deren Berechnung auch u_1, u_2 mittelst der aus $u_1 + u_2 = a_0, t_1 u_1 + t_2 u_2 = a_1$ ableitbaren Formeln:

$$(82) \dots u_1 = \frac{a_0 t_2 - a_1}{t_2 - t_1}, \quad (83) \dots u_2 = \frac{a_1 - a_0 t_1}{t_2 - t_1}$$

eindeutig in Function von a_0, a_1, a_2, a_3 dargestellt werden können. — Eine analoge Behandlung gestattet das zweite, für $r = 3$ aus (IX) resultirende System von Beziehungen:

$$(XI) \dots \left\{ \begin{array}{l} u_1 + u_2 + u_3 = a_0, \quad t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3 = a_1, \quad t_1^2 u_1 + t_2^2 u_2 + t_3^2 u_3 = a_2, \\ t_1^3 u_1 + t_2^3 u_2 + t_3^3 u_3 = a_3, \quad t_1^4 u_1 + t_2^4 u_2 + t_3^4 u_3 = a_4, \quad t_1^5 u_1 + t_2^5 u_2 + t_3^5 u_3 = a_5, \end{array} \right.$$

wenn wir zu seiner Auflösung die identische Gleichung:

$$(t_1^i u_1 + t_2^i u_2 + t_3^i u_3) t_1 t_2 t_3 - (t_1^{i+1} u_1 + t_2^{i+1} u_2 + t_3^{i+1} u_3) (t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3) + (t_1^{i+2} u_1 + t_2^{i+2} u_2 + t_3^{i+2} u_3) (t_1 + t_2 + t_3) - (t_1^{i+3} u_1 + t_2^{i+3} u_2 + t_3^{i+3} u_3) = 0$$

verwerthen. Setzen wir nämlich in der letzteren i der Reihe nach gleich 0, 1, 2, so ergeben sich mit Rücksicht auf (XI) direct die Relationen:

$$\begin{aligned} a_0 t_1 t_2 t_3 - a_1 (t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3) + a_2 (t_1 + t_2 + t_3) - a_3 &= 0, \\ a_1 t_1 t_2 t_3 - a_2 (t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3) + a_3 (t_1 + t_2 + t_3) - a_4 &= 0, \\ a_2 t_1 t_2 t_3 - a_3 (t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3) + a_4 (t_1 + t_2 + t_3) - a_5 &= 0, \end{aligned}$$

respective zur Ermittlung der Hilfsgrössen: $t_1 + t_2 + t_3 = T_1, t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 = T_2, t_1 t_2 t_3 = T_3$ die Ausdrücke:

$$(84) \dots T_1 = \frac{a_3 (a_2^2 - a_1 a_3) - a_4 (a_1 a_2 - a_0 a_3) + a_5 (a_1^2 - a_0 a_2)}{a_0 (a_3^2 - a_2 a_4) - a_1 (a_2 a_3 - a_1 a_4) + a_2 (a_2^2 - a_1 a_3)},$$

$$(85) \dots T_2 = \frac{a_3 (a_2 a_3 - a_1 a_4) - a_4 (a_2^2 - a_0 a_4) + a_5 (a_1 a_2 - a_0 a_3)}{a_0 (a_3^2 - a_2 a_4) - a_1 (a_2 a_3 - a_1 a_4) + a_2 (a_2^2 - a_1 a_3)},$$

$$(86) \quad T_3 = \frac{a_3 (a_3^2 - a_2 a_4) - a_4 (a_2 a_3 - a_1 a_4) + a_5 (a_2^2 - a_1 a_3)}{a_0 (a_3^2 - a_2 a_4) - a_1 (a_2 a_3 - a_1 a_4) + a_2 (a_2^2 - a_1 a_3)},$$

wonach t_1, t_2, t_3 hier jederzeit die Wurzeln der Resolvente dritten Grades:

$$(87) \dots t^3 - T_1 t^2 + T_2 t - T_3 = 0$$

vorstellen, und u_1, u_2, u_3 gemäss den drei ersten Bedingungen von (XI) durch die Quotienten:

$$(88) \dots u_1 = \frac{a_0 t_2 t_3 - a_1 (t_2 + t_3) + a_2}{(t_2 - t_1) (t_3 - t_1)}, \quad (89) \dots u_2 = - \frac{a_0 t_1 t_3 - a_1 (t_1 + t_3) + a_2}{(t_2 - t_1) (t_3 - t_2)},$$

$$(90) \quad u_3 = \frac{a_0 t_1 t_2 - a_1 (t_1 + t_2) + a_2}{(t_3 - t_1) (t_3 - t_2)}$$

gegeben erscheinen. Die hiemit für (X) und (XI) gewonnenen speciellen Resultate legen nunmehr den Schluss nahe, dass auch das allgemeine Bedingungssystem (IX) die Aufstellung einer einzigen Bestimmungsgleichung für $t_1, t_2, t_3, \dots, t_r$ ermöglicht, deren Coëfficienten eindeutig durch die in (IX) vorkommenden Constanten: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2r-1}$ ausdrückbar sind.

Um diess nachzuweisen, construiren wir das Aggregat:

$$T = T_r \sum_{k=1}^{k=r} t_k^i u_k - T_{r-1} \sum_{k=1}^{k=r} t_k^{i+1} u_k + T_{r-2} \sum_{k=1}^{k=r} t_k^{i+2} u_k - \dots$$

$$+ (-1)^{r-2} T_2 \sum_{k=1}^{k=r} t_k^{i+r-2} u_k + (-1)^{r-1} T_1 \sum_{k=1}^{k=r} t_k^{i+r-1} u_k + (-1)^r \sum_{k=1}^{k=r} t_k^{i+r} u_k,$$

in welchem $T_1, T_2, T_3, \dots, T_r$ den Ausdrücken:

$$T_1 = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_r, \quad T_2 = t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_1 t_4 + \dots + t_{r-1} t_r,$$

$$T_3 = t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_4 + t_1 t_2 t_5 + \dots + t_{r-2} t_{r-1} t_r, \quad T_r = t_1 t_2 t_3 \dots t_r$$

äquivalent sind, und $T_2, T_3, T_4, \dots, T_{r-1}$ erhalten werden, indem man aus den r -Elementen: $t_1, t_2, t_3, \dots, t_r$ alle Combinationen der zweiten, dritten, vierten, $(r-1)$ -ten Classe ohne Wiederholungen bildet und sämtliche derselben Classe angehörige Producte zu je einer Summe vereinigt. — Zunächst ist klar, dass T bei der Unabhängigkeit der Grössen: $T_r, T_{r-1}, T_{r-2}, \dots, T_2, T_1$ von k mit der endlichen Reihe:

$$\sum_{k=1}^{k=r} t_k^i u_k \{ T_r - T_{r-1} t_k + T_{r-2} t_k^2 - \dots + (-1)^{r-1} T_1 t_k^{r-1} + (-1)^r t_k^r \} =$$

$$= t_1^i u_1 \{ T_r - T_{r-1} t_1 + T_{r-2} t_1^2 - \dots + (-1)^{r-1} T_1 t_1^{r-1} + (-1)^r t_1^r \} +$$

$$+ t_2^i u_2 \{ T_r - T_{r-1} t_2 + T_{r-2} t_2^2 - \dots + (-1)^{r-1} T_1 t_2^{r-1} + (-1)^r t_2^r \} +$$

$$+ t_r^i u_r \{ T_r - T_{r-1} t_r + T_{r-2} t_r^2 - \dots + (-1)^{r-1} T_1 t_r^{r-1} + (-1)^r t_r^r \}$$

zusammenfällt, und die hierin auftretenden Factoren von $t_1^i u_1, t_2^i u_2, \dots, t_r^i u_r$ aus dem allgemeinen Polynome:

$$T_r - T_{r-1} \omega + T_{r-2} \omega^2 - \dots + (-1)^{r-2} T_2 \omega^{r-2} + (-1)^{r-1} T_1 \omega^{r-1} + (-1)^r \omega^r =$$

$$= (t_1 - \omega) (t_2 - \omega) (t_3 - \omega) \dots (t_{r-1} - \omega) (t_r - \omega)$$

durch Vertauschung von ω mit t_1, t_2, \dots, t_r hervorgehen. Da mithin jedes Glied des Aggregates T verschwindet, besteht für beliebige, endliche Werthe von $t_1, t_2, t_3, \dots, t_r; u_1, u_2, u_3, \dots, u_r$ und i die Relation: $T = 0$, aus welcher, sobald $t_1, t_2, t_3, \dots, t_r; u_1, u_2, u_3, \dots, u_r$ speciell die Bedingungen (IX) zu erfüllen haben, für $i = 0, 1, 2, \dots, r-1$ die merkwürdigen Beziehungen:

$$(XII) . \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 T_r - a_1 T_{r-1} + a_2 T_{r-2} - \dots + (-1)^{r-1} a_{r-1} T_1 + (-1)^r a_r = 0, \\ a_1 T_r - a_2 T_{r-1} + a_3 T_{r-2} - \dots + (-1)^{r-1} a_r T_1 + (-1)^r a_{r+1} = 0, \\ a_2 T_r - a_3 T_{r-1} + a_4 T_{r-2} - \dots + (-1)^{r-1} a_{r+1} T_1 + (-1)^r a_{r+2} = 0, \\ a_{r-1} T_r - a_r T_{r-1} + a_{r+1} T_{r-2} - \dots + (-1)^{r-1} a_{2r-2} T_1 + (-1)^r a_{2r-1} = 0 \end{array} \right.$$

resultiren. Dieselben enthalten ausser $T_1, T_2, T_3, \dots, T_r$ keine anderweitigen Unbekannten und bestimmen daher diese Grössen in allen jenen Fällen eindeutig, in welchen die Determinante:

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_0, & - a_1, & a_2, & (-1)^{r-2} a_{r-2}, & (-1)^{r-1} a_{r-1} \\ a_1, & - a_2, & a_3, & (-1)^{r-2} a_{r-1}, & (-1)^{r-1} a_r \\ a_2, & - a_3, & a_4, & (-1)^{r-2} a_r, & (-1)^{r-1} a_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r-1}, & - a_r, & a_{r+1}, & (-1)^{r-2} a_{2r-3}, & (-1)^{r-1} a_{2r-2} \end{array} \right|$$

einen von der Nulle verschiedenen Werth erhält. Sind aber einmal $T_1, T_2, T_3, \dots, T_r$ gefunden, so ergeben sich $t_1, t_2, t_3, \dots, t_r$ nach bekannten Sätzen aus der Theorie der algebraischen Gleichungen als die r -Wurzeln der Resolvente r -ten Grades: ¹⁾

$$(91) \quad t^r - T_1 t^{r-1} + T_2 t^{r-2} - T_3 t^{r-3} + \dots + (-1)^{r-1} T_{r-1} t + (-1)^r T_r = 0,$$

und schliesslich auch $u_1, u_2, u_3, \dots, u_r$ aus den r ersten Bedingungen des Systems (IX), womit die Richtigkeit unserer früheren Folgerung dargethan ist.

Auf Grundlage dieser Sätze kann jetzt die bezüglich (IX) vorgelegte Frage in der Weise entschieden werden, dass wir die den Relationen (VI), (VII) und (VIII) zugehörigen Specialformen von (91) feststellen und untersuchen, ob dieselben wirklich für jedes positive ganze r lauter reelle, zwischen 0 und 1 gelegene Wurzeln besitzen.

Zu diesem Zwecke substituiren wir zunächst unter den Annahmen: $r = 2, 3, 4$, die für (VI), (VII) und (VIII) charakteristischen Werthe der Constanten: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2r-1}$ in (XII) und erhalten so drei verschiedene Gruppen von Beziehungen, nämlich:

1. Für $a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{3}, \dots, a_{2r-1} = \frac{1}{2r+1}$: $\frac{1}{2} T_2 - \frac{1}{3} T_1 + \frac{1}{4} = 0, \frac{1}{3} T_2 - \frac{1}{4} T_1 + \frac{1}{5} = 0;$
 $\frac{1}{2} T_3 - \frac{1}{3} T_2 + \frac{1}{4} T_1 - \frac{1}{5} = 0, \frac{1}{3} T_3 - \frac{1}{4} T_2 + \frac{1}{5} T_1 - \frac{1}{6} = 0, \frac{1}{4} T_3 - \frac{1}{5} T_2 + \frac{1}{6} T_1 - \frac{1}{7} = 0;$
 $\frac{1}{2} T_4 - \frac{1}{3} T_3 + \frac{1}{4} T_2 - \frac{1}{5} T_1 + \frac{1}{6} = 0, \frac{1}{3} T_4 - \frac{1}{4} T_3 + \frac{1}{5} T_2 - \frac{1}{6} T_1 + \frac{1}{7} = 0,$
 $\frac{1}{4} T_4 - \frac{1}{5} T_3 + \frac{1}{6} T_2 - \frac{1}{7} T_1 + \frac{1}{8} = 0, \frac{1}{5} T_4 - \frac{1}{6} T_3 + \frac{1}{7} T_2 - \frac{1}{8} T_1 + \frac{1}{9} = 0;$

2. Für $a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{3}, \dots, a_{2r-1} = \frac{1}{4r-1}$: $T_2 - \frac{1}{3} T_1 + \frac{1}{5} = 0, \frac{1}{3} T_2 - \frac{1}{5} T_1 + \frac{1}{7} = 0;$
 $T_3 - \frac{1}{3} T_2 + \frac{1}{5} T_1 - \frac{1}{7} = 0, \frac{1}{3} T_3 - \frac{1}{5} T_2 + \frac{1}{7} T_1 - \frac{1}{9} = 0, \frac{1}{5} T_3 - \frac{1}{7} T_2 + \frac{1}{9} T_1 - \frac{1}{11} = 0;$
 $T_4 - \frac{1}{3} T_3 + \frac{1}{5} T_2 - \frac{1}{7} T_1 + \frac{1}{9} = 0, \frac{1}{3} T_4 - \frac{1}{5} T_3 + \frac{1}{7} T_2 - \frac{1}{9} T_1 + \frac{1}{11} = 0,$
 $\frac{1}{5} T_4 - \frac{1}{7} T_3 + \frac{1}{9} T_2 - \frac{1}{11} T_1 + \frac{1}{13} = 0, \frac{1}{7} T_4 - \frac{1}{9} T_3 + \frac{1}{11} T_2 - \frac{1}{13} T_1 + \frac{1}{15} = 0;$

3. Für $a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}, \dots, a_{2r-1} = \frac{1}{2r}$: $T_2 - \frac{1}{2} T_1 + \frac{1}{3} = 0, \frac{1}{2} T_2 - \frac{1}{3} T_1 + \frac{1}{4} = 0;$
 $T_3 - \frac{1}{2} T_2 + \frac{1}{3} T_1 - \frac{1}{4} = 0, \frac{1}{2} T_3 - \frac{1}{3} T_2 + \frac{1}{4} T_1 - \frac{1}{5} = 0, \frac{1}{3} T_3 - \frac{1}{4} T_2 + \frac{1}{5} T_1 - \frac{1}{6} = 0;$
 $T_4 - \frac{1}{2} T_3 + \frac{1}{3} T_2 - \frac{1}{4} T_1 + \frac{1}{5} = 0, \frac{1}{2} T_4 - \frac{1}{3} T_3 + \frac{1}{4} T_2 - \frac{1}{5} T_1 + \frac{1}{6} = 0,$
 $\frac{1}{3} T_4 - \frac{1}{4} T_3 + \frac{1}{5} T_2 - \frac{1}{6} T_1 + \frac{1}{7} = 0, \frac{1}{4} T_4 - \frac{1}{5} T_3 + \frac{1}{6} T_2 - \frac{1}{7} T_1 + \frac{1}{8} = 0;$

¹⁾ Diese Gleichung wurde — jedoch auf zwei von dem hier eingeschlagenen verschiedenen Wegen — zuerst von A. Bretschneider in seiner Abhandlung: „Elementare Entwicklung der Gaussischen Methode, die Werthe begrenzter Integrale durch Näherung zu bestimmen“ (Programm des herzoglichen Realgymnasiums zu Gotha, herausgegeben zu Ostern 1849, pag. 3–12) und später von W. Scheibner in seiner Arbeit: „Ueber die Auflösung eines gewissen Gleichungssystemes“ (Verhandlungen der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, math.-phys. Classe, 8. Bd., pag. 65–76) entwickelt.

deren Auflösung nach $T_1, T_2; T_1, T_2, T_3; T_1, T_2, T_3, T_4;$ keine weiteren Schwierigkeiten bietet. Die Einführung der hiebei gewonnenen Resultate in (91) liefert dann für die den Substitutionen: $r = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ correspondirenden Specialisirungen von (VI), (VII) und (VIII) die Resolventen:

$$t^2 - \frac{6}{5}t + \frac{3}{10} = 0, \quad t^3 - \frac{12}{7}t^2 + \frac{6}{7}t - \frac{4}{35} = 0,$$

$$t^4 - \frac{20}{9}t^3 + \frac{5}{3}t^2 - \frac{10}{21}t + \frac{5}{126} = 0, \quad t^5 - \frac{30}{11}t^4 + \frac{30}{11}t^3 - \frac{40}{33}t^2 + \frac{5}{22}t - \frac{1}{77} = 0,$$

$$t^6 - \frac{42}{13}t^5 + \frac{105}{26}t^4 - \frac{350}{143}t^3 + \frac{105}{143}t^2 - \frac{14}{143}t + \frac{7}{1716} = 0,$$

$$t^7 - \frac{56}{15}t^6 + \frac{28}{5}t^5 - \frac{56}{13}t^4 + \frac{70}{39}t^3 - \frac{56}{143}t^2 + \frac{28}{715}t - \frac{8}{6435} = 0,$$

respective:

$$t^2 - \frac{6}{7}t + \frac{3}{35} = 0, \quad t^3 - \frac{15}{11}t^2 + \frac{5}{11}t - \frac{5}{231} = 0,$$

$$t^4 - \frac{28}{15}t^3 + \frac{14}{13}t^2 - \frac{28}{143}t + \frac{7}{1287} = 0, \quad t^5 - \frac{45}{19}t^4 + \frac{630}{323}t^3 - \frac{210}{323}t^2 + \frac{315}{4199}t - \frac{63}{46189} = 0,$$

$$t^6 - \frac{66}{23}t^5 + \frac{495}{161}t^4 - \frac{660}{437}t^3 + \frac{2475}{7429}t^2 - \frac{198}{7429}t + \frac{33}{96577} = 0,$$

$$t^7 - \frac{91}{27}t^6 + \frac{1001}{225}t^5 - \frac{1001}{345}t^4 + \frac{1001}{1035}t^3 - \frac{1001}{6555}t^2 + \frac{1001}{111435}t - \frac{143}{1671525} = 0,$$

beziehungsweise:

$$t^2 - t + \frac{1}{6} = 0, \quad t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{5}t - \frac{1}{20} = 0,$$

$$t^4 - 2t^3 + \frac{9}{7}t^2 - \frac{2}{7}t + \frac{1}{70} = 0, \quad t^5 - \frac{5}{2}t^4 + \frac{20}{9}t^3 - \frac{5}{6}t^2 + \frac{5}{42}t - \frac{1}{252} = 0,$$

$$t^6 - 3t^5 + \frac{75}{22}t^4 - \frac{20}{11}t^3 + \frac{5}{11}t^2 - \frac{1}{22}t + \frac{1}{924} = 0,$$

$$t^7 - \frac{7}{2}t^6 + \frac{63}{13}t^5 - \frac{175}{52}t^4 + \frac{175}{143}t^3 - \frac{63}{286}t^2 + \frac{7}{429}t - \frac{1}{3432} = 0,$$

woraus sich für die allgemeinen Gleichungssysteme (VI), (VII) und (VIII) auf inductivem Wege folgende Resolventen ¹⁾ zur Ermittlung von $t_1, t_2, t_3, \dots, t_r$ ableiten lassen:

¹⁾ Von diesen Gleichungen war bisher nur die dritte bekannt, welche zuerst von F. Gauss in seiner Abhandlung: „Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi“ (Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores, vol. III.) auf dem hier gleichfalls eingeschlagenen Wege der Induction entwickelt und später von J. Jacobi in dem Aufsatz: „Ueber Gauss' neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise zu finden“ (Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1. Bd., pag. 301–308), direct bewiesen wurde. Da übrigens die in der vorliegenden Arbeit enthaltenen mathematischen Untersuchungen nur Mittel zum Zweck sind, so erscheint es überflüssig, auf diesen Gegenstand näher einzugehen, und sei schliesslich nur noch bemerkt, dass auch für die beiden anderen Resolventen (92) und (93) ein directer Nachweis geliefert werden kann.

$$(92) \dots \Omega_1(r, t) = t^r - \frac{(r+1)r}{2r+1}t^{r-1} + \frac{(r+1)r^2(r-1)}{2!(2r+1)(2r)}t^{r-2} - \dots$$

$$+ (-1)^k \frac{(r+1)r^2(r-1)^2 \dots (r-k+2)^2(r-k+1)}{k!(2r+1)(2r)(2r-1) \dots (2r-k+2)}t^{r-k} + \dots + (-1)^r \frac{(r+1)!}{(2r+1)(2r) \dots (r+2)} = 0.$$

$$(93) \dots \Omega_2(r, t) = t^r - \frac{(2r-1)r}{4r-1}t^{r-1} + \frac{(2r-1)(2r-3)r(r-1)}{2!(4r-1)(4r-3)}t^{r-2} - \dots$$

$$+ (-1)^k \frac{(2r-1)(2r-3)(2r-5) \dots (2r-2k+1)r(r-1)(r-2) \dots (r-k+1)}{k!(4r-1)(4r-3)(4r-5) \dots (4r-2k+1)}t^{r-k} +$$

$$+ (-1)^r \frac{(2r-1)(2r-3) \dots 3 \cdot 1}{(4r-1)(4r-3) \dots (2r+3)(2r+1)} = 0.$$

$$(94) \dots \Omega_3(r, t) = t^r - \frac{r^2}{2r}t^{r-1} + \frac{r^2(r-1)^2}{2!2r(2r-1)}t^{r-2} - \frac{r^2(r-1)^2(r-2)^2}{3!2r(2r-1)(2r-2)}t^{r-3} +$$

$$+ (-1)^k \frac{r^2(r-1)^2 \dots (r-k+1)^2}{k!2r(2r-1) \dots (2r-k+1)}t^{r-k} + \dots + (-1)^r \frac{r!}{2r(2r-1) \dots (r+1)} = 0.$$

Es erübrigt jetzt noch die Discussion der Functionen: $\Omega_1(r, t)$, $\Omega_2(r, t)$, $\Omega_3(r, t)$, welche nach Umkehrung der Reihenfolge der Glieder in (92), (93) und (94) die Darstellungsweise:

$$\Omega_1(r, t) = \frac{(-1)^r (r+1)!}{(r+2)(r+3) \dots (2r+1)} \left\{ 1 - \frac{r(r+2)}{1 \cdot 2}t + \frac{r(r-1)(r+2)(r+3)}{1 \cdot 2^2 \cdot 3}t^2 - \dots \right.$$

$$\left. - \frac{r(r-1)(r-2)(r+2)(r+3)(r+4)}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4}t^3 + \dots + (-1)^r \frac{(r+2)(r+3) \dots (2r+1)}{(r+1)!}t^r \right\},$$

$$\Omega_2(r, t) = \frac{(-1)^r \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r-1)}{(2r+1)(2r+3) \dots (4r-1)} \left\{ 1 - \frac{r(2r+1)}{1 \cdot 1}t + \frac{r(r-1)(2r+1)(2r+3)}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3}t^2 - \dots \right.$$

$$\left. - \frac{r(r-1)(r-2)(2r+1)(2r+3)(2r+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}t^3 + \dots + (-1)^r \frac{(2r+1)(2r+3) \dots (4r-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r-1)}t^r \right\},$$

$$\Omega_3(r, t) = \frac{(-1)^r r!}{(r+1)(r+2) \dots (2r)} \left\{ 1 - \frac{r(r+1)}{1^2}t + \frac{r(r-1)(r+1)(r+2)}{1^2 \cdot 2^2}t^2 - \dots \right.$$

$$\left. - \frac{r(r-1)(r-2)(r+1)(r+2)(r+3)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}t^3 + \dots + (-1)^r \frac{(r+1)(r+2) \dots (2r)}{r!}t^r \right\}$$

gestatten und insoferne als rationale Multipla gewisser endlicher hypergeometrischer Reihen zu betrachten sind. Denn bezeichnen wir nach dem Vorgange von Gauss¹⁾ die hypergeometrische Reihe²⁾:

1) S. h. dessen in den „Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores, vol. II⁴ veröffentlichte Abhandlung: „Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)}xx + \text{etc.}^{\prime\prime}$

2) Eine gründliche Einsicht in die allgemeinen Eigenschaften dieser bereits von L. Euler untersuchten Reihe kann man in erster Linie durch das Studium der Riemann'schen Abhandlung: „Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen“ (Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass, herausgegeben unter Mitwirkung von R. Dedekind von H. Weber, pag. 62–78) gewinnen.

$$1 + \frac{\alpha \beta}{1 \cdot \gamma} t + \frac{\alpha (\alpha + 1) \beta (\beta + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma (\gamma + 1)} t^2 + \frac{\alpha (\alpha + 1) (\alpha + 2) \beta (\beta + 1) (\beta + 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma (\gamma + 1) (\gamma + 2)} t^3 + \dots$$

kurz mit $F(\alpha, \beta, \gamma, t)$ und identificiren die Coëfficienten von t, t^2 und t^3 durch passende Wahl¹⁾ der Elemente α, β, γ mit den Factoren derselben Potenzen von t in den Reihen:

$$1 - \frac{r(r+2)}{1 \cdot 2} t + \dots \quad 1 - \frac{r(2r+1)}{1 \cdot 1} t + \dots \quad 1 - \frac{r(r+1)}{1^2} t + \dots$$

so resultiren aus der Entwicklung der betreffenden Specialisirungen von $F(\alpha, \beta, \gamma, t)$ $F(-r, r+2, 2, t), F(-r, r+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t), F(-r, r+1, 1, t)$ ausserdem alle übrigen Glieder der eben angeführten Aggregate, d. h. wir können $\Omega_1(r, t), \Omega_2(r, t), \Omega_3(r, t)$ auch, wie folgt, definiren:

$$(95) \quad \Omega_1(r, t) = (-1)^r \frac{(r+1)!}{(r+2)(r+3) \dots (2r+1)} F(-r, r+2, 2, t),$$

$$(96) \quad \dots \Omega_2(r, t) = (-1)^r \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r-1)}{(2r+1)(2r+3) \dots (4r-1)} F(-r, r+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t),$$

$$(97) \quad \dots \Omega_3(r, t) = (-1)^r \frac{r!}{(r+1)(r+2) \dots (2r)} F(-r, r+1, 1, t).$$

Hieraus entspringen nach Anwendung der bekannten, zuerst von Jacobi²⁾ entwickelten Beziehung:

$$F(-r, r+x, \lambda, t) = (-1)^r \frac{t^{1-\lambda} (t-1)^{\lambda-x}}{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2) \dots (\lambda+r-1)} \frac{d^x \{ t^{r+\lambda-1} (t-1)^{r+x-\lambda} \}}{dt^x}$$

unmittelbar die Relationen:

¹⁾ Sind allgemein p_1, p_2, p_3 die Coëfficienten von t, t^2 und t^3 in der umzuformenden Reihe, so bestehen zur Ermittlung von α, β, γ die Gleichungen:

$$\frac{\alpha \beta}{1 \cdot \gamma} = p_1, \quad \frac{\alpha (\alpha + 1) \beta (\beta + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma (\gamma + 1)} = p_2, \quad \frac{\alpha (\alpha + 1) (\alpha + 2) \beta (\beta + 1) (\beta + 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma (\gamma + 1) (\gamma + 2)} = p_3,$$

oder:

$$\alpha \beta = p_1 \gamma, \quad \frac{p_1 \gamma + (\alpha + \beta) + 1}{\gamma + 1} = \frac{2p_2}{p_1}, \quad \frac{p_1 \gamma + 2(\alpha + \beta) + 4}{\gamma + 2} = \frac{3p_3}{p_2}$$

welche nach Berechnung der Quotienten: $\frac{2p_2}{p_1} = p'_1, \frac{3p_3}{p_2} = p'_2$ für $\alpha + \beta, \alpha \beta$ und γ die Ausdrücke:

$$\alpha + \beta = \frac{2(p'_1 - 2)(p_1 - p'_1) - (p'_1 - 1)(p_1 - p'_1)}{p_1 - 2p'_1 + p''_1}, \quad \alpha \beta = \frac{2p_1(p'_1 - p''_1 + 1)}{p_1 - 2p'_1 + p''_1},$$

$$\gamma = \frac{2(p'_1 - p''_1 + 1)}{p_1 - 2p'_1 + p''_1}$$

liefern. Es entsprechen also α und β den beiden Wurzeln: ω_1, ω_2 der quadratischen Resolvente:

$$\omega^2 - \frac{2(p'_1 - 2)(p_1 - p'_1) - (p'_1 - 1)(p_1 - p'_1)}{p_1 - 2p'_1 + p''_1} \omega + \frac{2p_1(p'_1 - p''_1 + 1)}{p_1 - 2p'_1 + p''_1} = 0,$$

wobei es in Hinblick auf die bekannte Identität: $F(\alpha, \beta, \gamma, t) = F(\beta, \alpha, \gamma, t)$ gleichgiltig ist, ob man $\alpha = \omega_1, \beta = \omega_2$ oder $\alpha = \omega_2, \beta = \omega_1$ setzt.

²⁾ S. h. die im 56. Bande von Borchardt's Journal für die reine und angewandte Mathematik aus den hinterlassenen Papieren Jacobi's durch E. Heine mitgetheilte Abhandlung: „Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe“, pag. 156 und 157.

$$(98) \dots \Omega_1(r, t) = \frac{1}{(r+2)(r+3)\dots(2r)(2r+1)t} \frac{d^r \{ t^{r+1} (t-1)^r \}}{dt^r},$$

$$(99) \quad \Omega_2(r, t) = \frac{2^r \sqrt{t}}{(2r+1)(2r+3)\dots(4r-3)(4r-1)} \frac{d^r \{ t^{\frac{2r-1}{2}} (t-1)^r \}}{dt^r},$$

$$(100) \dots \Omega_3(r, t) = \frac{1}{(r+1)(r+2)\dots(2r-1)(2r)} \frac{d^r \{ t^r (t-1)^r \}}{dt^r},$$

von welchen speciell die erste und zweite noch weitere eigenthümliche Transformationen ermöglichen. Wir benützen hiezu die für jede differentiirbare Function W von t giltigen identischen Gleichungen: 1)

$$\frac{d^r \left\{ \frac{d(tW)}{dt} - (r+1)W \right\}}{dt^r} = \frac{d^{r+1}(tW)}{dt^{r+1}} - (r+1) \frac{d^r W}{dt^r} = t \frac{d^{r+1} W}{dt^{r+1}},$$

$$\frac{d^r \left\{ t^{\frac{2r-1}{2}} \frac{d^r W}{dt^r} \right\}}{dt^r} = \frac{1}{2^{2r} \sqrt{t}} \frac{d^{2r} W}{[d(Vt)]^{2r}}$$

und setzen in der ersten: $W = \frac{t^r (t-1)^{r+1}}{r+1}$, in der zweiten: $W = \frac{(t-1)^{2r}}{(r+1)(r+2)\dots(2r)}$,

welche Annahmen nach einigen leichten Reductionen auf die Formeln:

$$\frac{d^r \{ t^{r+1} (t-1)^r \}}{dt^r} = \frac{t}{r+1} \frac{d^{r+1} \{ t^r (t-1)^{r+1} \}}{dt^{r+1}},$$

$$\frac{d^r \{ t^{\frac{2r-1}{2}} (t-1)^r \}}{dt^r} = \frac{1}{(r+1)(r+2)\dots(2r) 2^{2r} \sqrt{t}} \frac{d^{2r} (t-1)^{2r}}{[d(Vt)]^{2r}}$$

führen. Die Substitution der letzteren in (93) und (94) liefert nunmehr bezüglich $\Omega_1(r, t)$ und $\Omega_2(r, t)$ die Ausdrücke:

$$(101) \quad \Omega_1(r, t) = \frac{1}{(r+1)(r+2)\dots(2r)(2r+1)} \frac{d^{r+1} \{ t^r (t-1)^{r+1} \}}{dt^{r+1}},$$

$$(102) \quad \Omega_2(r, t) = \frac{1}{(2r+1)(2r+2)\dots(4r-1)(4r)} \frac{d^{2r} (t-1)^{2r}}{[d(Vt)]^{2r}},$$

1) Die erste derselben ist eine einfache Specialisirung der aus den Elementen der Differentialrechnung bekannten Formel:

$$\frac{d^n(uv)}{dx^n} = u \frac{d^n v}{dx^n} + n \frac{du}{dx} \frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1 \ 2} \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}} + \dots + v \frac{d^n u}{dx^n},$$

die zweite eine solche der merkwürdigen Gleichung:

$$\frac{d^\mu y}{[d(Vx)]^\mu} = 2^\mu \sqrt{x} \frac{\frac{\mu}{2}}{dx^{\frac{\mu}{2}}} \left\{ x^{\frac{\mu-1}{2}} \frac{\frac{\mu}{2}}{dx^{\frac{\mu}{2}}} y \right\},$$

welche zuerst von J. Liouville in seiner Abhandlung: „Mémoire sur le changement de la variable indépendante dans le calcul des différentielles à indices quelconques“ (Journal de l'école royale polytechnique, 15. Bd., pag. 17-54) unter der Voraussetzung bewiesen wurde, dass sich y in eine nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreitende Reihe entwickeln lasse. — Später hat S. Spitzer im ersten Hefte seiner „Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen“, pag. 47-50 die allgemeine Giltigkeit der erwähnten Relation für beliebige positive ganze Werthe des Differentiationsindex $\frac{\mu}{2}$ dargethan.

d. h. es lassen sich $\Omega_1(r, t)$, $\Omega_2(r, t)$ ebenso wie $\Omega_3(r, t)$ auch durch mehrfache Differentiation gewisser, für $t = 1$ regelmässig verschwindender Functionen:

$$\Omega_1'(r, t) = \frac{t^r (t-1)^{r+1}}{(r+1)(r+2)\dots(2r)(2r+1)}, \quad \Omega_2'(r, t) = \frac{(t-1)^{2r}}{(2r+1)(2r+2)\dots(4r-1)(4r)},$$

$$\Omega_3'(r, t) = \frac{t^r (t-1)^r}{(r+1)(r+2)\dots(2r-1)(2r)}$$

nach t , respective \sqrt{t} gewinnen.

Ueberdies lehren die Ergebnisse (100), (101) und (102), dass $\Omega_1(r, t)$, $\Omega_2(r, t)$, $\Omega_3(r, t)$ offenbar auf jene Functionen zurückzuführen sind, welche man gemeinlich als Kugelfunctionen erster Art bezeichnet¹⁾ und durch Entwicklung von $\frac{1}{\sqrt{1-2w\omega+\omega^2}}$ nach steigenden Potenzen von ω erhält. Hiebei bestimmt speciell der Coëfficient von ω^k die k -te Kugelfunction erster Art²⁾: $P^{(k)}(w)$ von w und kann, wie schon Rodrigues gezeigt hat³⁾, mit Hilfe der Relation:

$$P^{(k)}(w) = \frac{1}{k! 2^k} \frac{d^k (w^2 - 1)^k}{dw^k}$$

direct gefunden werden. Da nun die letztere für $w = 2t - 1$, $k = r$, respective $w = \sqrt{t}$, $k = 2r$ in:

$$P^{(r)}(2t - 1) = \frac{1}{r!} \frac{d^r \{t^r (t-1)^r\}}{dt^r} \quad \text{beziehungsweise:} \quad P^{(2r)}(\sqrt{t}) = \frac{1}{(2r)! 2^{2r}} \frac{d^{2r} (t-1)^{2r}}{[d(\sqrt{t})]^{2r}}$$

übergeht, und der in (101) auftretende veränderliche Factor mit

$$\frac{d^{r+1} \{ (t-1) [t^r (t-1)^r] \}}{dt^{r+1}} = (t-1) \frac{d^{r+1} \{t^r (t-1)^r\}}{dt^{r+1}} + (r+1) \frac{d^r \{t^r (t-1)^r\}}{dt^r}$$

zusammenfällt, so bestehen für $\Omega_1(r, t)$, $\Omega_2(r, t)$, $\Omega_3(r, t)$ schliesslich die Gleichungen:

$$(103) \dots \Omega_1(r, t) = \frac{r!}{(r+1)(r+2)\dots(2r+1)} \left\{ (r+1) P^{(r)}(2t-1) + (t-1) \frac{dP^{(r)}(2t-1)}{dt} \right\},$$

$$(104) \dots \Omega_2(r, t) = \frac{r! 2^r P^{(2r)}(\sqrt{t})}{(2r+1)(2r+3)\dots(4r-1)}, \quad (105) \dots \Omega_3(r, t) = \frac{r! P^{(r)}(2t-1)}{(r+1)(r+2)\dots(2r)},$$

welche im Verein mit (95), (96), (97), (98), (99), (100) zur Begründung der nachstehenden Sätze dienen:

1. Die Functionen $\Omega_1(r, t)$, $\Omega_2(r, t)$, $\Omega_3(r, t)$ erhalten für $t = 0$ und $t = 1$ die stets von der Nulle verschiedenen Werthe:

¹⁾ Eine ungemein gründliche Bearbeitung dieser Functionen findet man in der zweiten Auflage des Werkes von Prof. Dr. E. Heine: „Handbuch der Kugelfunctionen, Theorie und Anwendungen“ (Berlin, 1878).

²⁾ Das Functionszeichen: $P^{(k)}$ wurde zuerst von Lejeune-Dirichlet in seiner Arbeit: „Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles, et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données“ (Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik, 17. Bd.) verwerthet.

³⁾ S. h. dessen Abhandlung: „Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes“ (Correspondance sur l'école impériale polytechnique, publiée par M. Hachette, III^e vol., N^o III., pag. 361–385). — Näheres über diese Formel findet sich in dem bereits citirten Werke von E. Heine, pag. 19–21.

$$(106) \dots \Omega_1(r, 0) = \frac{(-1)^r (r+1)!}{(r+2)(r+3) \dots (2r+1)}, \quad (107) \dots \Omega_1(r, 1) = \frac{r!}{(r+2)(r+3) \dots (2r+1)};$$

$$(108) \dots \Omega_2(r, 0) = \frac{(-1)^r \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r-1)}{(2r+1)(2r+3) \dots (4r-1)}, \quad (109) \dots \Omega_2(r, 1) = \frac{r! \cdot 2^r}{(2r+1)(2r+3) \dots (4r-1)};$$

$$(110) \dots \Omega_3(r, 0) = \frac{(-1)^r r!}{(r+1)(r+2) \dots (2r)}, \quad (111) \dots \Omega_3(r, 1) = \frac{r!}{(r+1)(r+2) \dots (2r)},$$

indem einerseits für $t = 0$ alle von t abhängigen Glieder in (95), (96) und (97) verschwinden ¹⁾, andererseits für $t = 1$ $P^{(r)}(1)$ und $P^{(2r)}(1)$ als die Coëfficienten von ω^r und ω^{2r} in der

unendlichen Reihe: $\frac{1}{\sqrt{1-2\omega+\omega^2}} = \frac{1}{1-\omega} = 1 + \omega + \omega^2 + \dots$ gleich 1 sind.

2. Die drei genannten Functionen werden nur für solche Specialisirungen von t gleich Null, welche der Bedingung: $0 < t < 1$ genügen, d. h. es besitzen die Resolventen (92), (93) und (94) wirklich lauter reelle, zwischen 0 und 1 gelegene Wurzeln. — Um diess nachzuweisen, stützen wir uns auf die bekannte Thatsache, dass, wenn die Wurzeln einer gegebenen algebraischen Gleichung: $\Psi(t) = 0$ reell sind und zwischen zwei bestimmte Grenzen a und b fallen, das Gleiche auch von den Wurzeln der Relationen: $\Psi'(t) = 0$, $\Psi''(t) = 0, \dots \Psi^{(r)}(t) = 0, \dots$ gilt ²⁾. Sobald demnach $\Psi(t)$ mit einem der ausschliesslich für $t = 0$ und $t = 1$ verschwindenden Producte:

$$t^{r+1}(t-1)^r, \quad t^{\frac{2r-1}{2}}(t-1)^r, \quad t^r(t-1)^r$$

identificirt wird, erfüllen alle Wurzeln der Gleichung: $\Psi^{(r)}(t) = \frac{d^r \Psi(t)}{dt^r} = 0$ die Forderung: $0 \leq t \leq 1$, woraus mit Rücksicht auf die Formeln (98), (99), (100) und die für $\Omega_1(r, 0)$, $\Omega_1(r, 1)$, etc. gewonnenen Resultate unmittelbar der obige Satz hervorgeht.

3. Die Wurzeln der Resolventen: $\Omega_1(r, t) = 0$, $\Omega_2(r, t) = 0$, $\Omega_3(r, t) = 0$ sind insgesamt von einander verschieden, wie sich diess auf Grundlage der mit (92), (93) und (94) gleichwerthigen Beziehungen:

¹⁾ Die hier für $\Omega_1(r, 0)$, $\Omega_2(r, 0)$, $\Omega_3(r, 0)$ angegebenen Ausdrücke können auch aus (103), (104) und (105) mit Hilfe der Formeln:

$$P^{(r)}(-1) = (-1)^r, \quad P^{(2r)}(0) = \frac{(-1)^r \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r-1)}{r! \cdot 2^r}, \quad \left. \frac{dP^{(r)}(2t-1)}{dt} \right|_{t=0} = (-1)^{r-1} r(r+1)$$

abgeleitet werden, von welchen wohl nur die letzte einer kurzen Begründung bedarf. Zu diesem Zwecke berücksichtige man, dass $P^{(r)}(2t-1)$ gemäss der ursprünglichen Definition von $P^{(k)}(\omega)$ den Coëfficienten von ω^r in

der unendlichen Reihe: $\frac{1}{\sqrt{1-2(2t-1)\omega+\omega^2}} = 1 + (2t-1)\omega + (6t^2-6t+1)\omega^2 + \dots$

vorstellt, mithin die Gleichung: $\sum_{k=0}^{k=\infty} \omega^k P^{(k)}(2t-1) = \frac{1}{\sqrt{1-2(2t-1)\omega+\omega^2}}$ besteht. Differentiirt man nun

dieselbe nach t und setzt in dem Resultate t gleich Null, so ergibt sich direct die Relation:

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \omega^k \left. \frac{dP^{(k)}(2t-1)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{2\omega}{(1+\omega)^3} = 2\omega - 6\omega^2 + 12\omega^3 - \dots + (-1)^{k-1} k(k+1)\omega^k + \dots$$

womit der gewünschte Beweis geliefert ist.

²⁾ S. h. z. B. das 1850 in Braunschweig erschienene Werk von Dr. C. H. Schnuse: „Die Theorie und Auflösung der höhern algebraischen und der transcendenten Gleichungen“, S. 51–53.

$$F(-r, r+2, 2, t) = 0, F(-r, r + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t) = 0, F(-r, r+1, 1, t) = 0$$

leicht apagogisch darthun lässt. Da nämlich jede hypergeometrische Reihe: $F(\alpha, \beta, \gamma, t)$ die Differentialgleichung:

$$t(1-t) \frac{d^2 F}{dt^2} + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)t\} \frac{dF}{dt} - \alpha \beta F = 0$$

befriedigt, und daher zwischen je drei aufeinanderfolgenden Differentialquotienten von F :

$$\frac{d^k F}{dt^k}, \frac{d^{k+1} F}{dt^{k+1}}, \frac{d^{k+2} F}{dt^{k+2}} \text{ die allgemeine Relation:}$$

$$t(1-t) \frac{d^{k+2} F}{dt^{k+2}} + \{\gamma + k - (\alpha + \beta + 2k + 1)t\} \frac{d^{k+1} F}{dt^{k+1}} - (\alpha + k)(\beta + k) \frac{d^k F}{dt^k} = 0$$

stattfindet, so müssten, wenn die Gleichung: $F(\alpha, \beta, \gamma, t) = 0$ zwei gleiche, zwischen 0 und 1 gelegene Wurzeln: t_k, t'_k besässe, für $t = t_k$ ausser F und $\frac{dF}{dt}$ auch $\frac{d^2 F}{dt^2}, \frac{d^3 F}{dt^3}, \frac{d^r F}{dt^r}$ verschwinden. Es würde also die Annahme gleicher Wurzeln für die hier in Betracht kommenden Specialisirungen von F den Schluss nach sich ziehen, dass die Ausdrücke:

$$\frac{d^r F(-r, r+2, 2, t)}{dt^r} = (-1)^r \frac{(r+2)(r+3)\dots(2r)(2r+1)}{r+1}$$

$$\frac{d^r F(-r, r + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t)}{dt^r} = (-1)^r \frac{r!(2r+1)(2r+3)\dots(4r-3)(4r-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r-1)},$$

$$\frac{d^r F(-r, r+1, 1, t)}{dt^r} = (-1)^r (r+1)(r+2)\dots(2r-1)(2r)$$

für irgend welche positive ganze Werthe von r mit der Nulle coincidiren könnten, was natürlich unmöglich ist.

4. Genügen die Grössen: $t_1, t_2, t_3, \dots, t_r; u_1, u_2, u_3, \dots, u_r$ speciell den Bedingungen (VI), so besteht jederzeit die merkwürdige Beziehung:

$$(112) \quad \sum_{k=1}^{k=r} \frac{u_k}{t_k} = \frac{r(r+2)}{(r+1)^2},$$

wonach u. A. die dem Gleichungssysteme (III) zugehörigen Werthe von $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots, \Lambda_r$ am einfachsten durch Auflösung der r -Relationen:

$$\sum_{k=1}^{k=r} \Lambda_k = \frac{r(r+2)}{(r+1)^2}, \quad \sum_{k=1}^{k=r} \epsilon_k \Lambda_k = \frac{1}{2}, \quad \sum_{k=1}^{k=r} \epsilon_k^2 \Lambda_k = \frac{1}{3}, \quad \sum_{k=1}^{k=r} \epsilon_k^{r-1} \Lambda_k = \frac{1}{r}$$

gefunden werden können. Um diesen Satz zu begründen, setzen wir zunächst in der allgemein giltigen Identität: $T = 0$ den Exponenten i gleich -1 und transformiren hierauf das erhaltene Resultat:

$$T_r \sum_{k=1}^{k=r} \frac{u_k}{t_k} - T_{r-1} \sum_{k=1}^{k=r} u_k + T_{r-2} \sum_{k=1}^{k=r} t_k u_k - \dots + (-1)^{r-2} T_2 \sum_{k=1}^{k=r} t_k^{r-3} u_k + \\ + (-1)^{r-1} T_1 \sum_{k=1}^{k=r} t_k^{r-2} u_k + (-1)^r \sum_{k=1}^{k=r} t_k^{r-1} u_k = 0$$

nach Einführung der Bedingungen (VI) in:

$$T_r \left\{ 1 - \sum_{k=1}^{k=r} \frac{u_k}{t_k} \right\} = \\ = (-1)^r \left\{ \frac{1}{r+1} - \frac{1}{r} T_1 + \frac{1}{r-1} T_2 - \dots + \frac{(-1)^{r-2}}{3} T_{r-2} + \frac{(-1)^{r-1}}{2} T_{r-1} + (-1)^r T_r \right\},$$

welche Beziehung ¹⁾ mit Rücksicht auf die keiner Erläuterung bedürftigen Formeln:

$$\frac{1}{r+1} = \int_0^1 w^r dw, \quad \frac{1}{r} = \int_0^1 w^{r-1} dw, \quad \frac{1}{r-1} = \int_0^1 w^{r-2} dw, \dots, \frac{1}{2} = \int_0^1 w dw, \quad 1 = \int_0^1 dw;$$

$$T_1 = \frac{(r+1)r}{2r+1}, \quad T_2 = \frac{(r+1)r^2(r-1)}{2!(2r+1)(2r)}, \quad T_r = \frac{(r+1)!}{(2r+1)(2r)\dots(r+2)}$$

auch die Schreibweise:

$$\frac{(r+1)!}{(2r+1)(2r)\dots(r+2)} \left\{ 1 - \sum_{k=1}^{k=r} \frac{u_k}{t_k} \right\} = \\ = (-1)^r \int_0^1 \left\{ w^r - \frac{(r+1)r}{2r+1} w^{r-1} + \frac{(r+1)r^2(r-1)}{2!(2r+1)(2r)} w^{r-2} - \dots + \frac{(-1)^r (r+1)!}{(2r+1)(2r)\dots(r+2)} \right\} dw = \\ = (-1)^r \int_0^1 \Omega_1(r, w) dw = \frac{(-1)^r}{(r+1)(r+2)\dots(2r)(2r+1)} \int_0^1 \frac{d^{r+1} \{ w^r (w-1)^{r+1} \}}{dw^{r+1}} dw = \\ = \frac{(-1)^r}{(r+1)(r+2)\dots(2r)(2r+1)} \left| \frac{d^r \{ w^r (w-1)^{r+1} \}}{dw^r} \right|_0^1$$

gestattet. Berücksichtigen wir nun, dass der rechter Hand auftretende Differentialquotient mit der Summe:

$$(w-1) \frac{d^r \{ w^r (w-1)^r \}}{dw^r} + r \frac{d^{r-1} \{ w^r (w-1)^r \}}{dw^{r-1}} = r! (w-1) P^{(r)}(2w-1) + r \frac{d^{r-1} \{ w^r (w-1)^r \}}{dw^{r-1}}$$

identisch ist, und der zweite Bestandtheil der letzteren sowohl für $w=0$ als auch für $w=1$ verschwindet, weil jede dieser Substitutionen zugleich eine der Relation: $w^r (w-1)^r = 0$ r -mal

¹⁾ Dividirt man dieselbe durch T_r und drückt die Quotienten: $\frac{T_{r-1}}{T_r}$, $\frac{T_{r-2}}{T_r}$, etc. mit Hilfe der aus (92)

resultirenden Werthe von T_r , T_{r-1} , T_{r-2} , etc. in Function des Exponenten r aus, so ergibt sich die eigenthümliche Gleichung:

$$\left(\frac{1}{r+1} \right)^2 = 1 - \frac{r(r+2)}{2^2} + \frac{r(r-1)(r+2)(r+3)}{2^2 \cdot 3^2} - \frac{r(r-1)(r-2)(r+2)(r+3)(r+4)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} +$$

welche selbstverständlicher Weise nur unter Voraussetzung eines positiven ganzen r richtig bleibt.

zukommende Wurzel repräsentirt, so ergibt sich für die Differenz: $1 - \sum_{k=1}^{k=r} \frac{u_k}{t_k}$ offenbar der Ausdruck:

$$1 - \sum_{k=1}^{k=r} \frac{u_k}{t_k} = \frac{(-1)^r}{(r+1)^2} \left| (w-1) P^{(r)}(2w-1) \right|_0^1 = \frac{(-1)^r P^{(r)}(-1)}{(r+1)^2} = \frac{1}{(r+1)^2},$$

welcher die Richtigkeit der Gleichung (112) ausser allen Zweifel stellt.

5. Sind $t_1, t_2, t_3, \dots, t_r$ die nach ihrer Grösse in aufsteigender Reihe geordneten Wurzeln der Resolvente: $\Omega_2(r, t) = 0$, so lassen sich jene der Gleichung: $\Omega_3(2r, t) = 0$ direct mit Hilfe der Formeln:

$$t'_1 = \frac{1 - \sqrt{t_r}}{2}, \quad t'_2 = \frac{1 - \sqrt{t_{r-1}}}{2}, \quad t'_3 = \frac{1 - \sqrt{t_{r-2}}}{2}, \dots, \quad t'_r = \frac{1 - \sqrt{t_1}}{2};$$

$$t'_{r+1} = \frac{1 + \sqrt{t_1}}{2}, \quad t'_{r+2} = \frac{1 + \sqrt{t_2}}{2}, \quad t'_{r+3} = \frac{1 + \sqrt{t_3}}{2}, \dots, \quad t'_{2r} = \frac{1 + \sqrt{t_r}}{2}$$

berechnen, da die erwähnten Relationen gemäss den Ergebnissen (104) und (105) den folgenden:

$$P^{(2r)}(\sqrt{t}) = 0, \quad P^{(2r)}(2t - 1) = 0$$

äquivalent sind, mithin die erste aus der zweiten durch Vertauschung von t mit $\frac{1 + \sqrt{t}}{2}$ hervorgeht, und die Grösse: \sqrt{t} hiebei zufolge der bekannten Identität: $P^{(2r)}(-w) = P^{(2r)}(w)$ sowohl positiv als negativ genommen werden kann.

6. Jeder die Beziehung: $\Omega_3(r, t) = 0$ befriedigenden Substitution für $t : t_k$ entspricht eine zweite von der Gestalt: $1 - t_k$, welche dieser Resolvente ebenfalls genügt, indem unter der Annahme:

$P^{(r)}(2t_k - 1) = 0$ gleichzeitig $P^{(r)}(2[1 - t_k] - 1) = P^{(r)}(1 - 2t_k) = (-1)^r P^{(r)}(2t_k - 1)$ verschwindet. So oft demnach r eine ungerade Zahl: $2k + 1$ vorstellt, wird eine der Wurzeln von (94) gleich $\frac{1}{2}$, was sich übrigens auch aus der Formel: $P^{(2k+1)}(0) = 0$ entnehmen lässt.

Nachdem wir uns hiemit darüber Gewissheit verschafft haben, dass die Gleichungssysteme (II), (III), (IV) und (V) unter Voraussetzung eines positiven ganzen r stets praktisch brauchbare Werthe für die in ihnen auftretenden Unbekannten: $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_r$; $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots, \Lambda_r$ liefern und ausserdem zu einer Reihe von Sätzen gelangt sind ¹⁾, welche eine relativ einfache Bestimmung der letzteren gestatten, erscheinen noch einige Bemerkungen hinsichtlich der Abgrenzung jener Irrationalzahlen nothwendig, welche sich bei der Auflösung der hier in Betracht kommenden Specialisirungen von (II), (III), (IV) und (V) ergeben.

¹⁾ Hiebei wurden jene Formeln, mittelst welcher sich jeder der Factoren: $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots, \Lambda_r$ direct in Function des ihm correspondirenden ϵ , z. B. also Λ_k durch ϵ_k ausdrücken lässt, desshalb übergangen, weil dieselben für die numerische Berechnung der hier aufzusuchenden Specialisirungen von $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots, \Lambda_r$ keine wesentlichen Vortheile bieten. — Zwischen den letztgenannten Grössen selbst bestehen nur für das Bedingungssystem (II) praktisch verwertbare Relationen; es ist nämlich in diesem Falle zufolge der Beziehungen: $\epsilon_r = 1 - \epsilon_1$, $\epsilon_{r-1} = 1 - \epsilon_2$, $\epsilon_{r-2} = 1 - \epsilon_3$, jederzeit: $\Lambda_1 = \Lambda_r, \Lambda_2 = \Lambda_{r-1}, \Lambda_3 = \Lambda_{r-2}$, etc.

Was zunächst die Anzahl der in die betreffenden Substitutionen für ε und Λ eintretenden Decimalstellen anbelangt, so haben wir dieselbe unter Zugrundelegung des Meters als Längeneinheit in erster Linie durch die Forderung bestimmt, für unsere europäischen Waldbäume die jeweiligen Stammvolumina bis auf drei Decimalen genau zu ermitteln und demgemäss nach einem eingehenden Studium der aus den verschiedenen Massentafeln ersichtlichen mittleren Variationen von Q und l in sämtlichen Cubirungsformeln mit irrationalen Constanten die letzteren durch siebenstellige Näherungswerthe ersetzt. Um aber auch für die Inhaltsberechnung ausländischer stammbildender Holzgewächse, bei welchen — wir erinnern hier nur an *Sequoia gigantea* Endl., *Taxodium distichum* Rich., *Eucalyptus globulus* Labill., *Adansonia digitata* L. — selbst Achsenlängen von 100—120 Metern und Querflächen mit Durchmesser von 10—12 Metern vorkommen können¹⁾, eine analoge Genauigkeit zu ermöglichen, haben wir bei jeder derartigen Cubirungsformel die Constanten ε und Λ überdiess auf neun Decimalen genau angegeben.

Die zweite, noch zu erledigende Frage betrifft das hier bei der Bestimmung der letzten Stellen der jeweiligen Näherungswerthe für $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_r; \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_r$ einzuschlagende Verfahren, zu dessen Feststellung wir von der Discussion des folgenden speciellen Problems ausgehen wollen:

Es sei U eine Grösse, welche mit zwei anderen, wesentlich positiven Veränderlichen: U_1, U_2 durch die Gleichung:

$$(113) \quad U = \tau_1 U_1 + \tau_2 U_2$$

zusammenhängt, deren Constanten τ_1, τ_2 stets den Beziehungen:

$$(114) \quad \tau_1 + \tau_2 = 0.9994, \quad (115) \quad 0.5\tau_1 + 0.3\tau_2 = 0.4768$$

zu genügen haben, mithin die Werthe: $\tau_1 = 0.8849, \tau_2 = 0.1145$ besitzen. Innerhalb welcher Grenzen oscilliren die den Annahmen:

$$(116) \quad U = 0.88 U_1 + 0.11 U_2, \quad (117) \quad U = 0.89 U_1 + 0.11 U_2$$

correspondirenden Fehler Δ_1, Δ_2 , falls U_1, U_2 erfahrungsgemäss immer zwischen 0 und 100 gelegen sind? — Subtrahiren wir die beiden, an Stelle von (113) eingeführten Näherungsformeln von dem Ausdrücke: $0.8849 U_1 + 0.1145 U_2$, so ergeben sich für Δ_1, Δ_2 unmittelbar die Relationen:

$$(118) \quad \Delta_1 = 0.0049 U_1 + 0.0045 U_2, \quad (119) \quad \Delta_2 = -0.0051 U_1 + 0.0045 U_2,$$

respective die Grenzbedingungen: $0 \leq \Delta_1 \leq 0.94, -0.51 \leq \Delta_2 \leq 0.45$, wonach offenbar der zweiten, bezüglich U gemachten Annahme eine grössere praktische Brauchbarkeit als der ersten zukommt. Da ferner die Summen: $\tau_1 + \tau_2$ und $0.5\tau_1 + 0.3\tau_2$ für die diesen Annahmen charakteristischen Coëfficientenpaare: $\tau_1 = 0.88, \tau_2 = 0.11; \tau_1 = 0.89, \tau_2 = 0.11$ die Werthe: 0.99, 0.473; 1.00, 0.478 erhalten, so werden auch die Fundamentalgleichungen (114), (115) durch die Constanten von (117) bedeutend schärfer als durch jene von (116) erfüllt, welche Resultate in einfacher Weise den nachstehenden wichtigen Satz erläutern:

¹⁾ Nähere Daten über derartige, durch ihre Höhe oder ihren Umfang ausgezeichnete Baumformen findet man in dem 1863 in Leipzig und Heidelberg erschienenen Werke von E. Mielck: „Die Riesen der Pflanzenwelt“, welches ausserdem auch eine Beschreibung der grössten, damals bekannten Exemplare unserer einheimischen Waldbäume enthält.

Sobald die veränderlichen Elemente einer gegebenen Formel, für deren numerische Constanten: τ', τ'', τ''' , bestimmte Bedingungsgleichungen bestehen, nur innerhalb eines endlichen Bereiches variiren, können τ', τ'', τ''' , unter Umständen durch gewisse Näherungswerthe ersetzt werden, die nicht allein die betreffenden Relationen zwischen τ', τ'', τ''' , genauer als die auf eine gleiche Zahl von Decimalen richtigen Substitutionen für τ', τ'' , erfüllen, sondern auch praktisch brauchbarere Näherungsformeln als die letzteren liefern.

Mit Rücksicht hierauf haben wir daher für die irrationalen Specialisirungen von $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_r$; $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots, \Lambda_r$ stets solche siebenstellige Substitutionen gewählt, welche in möglichster Uebereinstimmung mit den jeweiligen wahren Werthen der genannten Grössen die diesen zugehörigen Bestimmungsgleichungen auf sieben Decimalstellen genau erfüllen und, um ersichtlich zu machen, dass diese Forderung von Fall zu Fall thatsächlich befriedigt wird, jeder derartigen Cubirungsformel neunstellige Proberechnungen beigegeben.

Gemäss diesen Ueberlegungen gestaltet sich die endgiltige Lösung der uns in dem vorliegenden Paragraphen gestellten Aufgabe in schematischer Darstellungsweise, wie folgt:

Erste Specialisirung: $Q = B_0 + B_1z$.

$$(120) \quad V = \frac{l}{2} \{ Q_0 + Q_1 \}, \text{ oder bei unbestimmbaren Endflächen: (121) } \quad V = Q_{0.5} l.$$

Zweite Specialisirung: $Q = B_0 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3$.

$$(122) \quad V = \frac{l}{6} \left\{ Q_0 + 4Q_{\frac{1}{2}} + Q_1 \right\}, \text{ oder: (123) } \quad V = \frac{l}{3} \left\{ 2 \left(Q_{\frac{1}{4}} + Q_{\frac{3}{4}} \right) - Q_{\frac{1}{2}} \right\},$$

$$\text{beziehungsweise: (124) . . } V = \frac{l}{2} \left\{ Q_{0.2113249} + Q_{0.7886751} \right\}^{1)}.$$

1) Die Formel (124) bildet zugleich die wichtigste Specialisirung des Ausdruckes:

$$V = \frac{l}{s} \left\{ Q_{\varepsilon_1} + Q_{\varepsilon_2} + Q_{\varepsilon_3} + \dots + Q_{\varepsilon_s} \right\},$$

in welchem $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_s$ die Bedingungen:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_s = \frac{s}{2}, \quad \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \dots + \varepsilon_s^2 = \frac{s}{3}, \quad \varepsilon_1^3 + \varepsilon_2^3 + \varepsilon_3^3 + \dots + \varepsilon_s^3 = \frac{s}{4},$$

$$\dots \varepsilon_1^s + \varepsilon_2^s + \varepsilon_3^s + \dots + \varepsilon_s^s = \frac{s}{s+1}$$

zu erfüllen haben, also die s positiven, zwischen 0 und 1 gelegenen Wurzeln der Gleichung:

$$\varepsilon^s - \frac{s}{2} \varepsilon^{s-1} + \frac{s(3s-4)}{24} \varepsilon^{s-2} - \frac{s(s-2)^2}{48} \varepsilon^{s-3} + \frac{s(15s^3 - 120s^2 + 320s - 288)}{5760} \varepsilon^{s-4} - \dots = 0$$

vorstellen. — Von den übrigen Specialisirungen des erwähnten Ausdruckes mögen hier wenigstens noch die den Substitutionen: $s = 3, 4, 5, 6$ entsprechenden Cubirungsformeln angeführt werden, deren charakteristische Constanten: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4;$ sich durch Auflösung der Resolventen:

$$\varepsilon^3 - \frac{3}{2} \varepsilon^2 + \frac{5}{8} \varepsilon - \frac{1}{16} = 0, \quad \varepsilon^4 - 2\varepsilon^3 + \frac{4}{3} \varepsilon^2 - \frac{1}{3} \varepsilon + \frac{1}{45} = 0,$$

$$\varepsilon^5 - \frac{5}{2} \varepsilon^4 + \frac{55}{24} \varepsilon^3 - \frac{15}{16} \varepsilon^2 + \frac{187}{1152} \varepsilon - \frac{19}{2304} = 0, \quad \varepsilon^6 - 3\varepsilon^5 + \frac{7}{2} \varepsilon^4 - 2\varepsilon^3 + \frac{23}{40} \varepsilon^2 - \frac{3}{40} \varepsilon + \frac{1}{336} = 0$$

ergeben und demgemäss ursprünglich in den Formen:

Proberechnung für (124):

$$\begin{array}{l}
 \Lambda_1 = 0\cdot500,000,000 \\
 \Lambda_2 = 0\cdot500,000,000 \\
 \hline
 \sum_{k=1}^{k=2} \Lambda_k = 1\cdot000,000,000 \\
 = \frac{1}{1}.
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \epsilon_1 \Lambda_1 = 0\cdot105,662,450 \\
 \epsilon_2 \Lambda_2 = 0\cdot394,337,550 \\
 \hline
 \sum_{k=1}^{k=2} \epsilon_k \Lambda_k = 0\cdot500,000,000 \\
 = \frac{1}{2}.
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \epsilon_1^2 \Lambda_1 = 0\cdot022,329,107 \\
 \epsilon_2^2 \Lambda_2 = 0\cdot311,004,207 \\
 \hline
 \sum_{k=1}^{k=2} \epsilon_k^2 \Lambda_k = 0\cdot333,333,314 \\
 = \frac{1}{3} - \frac{0\cdot19}{10^7}.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \epsilon_1^3 \Lambda_1 = 0\cdot004,718,696 \\
 \epsilon_2^3 \Lambda_2 = 0\cdot245,281,274 \\
 \hline
 \sum_{k=1}^{k=2} \epsilon_k^3 \Lambda_k = 0\cdot249,999,970 = \frac{1}{4} - \frac{0\cdot30}{10^7}.
 \end{array}$$

Die der Cubirungsformel (124) zugehörige Resolvente lautet: $\Omega_3(2, \epsilon) = 0$; es sind also die wahren Werthe der Irrationalzahlen ϵ_1, ϵ_2 hier: $\epsilon_1 = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}, \epsilon_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$, und deren neunstellige Näherungswerthe: $\epsilon_1 = 0\cdot211,324,865; \epsilon_2 = 0\cdot788,675,135$.

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 &= \frac{2 - \sqrt{2}}{4}, \quad \epsilon_2 = \frac{1}{2}, \quad \epsilon_3 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}, \\
 \epsilon_1 &= \frac{15 - \sqrt{75 + 30\sqrt{5}}}{30}, \quad \epsilon_2 = \frac{15 - \sqrt{75 - 30\sqrt{5}}}{30}, \quad \epsilon_3 = \frac{15 + \sqrt{75 - 30\sqrt{5}}}{30}, \quad \epsilon_4 = \frac{15 + \sqrt{75 + 30\sqrt{5}}}{30}; \\
 \epsilon_1 &= \frac{6 - \sqrt{15 + 3\sqrt{11}}}{12}, \quad \epsilon_2 = \frac{6 - \sqrt{15 - 3\sqrt{11}}}{12}, \quad \epsilon_3 = \frac{1}{2}, \quad \epsilon_4 = \frac{6 + \sqrt{15 - 3\sqrt{11}}}{12}, \quad \epsilon_5 = \frac{6 + \sqrt{15 + 3\sqrt{11}}}{12}; \\
 \epsilon_1 &= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{3\sqrt{10}} \cos\left(\frac{1}{3} \arcsin \frac{3}{7}\right)}, \quad \epsilon_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{3\sqrt{10}} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \arcsin \frac{3}{7}\right)}, \\
 \epsilon_3 &= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{3\sqrt{10}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arcsin \frac{3}{7}\right)}, \quad \epsilon_4 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{3\sqrt{10}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arcsin \frac{3}{7}\right)}, \\
 \epsilon_5 &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{3\sqrt{10}} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \arcsin \frac{3}{7}\right)}, \quad \epsilon_6 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{3\sqrt{10}} \cos\left(\frac{1}{3} \arcsin \frac{3}{7}\right)}
 \end{aligned}$$

auftreten. Verwandelt man diese Grössen in Decimalbrüche, so erhält man schliesslich die Cubirungsformeln:

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \quad V &= \frac{l}{3} \left\{ Q_{0\cdot1464466} + Q_{0\cdot5} + Q_{0\cdot8535534} \right\}, \\
 (\beta) \quad V &= \frac{l}{4} \left\{ Q_{0\cdot1026728} + Q_{0\cdot4062038} + Q_{0\cdot5937962} + Q_{0\cdot8973272} \right\}, \\
 (\gamma) \quad V &= \frac{l}{5} \left\{ Q_{0\cdot0897513} + Q_{0\cdot3127293} + Q_{0\cdot5} + Q_{0\cdot6872707} + Q_{0\cdot9162487} \right\}, \\
 (\delta) \quad V &= \frac{l}{6} \left\{ Q_{0\cdot0668766} + Q_{0\cdot2887407} + Q_{0\cdot3666823} + Q_{0\cdot6333177} + Q_{0\cdot7112593} + Q_{0\cdot9331234} \right\},
 \end{aligned}$$

von welchen die erste kein grösseres Anwendungsgebiet als (122), (123), (124) besitzt, die zweite und dritte unter denselben Voraussetzungen wie (125), (126), (127) gelten, während der Cubirungsformel (δ) eine ebenso grosse Allgemeinheit wie den Ausdrücken (129), (130), (131) zukommt.

Dritte Specialisirung: $Q = B_0 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 + B_4z^4 + B_5z^5$.

$$(125) \quad V = \frac{l}{90} \left\{ 7(Q_0 + Q_1) + 12 Q_{\frac{1}{2}} + 32 \left(Q_{\frac{1}{4}} + Q_{\frac{3}{4}} \right) \right\}, \text{ oder:}$$

$$(126) \quad V = \frac{l}{20} \left\{ 11 \left(Q_{\frac{1}{6}} + Q_{\frac{5}{6}} \right) + 26 Q_{\frac{1}{2}} - 14 \left(Q_{\frac{1}{3}} + Q_{\frac{2}{3}} \right) \right\}, \text{ beziehungsweise:}$$

$$(127) \quad V = \frac{l}{18} \left\{ 5(Q_{0.1127017} + Q_{0.8872983}) + 8Q_{0.5} \right\}.$$

Proberechnung für (127):

$$\Lambda_1 = 0.277,777,778$$

$$\Lambda_2 = 0.444,444,444$$

$$\Lambda_3 = 0.277,777,778$$

$$\varepsilon_1 \Lambda_1 = 0.031,306,028$$

$$\varepsilon_2 \Lambda_2 = 0.222,222,222$$

$$\varepsilon_3 \Lambda_3 = 0.246,471,750$$

$$\varepsilon_1^2 \Lambda_1 = 0.003,528,243$$

$$\varepsilon_2^2 \Lambda_2 = 0.111,111,111$$

$$\varepsilon_3^2 \Lambda_3 = 0.218,693,965$$

$$\sum_{k=1}^{k=3} \Lambda_k = 1.000,000,000$$

$$\sum_{k=1}^{k=3} \varepsilon_k \Lambda_k = 0.500,000,000$$

$$\sum_{k=1}^{k=3} \varepsilon_k^2 \Lambda_k = 0.333,333,319$$

$$= \frac{1}{1}.$$

$$= \frac{1}{2}.$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{0.14}{10^7}.$$

$$\varepsilon_1^3 \Lambda_1 = 0.000,397,639$$

$$\varepsilon_2^3 \Lambda_2 = 0.055,555,556$$

$$\varepsilon_3^3 \Lambda_3 = 0.194,046,783$$

$$\varepsilon_1^4 \Lambda_1 = 0.000,044,815$$

$$\varepsilon_2^4 \Lambda_2 = 0.027,777,778$$

$$\varepsilon_3^4 \Lambda_3 = 0.172,177,381$$

$$\varepsilon_1^5 \Lambda_1 = 0.000,005,051$$

$$\varepsilon_2^5 \Lambda_2 = 0.013,888,889$$

$$\varepsilon_3^5 \Lambda_3 = 0.152,772,697$$

$$\sum_{k=1}^{k=3} \varepsilon_k^3 \Lambda_k = 0.249,999,978$$

$$\sum_{k=1}^{k=3} \varepsilon_k^4 \Lambda_k = 0.199,999,974$$

$$\sum_{k=1}^{k=3} \varepsilon_k^5 \Lambda_k = 0.166,666,637$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{0.22}{10^7}.$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{0.26}{10^7}.$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{0.30}{10^7}.$$

Die der Cubirungsformel (127) zugehörige Resolvente lautet: $\Omega_3(3, \varepsilon) = 0$; es sind also die wahren Werthe der Irrationalzahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ hier: $\varepsilon_1 = \frac{5 - \sqrt{15}}{10}, \varepsilon_3 = \frac{5 + \sqrt{15}}{10}$, und deren neunstellige Näherungswerthe: $\varepsilon_1 = 0.112,701,665; \varepsilon_3 = 0.887,298,335$.

Verschwinden in Q die Constanten B_0 und B_5 , so tritt an die Stelle von (127) die einfachere Cubirungsformel:

$$(128) \quad \tilde{V} = l \left\{ 0.5124858 Q_{0.3550510} + 0.3764031 Q_{0.8449490} \right\}.$$

Proberechnung für (128):

$$\varepsilon_1 \Lambda_1 = 0.181,958,596$$

$$\varepsilon_2 \Lambda_2 = 0.318,041,423$$

$$\varepsilon_1^2 \Lambda_1 = 0.064,604,581$$

$$\varepsilon_2^2 \Lambda_2 = 0.268,728,782$$

$$\varepsilon_1^3 \Lambda_1 = 0.022,937,921$$

$$\varepsilon_2^3 \Lambda_2 = 0.227,062,116$$

$$\sum_{k=1}^{k=2} \varepsilon_k \Lambda_k = 0.500,000,019$$

$$\sum_{k=1}^{k=2} \varepsilon_k^2 \Lambda_k = 0.333,333,363$$

$$\sum_{k=1}^{k=2} \varepsilon_k^3 \Lambda_k = 0.250,000,037$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{0.19}{10^7}.$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{0.30}{10^7}.$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{0.37}{10^7}.$$

$$\varepsilon_1^4 \Lambda_1 = 0.008,144,132$$

$$\varepsilon_2^4 \Lambda_2 = 0.191,855,908$$

$$\sum_{k=1}^{k=2} \varepsilon_k^4 \Lambda_k = 0.200,000,040 = \frac{1}{5} + \frac{0.40}{10^7}.$$

Die der Cubirungsformel (128) zugehörige Resolvente lautet: $\Omega_1(2, \epsilon) = 0$; es sind also die wahren Werthe der Irrationalzahlen $\epsilon_1, \epsilon_2, \Lambda_1, \Lambda_2$ hier:

$$\epsilon_1 = \frac{6 - \sqrt{6}}{10}, \quad \epsilon_2 = \frac{6 + \sqrt{6}}{10}, \quad \Lambda_1 = \frac{16 + \sqrt{6}}{36}, \quad \Lambda_2 = \frac{16 - \sqrt{6}}{36},$$

und deren neunstellige Näherungswerthe: $\epsilon_1 = 0.355,051,026$; $\epsilon_2 = 0.844,948,974$; $\Lambda_1 = 0.512,485,826$; $\Lambda_2 = 0.376,403,063$.

Vierte Specialisirung: $Q = B_0 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 + B_4z^4 + B_5z^5 + B_6z^6 + B_7z^7$.

$$(129) \quad V = \frac{l}{840} \left\{ 41(Q_0 + Q_1) + 216 \left(\frac{Q_1 + Q_5}{6} \right) + 27 \left(\frac{Q_1 + Q_2}{3} \right) + 272 \frac{Q_1}{2} \right\}, \text{ oder:}$$

$$(130) \dots V = \frac{l}{945} \left\{ 460 \left(\frac{Q_1 + Q_7}{8} \right) + 2196 \left(\frac{Q_3 + Q_5}{8} \right) - 954 \left(\frac{Q_1 + Q_3}{4} \right) - 2459 \frac{Q_1}{2} \right\},$$

beziehungsweise:

$$(131) \quad V = l \left\{ 0.1739274 (Q_{0.0694318} + Q_{0.9305682}) + 0.3260726 (Q_{0.3300095} + Q_{0.6699905}) \right\}.$$

Proberechnung für (131):

$$\Lambda_1 = 0.173,927,400$$

$$\epsilon_1 \Lambda_1 = 0.012,076,092$$

$$\epsilon_1^2 \Lambda_1 = 0.000,838,465$$

$$\Lambda_2 = 0.326,072,600$$

$$\epsilon_2 \Lambda_2 = 0.107,607,056$$

$$\epsilon_2^2 \Lambda_2 = 0.035,511,351$$

$$\Lambda_3 = 0.326,072,600$$

$$\epsilon_3 \Lambda_3 = 0.218,465,544$$

$$\epsilon_3^2 \Lambda_3 = 0.146,369,839$$

$$\Lambda_4 = 0.173,927,400$$

$$\epsilon_4 \Lambda_4 = 0.161,851,308$$

$$\epsilon_4^2 \Lambda_4 = 0.150,613,680$$

$$\sum_{k=1}^{k=4} \Lambda_k = 1.000,000,000$$

$$\sum_{k=1}^{k=4} \epsilon_k \Lambda_k = 0.500,000,000$$

$$\sum_{k=1}^{k=4} \epsilon_k^2 \Lambda_k = 0.333,333,335$$

$$= \frac{1}{1}.$$

$$= \frac{1}{2}.$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{0.02}{10^7}.$$

$$\epsilon_1^3 \Lambda_1 = 0.000,058,216$$

$$\epsilon_1^4 \Lambda_1 = 0.000,004,042$$

$$\epsilon_1^5 \Lambda_1 = 0.000,000,281$$

$$\epsilon_2^3 \Lambda_2 = 0.011,719,083$$

$$\epsilon_2^4 \Lambda_2 = 0.003,867,409$$

$$\epsilon_2^5 \Lambda_2 = 0.001,276,282$$

$$\epsilon_3^3 \Lambda_3 = 0.098,066,402$$

$$\epsilon_3^4 \Lambda_3 = 0.065,703,558$$

$$\epsilon_3^5 \Lambda_3 = 0.044,020,759$$

$$\epsilon_4^3 \Lambda_4 = 0.140,156,301$$

$$\epsilon_4^4 \Lambda_4 = 0.130,424,997$$

$$\epsilon_4^5 \Lambda_4 = 0.121,369,354$$

$$\sum_{k=1}^{k=4} \epsilon_k^3 \Lambda_k = 0.250,000,002$$

$$\sum_{k=1}^{k=4} \epsilon_k^4 \Lambda_k = 0.200,000,006$$

$$\sum_{k=1}^{k=4} \epsilon_k^5 \Lambda_k = 0.166,666,676$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{0.02}{10^7}.$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{0.06}{10^7}.$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{0.09}{10^7}.$$

$$\epsilon_1^6 \Lambda_1 = 0.000,000,019$$

$$\epsilon_1^7 \Lambda_1 = 0.000,000,001$$

$$\epsilon_2^6 \Lambda_2 = 0.000,421,185$$

$$\epsilon_2^7 \Lambda_2 = 0.000,138,995$$

$$\epsilon_3^6 \Lambda_3 = 0.029,493,491$$

$$\epsilon_3^7 \Lambda_3 = 0.019,760,359$$

$$\epsilon_4^6 \Lambda_4 = 0.112,942,462$$

$$\epsilon_4^7 \Lambda_4 = 0.105,100,663$$

$$\sum_{k=1}^{k=4} \epsilon_k^6 \Lambda_k = 0.142,857,157 = \frac{1}{7} + \frac{0.14}{10^7}.$$

$$\sum_{k=1}^{k=4} \epsilon_k^7 \Lambda_k = 0.125,000,018 = \frac{1}{8} + \frac{0.18}{10^7}.$$

Die der Cubirungsformel (131) zugehörige Resolvente lautet: $\Omega_3(4, \epsilon) = 0$; es sind also die wahren Werthe der Irrationalzahlen $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$ hier:

$$\epsilon_1 = \frac{35 - \sqrt{525 + 70\sqrt{30}}}{70}, \quad \epsilon_2 = \frac{35 - \sqrt{525 - 70\sqrt{30}}}{70}, \quad \epsilon_3 = \frac{35 + \sqrt{525 - 70\sqrt{30}}}{70},$$

$$\epsilon_4 = \frac{35 + \sqrt{525 + 70\sqrt{30}}}{70}, \quad \Lambda_1 = \Lambda_4 = \frac{18 - \sqrt{30}}{72}, \quad \Lambda_2 = \Lambda_3 = \frac{18 + \sqrt{30}}{72},$$

und deren neunstellige Näherungswerthe:

$\epsilon_1 = 0.069,431,844$; $\epsilon_2 = 0.330,009,478$; $\epsilon_3 = 0.669,990,522$; $\epsilon_4 = 0.930,568,156$;
 $\Lambda_1 = \Lambda_4 = 0.173,927,423$; $\Lambda_2 = \Lambda_3 = 0.326,072,577$. — Unter folgenden drei Annahmen lässt sich die Gleichung (131) durch einfachere Cubirungsformeln ersetzen:

Erste Annahme: $B_0 = B_7 = 0$.

$$(132) \quad V = l \left\{ 0.3288443 Q_{0.2123405} + 0.3881935 Q_{0.5905331} + 0.2204622 Q_{0.9114120} \right\}.$$

Proberechnung für (132):

$\epsilon_1 \Lambda_1 = 0.069,826,963$	$\epsilon_1^2 \Lambda_1 = 0.014,827,092$	$\epsilon_1^3 \Lambda_1 = 0.003,148,392$
$\epsilon_2 \Lambda_2 = 0.229,241,111$	$\epsilon_2^2 \Lambda_2 = 0.135,374,464$	$\epsilon_2^3 \Lambda_2 = 0.079,943,102$
$\epsilon_3 \Lambda_3 = 0.200,931,895$	$\epsilon_3^2 \Lambda_3 = 0.183,131,740$	$\epsilon_3^3 \Lambda_3 = 0.166,908,465$

$$\sum_{k=1}^{k=3} \epsilon_k \Lambda_k = 0.499,999,969$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{0.31}{10^7}.$$

$$\sum_{k=1}^{k=3} \epsilon_k^2 \Lambda_k = 0.333,333,296$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{0.37}{10^7}.$$

$$\sum_{k=1}^{k=3} \epsilon_k^3 \Lambda_k = 0.249,999,959$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{0.41}{10^7}.$$

$\epsilon_1^4 \Lambda_1 = 0.000,668,531$	$\epsilon_1^5 \Lambda_1 = 0.000,141,956$	$\epsilon_1^6 \Lambda_1 = 0.000,030,143$
$\epsilon_2^4 \Lambda_2 = 0.047,209,048$	$\epsilon_2^5 \Lambda_2 = 0.027,878,505$	$\epsilon_2^6 \Lambda_2 = 0.016,463,180$
$\epsilon_3^4 \Lambda_3 = 0.152,122,378$	$\epsilon_3^5 \Lambda_3 = 0.138,646,161$	$\epsilon_3^6 \Lambda_3 = 0.126,363,775$

$$\sum_{k=1}^{k=3} \epsilon_k^4 \Lambda_k = 0.199,999,957$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{0.43}{10^7}.$$

$$\sum_{k=1}^{k=3} \epsilon_k^5 \Lambda_k = 0.166,666,622$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{0.45}{10^7}.$$

$$\sum_{k=1}^{k=3} \epsilon_k^6 \Lambda_k = 0.142,857,098$$

$$= \frac{1}{7} - \frac{0.45}{10^7}.$$

Da die Wurzeln der (132) zugehörigen Resolvente: $\Omega_1(3, \epsilon) = 0$ erst nach Einführung transcendenten Functionen in geschlossener Form dargestellt werden könnten, finden sich hier nur die neunstelligen Näherungswerthe von $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ angegeben:

$$\epsilon_1 = 0.212,340,538; \quad \epsilon_2 = 0.590,533,136; \quad \epsilon_3 = 0.911,412,040; \quad \Lambda_1 = 0.328,844,320;$$

$$\Lambda_2 = 0.388,193,469; \quad \Lambda_3 = 0.220,462,211.$$

Zweite Annahme: $B_1 = B_3 = B_5 = B_7 = 0$.

$$(133) \quad V = l \left\{ 0.6521452 Q_{0.3399811} + 0.3478548 Q_{0.8611363} \right\}.$$

Proberechnung für (133):

$$\begin{array}{r} \Lambda_1 = 0.652,145,200 \\ \Lambda_2 = 0.347,854,800 \\ \hline \sum_{k=1}^{k=2} \Lambda_k = 1.000,000,000 \\ = \frac{1}{1}. \end{array} \quad \begin{array}{r} \varepsilon_1^2 \Lambda_1 = 0.075,379,604 \\ \varepsilon_2^2 \Lambda_2 = 0.257,953,719 \\ \hline \sum_{k=1}^{k=2} \varepsilon_k^2 \Lambda_k = 0.333,333,323 \\ = \frac{1}{3} - \frac{0.10}{10^7}. \end{array} \quad \begin{array}{r} \varepsilon_1^4 \Lambda_1 = 0.008,712,913 \\ \varepsilon_2^4 \Lambda_2 = 0.191,287,058 \\ \hline \sum_{k=1}^{k=2} \varepsilon_k^4 \Lambda_k = 0.199,999,971 \\ = \frac{1}{5} - \frac{0.29}{10^7}. \end{array}$$

$$\varepsilon_1^6 \Lambda_1 = 0.001,007,101$$

$$\varepsilon_2^6 \Lambda_2 = 0.141,850,013$$

$$\sum_{k=1}^{k=2} \varepsilon_k^6 \Lambda_k = 0.142,857,114 = \frac{1}{7} - \frac{0.29}{10^7}.$$

Die der Cubirungsformel (133) zugehörige Resolvente lautet: $\Omega_2(2, \varepsilon^2) = 0$; es sind also die wahren Werthe ¹⁾ der Irrationalzahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \Lambda_1, \Lambda_2$ hier:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{15 - 2\sqrt{30}}{35}}, \quad \varepsilon_2 = \sqrt{\frac{15 + 2\sqrt{30}}{35}}, \quad \Lambda_1 = \frac{18 + \sqrt{30}}{36}, \quad \Lambda_2 = \frac{18 - \sqrt{30}}{36},$$

und deren neunstellige Näherungswerte: $\varepsilon_1 = 0.339,981,044$; $\varepsilon_2 = 0.861,136,312$; $\Lambda_1 = 0.652,145,155$; $\Lambda_2 = 0.347,854,845$.

Dritte Annahme: $B_0 = B_2 = B_4 = B_6 = 0$.

$$(134) \quad V = l \left\{ 0.5438319 Q_{0.4597009} + 0.2815081 Q_{0.8380738} \right\}$$

Proberechnung für (134):

$$\begin{array}{r} \varepsilon_1 \Lambda_1 = 0.250,000,014 \\ \varepsilon_2 \Lambda_2 = 0.249,999,968 \\ \hline \sum_{k=1}^{k=2} \varepsilon_k \Lambda_k = 0.499,999,982 \\ = \frac{1}{2} - \frac{0.18}{10^7}. \end{array} \quad \begin{array}{r} \varepsilon_1^3 \Lambda_1 = 0.052,831,232 \\ \varepsilon_2^3 \Lambda_2 = 0.197,168,743 \\ \hline \sum_{k=1}^{k=2} \varepsilon_k^3 \Lambda_k = 0.249,999,975 \\ = \frac{1}{4} - \frac{0.25}{10^7}. \end{array} \quad \begin{array}{r} \varepsilon_1^5 \Lambda_1 = 0.011,164,556 \\ \varepsilon_2^5 \Lambda_2 = 0.155,502,073 \\ \hline \sum_{k=1}^{k=2} \varepsilon_k^5 \Lambda_k = 0.166,666,629 \\ = \frac{1}{6} - \frac{0.38}{10^7}. \end{array}$$

$$\varepsilon_1^7 \Lambda_1 = 0.002,359,349$$

$$\varepsilon_2^7 \Lambda_2 = 0.122,640,609$$

$$\sum_{k=1}^{k=2} \varepsilon_k^7 \Lambda_k = 0.124,999,958 = \frac{1}{8} - \frac{0.42}{10^7}.$$

¹⁾ Die Substitution der auf sieben Stellen richtigen Werthe von $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \Lambda_1, \Lambda_2$ in das für diese Größen charakteristische Gleichungssystem liefert hier statt der Brüche: $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$ die Resultate:

$$\frac{1}{3} - \frac{0.54}{10^7}, \quad \frac{1}{5} - \frac{0.39}{10^7}, \quad \frac{1}{7} - \frac{0.31}{10^7}.$$

Die der Cubirungsformel (134) zugehörige Resolvente lautet: $\Omega_3(2, \epsilon^2) = 0$; es sind also die wahren Werthe¹⁾ der Irrationalzahlen $\epsilon_1, \epsilon_2, \Lambda_1, \Lambda_2$ hier:

$$\epsilon_1 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{6}}, \quad \epsilon_2 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{6}}, \quad \Lambda_1 = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{3}}}{4}, \quad \Lambda_2 = \frac{\sqrt{3 - \sqrt{3}}}{4},$$

und deren neunstellige Näherungswerthe: $\epsilon_1 = 0.459,700,843$; $\epsilon_2 = 0.888,073,834$; $\Lambda_1 = 0.543,831,937$; $\Lambda_2 = 0.281,508,125$.

Fünfte Specialisirung:

$$Q = B_0 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 + B_4z^4 + B_5z^5 + B_6z^6 + B_7z^7 + B_8z^8 + B_9z^9.$$

$$(135) \quad V = \frac{l}{28350} \left\{ 989 (Q_0 + Q_1) + 5888 \left(\frac{Q_1}{8} + \frac{Q_7}{8} \right) + 10496 \left(\frac{Q_3}{8} + \frac{Q_5}{8} \right) - \right. \\ \left. - 928 \left(\frac{Q_1}{4} + \frac{Q_3}{4} \right) - 4540 \frac{Q_1}{2} \right\}, \text{ oder:}$$

$$(136) \quad V = \frac{l}{9072} \left\{ 4045 \left(\frac{Q_1}{10} + \frac{Q_9}{10} \right) + 33340 \left(\frac{Q_3}{10} + \frac{Q_7}{10} \right) + 67822 \frac{Q_1}{2} - \right. \\ \left. - 11690 \left(\frac{Q_1}{5} + \frac{Q_4}{5} \right) - 55070 \left(\frac{Q_2}{5} + \frac{Q_3}{5} \right) \right\}, \text{ beziehungsweise:}$$

$$(137) \dots V = l \left\{ 0.1184635 (Q_{0.0469101} + Q_{0.9530899}) + 0.2393143 (Q_{0.2307653} + Q_{0.7692347}) + \right. \\ \left. + 0.2844444 Q_{0.5} \right\}.$$

Proberechnung für (137):

$\Lambda_1 = 0.118,463,500$	$\epsilon_1 \Lambda_1 = 0.005,557,135$	$\epsilon_1^2 \Lambda_1 = 0.000,260,686$
$\Lambda_2 = 0.239,314,300$	$\epsilon_2 \Lambda_2 = 0.055,225,436$	$\epsilon_2^2 \Lambda_2 = 0.012,744,114$
$\Lambda_3 = 0.284,444,400$	$\epsilon_3 \Lambda_3 = 0.142,222,200$	$\epsilon_3^2 \Lambda_3 = 0.071,111,100$
$\Lambda_4 = 0.239,314,300$	$\epsilon_4 \Lambda_4 = 0.184,088,864$	$\epsilon_4^2 \Lambda_4 = 0.141,607,542$
$\Lambda_5 = 0.118,463,500$	$\epsilon_5 \Lambda_5 = 0.112,906,365$	$\epsilon_5^2 \Lambda_5 = 0.107,609,916$

$$\sum_{k=1}^{k=5} \Lambda_k = 1.000,000,000 \\ = \frac{1}{1}.$$

$$\sum_{k=1}^{k=5} \epsilon_k \Lambda_k = 0.500,000,000 \\ = \frac{1}{2}.$$

$$\sum_{k=1}^{k=5} \epsilon_k^2 \Lambda_k = 0.333,333,358 \\ = \frac{1}{3} + \frac{0.25}{10^7}.$$

¹⁾ Die Substitution der auf sieben Stellen richtigen Werthe von $\epsilon_1, \epsilon_2, \Lambda_1, \Lambda_2$ in das für diese Grössen charakteristische Gleichungssystem liefert hier statt der Brüche: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ die Resultate:

$$\frac{1}{2} - \frac{0.73}{10^7}, \quad \frac{1}{4} - \frac{0.59}{10^7}, \quad \frac{1}{6} - \frac{0.50}{10^7}, \quad \frac{1}{8} - \frac{0.46}{10^7}.$$

$$\begin{aligned} \epsilon_1^3 \Lambda_1 &= 0\cdot000,012,229 \\ \epsilon_2^3 \Lambda_2 &= 0\cdot002,940,899 \\ \epsilon_3^3 \Lambda_3 &= 0\cdot035,555,550 \\ \epsilon_4^3 \Lambda_4 &= 0\cdot108,929,435 \\ \epsilon_5^3 \Lambda_5 &= 0\cdot102,561,925 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_1^4 \Lambda_1 &= 0\cdot000,000,574 \\ \epsilon_2^4 \Lambda_2 &= 0\cdot000,678,658 \\ \epsilon_3^4 \Lambda_3 &= 0\cdot017,777,775 \\ \epsilon_4^4 \Lambda_4 &= 0\cdot083,792,301 \\ \epsilon_5^4 \Lambda_5 &= 0\cdot097,750,734 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_1^5 \Lambda_1 &= 0\cdot000,000,027 \\ \epsilon_2^5 \Lambda_2 &= 0\cdot000,156,611 \\ \epsilon_3^5 \Lambda_3 &= 0\cdot008,888,888 \\ \epsilon_4^5 \Lambda_4 &= 0\cdot064,455,946 \\ \epsilon_5^5 \Lambda_5 &= 0\cdot093,165,238 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=5} \epsilon_k^3 \Lambda_k &= 0\cdot250,000,038 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{0\cdot38}{10^7}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=5} \epsilon_k^4 \Lambda_k &= 0\cdot200,000,042 \\ &= \frac{1}{5} + \frac{0\cdot42}{10^7}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=5} \epsilon_k^5 \Lambda_k &= 0\cdot166,666,710 \\ &= \frac{1}{6} + \frac{0\cdot43}{10^7}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_1^6 \Lambda_1 &= 0\cdot000,000,001 \\ \epsilon_2^6 \Lambda_2 &= 0\cdot000,036,140 \\ \epsilon_3^6 \Lambda_3 &= 0\cdot004,444,444 \\ \epsilon_4^6 \Lambda_4 &= 0\cdot049,581,750 \\ \epsilon_5^6 \Lambda_5 &= 0\cdot088,794,847 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_1^7 \Lambda_1 &= 0\cdot000,000,000 \\ \epsilon_2^7 \Lambda_2 &= 0\cdot000,008,340 \\ \epsilon_3^7 \Lambda_3 &= 0\cdot002,222,222 \\ \epsilon_4^7 \Lambda_4 &= 0\cdot038,140,003 \\ \epsilon_5^7 \Lambda_5 &= 0\cdot084,629,472 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_1^8 \Lambda_1 &= 0\cdot000,000,000 \\ \epsilon_2^8 \Lambda_2 &= 0\cdot000,001,925 \\ \epsilon_3^8 \Lambda_3 &= 0\cdot001,111,111 \\ \epsilon_4^8 \Lambda_4 &= 0\cdot029,338,613 \\ \epsilon_5^8 \Lambda_5 &= 0\cdot080,659,495 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=5} \epsilon_k^6 \Lambda_k &= 0\cdot142,857,182 \\ &= \frac{1}{7} + \frac{0\cdot39}{10^7}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=5} \epsilon_k^7 \Lambda_k &= 0\cdot125,000,037 \\ &= \frac{1}{8} + \frac{0\cdot37}{10^7}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=5} \epsilon_k^8 \Lambda_k &= 0\cdot111,111,144 \\ &= \frac{1}{9} + \frac{0\cdot33}{10^7}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_1^9 \Lambda_1 &= 0\cdot000,000,000 \\ \epsilon_2^9 \Lambda_2 &= 0\cdot000,000,444 \\ \epsilon_3^9 \Lambda_3 &= 0\cdot000,555,555 \\ \epsilon_4^9 \Lambda_4 &= 0\cdot022,568,280 \\ \epsilon_5^9 \Lambda_5 &= 0\cdot076,875,750 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{k=5} \epsilon_k^9 \Lambda_k = 0\cdot100,000,029 = \frac{1}{10} + \frac{0\cdot29}{10^7}.$$

Die der Cubirungsformel (137) zugehörige Resolvente lautet: $\Omega_3(5, \epsilon) = 0$; es sind also die wahren Werthe¹⁾ der Grössen $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5$ hier:

¹⁾ Die Substitution der auf sieben Stellen richtigen Werthe von $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5$ in das für diese Grössen charakteristische Gleichungssystem liefert hier statt der Zahlen: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$ die Resultate: $1 - \frac{2\cdot00}{10^7}, \frac{1}{2} - \frac{1\cdot00}{10^7}, \frac{1}{3} - \frac{0\cdot65}{10^7}, \frac{1}{4} - \frac{0\cdot49}{10^7}, \frac{1}{5} - \frac{0\cdot40}{10^7}, \frac{1}{6} - \frac{0\cdot36}{10^7}, \frac{1}{7} - \frac{0\cdot36}{10^7},$
 $\frac{1}{8} - \frac{0\cdot35}{10^7}, \frac{1}{9} - \frac{0\cdot35}{10^7}, \frac{1}{10} - \frac{0\cdot36}{10^7}.$

$$\epsilon_1 = \frac{21 - \sqrt{245 + 14\sqrt{70}}}{42}, \quad \epsilon_2 = \frac{21 - \sqrt{245 - 14\sqrt{70}}}{42}, \quad \epsilon_4 = \frac{21 + \sqrt{245 - 14\sqrt{70}}}{42},$$

$$\epsilon_5 = \frac{21 + \sqrt{245 + 14\sqrt{70}}}{42}, \quad \Lambda_1 = \Lambda_5 = \frac{322 - 13\sqrt{70}}{1800}, \quad \Lambda_2 = \Lambda_4 = \frac{322 + 13\sqrt{70}}{1800},$$

$$\Lambda_3 = \frac{64}{225}, \text{ und deren neunstellige Näherungswerte: } \epsilon_1 = 0.046,910,077; \quad \epsilon_2 = 0.230,765,345;$$

$$\epsilon_4 = 0.769,234,655; \quad \epsilon_5 = 0.953,089,923; \quad \Lambda_1 = \Lambda_5 = 0.118,463,443; \quad \Lambda_2 = \Lambda_4 = 0.239,314,335; \quad \Lambda_3 = 0.284,444,444.$$

Verschwanden in Q die Constanten B_0 und B_9 , so tritt an die Stelle von (137) die einfachere Cubirungsformel:

$$(138). \quad V = \iota \left\{ 0.2231039 Q_{0.1397599} + 0.3118265 Q_{0.4164096} + 0.2813560 Q_{0.7231570} + 0.1437136 Q_{0.9428958} \right\}.$$

Proberechnung für (138):

$$\epsilon_1 \Lambda_1 = 0.031,180,979$$

$$\epsilon_1^2 \Lambda_1 = 0.004,357,850$$

$$\epsilon_1^3 \Lambda_1 = 0.000,609,053$$

$$\epsilon_2 \Lambda_2 = 0.129,847,548$$

$$\epsilon_2^2 \Lambda_2 = 0.054,069,766$$

$$\epsilon_2^3 \Lambda_2 = 0.022,515,169$$

$$\epsilon_3 \Lambda_3 = 0.203,464,561$$

$$\epsilon_3^2 \Lambda_3 = 0.147,136,821$$

$$\epsilon_3^3 \Lambda_3 = 0.106,403,022$$

$$\epsilon_4 \Lambda_4 = 0.135,506,950$$

$$\epsilon_4^2 \Lambda_4 = 0.127,768,934$$

$$\epsilon_4^3 \Lambda_4 = 0.120,472,791$$

$$\sum_{k=1}^{k=4} \epsilon_k \Lambda_k = 0.500,000,038$$

$$\sum_{k=1}^{k=4} \epsilon_k^2 \Lambda_k = 0.333,333,371$$

$$\sum_{k=1}^{k=4} \epsilon_k^3 \Lambda_k = 0.250,000,035$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{0.38}{10^7}.$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{0.38}{10^7}.$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{0.35}{10^7}.$$

$$\epsilon_1^4 \Lambda_1 = 0.000,085,121$$

$$\epsilon_1^5 \Lambda_1 = 0.000,011,897$$

$$\epsilon_1^6 \Lambda_1 = 0.000,001,663$$

$$\epsilon_2^4 \Lambda_2 = 0.009,375,533$$

$$\epsilon_2^5 \Lambda_2 = 0.003,904,062$$

$$\epsilon_2^6 \Lambda_2 = 0.001,625,689$$

$$\epsilon_3^4 \Lambda_3 = 0.076,946,090$$

$$\epsilon_3^5 \Lambda_3 = 0.055,644,104$$

$$\epsilon_3^6 \Lambda_3 = 0.040,239,423$$

$$\epsilon_4^4 \Lambda_4 = 0.113,593,289$$

$$\epsilon_4^5 \Lambda_4 = 0.107,106,635$$

$$\epsilon_4^6 \Lambda_4 = 0.100,990,396$$

$$\sum_{k=1}^{k=4} \epsilon_k^4 \Lambda_k = 0.200,000,033$$

$$\sum_{k=1}^{k=4} \epsilon_k^5 \Lambda_k = 0.166,666,698$$

$$\sum_{k=1}^{k=4} \epsilon_k^6 \Lambda_k = 0.142,857,171$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{0.33}{10^7}.$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{0.31}{10^7}.$$

$$= \frac{1}{7} + \frac{0.28}{10^7}.$$

$$\epsilon_1^7 \Lambda_1 = 0.000,000,232$$

$$\epsilon_1^8 \Lambda_1 = 0.000,000,032$$

$$\epsilon_2^7 \Lambda_2 = 0.000,676,952$$

$$\epsilon_2^8 \Lambda_2 = 0.000,281,889$$

$$\epsilon_3^7 \Lambda_3 = 0.029,099,421$$

$$\epsilon_3^8 \Lambda_3 = 0.021,043,450$$

$$\epsilon_4^7 \Lambda_4 = 0.095,223,420$$

$$\epsilon_4^8 \Lambda_4 = 0.089,785,763$$

$$\sum_{k=1}^{k=4} \epsilon_k^7 \Lambda_k = 0.125,000,025 = \frac{1}{8} + \frac{0.25}{10^7}.$$

$$\sum_{k=1}^{k=4} \epsilon_k^8 \Lambda_k = 0.111,111,134 = \frac{1}{9} + \frac{0.23}{10^7}.$$

Da die Wurzeln der (138) zugehörigen Resolvente: $\Omega_1(4, \epsilon) = 0$ erst nach Einführung transcendenter Functionen in geschlossener Form dargestellt werden könnten, finden sich hier nur die neunstelligen Näherungswerte ¹⁾ von $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$ angeben:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= 0.139,759,864; & \epsilon_2 &= 0.416,409,568; & \epsilon_3 &= 0.723,156,986; & \epsilon_4 &= 0.942,895,804; \\ \Lambda_1 &= 0.223,103,901; & \Lambda_2 &= 0.311,826,523; & \Lambda_3 &= 0.281,356,015; & \Lambda_4 &= 0.143,713,561. \end{aligned}$$

Sechste Specialisirung:

$$Q = B_0 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 + B_4z^4 + B_5z^5 + B_6z^6 + B_7z^7 + B_8z^8 + B_9z^9 + B_{10}z^{10} + B_{11}z^{11}.$$

$$(139) \quad V = \frac{l}{598752} \left\{ 16067 (Q_0 + Q_1) + 106300 \left(\frac{Q_1}{10} + \frac{Q_9}{10} \right) + 272400 \left(\frac{Q_3}{10} + \frac{Q_7}{10} \right) + 427368 \frac{Q_1}{2} - 48525 \left(\frac{Q_1}{5} + \frac{Q_4}{5} \right) - 260550 \left(\frac{Q_2}{5} + \frac{Q_3}{5} \right) \right\}, \text{ oder:}$$

$$(140) \quad V = \frac{l}{23100} \left\{ 9626 \left(\frac{Q_1}{12} + \frac{Q_{11}}{12} \right) + 123058 \left(\frac{Q_1}{4} + \frac{Q_3}{4} \right) + 427956 \left(\frac{Q_5}{12} + \frac{Q_7}{12} \right) - 35771 \left(\frac{Q_1}{6} + \frac{Q_5}{6} \right) - 266298 \left(\frac{Q_1}{3} + \frac{Q_2}{3} \right) - 494042 \frac{Q_1}{2} \right\}, \text{ beziehungsweise:}$$

$$(141) \quad \dots V = l \left\{ 0.0856622 (Q_{0.0387652} + Q_{0.9662348}) + 0.1803808 (Q_{0.1693953} + Q_{0.8306047}) + 0.2339570 (Q_{0.3806904} + Q_{0.6193096}) \right\}.$$

Proberechnung für (141):

$\Lambda_1 = 0.085,662,200$	$\epsilon_1 \Lambda_1 = 0.002,892,401$	$\epsilon_1^2 \Lambda_1 = 0.000,097,663$
$\Lambda_2 = 0.180,380,800$	$\epsilon_2 \Lambda_2 = 0.030,555,660$	$\epsilon_2^2 \Lambda_2 = 0.005,175,985$
$\Lambda_3 = 0.233,957,000$	$\epsilon_3 \Lambda_3 = 0.089,065,184$	$\epsilon_3^2 \Lambda_3 = 0.033,906,260$
$\Lambda_4 = 0.233,957,000$	$\epsilon_4 \Lambda_4 = 0.144,891,816$	$\epsilon_4^2 \Lambda_4 = 0.089,732,893$
$\Lambda_5 = 0.180,380,800$	$\epsilon_5 \Lambda_5 = 0.149,825,140$	$\epsilon_5^2 \Lambda_5 = 0.124,445,466$
$\Lambda_6 = 0.085,662,200$	$\epsilon_6 \Lambda_6 = 0.082,769,799$	$\epsilon_6^2 \Lambda_6 = 0.079,975,060$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=6} \Lambda_k &= 1.000,000,000 \\ &= \frac{1}{1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=6} \epsilon_k \Lambda_k &= 0.500,000,000 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=6} \epsilon_k^2 \Lambda_k &= 0.333,333,327 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{0.06}{10^7}. \end{aligned}$$

¹⁾ Hiebei kann die Berechnung von $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$ auch auf Grundlage der für $k = 1, 2, 3, 4$ giltigen Formel:

$$\Lambda_k = \frac{1}{400(1 - \epsilon_k)(1 - 9\epsilon_k + 21\epsilon_k^2 - 14\epsilon_k^3)^2}$$

durchgeführt werden.

$$\varepsilon_1^3 \Lambda_1 = 0\cdot000,003,298$$

$$\varepsilon_2^3 \Lambda_2 = 0\cdot000,876,788$$

$$\varepsilon_3^3 \Lambda_3 = 0\cdot012,907,788$$

$$\varepsilon_4^3 \Lambda_4 = 0\cdot055,572,442$$

$$\varepsilon_5^3 \Lambda_5 = 0\cdot103,364,989$$

$$\varepsilon_6^3 \Lambda_6 = 0\cdot077,274,686$$

$$\sum_{k=1}^{k=6} \varepsilon_k^3 \Lambda_k = 0\cdot249,999,991$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{0\cdot09}{10^7}.$$

$$\varepsilon_1^6 \Lambda_1 = 0\cdot000,000,000$$

$$\varepsilon_2^6 \Lambda_2 = 0\cdot000,004,262$$

$$\varepsilon_3^6 \Lambda_3 = 0\cdot000,712,144$$

$$\varepsilon_4^6 \Lambda_4 = 0\cdot013,200,273$$

$$\varepsilon_5^6 \Lambda_5 = 0\cdot059,232,030$$

$$\varepsilon_6^6 \Lambda_6 = 0\cdot069,708,426$$

$$\sum_{k=1}^{k=6} \varepsilon_k^6 \Lambda_k = 0\cdot142,857,135$$

$$= \frac{1}{7} - \frac{0\cdot08}{10^7}.$$

$$\varepsilon_1^9 \Lambda_1 = 0\cdot000,000,000$$

$$\varepsilon_2^9 \Lambda_2 = 0\cdot000,000,021$$

$$\varepsilon_3^9 \Lambda_3 = 0\cdot000,039,290$$

$$\varepsilon_4^9 \Lambda_4 = 0\cdot003,135,497$$

$$\varepsilon_5^9 \Lambda_5 = 0\cdot033,942,183$$

$$\varepsilon_6^9 \Lambda_6 = 0\cdot062,883,007$$

$$\sum_{k=1}^{k=6} \varepsilon_k^9 \Lambda_k = 0\cdot099,999,998$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{0\cdot02}{10^7}.$$

$$\varepsilon_1^4 \Lambda_1 = 0\cdot000,000,111$$

$$\varepsilon_2^4 \Lambda_2 = 0\cdot000,148,524$$

$$\varepsilon_3^4 \Lambda_3 = 0\cdot004,913,871$$

$$\varepsilon_4^4 \Lambda_4 = 0\cdot034,416,547$$

$$\varepsilon_5^4 \Lambda_5 = 0\cdot085,855,445$$

$$\varepsilon_6^4 \Lambda_6 = 0\cdot074,665,491$$

$$\sum_{k=1}^{k=6} \varepsilon_k^4 \Lambda_k = 0\cdot199,999,989$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{0\cdot11}{10^7}.$$

$$\varepsilon_1^7 \Lambda_1 = 0\cdot000,000,000$$

$$\varepsilon_2^7 \Lambda_2 = 0\cdot000,000,722$$

$$\varepsilon_3^7 \Lambda_3 = 0\cdot000,271,106$$

$$\varepsilon_4^7 \Lambda_4 = 0\cdot008,175,056$$

$$\varepsilon_5^7 \Lambda_5 = 0\cdot049,198,402$$

$$\varepsilon_6^7 \Lambda_6 = 0\cdot067,354,707$$

$$\sum_{k=1}^{k=6} \varepsilon_k^7 \Lambda_k = 0\cdot124,999,993$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{0\cdot07}{10^7}.$$

$$\varepsilon_1^{10} \Lambda_1 = 0\cdot000,000,000$$

$$\varepsilon_2^{10} \Lambda_2 = 0\cdot000,000,004$$

$$\varepsilon_3^{10} \Lambda_3 = 0\cdot000,014,957$$

$$\varepsilon_4^{10} \Lambda_4 = 0\cdot001,941,843$$

$$\varepsilon_5^{10} \Lambda_5 = 0\cdot028,192,536$$

$$\varepsilon_6^{10} \Lambda_6 = 0\cdot060,759,749$$

$$\sum_{k=1}^{k=6} \varepsilon_k^{10} \Lambda_k = 0\cdot090,909,089$$

$$= \frac{1}{11} - \frac{0\cdot02}{10^7}.$$

$$\varepsilon_1^5 \Lambda_1 = 0\cdot000,000,004$$

$$\varepsilon_2^5 \Lambda_2 = 0\cdot000,025,159$$

$$\varepsilon_3^5 \Lambda_3 = 0\cdot001,870,663$$

$$\varepsilon_4^5 \Lambda_4 = 0\cdot021,314,498$$

$$\varepsilon_5^5 \Lambda_5 = 0\cdot071,311,936$$

$$\varepsilon_6^5 \Lambda_6 = 0\cdot072,144,396$$

$$\sum_{k=1}^{k=6} \varepsilon_k^5 \Lambda_k = 0\cdot166,666,656$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{0\cdot11}{10^7}.$$

$$\varepsilon_1^8 \Lambda_1 = 0\cdot000,000,000$$

$$\varepsilon_2^8 \Lambda_2 = 0\cdot000,000,122$$

$$\varepsilon_3^8 \Lambda_3 = 0\cdot000,103,208$$

$$\varepsilon_4^8 \Lambda_4 = 0\cdot005,062,891$$

$$\varepsilon_5^8 \Lambda_5 = 0\cdot040,864,424$$

$$\varepsilon_6^8 \Lambda_6 = 0\cdot065,080,462$$

$$\sum_{k=1}^{k=6} \varepsilon_k^8 \Lambda_k = 0\cdot111,111,107$$

$$= \frac{1}{9} - \frac{0\cdot04}{10^7}.$$

$$\varepsilon_1^{11} \Lambda_1 = 0\cdot000,000,000$$

$$\varepsilon_2^{11} \Lambda_2 = 0\cdot000,000,001$$

$$\varepsilon_3^{11} \Lambda_3 = 0\cdot000,005,694$$

$$\varepsilon_4^{11} \Lambda_4 = 0\cdot001,202,602$$

$$\varepsilon_5^{11} \Lambda_5 = 0\cdot023,416,853$$

$$\varepsilon_6^{11} \Lambda_6 = 0\cdot058,708,184$$

$$\sum_{k=1}^{k=6} \varepsilon_k^{11} \Lambda_k = 0\cdot083,333,334$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{0\cdot01}{10^7}.$$

Da die Wurzeln der (141) zugehörigen Resolvente: $\Omega_3(6, \varepsilon) = 0$ erst nach Einführung transcendenten Functionen in geschlossener Form dargestellt werden könnten, finden sich hier nur die neunstelligen Näherungswerte von $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5, \Lambda_6$ angegeben:

$\varepsilon_1 = 0\cdot033,765,243$; $\varepsilon_2 = 0\cdot169,395,307$; $\varepsilon_3 = 0\cdot380,690,407$; $\varepsilon_4 = 0\cdot619,309,593$;
 $\varepsilon_5 = 0\cdot830,604,693$; $\varepsilon_6 = 0\cdot966,234,757$; $\Lambda_1 = \Lambda_6 = 0\cdot085,662,246$; $\Lambda_2 = \Lambda_5 = 0\cdot180,380,787$;
 $\Lambda_3 = \Lambda_4 = 0\cdot233,956,967$. — Unter folgenden drei Annahmen lässt sich die Gleichung (141) durch einfachere Cubirungsformeln ersetzen:

Erste Annahme: $B_0 = B_{11} = 0$.

$$(142) \dots V = l \left\{ 0.1598204 Q_{0.0985351} + 0.2426936 Q_{0.3045357} + 0.2604634 Q_{0.5620252} + \right. \\ \left. + 0.2084507 Q_{0.8019866} + 0.1007942 Q_{0.9601901} \right\}.$$

Proberechnung für (142):

$$\varepsilon_1 \Lambda_1 = 0.015,747,919$$

$$\varepsilon_2 \Lambda_2 = 0.073,908,865$$

$$\varepsilon_3 \Lambda_3 = 0.146,386,994$$

$$\varepsilon_4 \Lambda_4 = 0.167,174,668$$

$$\varepsilon_5 \Lambda_5 = 0.096,781,593$$

$$\sum_{k=1}^{k=5} \varepsilon_k \Lambda_k = 0.500,000,039$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{0.39}{10^7}.$$

$$\varepsilon_1^4 \Lambda_1 = 0.000,015,066$$

$$\varepsilon_2^4 \Lambda_2 = 0.002,087,426$$

$$\varepsilon_3^4 \Lambda_3 = 0.025,987,821$$

$$\varepsilon_4^4 \Lambda_4 = 0.086,232,665$$

$$\varepsilon_5^4 \Lambda_5 = 0.085,677,037$$

$$\sum_{k=1}^{k=5} \varepsilon_k^4 \Lambda_k = 0.200,000,015$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{0.15}{10^7}.$$

$$\varepsilon_1^7 \Lambda_1 = 0.000,000,014$$

$$\varepsilon_2^7 \Lambda_2 = 0.000,058,956$$

$$\varepsilon_3^7 \Lambda_3 = 0.004,613,571$$

$$\varepsilon_4^7 \Lambda_4 = 0.044,480,857$$

$$\varepsilon_5^7 \Lambda_5 = 0.075,846,599$$

$$\sum_{k=1}^{k=5} \varepsilon_k^7 \Lambda_k = 0.124,999,997$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{0.03}{10^7}.$$

$$\varepsilon_1^2 \Lambda_1 = 0.001,551,723$$

$$\varepsilon_2^2 \Lambda_2 = 0.022,507,888$$

$$\varepsilon_3^2 \Lambda_3 = 0.082,273,180$$

$$\varepsilon_4^2 \Lambda_4 = 0.134,071,844$$

$$\varepsilon_5^2 \Lambda_5 = 0.092,928,727$$

$$\sum_{k=1}^{k=5} \varepsilon_k^2 \Lambda_k = 0.333,333,362$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{0.29}{10^7}.$$

$$\varepsilon_1^5 \Lambda_1 = 0.000,001,485$$

$$\varepsilon_2^5 \Lambda_2 = 0.000,635,696$$

$$\varepsilon_3^5 \Lambda_3 = 0.014,605,810$$

$$\varepsilon_4^5 \Lambda_4 = 0.069,157,441$$

$$\varepsilon_5^5 \Lambda_5 = 0.082,266,243$$

$$\sum_{k=1}^{k=5} \varepsilon_k^5 \Lambda_k = 0.166,666,675$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{0.08}{10^7}.$$

$$\varepsilon_1^8 \Lambda_1 = 0.000,000,001$$

$$\varepsilon_2^8 \Lambda_2 = 0.000,017,954$$

$$\varepsilon_3^8 \Lambda_3 = 0.002,592,943$$

$$\varepsilon_4^8 \Lambda_4 = 0.035,673,051$$

$$\varepsilon_5^8 \Lambda_5 = 0.072,827,153$$

$$\sum_{k=1}^{k=5} \varepsilon_k^8 \Lambda_k = 0.111,111,102$$

$$= \frac{1}{9} - \frac{0.09}{10^7}.$$

$$\varepsilon_1^{10} \Lambda_1 = 0.000,000,000$$

$$\varepsilon_2^{10} \Lambda_2 = 0.000,001,665$$

$$\varepsilon_3^{10} \Lambda_3 = 0.000,819,039$$

$$\varepsilon_4^{10} \Lambda_4 = 0.022,944,282$$

$$\varepsilon_5^{10} \Lambda_5 = 0.067,144,088$$

$$\sum_{k=1}^{k=5} \varepsilon_k^{10} \Lambda_k = 0.090,909,074 = \frac{1}{11} - \frac{0.17}{10^7}.$$

$$\varepsilon_1^3 \Lambda_1 = 0.000,152,899$$

$$\varepsilon_2^3 \Lambda_2 = 0.006,854,455$$

$$\varepsilon_3^3 \Lambda_3 = 0.046,239,600$$

$$\varepsilon_4^3 \Lambda_4 = 0.107,523,822$$

$$\varepsilon_5^3 \Lambda_5 = 0.089,229,244$$

$$\sum_{k=1}^{k=5} \varepsilon_k^3 \Lambda_k = 0.250,000,020$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{0.20}{10^7}.$$

$$\varepsilon_1^6 \Lambda_1 = 0.000,000,146$$

$$\varepsilon_2^6 \Lambda_2 = 0.000,193,592$$

$$\varepsilon_3^6 \Lambda_3 = 0.008,208,833$$

$$\varepsilon_4^6 \Lambda_4 = 0.055,463,341$$

$$\varepsilon_5^6 \Lambda_5 = 0.078,991,232$$

$$\sum_{k=1}^{k=5} \varepsilon_k^6 \Lambda_k = 0.142,857,144$$

$$= \frac{1}{7} + \frac{0.01}{10^7}.$$

$$\varepsilon_1^9 \Lambda_1 = 0.000,000,000$$

$$\varepsilon_2^9 \Lambda_2 = 0.000,005,468$$

$$\varepsilon_3^9 \Lambda_3 = 0.001,457,299$$

$$\varepsilon_4^9 \Lambda_4 = 0.028,609,309$$

$$\varepsilon_5^9 \Lambda_5 = 0.069,927,911$$

$$\sum_{k=1}^{k=5} \varepsilon_k^9 \Lambda_k = 0.099,999,987$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{0.13}{10^7}.$$

Da die Wurzeln der (142) zugehörigen Resolvente: $\Omega_1(5, \epsilon) = 0$ erst nach Einführung transcendenter Functionen in geschlossener Form dargestellt werden könnten, finden sich hier nur die neunstelligen Näherungswerthe ¹⁾ von $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5$ angeben:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= 0.098,535,086; & \epsilon_2 &= 0.304,535,727; & \epsilon_3 &= 0.562,025,190; & \epsilon_4 &= 0.801,986,582; \\ \epsilon_5 &= 0.960,190,143; & \Lambda_1 &= 0.159,820,377; & \Lambda_2 &= 0.242,693,594; & \Lambda_3 &= 0.260,463,392; \\ & & \Lambda_4 &= 0.208,450,667; & \Lambda_5 &= 0.100,794,193. \end{aligned}$$

Zweite Annahme: $B_1 = B_3 = B_5 = B_7 = B_9 = B_{11} = 0$.

$$(143) \dots V = l \left\{ 0.4679139 Q_{0.2386192} + 0.3607616 Q_{0.6612094} + 0.1713245 Q_{0.9324695} \right\}.$$

Proberechnung für (143):

$\Lambda_1 = 0.467,913,900$	$\epsilon_1^2 \Lambda_1 = 0.026,642,607$	$\epsilon_1^4 \Lambda_1 = 0.001,517,007$
$\Lambda_2 = 0.360,761,600$	$\epsilon_2^2 \Lambda_2 = 0.157,724,203$	$\epsilon_2^4 \Lambda_2 = 0.068,956,686$
$\Lambda_3 = 0.171,324,500$	$\epsilon_3^2 \Lambda_3 = 0.148,966,545$	$\epsilon_3^4 \Lambda_3 = 0.129,526,316$
$\sum_{k=1}^{k=3} \Lambda_k = 1.000,000,000$	$\sum_{k=1}^{k=3} \epsilon_k^2 \Lambda_k = 0.333,333,355$	$\sum_{k=1}^{k=3} \epsilon_k^4 \Lambda_k = 0.200,000,009$
$= \frac{1}{1}$	$= \frac{1}{3} + \frac{0.22}{10^7}$	$= \frac{1}{5} + \frac{0.09}{10^7}$
$\epsilon_1^6 \Lambda_1 = 0.000,086,377$	$\epsilon_1^8 \Lambda_1 = 0.000,004,918$	$\epsilon_1^{10} \Lambda_1 = 0.000,000,280$
$\epsilon_2^6 \Lambda_2 = 0.030,147,716$	$\epsilon_2^8 \Lambda_2 = 0.013,180,517$	$\epsilon_2^{10} \Lambda_2 = 0.005,762,494$
$\epsilon_3^6 \Lambda_3 = 0.112,623,050$	$\epsilon_3^8 \Lambda_3 = 0.097,925,671$	$\epsilon_3^{10} \Lambda_3 = 0.085,146,309$
$\sum_{k=1}^{k=3} \epsilon_k^6 \Lambda_k = 0.142,857,143$	$\sum_{k=1}^{k=3} \epsilon_k^8 \Lambda_k = 0.111,111,106$	$\sum_{k=1}^{k=3} \epsilon_k^{10} \Lambda_k = 0.090,909,083$
$= \frac{1}{7}$	$= \frac{1}{9} - \frac{0.05}{10^7}$	$= \frac{1}{11} - \frac{0.08}{10^7}$

Da die Wurzeln der (143) zugehörigen Resolvente: $\Omega_2(3, \epsilon^2) = 0$ erst nach Einführung transcendenter Functionen in geschlossener Form dargestellt werden könnten, finden sich hier nur die neunstelligen Näherungswerthe von $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ angeben:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= 0.238,619,186; & \epsilon_2 &= 0.661,209,386; & \epsilon_3 &= 0.932,469,514; & \Lambda_1 &= 0.467,913,935; \\ & & \Lambda_2 &= 0.360,761,573; & \Lambda_3 &= 0.171,324,492. \end{aligned}$$

¹⁾ Hiebei kann die Berechnung von $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5$ auch auf Grundlage der für $k = 1, 2, 3, 4, 5$ giltigen Formel:

$$\Lambda_k = \frac{1}{900(1 - \epsilon_k)(1 - 14\epsilon_k + 56\epsilon_k^2 - 84\epsilon_k^3 + 42\epsilon_k^4)^2}$$

durchgeführt werden.

Dritte Annahme: $B_0 = B_2 = B_4 = B_6 = B_8 = B_{10} = 0$.

$$(144) \dots V = l \left\{ 0.4137160 Q_{0.3357107} + 0.3142697 Q_{0.7071068} + 0.1474459 Q_{0.9419651} \right\}.$$

Proberechnung für (144):

$\epsilon_1 \Lambda_1 = 0.138,888,888$	$\epsilon_1^3 \Lambda_1 = 0.015,653,010$	$\epsilon_1^5 \Lambda_1 = 0.001,764,120$
$\epsilon_2 \Lambda_2 = 0.222,222,242$	$\epsilon_2^3 \Lambda_2 = 0.111,111,127$	$\epsilon_2^5 \Lambda_2 = 0.055,555,566$
$\epsilon_3 \Lambda_3 = 0.138,888,892$	$\epsilon_3^3 \Lambda_3 = 0.123,235,871$	$\epsilon_3^5 \Lambda_3 = 0.109,346,972$

$$\sum_{k=1}^{k=3} \epsilon_k \Lambda_k = 0.500,000,022$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{0.22}{10^7}.$$

$$\sum_{k=1}^{k=3} \epsilon_k^3 \Lambda_k = 0.250,000,008$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{0.08}{10^7}.$$

$$\sum_{k=1}^{k=3} \epsilon_k^5 \Lambda_k = 0.166,666,658$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{0.09}{10^7}.$$

$$\epsilon_1^7 \Lambda_1 = 0.000,198,819$$

$$\epsilon_2^7 \Lambda_2 = 0.027,777,785$$

$$\epsilon_3^7 \Lambda_3 = 0.097,023,377$$

$$\epsilon_1^9 \Lambda_1 = 0.000,022,407$$

$$\epsilon_2^9 \Lambda_2 = 0.013,888,893$$

$$\epsilon_3^9 \Lambda_3 = 0.086,088,673$$

$$\epsilon_1^{11} \Lambda_1 = 0.000,002,525$$

$$\epsilon_2^{11} \Lambda_2 = 0.006,944,447$$

$$\epsilon_3^{11} \Lambda_3 = 0.076,386,329$$

$$\sum_{k=1}^{k=3} \epsilon_k^7 \Lambda_k = 0.124,999,981$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{0.19}{10^7}.$$

$$\sum_{k=1}^{k=3} \epsilon_k^9 \Lambda_k = 0.099,999,973$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{0.27}{10^7}.$$

$$\sum_{k=1}^{k=3} \epsilon_k^{11} \Lambda_k = 0.083,333,301$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{0.32}{10^7}.$$

Die der Cubirungsformel (144) zugehörige Resolvente lautet: $\Omega_3(3, \epsilon^2) = 0$; es sind also die wahren Werthe der Irrationalzahlen $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ hier:

$$\epsilon_1 = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{15}}{10}}, \quad \epsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \epsilon_3 = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{15}}{10}}; \quad \Lambda_1 = \frac{5\sqrt{5 + \sqrt{15}}}{36}, \quad \Lambda_2 = \frac{2\sqrt{2}}{9}, \quad \Lambda_3 = \frac{5\sqrt{5 - \sqrt{15}}}{36},$$

und deren neunstellige Näherungswerthe: $\epsilon_1 = 0.335,710,687$; $\epsilon_2 = 0.707,106,781$; $\epsilon_3 = 0.941,965,145$; $\Lambda_1 = 0.413,716,019$; $\Lambda_2 = 0.314,269,681$; $\Lambda_3 = 0.147,445,890$.

Hiemit sind aus der Gleichung (76) für alle wichtigen Specialisirungen von (74) die ihnen zugehörigen Cubirungsformeln abgeleitet worden, wobei es sich in jedem gegebenen Falle lediglich um gewisse numerische Grössen: $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_s, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_s$ handelte, nach deren Feststellung die betreffende Cubirungsformel unmittelbar hingeschrieben werden konnte. Die erwähnten Constanten spielen übrigens auch bei der näherungsweise Quadratur von theilweise krummlinig begrenzten ebenen Flächen wie bei der approximativen Ermittlung bestimmter Integrale ¹⁾ eine wichtige Rolle und wurden ursprünglich speciell für diese Zwecke theilweise berechnet.

Den Anfang hiezu machte J. Newton in einem 1711 in London veröffentlichten Tractate ²⁾: „Methodus differentialis“, wo er nach Erledigung der beiden Aufgaben: „Datis

¹⁾ S. h. u. A. das sehr fasslich geschriebene Werk von Chr. Nehls: „Ueber graphische Integration und ihre Anwendung in der graphischen Statik“ (Hannover, 1877).

²⁾ Einen vollständigen Abdruck dieser wichtigen Abhandlung enthält u. A. der 1744 in Lausanne und Genf erschienene erste Band der von J. Castiglione unter dem Titel: „Isaaci Newtoni, equitis aurati, opuscula mathematica, philosophica et philologica“ veranstalteten Ausgabe der kleineren Schriften von Newton.

aliquot terminis seriei cuiuscunque ad data intervalla dispositis, invenire terminum quemvis intermedium quamproxime“ und: „Figuram quamcunque curvilineam quadrare quamproxime, cuius ordinatae aliquot inveniri possunt“ in einem hierauf bezüglichen Scholium bemerkt: „Utiles sunt hae propositiones ad tabulas construendas per interpolationem serierum, ut et ad solutiones problematum, quae a quadraturis curvarum dependent; praesertim si ordinarum intervalla et parva sint et aequalia inter se, et regulae computentur et in usum reserventur pro dato quocunque numero ordinarum. *Ut si quatuor sint ordinatae ad aequalia intervalla sitae, sit A summa primae et quartae, B summa secundae et tertiae, et R intervallum inter primam et quartam; et ordinata nova in medio omnium erit $\frac{9B - A}{16}$, et area tota inter primam et quartam erit $\frac{A + 3B}{8}R$.*“

Dieses specielle, die bekannte Breymann'sche Formel:

$$V = \frac{l}{8} \left\{ (Q_0 + Q_1) + 3 \left(Q_{\frac{1}{3}} + Q_{\frac{2}{3}} \right) \right\}$$

involvirende Resultat veranlasste später R. Cotes, seine Abhandlung¹⁾: „De methodo differentiali Newtoniana“ durch die Formeln²⁾:

$$\begin{aligned} & \frac{A + 4B}{6}R, \quad \frac{A + 3B}{8}R, \quad \frac{7A + 32B + 12C}{90}R, \quad \frac{19A + 75B + 50C}{288}R, \\ & \frac{41A + 216B + 27C + 272D}{840}R, \quad \frac{751A + 3577B + 1323C + 2989D}{17280}R, \\ & \frac{989A + 5888B - 928C + 10496D - 4540E}{28350}R, \\ & \frac{2857A + 15741B + 1080C + 19344D + 5778E}{89600}R, \\ & \frac{16067A + 106300B - 48525C + 272400D - 260550E + 427368F}{598752}R \end{aligned}$$

zu ergänzen, welche bereits sämtliche den Gleichungen (122), (125), (129), (135) und (139) charakteristische Constanten enthalten und nach einem kurzen Hinweise auf den zuvor citirten Tractat von Newton in folgender Weise erläutert werden: „Harum prima exhibet aream interjectam extremis trium aequidistantium ordinarum, secunda dat aream inter quatuor aequidistantium extremas et Newtono debetur, per tertiam invenitur area ex quinque similiter datis, etc. In hisce vero omnibus A ponitur pro summa ordinarum extimarum, hoc est, pro summa primae et ultimae; B pro summa proximarum extimis, hoc est, pro summa secundae et penultimae; C pro summa sequentium, hoc est, pro summa tertiae et antepenultimae; atque ita deinceps continuatur ordo literarum D, E, F, etc. donec vel ad mediam ordinatam perventum fuerit, ubi numerus earum est impar, vel ad summam binarum mediarum, ubi numerus est par. Intervallum denique inter extimas ordinatas, hoc est, areae quadrandae basis, designatur per literam R“.

¹⁾ Dieselbe bildet einen Theil seiner „Harmonia mensurarum, sive analysis et synthesis per rationum et angulorum mensuras promotae“. (Herausgegeben von Prof. R. Smith, Cambridge, 1722.)

²⁾ Leider gibt Cotes in der erwähnten Abhandlung nicht einmal andeutungsweise das Verfahren an, dessen er sich bei der Berechnung der Coëfficienten von A, B, C, D, E und F bedient hat.

Was endlich die den Ausdrücken (124), (127), (131), (137) und (141) eigenthümlichen Specialisirungen von $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_s$ anbelangt, so finden sich dieselben zuerst in der grossen Arbeit von Gauss: „Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi“, und zwar auf 16 Decimalstellen genau angegeben, während die den Cubirungsformeln (123), (126), (128), (130), (132), (133), (134), (136), (138), (140), (142), (143) und (144) zugehörigen Constanten durch den Verfasser festgestellt worden sind.

Zum Schlusse dieses Paragraphen sei es uns jetzt noch gestattet, eine einfache Verallgemeinerung der Fundamentalgleichung (74), nämlich die Relation:

$$(145) \dots Q = B_{i_1} z^{i_1} + B_{i_2} z^{i_2} + B_{i_3} z^{i_3} + \dots + B_{i_r} z^{i_r}$$

zur Sprache zu bringen, welche offenbar auch die Identitäten (8) und (58) als einfache Specialfälle umfasst und hier insoferne eine besondere Erwähnung verdient, als der für V aus (145) resultirende Ausdruck:

$$V = \int_0^l Q dz = \frac{B_{i_1} l^{i_1+1}}{i_1+1} + \frac{B_{i_2} l^{i_2+1}}{i_2+1} + \frac{B_{i_3} l^{i_3+1}}{i_3+1} + \dots + \frac{B_{i_r} l^{i_r+1}}{i_r+1}$$

unter gewissen Bedingungen gleichfalls in einen solchen von der Form (76) transformirt werden kann. Hiebei ergeben sich die letzteren auf ganz analoge Art wie das Bedingungs-system (I) und gestatten allgemein die Darstellungsweise:

$$(XIII) \cdot \sum_{k=1}^{k=s} \epsilon_k^{i_1} \Lambda_k = \frac{1}{i_1+1}, \sum_{k=1}^{k=s} \epsilon_k^{i_2} \Lambda_k = \frac{1}{i_2+1}, \sum_{k=1}^{k=s} \epsilon_k^{i_3} \Lambda_k = \frac{1}{i_3+1}, \dots, \sum_{k=1}^{k=s} \epsilon_k^{i_r} \Lambda_k = \frac{1}{i_r+1},$$

wonach u. A. folgender Satz gilt: Für jeden Stamm, dessen aufeinanderfolgende Querflächen speciell der Gleichung:

$$(146) \dots Q = B_{i_1} z^{i_1} + B_{i_2} z^{i_2} + B_{i_3} z^{i_3} + B_{i_4} z^{i_4}$$

genügen, lässt sich eine binomische Cubirungsformel von der Gestalt (67) aufstellen, sobald die Relationen:

$$(XIV) \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1^{i_1} \Lambda_1 + \epsilon_2^{i_1} \Lambda_2 = \frac{1}{i_1+1}, \quad \epsilon_1^{i_2} \Lambda_1 + \epsilon_2^{i_2} \Lambda_2 = \frac{1}{i_2+1} \\ \epsilon_1^{i_3} \Lambda_1 + \epsilon_2^{i_3} \Lambda_2 = \frac{1}{i_3+1}, \quad \epsilon_1^{i_4} \Lambda_1 + \epsilon_2^{i_4} \Lambda_2 = \frac{1}{i_4+1} \end{array} \right.$$

durch positive, zwischen 0 und 1 liegende Specialisirungen von ϵ_1, ϵ_2 und reelle Substitutionen für Λ_1, Λ_2 befriedigt werden können. Diess ist beispielsweise immer der Fall, wenn die Exponenten i_1, i_2, i_3, i_4 — unter r, k irgend welche positive Zahlen gedacht — die Werthe:

$$i_1 = r, \quad i_2 = r + k, \quad i_3 = r + 2k, \quad i_4 = r + 3k$$

besitzen, respective $\epsilon_1, \epsilon_2; \Lambda_1, \Lambda_2$ durch die für diese Annahmen aus (XIV) entspringenden Beziehungen ¹⁾:

¹⁾ Dieses Gleichungssystem kann durch die Substitutionen:

$$\epsilon_1 = t^{\frac{1}{k}}, \quad \epsilon_2 = t^{\frac{1}{k}}; \quad \Lambda_1 = t^{-\frac{r}{k}} u_1, \quad \Lambda_2 = t^{-\frac{r}{k}} u_2; \quad \frac{1}{r+1} = a_0, \quad \frac{1}{r+k+1} = a_1, \quad \frac{1}{r+2k+1} = a_2, \quad \frac{1}{r+3k+1} = a_3$$

unmittelbar auf (X) reducirt werden, so dass dessen Auflösung nach $\epsilon_1, \epsilon_2; \Lambda_1, \Lambda_2$ keiner weiteren Erläuterung bedarf.

$$(XV) \quad \begin{cases} \epsilon_1^r \Lambda_1 + \epsilon_2^r \Lambda_2 = \frac{1}{r+1}, & \epsilon_1^{r+k} \Lambda_1 + \epsilon_2^{r+k} \Lambda_2 = \frac{1}{r+k+1} \\ \epsilon_1^{r+2k} \Lambda_1 + \epsilon_2^{r+2k} \Lambda_2 = \frac{1}{r+2k+1}, & \epsilon_1^{r+3k} \Lambda_1 + \epsilon_2^{r+3k} \Lambda_2 = \frac{1}{r+3k+1} \end{cases}$$

bestimmt erscheinen. Dieselben liefern nämlich nach einigen leichten Vereinfachungen für die genannten Grössen die algebraischen Ausdrücke:

$$(147) \dots \epsilon_1 = \left\{ \frac{(r+k+1) \sqrt{r+2k+1} - k \sqrt{2(r+k+1)}}{(r+3k+1) \sqrt{r+2k+1}} \right\}^{\frac{1}{k}},$$

$$(148) \dots \epsilon_2 = \left\{ \frac{(r+k+1) \sqrt{r+2k+1} + k \sqrt{2(r+k+1)}}{(r+3k+1) \sqrt{r+2k+1}} \right\}^{\frac{1}{k}},$$

$$(149) \dots \Lambda_1 =$$

$$= \frac{(r+k+1) \sqrt{2(r+k+1)} - (r-k+1) \sqrt{r+2k+1}}{2(r+1)(r+k+1) \sqrt{2(r+k+1)}} \left\{ \frac{(r+3k+1) \sqrt{r+2k+1}}{(r+k+1) \sqrt{r+2k+1} - k \sqrt{2(r+k+1)}} \right\}^{\frac{r}{k}},$$

$$(150) \dots \Lambda_2 =$$

$$= \frac{(r+k+1) \sqrt{2(r+k+1)} + (r-k+1) \sqrt{r+2k+1}}{2(r+1)(r+k+1) \sqrt{2(r+k+1)}} \left\{ \frac{(r+3k+1) \sqrt{r+2k+1}}{(r+k+1) \sqrt{r+2k+1} + k \sqrt{2(r+k+1)}} \right\}^{\frac{r}{k}},$$

welche, da die Differenz: $(r+k+1) \sqrt{r+2k+1} - k \sqrt{2(r+k+1)}$ zufolge der Gleichung:

$$(r+k+1)^2(r+2k+1) - 2k^2(r+k+1) = (r+1)(r+k+1)(r+3k+1)$$

eine wesentlich positive Grösse vorstellt, und ebenso:

$$(r+3k+1) \sqrt{r+2k+1} - \left\{ (r+k+1) \sqrt{r+2k+1} + k \sqrt{2(r+k+1)} \right\} = \\ = k \sqrt{2} \left\{ \sqrt{2(r+2k+1)} - \sqrt{r+k+1} \right\}$$

stets grösser als Null bleibt, unsere zuvor ausgesprochene Behauptung in der That vollinhaltlich bestätigen und für die Substitutionen: $r=0, k=1$; $r=k=1$; $r=0, k=2$; $r=1, k=2$ direct in die den Cubirungsformeln (124), (128), (133) und (134) charakteristischen Constanten übergehen.

§. 4.

Der vierte und wichtigste Hauptfall des Problems der Stammcubirung betrifft die Inhaltsberechnung aller Stämme, deren Mantelflächen entweder in analytischer Hinsicht noch nicht näher charakterisirt oder aber infolge ihrer unregelmässigen Configuration überhaupt nicht analytisch definirbar sind.

Dass sich unter solchen Verhältnissen keine mathematisch strengen Gleichungen für V gewinnen lassen, versteht sich von selbst; wohl aber wird die Aufstellung gewisser Näherungsformeln für V insoferne möglich, als selbst der unregelmässigst gestaltete Stamm durch fortgesetzte Theilung in derartige Sectionen zerlegbar ist, dass jede einzelne derselben eine wenigstens näherungsweise geradlinige Achse besitzt, und ihre Querflächen

hinsichtlich ihrer Grösse ohne merklichen Fehler als nach einem gemeinsamen Gesetze gebildet angesehen werden dürfen. Bezeichnen wir demgemäss die Achsenlänge einer beliebigen so beschaffenen Stammsection mit h und speciell die im Abstände z von einer ihrer beiden Endflächen Q' , Q'' gelegene Querfläche mit Q , so wird Q bei von 0 bis h variirendem z immer in derselben Weise von z abhängen, d. h. eine Relation von der Form:

$$Q = f(z), \quad (0 \leq z \leq h)$$

bestehen. Die Entwicklung der Function: $f(z)$ nach dem Theorem von Mac Laurin liefert dann weiter:

$$(151) \dots Q = f(0) + \frac{f'(0)}{1}z + \frac{f''(0)}{1 \cdot 2}z^2 + \frac{f'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^3 + \dots$$

wonach Q — unter $H_0, H_1, H_2, H_3, \dots$ die von $z=0$ bis $z=h$ als constant zu betrachtenden Factoren von $z^0, z^1, z^2, z^3, \dots$ verstanden — durch den geschlossenen Ausdruck:

$$(152) \dots Q = H_0 + H_1z + H_2z^2 + H_3z^3 + \dots + H_nz^n$$

wiedergegeben werden kann, falls man die jeweilige Sectionslänge h so kurz wählt, dass die in (151) auf H_nz^n folgenden Glieder: $H_{n+1}z^{n+1}, H_{n+2}z^{n+2}, \dots$ ihrer Kleinheit wegen nicht mehr in Betracht kommen.

Auf diese Art lässt sich das Problem der Stammcubirung allgemein durch eine wiederholte Anwendung jener Formeln erledigen, welche wir bereits im vorigen Paragraphen für die Specialisirungen:

$$Q = B_0 + B_1z, \quad Q = B_0 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3, \text{ etc.}$$

ohne beschränkende Annahmen über $B_0, B_1, B_2, B_3, \dots$ entwickelt haben, und zwar werden hiezu in erster Linie die Relationen: (120), (121), (122), (123), (124) und (127) geeignet sein, weil in ihnen nicht nur die Anzahl der in die Rechnung eintretenden Querflächen eine geringe ist, sondern auch die Lage der letzteren von Fall zu Fall leicht bestimmbar erscheint.

Die Richtigkeit unserer zweiten Bemerkung muss übrigens für die Gleichungen (124) und (127) noch besonders dargethan werden, indem dieselben bei gegebener Achsenlänge:

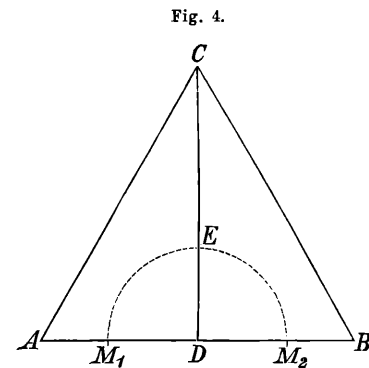
$\overline{AB} = h$ eine geometrische Feststellung der Strecken:

$$u_1 = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)h = {}_1h, \quad u_2 = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)h = {}_2h, \text{ respective:}$$

$$u' = \left(\frac{5-\sqrt{15}}{10}\right)h = {}_1'h, \quad u'' = \left(\frac{5+\sqrt{15}}{10}\right)h = {}_2'h$$

erfordern¹⁾. Zu diesem Zwecke construire man zunächst (s. Fig. 4) über \overline{AB} als Grundlinie ein gleichseitiges Dreieck und beschreibe aus dem Fusspunkte seiner Höhe:

$$\overline{CD} = \frac{h\sqrt{3}}{2} \text{ mit dem Radius: } \overline{DE} = \frac{1}{3}\overline{CD} \text{ einen Halbkreis:}$$



Die Durchschnittspunkte: M_1, M_2 seiner Peripherie mit \overline{AB} liefern dann in Hinblick auf die Beziehungen:

¹⁾ In erster Annäherung kann man auch geradezu: $u_1 = \frac{1}{5}h, u_2 = \frac{4}{5}h; u' = \frac{1}{10}h, u'' = \frac{9}{10}h$ setzen.

$$\overline{AM}_1 = \overline{AD} - \overline{DM}_1 = \frac{h}{2} - \frac{h\sqrt{3}}{6}, \quad \overline{AM}_2 = \overline{AD} + \overline{DM}_2 = \frac{h}{2} + \frac{h\sqrt{3}}{6}$$

unmittelbar u_1 und u_2 . — Construiert man ferner (s. Fig. 5) über $\frac{4}{5} \overline{AB} = \overline{BC}$ als Durch-

messer einen Kreis, welcher die im Halbirungspunkte D der Geraden \overline{AB} errichtete Senkrechte in E trifft und trägt das

Stück: $\overline{DE} = \sqrt{\overline{CD} \times \overline{BD}} = \sqrt{\frac{3}{10}h \times \frac{1}{2}h} = \frac{h\sqrt{15}}{10}$ von D

aus links und rechts auf, so bestimmen die hierbei erhaltenen Schnittpunkte: N_1, N_2 analog die Strecken u' und u'' , indem deren Abstände: $\overline{AN}_1, \overline{AN}_2$ von A augenscheinlich die Werthe:

$$\overline{AN}_1 = \overline{AD} - \overline{DN}_1 = \frac{h}{2} - \frac{h\sqrt{15}}{10}, \quad \overline{AN}_2 = \overline{AD} + \overline{DN}_2 = \frac{h}{2} + \frac{h\sqrt{15}}{10}$$

besitzen.

Was nun die praktische Verwerthung der hier abgeleiteten Sätze zur Inhaltsberechnung gegebener Stämme oder Stammstücke anbelangt, so empfiehlt es sich hiebei, wenn möglich von einer constanten Sectionslänge h auszugehen und, nachdem man sich für eine bestimmte Cubirungsformel aus der Reihe der Gleichungen: (120) (121), (122), etc. definitiv entschieden hat, auf einem der Strecke h aequivalenten Theile des benützten Längenmaasses ein für allemal jene Punkte zu markiren, welche die Lage der in die gewählte Cubirungsformel eintretenden Querflächen speciell für die Achsenlänge h charakterisiren. Theilt man nämlich die Totallänge l des zu cubirenden Körpers nach diesen Vorschriften in aliquote Theile, so resultiren, da derselbe im Allgemeinen k Sectionen von der Achsenlänge h und eventuell noch eine solche von der Achsenlänge h' , ($0 \leq h' < h$) liefern wird ¹⁾, beispielsweise aus (120), (121), (122), (123), (124) und (127) für dessen gesuchtes Volumen V der Reihe nach folgende relativ einfache Näherungsausdrücke, in welchen den verschiedenen Querflächen der grösseren Deutlichkeit wegen direct ihre Abstände von dem jeweiligen Anfangspunkte der Messung als Stellenzeiger beigegeben wurden :

$$(153) \quad V = h \left\{ \frac{1}{2} (Q_0 + Q_{kh}) + (Q_h + Q_{2h} + Q_{3h} + \dots + Q_{[k-1]h}) \right\} + \frac{h'}{2} \left\{ Q_{kh} + Q_l \right\};$$

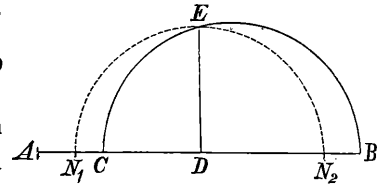
$$(154) \quad V = h \left\{ \frac{Q_h}{2} + \frac{Q_{3h}}{2} + \frac{Q_{5h}}{2} + \dots + \frac{Q_{[2k-1]h}}{2} \right\} + h' Q_{kh} + \frac{h'}{2};$$

$$(155) \quad V = \frac{h}{6} \left\{ (Q_0 + Q_{kh}) + 2(Q_h + Q_{2h} + Q_{3h} + \dots + Q_{[k-1]h}) + 4 \left(\frac{Q_h}{2} + \frac{Q_{3h}}{2} + \frac{Q_{5h}}{2} + \dots + \frac{Q_{[2k-1]h}}{2} \right) \right\} + \frac{h'}{6} \left\{ Q_{kh} + 4 Q_{kh} + \frac{h'}{2} + Q_l \right\};$$

$$(156) \quad V = \frac{h}{3} \left\{ 2 \left(\frac{Q_h}{4} + \frac{Q_{3h}}{4} + \frac{Q_{5h}}{4} + \dots + \frac{Q_{[4k-1]h}}{4} \right) - \left(\frac{Q_h}{2} + \frac{Q_{3h}}{2} + \frac{Q_{5h}}{2} + \dots + \frac{Q_{[2k-1]h}}{2} \right) \right\} + \frac{h'}{3} \left\{ 2 \left(Q_{kh} + \frac{h'}{4} + Q_{kh} + \frac{3h'}{4} \right) - Q_{kh} + \frac{h'}{2} \right\};$$

¹⁾ Das Aufsuchen der den Theilungspunkten von h correspondirenden Theilungspunkte von h' bedarf hier wohl keiner speciellen Erläuterung.

Fig. 5.



$$(157) \dots V = \frac{h}{2} \left\{ Q_{1h} + Q_{2h} + Q_{[1+i_1]h} + Q_{[1+i_2]h} + Q_{[2+i_1]h} + Q_{[2+i_2]h} + \right. \\ \left. + Q_{[k-1+i_1]h} + Q_{[k-1+i_2]h} \right\} + \frac{h'}{2} \left\{ Q_{kh+i_1h'} + Q_{kh+i_2h'} \right\};$$

$$(158) \dots V = \frac{h}{18} \left\{ 5(Q_{1h} + Q_{1''h} + Q_{[1+i']h} + Q_{[1+i'']h} + Q_{[2+i']h} + Q_{[2+i'']h} + \dots \right. \\ \left. + Q_{[k-1+i']h} + Q_{[k-1+i'']h}) + 8(Q_{\frac{h}{2}} + Q_{\frac{3h}{2}} + Q_{\frac{5h}{2}} + \dots + Q_{\frac{[2k-1]h}{2}}) \right\} + \\ + \frac{h'}{18} \left\{ 5(Q_{kh+i'h'} + Q_{kh+i''h'}) + 8Q_{kh+\frac{h'}{2}} \right\}.$$

Diese Formeln ¹⁾, von welchen bisher nur die drei ersten bekannt waren ²⁾, besitzen jedoch keineswegs dasselbe Anwendungsgebiet, indem speciell den Resultaten (153), (154) die Annahme: $Q = H_0 + H_1z$, ferner den Ergebnissen (155), (156), (157) die allgemeinere Voraussetzung: $Q = H_0 + H_1z + H_2z^2 + H_3z^3$ zu Grunde liegt, und die Relation (158) sogar noch unter der Annahme:

$$Q = H_0 + H_1z + H_2z^2 + H_3z^3 + H_4z^4 + H_5z^5$$

giltig bleibt. Man wird daher, sobald bei der Berechnung von V eine besonders hohe Genauigkeit wünschenswerth erscheint, stets von der Formel (158) Gebrauch machen, während es in allen übrigen Fällen genügen wird, die durch ihre Einfachheit und Strenge ausgezeichnete Gleichung (157) oder bei hinlänglich kleinem h die Formel (154) zur Feststellung von V zu benützen.

Um sich endlich in jedem gegebenen Falle empirisch darüber zu informiren, auf wie viel Decimalstellen das mittelst irgend einer der erwähnten Volumformeln für V gewonnene Resultat den wahren Werth dieser Grösse bestimmt ³⁾, suche man den Inhalt des betreffenden Stammes entweder noch nach einer zweiten Cubirungsregel oder vergrößere durch entsprechende Abänderung von h die Anzahl der in die Rechnung eintretenden Querflächen: Stimmt dann das neue Ergebniss für V mit dem früheren z. B. in den ersten k Decimalstellen überein, so kann auch das fragliche Volumen gemeinlich auf $k - 1$ oder wenigstens auf $k - 2$ Decimalen sicher angegeben werden.

¹⁾ Aus (156) folgt u. A., falls man den zu cubirenden Stamm speciell in acht Sectionen von gleicher Länge theilt und deren Endflächen mit Ausnahme der ersten, mittleren und letzten Stammquerfläche der Reihe nach bestimmt, die einfache Cubirungsformel:

$$V = \frac{l}{6} \left\{ 2(Q_{\frac{l}{8}} + Q_{\frac{3l}{8}} + Q_{\frac{5l}{8}} + Q_{\frac{7l}{8}}) - (Q_{\frac{l}{4}} + Q_{\frac{3l}{4}}) \right\},$$

welche namentlich bei Stämmen von geradem Wuchse eine bedeutende praktische Brauchbarkeit besitzen dürfte.

²⁾ Die Gleichung (155) wird nach ihrem Entdecker Th. Simpson (s. dessen 1743 in London erschienene „Mathematical dissertations on a variety of physical and analytical subjects,“ pag. 110) gemeinlich als Simpson'sche Näherungsformel bezeichnet.

³⁾ Eine theoretische Feststellung des jeweiligen Fehlers würde selbstverständlicher Weise erst dann möglich, wenn über die Gestalt des zu cubirenden Stammes analytisch präcisirbare Daten in hinreichender Anzahl vorlägen.

§. 5.

Ueberblicken wir jetzt sämtliche Cubirungsformeln, welche sich einerseits unter Voraussetzung gewisser Gleichungen für Q , nämlich der Relationen (8), (58), (74) und (146), andererseits für Stämme von beliebiger Gestalt ergeben haben, so drängt sich uns von selbst die Frage auf, ob die gewonnenen Resultate vielleicht die Construction praktisch brauchbarer Tafeln ermöglichen, welche das jeweilige Stammvolumen nach Erhebung einer relativ geringen Anzahl empirischer Daten direct und eindeutig bestimmen.

Diese Frage kann zunächst für alle jene Stämme im bejahenden Sinne entschieden werden, deren Querflächen im Durchschnitte nach den durch (8) und (58) analytisch präcisirten Gesetzen variiren, insoferne V unter solchen Umständen wenigstens für einen Werth von ε dem Producte einer einzigen Querfläche: Q_ε in die Achsenlänge l des betreffenden Stammes proportional erscheint. Man kann dann entweder die allen praktisch wichtigen Substitutionen für Q_ε und l zugehörigen Specialisirungen des Quotienten: $\frac{V}{Q_\varepsilon l}$ oder jene von V selbst empirisch feststellen und wird auf diese Art einerseits Formzahlentabellen, andererseits Massentafeln für die in Betracht gezogenen Stämme erhalten.

Wesentlich umständlicher gestaltet sich die Erreichung desselben Zweckes, sobald die Querflächen der untersuchten Stämme im Mittel Gleichungen von der Form (146) genügen, und demgemäss die Bestimmung von V die Anwendung mindestens binomischer Cubirungsformeln erheischt. Um diess einzusehen, transformiren wir das allgemeine Schema der letzteren in:

$$V = \Lambda_2 Q_{\varepsilon_2} l \left\{ 1 + \frac{\Lambda_1 Q_{\varepsilon_1}}{\Lambda_2 Q_{\varepsilon_2}} \right\},$$

woraus mit Rücksicht auf die Bedeutung der Coëfficienten Λ_1, Λ_2 hervorgeht, dass die Grössen: $\frac{V}{Q_{\varepsilon_2} l}$ und V hier erst dann sicher berechnet werden können, wenn ausser den jeweiligen numerischen Werthen von Q_{ε_2} und l auch jener des Querflächenverhältnisses: $\frac{Q_{\varepsilon_1}}{Q_{\varepsilon_2}}$ von Fall zu Fall angegeben wird. Während also in dem zuerst betrachteten Falle eine Unterscheidung verschiedener Vollholzigkeitsclassen ganz überflüssig gewesen wäre, muss hier eine genaue Abgrenzung und detaillirte Berücksichtigung derselben insoferne platzgreifen, als man für jede praktisch bemerkenswerthe Specialisirung des Quotienten: $\frac{Q_{\varepsilon_1}}{Q_{\varepsilon_2}}$ ein eigenes System von Form — beziehungsweise Volumzahlen auf empirischem Wege aufzustellen hat. Hiebei wird man jedoch gut thun, den Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ constante Zahlenwerthe zu ertheilen, weil sonst der allzu bedeutende Umfang der betreffenden Tabellen deren praktische Brauchbarkeit illusorisch machen würde.

Hat man es endlich mit Stämmen zu thun, deren Querflächengleichungen fünf oder mehr von einander unabhängige, nicht verschwindende Constanten enthalten, was u. A. bei einer Reihe wichtiger Specialisirungen von (74), wie:

$$Q = B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + B_4 z^4 + B_5 z^5 + B_6 z^6, \text{ oder:}$$

$$Q = B_1 z + B_3 z^3 + B_5 z^5 + B_7 z^7 + B_9 z^9 + B_{11} z^{11}$$

der Fall ist, so lassen sich unter solchen Verhältnissen überhaupt keine praktisch brauchbaren Formzahlentabellen oder Massentafeln construiren, indem

die diessbezüglichen allgemeinen Ausdrücke für V dann mindestens je drei Querflächen: Q_{ε_1} , Q_{ε_2} , Q_{ε_3} enthalten, und daher bei der Ausarbeitung derartiger Tabellen selbst im günstigsten Falle die gleichzeitigen Variationen je zweier Querflächenverhältnisse: $\frac{Q_{\varepsilon_1}}{Q_{\varepsilon_3}}$, $\frac{Q_{\varepsilon_2}}{Q_{\varepsilon_3}}$

berücksichtigt werden müssten, welche Forderung infolge der ausserordentlich grossen Anzahl der hiebei in Betracht kommenden Specialfälle praktisch unerfüllbar wäre. Ausserdem wird hieraus ersichtlich, dass die Anwendung von Massentafeln zur Inhaltsberechnung einzelner Stämme a priori ausgeschlossen ist, da behufs einer sicheren Cubirung des einzelnen Stammes in der Regel ebenfalls mehr als zwei Querflächen ermittelt werden müssen.

Die hier abgeleiteten Sätze besitzen übrigens auch für alle Untersuchungen eine fundamentale Bedeutung, welche die Construction von Tabellen für Baumformzahlen und Baummassen zum Gegenstande haben, da zur Ermittlung der Formzahl und Masse eines Baumes natürlich wenigstens ebensoviele empirische Daten wie zur Bestimmung der Formzahl und Masse seines Stammes gegeben sein müssen. Näher auf das bei derartigen Untersuchungen zu wählende Verfahren einzugehen, erscheint jedoch in der vorliegenden Arbeit insoferne unthunlich, als die in ihr mitgetheilten Resultate offenbar noch keine Schlüsse über das jeweilige Verhältniss der Ast- zur Stammmasse gestatten. Dasselbe gilt auch von der wichtigen Frage, unter welchen speciellen Bedingungen die Einführung echter vor jener unechter Formzahlen den Vorzug verdiene, indem eine wissenschaftliche Entscheidung hierüber erst auf Grundlage gewisser Gesetze möglich wird, welche die zwei verschiedenen Holzaltern zugehörigen mittleren Stammformen einer und derselben Holzart mit einander in Beziehung bringen. — Beide Fragen wird der Verfasser in seiner nächsten, auf die Zuwachslehre bezüglichen Arbeit eingehend erörtern.

Im Anschlusse hieran sei es dem Autor jetzt gestattet, speciell das Verhältniss seiner analytischen Untersuchungen über Stammformen und das Problem der Stammcubirung zu dem forstlichen Versuchswesen und der forstlichen Praxis in Kürze zu kennzeichnen, da er gerade in dieser Hinsicht etwaigen Missdeutungen thunlichst vorbeugen möchte.

Gerade so wie eine genaue Bestimmung der sogenannten physikalischen Constanten, z. B. der specifischen Gewichte, der specifischen Wärmen, der Elasticitätsmoduli etc. verschiedener Substanzen zu den wichtigsten Aufgaben der Experimentalphysik gehört, besteht eine der Hauptaufgaben des forstlichen Versuchswesens darin, ebenfalls gewisse Constanten, deren genaue Kenntniss zu einer raschen und sicheren Beantwortung zahlreicher Fragen der forstlichen Praxis nothwendig ist, wissenschaftlich strenge festzustellen und demgemäss hiebei von Fall zu Fall stets jenes Verfahren zu wählen, welches unter allen überhaupt zulässigen Bestimmungsmethoden der betreffenden Constanten den höchsten Genauigkeitsgrad besitzt, selbst dann, wenn der damit verbundene Zeit- und Geldaufwand grösser ausfallen sollte, als unter Anwendung anderer, minder strenger Methoden. Dass dieser von selbst sich ergebende Standpunkt speciell bei dem Probleme, für unsere einheimischen Waldbäume möglichst zuverlässige Formzahlentabellen und Massentafeln¹⁾

¹⁾ Vergl. über dieses gerade in neuester Zeit sehr eingehend und vielseitig discutirte Thema in erster Linie die Aufsätze:

G. Heyer: „Ueber die Aufstellung von Holzertragstafeln“. (Allgemeine Forst- und Jagd-Zeitung, Jahrgang 1877, Juniheft, pag. 185—198).

aufzustellen, vorläufig erst theilweise zur Geltung gelangen konnte, hat seinen Grund in verschiedenen Thatsachen, welche zwar mit dem genannten Probleme in keiner inneren Verbindung stehen, aber dessenungeachtet die bisherigen Bearbeitungen desselben wesentlich beeinflusst haben.

Zunächst ist hervorzuheben, dass man bei der Construction von Formzahlentabellen und Massentafeln nie die mittleren Stammformen der in Betracht gezogenen Waldbäume berücksichtigte, ohne deren Kenntniss, wie der Verfasser bereits gezeigt hat, nicht einmal über die Einrichtung derartiger Tafeln eine sichere Entscheidung möglich wird. Ausserdem trug man auch vielfach dem Umstande keine Rechnung, dass, um das Volumen irgend eines Körpers mathematisch streng angeben zu können, sämtliche Bestimmungsstücke des ersteren als messbare Grössen zu definiren und daher nie durch Daten ersetzbar sind, welche, wie beispielsweise die jeweilige Standortsgüte als solche, überhaupt keine mathematische Präcisirung gestatten¹⁾. Da ferner im Interesse der forstlichen Praxis²⁾ eine thunlichst rasche Anfertigung derartiger Tabellen nothwendig erschien, und die Gründlichkeit der hiezu erforderlichen Untersuchungen in manchen Fällen überdiess noch durch finanzielle Rücksichten beeinträchtigt wurde, so ist leicht einzusehen, warum die bisherigen Formzahlentabellen und Massentafeln im Allgemeinen weder den Anforderungen der Wissenschaft noch jenen der Praxis in dem gewünschten Maasse Genüge leisten können.

Während nun die beiden zuletzt angedeuteten Uebelstände lediglich ungünstigen äusseren Verhältnissen entspringen, und deren Beseitigung mithin nur eine Frage der Zeit ist, lassen sich die zwei zuerst berührten Mängel erst dann allmählig beheben, wenn man vor der Aufstellung definitiver Formzahlentabellen und Massentafeln die nachstehenden Aufgaben empirisch zu lösen sucht:

1. Wie sind die Querschnitte der Stämme unserer einheimischen Waldbäume im Mittel geformt, und ändert sich vielleicht deren Gestalt nicht allein bei verschiedenen Holzarten, sondern auch bei einer und derselben Holzart mit wachsendem Holzalter?

F. Baur: „Ueber die Aufstellung von Holzertragstafeln“. (Monatschrift für das Forst- und Jagdwesen, Jahrgang 1878, pag. 1—21 und 49—85).

R. Pressler: Die Normalertragstafel, ihre Bedeutung und Bedeutungslosigkeit, mit Hinblick auf das Baur'sche Werk: „Die Fichte in Bezug auf Ertrag, Zuwachs und Form“. (Centralblatt für das gesammte Forstwesen, Jahrgang 1878. pag. 57—68).

¹⁾ Dass auf die Entwicklung der Holzmasse eines Bestandes nicht nur Boden, Lage und Klima sondern auch die Begründungs- und Erziehungsweise des Bestandes einen wesentlichen Einfluss ausüben, unterliegt wohl keinem Zweifel, und ist eine gründliche Untersuchung des Zusammenhanges, welcher zwischen den eben angeführten Factoren und den innerhalb verschiedener Zeiträume erzeugten Holzmassen des betreffenden Bestandes besteht, jedenfalls von ausserordentlicher Wichtigkeit. Andererseits ist aber auch klar, dass die hiedurch zur Discussion gelangende Frage, warum ein bestimmter Bestand in einem bestimmten Zeitraume speciell die empirisch gegebene und nicht eine grössere oder geringere Holzmasse producirt hat, von der Frage, welches Volumen die letztere besitzt, völlig getrennt behandelt werden kann. Das erstere Problem ist nämlich ein physikalisch-physiologisches, das letztere ein mathematisches, und ebensowenig als man beispielsweise bei der Cubirung eines Zuckerhutes auf dessen physikalische Beschaffenheit und Erzeugungsweise Rücksicht zu nehmen braucht, wird man bei der Lösung der Aufgabe, das einer bestimmten Stammform von empirisch gegebenen Dimensionen zugehörige Volumen zu ermitteln, etwas Anderes als die letzteren in Rechnung zu ziehen haben.

²⁾ Der hohe praktische Werth von Ertragstafeln ist übrigens vorläufig noch nicht allgemein anerkannt. So gelangt u. A. Prof. Dr. K. Roth in seiner Abhandlung: „Ueber die Bedeutung und Aufstellung von Ertragstafeln“ (Allgemeine Forst- und Jagd-Zeitung, Jahrgang 1879, Januarheft, pag. 1—10) zu dem Schlusse, dass „man den Ertragstafeln für das praktische Leben keine Wichtigkeit beilegen kann“.

2. Welche Formeln sind zufolge der hiebei gemachten Erfahrungen für die Ermittlung der Flächeninhalte gegebener Stammquerschnitte anzuwenden?

3. Nach welchen Gesetzen variiren im Mittel die aufeinanderfolgenden Querflächen eines und desselben Stammes für verschiedene Holzarten und Holzalter?

4. Für welche Holzarten sind gemäss den hiebei erhaltenen Resultaten monomische oder wenigstens binomische Cubirungsregeln zur Inhaltsberechnung ihrer jeweiligen Stämme geeignet?

Die zur Erledigung dieser Probleme nöthigen theoretischen Grundlagen glaubt der Verfasser in hinreichender Allgemeinheit und Ausführlichkeit entwickelt zu haben, wobei er, um sich vor etwaigen Fehlern thunlichst zu sichern, auch sämmtliche zur Ableitung seiner zahlreichen neuen Formeln erforderlichen numerischen Rechnungen zweimal durchgeführt hat. Dass ihm diess jedoch in relativ kurzer Zeit möglich wurde, dankt er in erster Linie der Güte des Herrn Hofrathes Professor Dr. Ph. Herr, welcher ihm ein vortreffliches zehnstelliges Arithmometer für mehrere Monate zur Verfügung stellte, und erachtet es der Verfasser als eine angenehme Pflicht, hiefür öffentlich seinen Dank auszusprechen.

Was zweitens das Verhältniss der Untersuchungen des Verfassers zur forstlichen Praxis anbelangt, so erscheint hiefür der Umstand maassgebend, dass dieselbe einstweilen¹⁾ von den hier aufgestellten Formeln²⁾ nur jene unmittelbar verwerthen kann, welche eine möglichst einfache und dabei doch im Durchschnitte hinlänglich genaue Inhaltsbestimmung gegebener Stämme gestatten, ohne eine nähere Kenntniss ihrer Formen vorauszusetzen. Unter diesem Gesichtspunkte reduciren sich die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit auf die im vierten Paragraphen entwickelten Ausdrücke zur sectionsweisen Cubirung beliebiger Stämme und die Gleichungen:

$$V = \frac{3}{4} Q_2 l, \quad V = \frac{16}{27} Q_3 l, \quad V = \frac{l}{3} \left\{ 2 \left(Q_{\frac{1}{4}} + Q_{\frac{3}{4}} \right) - Q_{\frac{1}{2}} \right\},$$

¹⁾ Die Zahl der für die Praxis in Betracht kommenden monomischen Cubirungsregeln dürfte, sobald einmal die Kenntniss der Stammformen unserer einheimischen Waldbäume weiter vorgeschritten sein wird, wahrscheinlich beträchtlich vermehrt werden, zumal da für jede derartige Formel im vorhinein eine Tafel construiert werden kann, welche nach Bestimmung von Q_e und l direct den jeweiligen Werth von V liefert.

²⁾ Hiebei entfiel natürlich eine Reihe von wissenschaftlich unzulässigen Formeln, welche infolge der Art ihrer Ableitung nur ausnahmsweise brauchbare Resultate liefern können und desshalb lediglich ein historisches Interesse für sich in Anspruch nehmen dürfen. Diess gilt z. B. von der Cubirungsregel:

$$V = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D+d}{2} \right)^2 h,$$

welche speciell von Prof. Dr. F. Riecke (s. h. dessen 1849 in Stuttgart erschienene Abhandlung: „Ueber die Berechnung des körperlichen Inhaltes unbeschlagener Baumstämme,“ pag. 17—42), Prof. M. Kunze (Lehrbuch der Holzmesskunst, zweite Ausgabe, p. 51—56) und Prof. Schlesinger (s. h. dessen im 1. Jahrgange der Zeitschrift: „Centralblatt für das gesammte Forstwesen“ veröffentlichten Aufsatz: „die Stammform für den gegliederten Durchmesser,“ pag. 140—142) kritisch beleuchtet worden ist, oder von der Cubirungsformel G. Rudorfs:

$$V = \frac{\pi}{4} \left\{ \left(\frac{D+d}{2} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{D-d}{2} \right)^2 \right\} h,$$

über welche man sich in dessen 1825 zu Dresden erschienenen Arbeit: „Tafeln zur Bestimmung des Inhaltes der runden Hölzer“ näher informiren kann.

von welchen die erste¹⁾ auf unentwipfelte, ausgebauchte oder kegelförmige, die zweite auf unentwipfelte, eingebauchte Stämme sich bezieht, hingegen die dritte Relation sowohl bei unentwipfelten als auch bei entwipfelten Stämmen beider Kategorien zur Berechnung ihrer Inhalte verwendbar ist. Ausserdem kann man speciell bei unentwipfelten Stämmen von ausgesprochen paraboloidischer oder conischer Gestalt die Gleichung: $\bar{V} = \frac{2}{3} Q_1 \overline{AU}$ und bei

Stammstücken mit leicht bestimmbarcn Endflächen die Relation: $V = \frac{l}{6} \left\{ Q_0 + 4Q_{\frac{1}{2}} + Q_1 \right\}$ zur Ermittlung ihrer Volumina verwerthen, während in allen übrigen Fällen die drei zuvor angeführten Cubirungsregeln den Vorzug verdienen.

Zum Schlusse dieser Abhandlung sei endlich noch darauf hingewiesen, dass dieselbe auf Grundlage der Gleichungen (145) und (XIII) eine einheitliche, systematische Entwicklung sämtlicher bei der Inhaltsberechnung gegebener Stämme in Betracht kommender Cubirungsformeln ermöglicht, nachdem durch die Arbeit des Verfassers: „Analytische Untersuchungen etc.“ bereits eine einheitliche, mathematisch präcise Auffassungsweise der Stammformen begründet worden ist. Die vorliegenden Untersuchungen sind daher auch in methodischer Hinsicht beachtenswerth.

¹⁾ Eine auf dieselbe bezügliche Tabelle von bedeutender praktischer Brauchbarkeit hat Forstschuldirektor A. Buchmayer unter dem Titel: „Zur Stammeubirung nach Hossfeld's Formel“ im 22. Jahrgange (1878) der „Monatschrift für das Forst- und Jagdwesen“ (pag. 107—112) veröffentlicht.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Mitteilungen der forstlichen Bundes-Versuchsanstalt Wien](#)

Jahr/Year: 1881

Band/Volume: [2_1881](#)

Autor(en)/Author(s): Simony Oskar

Artikel/Article: [Über das Problem der Stammcubirung als Grundlage der Berechnung von Formzahlentabellen und Massentafeln. 113-181](#)