

MITTEILUNGEN **DER FORSTLICHEN BUNDES-VERSUCHSANSTALT** **MARIABRUNN**

Eine neue Methode der Formzahl- und Massenbestimmung stehender Stämme

Neue Form- bzw. Kubierungsfunktionen und ihre Anwendung

von
Josef Pollanschütz

Handwritten signature in blue ink

MITTEILUNGEN

DER FORSTLICHEN BUNDES-VERSUCHSANSTALT MARIABRUNN

(früher „Mitteilungen aus dem forstlichen Versuchswesen Österreichs“)

68. Heft

1965

EINE NEUE METHODE DER FORMZAHL- UND MASSENBE-
STIMMUNG STEHENDER STÄMME.

(Neue Form- bzw. Kubierungsfunktionen und ihre Anwendung)

A New Method of Determining Form-Factor and Volume of Stand-
ing Trees.

(New Functions of Form and Cubic Volume and their Application)

Une nouvelle méthode de détermination des coefficients de forme et
des volumes d arbres sur pied.

(Nouvelles fonctions de forme et de cubage et leur application)

НОВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВИДОВОГО ЧИСЛА И МАССЫ СТОЯЩИХ
СТВОЛОВ

(Новые видовые и об'ёмные функции и их применение)

von Josef Pollanschütz

Herausgegeben

von der

Forstlichen Bundesversuchsanstalt in Wien

Kommissionsverlag: Österreichischer Agrarverlag, Wien

Alle Rechte vorbehalten.

Copyright 1965 by
Forstliche Bundesversuchsanstalt
Wien.

Printed in Austria

Herstellung und Druck:
Forstliche Bundesversuchsanstalt, Wien 89.

Dissertationsarbeit zur Erlangung des Doktor-
grades an der Hochschule für Bodenkultur

Eingereicht von Dipl.-Ing. Josef Pollanschütz

Wien, im Mai 1965

VORWORT

Seit die wirtschaftliche Notwendigkeit der Erhaltung einer bestimmten Holzsubstanz als Holzzuwachsträger von Menschen erkannt wurde und gleichzeitig auch dem Wald als Wertobjekt mit Rücksicht auf seinen Holzertrag immer größer werdende Bedeutung zukam, beschäftigte Forstleute das Problem der Bestimmung der konkreten Holzmasse stehender Stämme und damit die Frage einer möglichst genauen individuellen Formbestimmung der Waldbäume bzw. der Ergründung irgendwelcher in Zahlen ausdrückbarer Gesetzmäßigkeiten der Form, insbesondere bezogen auf den verwertbaren Holzkörper der Schäfte.

Viele praktische Wege, sowie zahlreiche relativ erfolgreiche Wege, denen eher theoretische als praktische Bedeutung zukam, wurden seit mehr als einem Jahrhundert beschritten. Die Volums- und Formbestimmungsmethoden wurden laufend verbessert und immer weiter entwickelt, und doch bleiben mit Rücksicht auf die laufende Erhöhung der Genauigkeitsforderungen diese Fragen immer wieder als noch nicht befriedigend gelöst offen und beschäftigen stets aufs neue Forstleute in der Praxis und Forschung. Bei genauerem Studium der praktischen Wege drängt sich einem, trotz der erkennbaren Verbesserungen, besonders in bezug auf die Bestandesmassenermittlung, der Eindruck auf, daß man gerade in den vergangenen zwei Jahrzehnten letzten Endes doch nur im Kreis gegangen ist, und dies deshalb, weil man sich trotz bekannter theoretischer Erkenntnisse scheute, eine höhere Genauigkeit bei der Volums- bzw. Formbestimmung mit etwas Mehrarbeit und damit mit etwas höheren Erhebungskosten zu erkaufen.

Es sei dem Verfasser dieser Arbeit gestattet, im Abschnitt 1 in knapper Form zu schildern, wie er mit diesem Fragenkomplex in ernstliche Kollision geriet, und welche Gedankengänge zu den in dieser Arbeit eingehend diskutierten Form- und Kubierungsfunktionen führten.

Diese Arbeit befaßt sich wie die meisten der einschlägigen bisherigen Arbeiten mit der Bestimmung der Schaftformen, betrachtet sie als gegebene Tatsache und versucht, zwischen meßbaren Baummerkmalen und den Schaftformfaktoren Gesetzmäßigkeiten aufzudecken.

Vom wissenschaftlichen Standpunkt aus gesehen, wäre es wohl reizvoll und vielleicht zweckmäßig, nicht die Tatsachen als gegeben hinzunehmen, sondern die Ursachen zu erforschen, welche den Schaftformen und den damit verbundenen Gesetzmäßigkeiten zu Grunde liegen und aus diesem Blickwinkel heraus, auf schon bekannten Theorien aufbauend, nach der Antwort auf die kardinale Frage der Formbildung und Formveränderung der Baumschäfte zu suchen. Eben mehr im Sinne der Zweckforschung als der Grundlagenforschung wurde nicht der angedeutete zweite Weg, sondern der erstgenannte beschritten.

Vielleicht kann die vorliegende Arbeit als kleiner Fortschritt in der Ergründung des Problem es der praktischen Bestimmung der "Schaftformfaktoren" und damit der Schaftholzmassen stehender Bäume betrachtet werden.

Der Verfasser möchte es nicht versäumen, an dieser Stelle der Direktion der Forstlichen Bundesversuchsanstalt dafür zu danken, daß sie es gestattete, im Rahmen der Anstalt durchgeführte Arbeiten für diese als Dissertationsarbeit gedachte Abhandlung als Unterlagen heranzuziehen. Ganz besonderer Dank gilt meinem ehemaligen unmittelbaren Chef, dem Leiter des Institutes Forstinventur, Dipl. -Ing. Dr. R. BRAUN, der mir in bezug auf alle für die vorliegende Arbeit notwendigen Vorarbeiten großzügige und verständnisvolle Unterstützung gewährte. Professor Dr. Bertil MATÉRN vom Royal College of Forestry, Stockholm, gilt mein herzlichster Dank für überaus wertvolle Hinweise, Ratschläge und spezielle Kritik in bezug auf meine durch diese Arbeit bedingten, jedoch unbeholfenen, Gehversuche im Wissensbereich der forstlichen Biometrie bzw. der allgemeinen mathematischen Statistik. Nicht zuletzt sei Frau Liselotte HOFBAUER für die Durchführung der äußerst gewissenhaften Einzelberechnungen, vor allem für die umfangreichen Rechenarbeiten, welche für die Regressionsanalysen erforderlich waren, und Fräulein Helene WEIS für die mühevollen Schreibarbeiten, bestens gedankt.

Wien, im Frühjahr 1965

Der Verfasser

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

	Vorwort	Seite
0	Einleitung	1
0.1	Problemstellung, Methodik und Gliederung der Abhandlung	1
0.2	Verwendete Symbole und deren Definition	4
1	Prinzipielle Überlegungen in bezug auf die Bestandes- und Einzelstamm-Massenermittlung	8
1.0	Der Weg und die Ursachen, die zur Entwicklung einer neuen Form- bzw. Massenermittlungsmethode führten	8
1.1	Grundsätzliche Überlegungen bezüglich einer neuen Form- bzw. Massenermittlungsmethode	13
2	Grundlagenermittlung für die folgenden Berechnungen	30
3	Die Herleitung bzw. allgemeine Berechnung von Form- bzw. Kubierungsfunktionen mit Hilfe der Regressionsanalyse (Methode der kleinsten Quadrate) und die vergleichende Beurteilung derselben	33
3.1	Die Berechnung von Beziehungs- oder Regressionsgleichungen	34
3.2	Allgemeine Bewertung einer Regressionsgleichung	39
3.3	Auswahl zwischen wertvollen und "unnützen" unabhängigen Variablen	43
3.4	Wahl einer geeigneten "Probierfunktion" für eine bestimmte Grundgesamtheit (für ein bestimmtes Probestammmaterial)	49
3.5	Berechnung von gleichartigen Funktionen für verschiedene Teilgesamtheiten (für verschiedenes Probestammmaterial)	51
3.6	Umwandlung einer Formfunktion in eine Volums- bzw. Kubierungsfunktion	54
4	Berechnung, Beurteilung und Prüfung spezieller arithmetischer Form- und Kubierungsfunktionen für die Baumart Fichte	55

4.1	Eine spezielle arithmetische Formfunktion (Nr. 14) für Fichte im Vergleich zu anderen Funktionen	55
4.2	Prüfung der speziellen arithmetischen Formfunktionen für Fichte unter Einbeziehung verschiedener oberer Durchmesser	65
4.3	Prüfung der speziellen Formfunktionen für Fichte hinsichtlich verschiedener Wuchsgebiete, Alters-, Höhen- und Stärkeklassen	79
5	Ausblick auf die Brauchbarkeit dieser ausgewählten speziellen Form- bzw. Kubierungsfunktionen hinsichtlich anderer Baumarten	94
6	Praktische Anwendbarkeit dieser Form- bzw. Kubierungsfunktionen in Praxis und Forschung	96
6.1	Prinzipielle methodische Fehler bei Anwendung von Form- bzw. Kubierungsfunktionen	96
6.2	Durch Meßfehler in den Eingangswerten hervorgerufene Abweichungen der mit Hilfe von Funktionen berechneten Formfaktoren bzw. Massen	100
6.3	Anwendung von Form- bzw. Kubierungsfunktionen bei Waldinventuren und Bestandesmassenermittlungen mit Hilfe stehender Probestämme	105
6.31	Verwendung von Kubierungsfunktionen in der forstlichen Praxis (Waldinventuren)	105
6.32	Verwendung von Form- und Kubierungsfunktionen in der forstlichen Forschung (Bestandesmassenermittlung mit Hilfe stehender Probestämme)	132
7	Zusammenfassungen	138
7.1	Zusammenfassung	138
7.2	Summary	140
7.3	Résumé	142
7.4	Резюме	144
8	Literaturverzeichnis	146
9	Beilagen (Tabellen)	151
10	Graphische Darstellungen (Abbildungen)	183

0 EINLEITUNG

0.1 Problemstellung, Methodik und Gliederung der Abhandlung

Im Sinne der Zweckforschung wird mit dieser Arbeit versucht, neue Wege der Bestimmung des wahrscheinlichsten Volumens und damit einer möglichst genauen Ermittlung individueller Formfaktoren stehender Waldbäume aufzuzeigen. Nicht die Erfassung der Einzelbaummassen als solche, sondern die direkte Schätzung der Formzahlen, bereitete stets erhebliche Schwierigkeiten. Die Bemühungen gehen daher vor allem dahin, zwischen meßbaren Baummerkmalen und den Schaffformfaktoren Gesetzmäßigkeiten aufzudecken, um in weiterer Folge das Schaffholzvolumen stehender Bäume, besonders im Hinblick auf Waldinventuren, genauer als bisher bestimmen zu können.

Abschnitt 1: Das auslösende Moment, warum nach einer neuen möglichst genauen Methode der Volumsbestimmung stehender Stämme geforscht wird, liegt im Aufnahmesystem der 1961 begonnenen "Österreichischen Forstinventur", welche nach der "Österreichischen Waldstendsaufnahme" die zweite allgemeine Inventur des österreichischen Waldes zum Ziele hat. Für diese Großrauminventur muß nämlich die Forderung gestellt werden, daß alle erforderlichen Merkmalswerte, insbesondere die Masse auf den einzelnen Probeflächen und somit der Einzelstämme, mit möglichst hoher Präzision und Genauigkeit erfaßt werden. Die einzelnen Probeflächen müssen für eine erheblich große Teilfläche des Gesamtwaldes, die Massen der einzelnen Probestämme für eine sehr große Bestandesteilmasse, repräsentativ sein. Abgesehen von der Forderung nach äußerst gewissenhafter Erhebung der diversen Aufnahmedaten, müssen vor allem mit einseitigen Fehlern behaftete Werte vermieden werden.

Eine der wesentlichen Forderungen ist daher, nicht nur die Messung der Bruthöhendurchmesser und der Baumhöhen innerhalb geringer Fehlergrenzen zu halten, sondern auch die Formfaktoren der Einzelbäume als wesentlichen Bestandteil der Volumsbestimmung möglichst genau für die stehenden Stämme zu ermitteln. Es gilt also, eine Methode zu finden, die es erlaubt, für die wichtigsten in Österreich vorkommenden Wirtschaftsbaumarten, in einfacher und geeigneter Weise, die Einzelbaummassen zu bestimmen. Den mannigfaltigen Baumformen soll hiebei in jedem einzelnen Falle in befriedigendem Maße Rechnung getragen werden.

Richtungsweisend sind hiebei die von NÄSLUND erarbeiteten Form- und Kubierungsfunktionen einerseits und die insbesondere in den Arbeiten von SCHIFFEL und HOHENADL aufgezeigten Zusammenhänge zwischen Formquotienten und Formfaktoren andererseits. Erwägun-

gen in bezug auf eine möglichst straffe Beziehung zwischen einem unechten Formquotienten und dem Brusthöhenchaftformfaktor, aber auch aufnahmetechnische Überlegungen, führten ursprünglich POLLANSCHÜTZ (1961) zur arithmetischen Formfunktion

$$f = a + b_1 \frac{d^2_{0,3h}}{d^2} + b_2 \frac{h}{d^2}$$

und der entsprechenden Volumsgleichung

$$v = a \cdot d^2 \cdot h + b_1 \cdot d^2_{0,3h} \cdot h + b_2 \cdot h^2,$$

welche gegenüber anderen Form- und Volumsfunktionen in ihrem Wert nunmehr zu prüfen sind. In Hinblick auf die praktische Anwendung derartiger Funktionen steht einer raschen optischen "Schätzung" oberer Durchmesser auch bei relativ hohen Genauigkeitsansprüchen nichts mehr im Wege, seit das neue, lichtstarke Spiegelrelaskop von BITTERLICH entwickelt wurde.

Abschnitt 2: Als Berechnungsgrundlagendienen die Meßdaten eines Teiles der Fichtenprobestämme der sogenannten "Probestammerhebung 1956 - 1960". Die Probeflächen, auf welchen an gefällten Probestämmen jeweils in analoger Weise die einzelnen Meßdaten gewonnen wurden, waren für alle Wirtschaftsbaumarten auf die verschiedenen Wuchsgebiete, Höhenlagen und Bestandestypen verteilt.

Abschnitt 3: Die Berechnung der Formfunktionen - ihrem Wesen nach handelt es sich um Regressionsgleichungen - erfolgt nach der Methode der kleinsten Quadrate, unter Anwendung des "abgekürzten Doolittle Verfahrens". Als Maß der allgemeinen Bewertung wird das Quadrat des multiplen Korrelationskoeffizienten bzw. das Bestimmtheitsmaß B gewählt, welches angibt, welcher Anteil der Varianz der abhängigen Variablen durch Veränderungen der benützten unabhängigen Variablen erklärt werden kann. Mit Rücksicht auf einen allgemeinen praktischen Wert der Formfunktionen wird eine relativ hohe Bestimmtheit verlangt. Bei der Auswahl zwischen wertvollen und unerwünschten "unabhängigen Variablen" werden vor allem die Quotienten

$$\frac{b_i}{\epsilon_{bi}}$$

(Regressionskoeffizienten im Verhältnis zu ihren Fehlern) in bezug auf "STUDENTs t" und die von JONES aufgezeigten Kriterien herangezogen.

Abschnitt 4: In Gegenüberstellungen zu zahlreichen bekannten Formfunktionen, unter anderem der "großen" und "kleinen" schwedischen Formfunktionen für Fichte, und weiteren selbst gewählten Funktionen,

wird geprüft, ob sich die ursprünglich gewählte Formfunktion, mit Rücksicht darauf, daß sie neben d und h auch einen oberen Durchmesser - $d_{0,3h}$ - als veränderlichen Merkmalswert enthält, als diesen wesentlich überlegen erweist.

Vergleiche mit Funktionen, welche an Stelle des $d_{0,3h}$ andere obere Durchmesser verschiedener relativer Baumhöhen enthalten, sollen den Nachweis erbringen, ob die Wahl dieses Durchmessers, welcher in der Regel im Stammbereich der geringsten Durchmesserabnahme liegt, vertretbar erscheint. Bei dieser Gelegenheit wird gezeigt, in welcher Weise in bezug auf einen bestimmten Funktionstyp und ein bestimmtes Probestammmaterial der günstigste obere Durchmesser gefunden werden kann.

Besonderes Augenmerk wird einer Schaftformfunktion

$$f = a + b_1 \frac{d_{0,3h}}{d} + b_2 \frac{h}{d^2},$$

als solcher, aber auch als Grundtyp für um weitere Variable erweiterte Funktionen (bzw. der analogen Volumsgleichung

$$v = a \cdot d^2 \cdot h + b_1 \cdot d \cdot d_{0,3h} \cdot h + b_2 \cdot h^2)$$

in bezug auf die den Untersuchungen unterstellte Baumart Fichte zugewendet, welche sich von der ursprünglich angenommenen Formfunktion darin unterscheidet, daß der einfache unechte Formquotient

$$\frac{d_{0,3h}}{d}$$

und nicht dessen Quadrat als unabhängige Variable in die Beziehungsgleichung Eingang findet.

Für die Zwecke spezieller ertragskundlicher Untersuchungen, bei denen nur Messungen an stehenden Probestämmen möglich sind, ist zu prüfen, ob durch Hinzunahme weiterer optisch meßbarer oberer Durchmesser, z. B. $d_{0,1h}$ und $d_{0,5h}$, Schaftformfunktionen, etwa von der Gestalt

$$f = a + b_1 \frac{d_{0,3h}^2}{d^2} + b_2 \frac{d_{0,1h} \cdot d_{0,5h}}{d^2} + b_3 \frac{h}{d^2},$$

und die daraus abgeleiteten Volumsgleichungen den, gegenüber Waldinventuren, höheren Genauigkeitsansprüchen gerecht werden können.

Abschnitt 5: Auf Grund entsprechender Überlegungen und Vergleiche soll geprüft werden, ob mit Hilfe dieser diskutierten Funktionen für andere Nadelbaumarten als Fichte und für Laubbaumarten mit an-

nähernd durchlaufendem Schaft ähnliche Resultate bzw. Erfolge erwartet werden können.

Abschnitt 6: Mit Rücksicht auf die praktische Anwendung derartiger arithmetischer Form- bzw. Volumsfunktionen, sollen einige Hinweise über die Bedeutung der Meßfehler der Merkmalswerte d , $d_{0,3h}$ und h Beachtung finden. Ein besonderes Augenmerk wird vor allem der Bestimmung der oberen Durchmesser zu widmen sein, um systematische Abweichungen zu vermeiden.

Bedient sich ein Stichprobeverfahren, wie die "Österreichische Forstinventur", der "variablen Probekreistechnik" nach BITTERLICH, dann empfiehlt es sich, bei den Berechnungen - dem speziellen Charakter dieses Verfahrens entsprechend - anstelle von Volumsfunktionen -, Gleichungen für die "Schätzung" der Formhöhen der Einzelstämme (Probestämme) abzuleiten.

Im Zusammenhang mit der Anwendung der erwähnten Formfaktor-, Formhöhen- und Volumsfunktionen wird das Prinzip einer von MATERN entwickelten Näherungsmethode zur Schätzung von Stichprobefehlern bei Stichprobeaufnahmen mit "systematischer Probenflächenwahl" erläutert.

Abschließend wird die Anwendung von Form- bzw. Kubierungsfunktionen bei bestimmten ertragskundlichen Massenermittlungen mit Hilfe stehender Probestämme für jene Fälle erörtert, wo es nicht möglich ist, genaue Form- und Massenbestimmungen aus Betriebsanfällen, oder anlässlich des Abtriebes, auf Grund von sektionsweisen Aufmessungen an liegenden Probestämmen zu gewinnen; dies etwa im Sinne KRENN-PRODAN.

0.2 Verwendete Symbole und deren Definitionen

Die in dieser Arbeit verwendeten Symbole wurden entsprechend den Vorschlägen der IUFRO für die Normung meßmeßkundlicher Symbole gewählt. ("Die Normung holzmeßkundlicher Symbole" herausgegeben vom Internationalen Verband Forstlicher Forschungsanstalten, London 1959). Bei Zitierung bereits bekannter Formeln wird fallweise auf die Verwendung der Symbole der Originalarbeit zurückgegriffen, sofern dies erforderlich und auch nicht störend erscheint.

- d Durchmesser mit Rinde des Einzelstammes in 1,3 m Höhe
Brusthöhendurchmesser mit Rinde -, einfache Messung mit Stahlkluppe, bei geneigtem Gelände bergseitig gemessen.
- $d_{0,xh}$ Durchmesser mit Rinde in relativer Gesamthöhe (oberer Durchmesser in relativer Baumhöhe) vom Boden, z. B. : $d_{0,3h}$, Durchmesser in 0,3 der Gesamthöhe vom

Boden. Einfache Messung aus gleicher Meßrichtung wie Brusthöhendurchmesser in der Regel mit Spiegelrelaskop, bei Liegendmessung Grundlagenerhebung einfache Messung mit Stahlkluppe.

d_x Durchmesser mit Rinde in x m (absoluter Höhe) vom Boden aus, z. B.: $d_6 = d$ in 6 m vom Boden aus.

g Stammgrundfläche in 1,3 m Höhe.

$g_{0,xh}$ Stammgrundfläche in 0,x der Baumhöhe vom Boden ab gerechnet.

h Scheitelhöhe am Boden, gemessen mit Blume-Leiss, bei Liegendmessung mit Stahlmeßband.

h_k Höhe bis zum Kronenansatzpunkt. Entscheid: tiefster grüner Ast, der höchstens durch 2 dürre Äste (Astquiril) von der geschlossenen Krone getrennt liegt.

l_k Kronenlänge, Länge der Krone vom Kronenansatzpunkt bis Scheitel.

b_k Kronenbreite - mittlerer Durchmesser der Kronenprojektion, kreuzweise bestimmt.

k_h Kronenverhältniszahl:

$$\frac{l_k}{h} \text{ oder } \frac{h - h_k}{h}$$

k unechter Formquotient, basiert auf Durchmesser in halber Höhe und in Brusthöhe,

$$\frac{d_{0,5h}}{d}$$

$k_{0,xh/1,3}$ unechter Formquotient, basiert auf Durchmesser in 0,xh und Brusthöhe, z. B.:

$$k_{0,3h/1,3} \frac{d_{0,3h}}{d}$$

$k_{x/1,3}$ unechter Formquotient, basiert auf Durchmesser in x m und 1,3 m über dem Boden, z. B.:

$$k_{6/1,3} = \frac{d_6}{d}$$

v Schaftholzmasse des Einzelstammes vom Stockabtrieb bis zum Scheitel ohne Astholz, ermittelt aus einfacher Kluppierung in 1 m-Sektionen, oder Schätzwert der

Schaftholzmasse, mit Hilfe einer Kubierungsfunktion ermittelt bzw. errechnet.

f unechter Schaftholzformfaktor – Schaftholzformzahl des Einzelstammes, bestimmt aus

$$f = \frac{v}{g \cdot h}$$

oder Schätzwert für den unechten Schaftholzformfaktor, auf Grund einer Formfunktion errechnet.

$f_{0,xh}$ echter Schaftholzformfaktor, z. B.:

$$f_{0,1h} = \frac{v}{h \cdot g_{0,1h}}$$

oder Schätzwert für einen echten Schaftholzformfaktor, auf Grund einer Formfunktion errechnet.

α Populationswert einer Regressionskonstanten.

a Regressionskonstante (Interzept einer Regressionslinie auf der abhängigen Achse).

\hat{a} Regressionskonstante mal einem konstanten Betrag, bei Umwandlung einer berechneten Formfunktion in ihre entsprechende Volumsfunktion, oder auch umgekehrt verwendet; z. B.:

$$\hat{a} = a \frac{\pi}{4}.$$

β Populationswert von Regressionskoeffizienten (b ist der entsprechende Schätzwert, berechnet aus einer Stichprobe).

b_i Regressionskoeffizienten (z. B.: b_1 zugeordnet x_1 , oder b_2 zugeordnet x_2).

\hat{b}_i Regressionskoeffizient mal einem konstanten Betrag, bei Umwandlung einer berechneten Formfunktion in ihre entsprechende Volumsfunktion, oder umgekehrt verwendet; z. B.:

$$\hat{b}_i = b_i \frac{\pi}{4}.$$

n Anzahl der Beobachtungen oder Werte.

σ mittlere Abweichung einer Population (standard deviation of a population).

s Schätzwert der mittleren Abweichung der Einzelwerte vom arithmetischen Mittel (standard deviation), (z. B.: s_{x_1} der x_1 -Werte oder s_y der y -Werte).
 ($s_{\bar{y}}$ - Schätzwert des mittleren Fehlers des arithmetischen Mittels \bar{y} - standard error)

\mathcal{E} Schätzwert des mittleren Fehlers von Regressionskoeffizienten und Regressionskonstanten.

t nach STUDENT, ein Testwert für die statistische Signifikanz.

z_i Korrelationsziffern: $z = 1/2 \log. \text{nat.} \frac{1 + R}{1 - R}$.

x_i algebraischer Ausdruck für unabhängige Variable, z. B.:

$$x_1 \text{ für } \frac{d^2 0,3h}{d^2}, \quad x_2 \text{ für } \frac{h}{d^2}.$$

y algebraischer Ausdruck für eine abhängige Variable, z. B.: $y = f$.

F nach SNEDECOR, das Variationsverhältnis, gebraucht bei Signifikanzprüfungen in der Varianzanalyse.

R vielfacher oder multipler Korrelationskoeffizient.

B R^2 , Quadrat des multiplen Korrelationskoeffizienten, gebraucht als Maß für die "Bestimmtheit" einer Regression.

\triangle Differenz; z. B.: von b beobachteten gegenüber e errechneten Einzelwerten:

$$\triangle_f = f_{(b)} - f_{(e)}$$

Σ Summenzeichen; z. B.:

$$\Sigma x = \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n.$$

(Im allgemeinen Berechnungsschema für eine Regressionsanalyse - Abschnitt 3 - und bei der Diskussion der praktischen Anwendbarkeit von Form- und Kubierungsfunktionen - Abschnitt 6 - werden weitere Hilfssymbole verwendet, deren Sinn sich aus den Ausführungen bzw. Hinweisen ergibt; sie werden daher an dieser Stelle nicht erläutert.)

1 PRINZIPIELLE ÜBERLEGUNGEN IN BEZUG AUF DIE BESTANDES- UND EINZELSTAMM- MASSENERMITTLUNG

Dieser Abschnitt befaßt sich mit dem Übergang von der "Österreichischen Waldstandsaufnahme" zur "Österreichischen Forstinventur", jedoch lediglich in bezug auf den notwendigen, grundlegenden Wechsel der Holzvorratsermittlung. In weiterer Folge versucht der Verfasser dieser Arbeit, seine Gedankengänge festzuhalten, welche zu einer neuen Form- bzw. Massenermittlungsmethode führten.

1.0 Der Weg und die Ursachen, die zur Entwicklung einer neuen Form- bzw. Massenermittlungsmethode führten

Im Jahre 1956 gingen nach fünfjähriger Erhebungsdauer die Außenarbeiten der "Österreichischen Waldstandsaufnahme" zu Ende, und damit wurde ganz bewußt ein klarer Schlußstrich unter die bisherige Erhebungsmethode, nämlich Taxation unter alleiniger Zuhilfenahme von Ertragstafeln, gezogen. Als man sich zu Beginn der "Österreichischen Waldstandsaufnahme" dafür entschloß, die Aufnahme des taxatorisch bisher nicht erfaßten Teiles des österreichischen Waldes, also des nicht eingerichteten Waldes, bestandesweise durchzuführen, war es völlig klar, daß es trotz des damals nachkriegsbedingten Überangebotes an Forstakademikern und Förstern nur auf Grund von Schätzungen (Taxation) und nicht von Messungen (etwa Vollkluppierung) möglich wäre, in relativ kurzer Zeit diese bestandesweise Erfassung des nicht eingerichteten Waldes mit einer Gesamtfläche von 2,2 Mill. ha zu bewerkstelligen. Die Schätzung des jeweiligen Holzvorrates und des Zuwachses konnte selbstverständlich nicht dem Gutdünken des einzelnen Taxators überlassen bleiben, sondern sollte unter Berücksichtigung festgestellter bzw. gemessener Bestandesmitteldaten, wie durchschnittliches Bestandesalter, mittlere Bestandeshöhe usw., unter Zuhilfenahme von Ertragstafeln durchgeführt werden. Hier stieß man sofort auf die Schwierigkeit, daß die zahlreichen bisher in der Forsteinrichtung verwendeten sogenannten "Allgemeinen" und die zahlreichen Lokalertragstafeln nicht miteinander vergleichbar waren. Aber gerade die Vergleichbarkeit der einzelnen Erhebungsdaten verschiedener Örtlichkeiten und Wuchsgebiete bzw. regionaler Einheiten mußte angestrebt werden, ebenso eine einheitliche Auswertung der aus allen Teilen Österreichs stammenden Erhebungen. Dies führte dazu, daß man, entsprechend einem Vorschlag von Prof. G. MÜLLER, Ertragstafeln der einzelnen Baumarten, von denen man sich eine möglichst gute allgemeine Verwendbarkeit versprach, als einheitliche Taxationsbehelfe wählte und sie von der Form der Untergliederung nach Relativbonitäten in die allgemeine Form von "Absolutbonitäten" (mit

der Vergleichsbasis, Haubarkeitsdurchschnittszuwachs im Alter von 100 Jahren - HDZ₁₀₀) überführte. Damit war nun nicht nur eine allgemeine Vergleichbarkeit der Taxation, sondern auch ein direkter Vergleich bezüglich Wuchsleistung der einzelnen Baumarten möglich. Überdies gestaltete sich die Schätzung bzw. die Bonitierung für den Taxator mit Hilfe dieser einprägsamen Untergliederung der Ertrags tafeln wesentlich leichter.

Wie zu erwarten, ergaben sich nun laufend, praktisch von Bestand zu Bestand, bedingt durch die starren Relationen der Ertragstafelwerte, die Schwierigkeiten, gemäß den ermittelten Bestandesdurchschnittswerten, die einzelnen Baumarten des Bestandes einer Bonitierung zuzuordnen bzw. zum Zwecke der Massen- und Zuwachsbestimmung in das starre Bonitätsschema zu zwingen.

Um die Fehler der Massen- und Zuwachsbestimmung möglichst klein zu halten, wurden zwei Grundsätze der Bonitierung vorgeschrieben:

a) Bei Altholzbeständen wurde die stockende Holzmasse, nach Baumarten getrennt, mit Hilfe der Winkelzählprobe nach BITTERLICH bestimmt. Die Bonitierung erfolgte nun bei gegebenem Alter in den meisten Fällen nicht allein nach dem zweiten Eingangswert in der Ertragstafel, nämlich über die mittlere Bestandeshöhe unter Berücksichtigung der nun errechenbaren "Massenverhältnis zahlen" - Bestockungsgrad -, sondern unter Beachtung des vorher geschätzten durchschnittlichen Bestockungsgrades, der entsprechend des Bodenbeschirmungsgrades und der Bestandesdichte angenommen wurde. Die Bonitierung wurde somit, zwischen mittlerer Bestandeshöhe und den Vorratswerten ausgleichend, bei gegebenem Alter vorgenommen.

b) Die Bonitierung der Jungbestände des Stangenholzes und der schwachen Baumholzbestände - in der Regel Bestände unter 60 Jahren wurde dynamisch durchgeführt. Es wurde also nicht nach der durchschnittlichen Bestandeshöhe dieser jungen Bestände bonitiert, sondern unter weitgehender Berücksichtigung der in benachbarten Altholzbeständen festgestellten statischen Höhenbonitäten.

Bei dieser Art der Bestandesmassen- aber auch der Zuwachsermittlung (HDZ) wurde nun wohl in vielen Fällen eine Überbonitierung vermieden, doch muß angenommen werden, daß in sehr vielen Fällen dadurch eine Unterbonitierung, oder besser gesagt die Massenermittlung zu pessimistisch erfolgte. Abgesehen von diesen Einwänden wurde die jeweils stockende Holzmasse, ganz besonders in Beständen mittleren Alters, zu niedrig und nicht den Tatsachen entsprechend ermittelt, da sich die Holzmassenangaben nicht auf die insgesamt produzierte bzw. zum Zeitpunkt der Aufnahme vorhandene Holzmasse bezogen, sondern lediglich auf jenen Teil der Holzmasse, der im entsprechenden Verhältnis zu der zu erwartenden Endnutzung

stand. Dies wird durch die Ertragstafelbasis HDZ¹⁰⁰ bedingt. Dieser Mangel wurde lediglich bezüglich der Hiebssatzermittlung wohl dadurch zu einem gewissen Maße verringert, als für jeden in Frage kommenden Bestand vom Taxator eine mögliche Vornutzung - Durchforstung - für das folgende Dezennium angeschätzt wurde. Die Frage nach der tatsächlichen bzw. wahrscheinlichsten zum Zeitpunkt der Aufnahme stockenden Holzmasse blieb bei dieser Art der Taxation unbeantwortet.

Ein weiterer entscheidender Mangel der bisherigen Methode der Bestandesmassenermittlung war wohl der, daß man, abgesehen von der Messung der Brusthöhendurchmesser und Zählung der Stämme pro Hektar bzw. der Bestandeskreisflächenermittlung Winkelzählprobe - und der Bestimmung einer mittleren Bestandeshöhe, die notwendige und differenzierende dritte Komponente der Einzelstamm- wie der Bestandesmassenermittlung, nämlich der Formzahl, nur ganz ungenügend und beiläufig annahm (siehe grob gegliederte Bestandesformzahlangaben für einzelne Baumarten im graphischen Teil der "Bonitierungs- und Ertragstafeln für die Waldstandsaufnahme" - 1952). Dies galt für alle jene Bestände, für die eine Winkelzählprobe durchgeführt wurde. Gänzlich unberücksichtigt blieben die durch die Form der Stämme und Stammzahlhaltung bedingten Massenunterschiede bei allen im Zuge der dynamischen Taxierung beschriebenen Bestände.

Was bisher gesagt wurde, gilt in allererster Linie für Bestände gleichaltrigen Gefüges, also für Bestände des Types "Altersklassenwald". Ganz beachtliche Schwierigkeiten ergaben sich nun bei dieser Art der Taxation für eine richtige Abschätzung des Bestandesalters bzw. der Altersklassenanteile bei mehrstufigen, ungleichaltrigen Beständen und somit bei deren Bestandesmassenermittlung.

Zusammenfassend können wir daher feststellen:

Die "Österreichische Waldstandsaufnahme" war, ganz abgesehen von der Erhebung des eingerichteten Teiles des österreichischen Waldes (Forstbetrieb mit Wirtschaftsplan) auch nicht für den nach einheitlichen Richtlinien taxierten "Nicht eingerichteten Wald", in der Lage, die stockenden Bestandesmassen, aber auch den Zuwachs in seiner tatsächlichen Höhe (als vorurteilsfreie, nicht einseitige "unbiased" -, mit dem wahren Wert übereinstimmende Schätzung "consistent estimate") zu ermitteln, und das deshalb:

a) Jede bisher in Österreich verwendete Ertragstafel ist nur für ein lokal eng begrenztes Gebiet in der Lage, einigermaßen richtige Aussagen über Masse und Zuwachs eines Bestandes von bestimmtem mittleren Alter zu liefern, und das nur für ideale Reinbestände einer Holzart und nicht für ungleichaltrige Bestände. Der Grund hiefür ist wohl darin zu suchen, daß die für die Erstellung jeder Ertragstafel

notwendigen Ertragsdaten entweder über Einzelbaum- und Bestandesdaten eines einzelnen Reinbestandes einer Holzart oder über Daten, welche aus einem engbegrenzten Gebiet, ebenfalls aber aus Reinbeständen vom Typ des Altersklassenwaldes, gewonnen wurden. Bei den sogenannten österreichischen Lokalertragstafeln ist außerdem zu bedenken, daß es sich vielfach hier lediglich um Modifikationen bekannter allgemeiner Ertragstafeln handelt oder, wo eigenes Grundmaterial verwendet wurde, darüber meist nicht genau Aufschluß gegeben werden kann, aus welcher Art von Beständen es stammt - mit Ausnahme von GUTTENBERGs Lokalertragstafeln.

Es bleiben bei allgemeiner Verwendung von lokal entstandenen Ertragstafeln, abgesehen von Unterschieden der Formigkeit der einzelnen Baumarten, in Reinbeständen gegenüber dem Mischbestand einerseits und bei ungleichaltrigem, stufigem Gefüge andererseits, auch noch mitunter sehr erhebliche örtliche standörtlich bedingte Formunterschiede unberücksichtigt.

Weiters wurde die standörtlich und bestandesbedingte Stammzahlhaltung - Standraum - (auch durch Bewirtschaftung beeinflußt) weitgehend nicht richtig berücksichtigt, und damit im Zusammenhang abermals die Formigkeit der bestandesbildenden Einzelstämme bzw. die Berücksichtigung entsprechender Bestandesformfaktoren vernachlässigt.

b) Die erwähnte Bestandesmassenermittlungsmethode bzw. Taxationsmethode konnte wohl unter Berücksichtigung all ihrer Mängel im Altersklassenwald bedingt angewendet werden, versagte aber, dies muß festgestellt werden, im plenterwaldartigen Wald bzw. in Wäldern ungleichaltrigen bzw. stufigen Bestandesgefüges.

Ganz abgesehen von personellen und finanziellen Erwägungen (welche nicht Gegenstand dieser vorliegenden Arbeit sein sollen), entschloß man sich aus sachlich-fachlichen Gründen zum Zwecke der Fortführung der Waldstandsaufnahme bzw. für eine nun einsetzende laufende Inventarisierung des gesamten österreichischen Waldes, zwecks Beobachtung der Massen- und Zuwachsentwicklung und im weiteren Sinne für eine laufende Bilanzierung unter Berücksichtigung der genutzten Holzmengen, nunmehr ein exakteres Massen- bzw. Zuwachsermittlungsverfahren einzuführen bzw. zu erarbeiten. Daß es sich hierbei um ein "Großraumstichprobeverfahren" handeln mußte, war wohl unter dem Blickwinkel personeller und finanzieller Erwägungen gesehen selbstverständlich. Aus sachlich-fachlichen Erwägungen heraus war es nun aber ebenso selbstverständlich, daß von der bisherigen Erhebungsmethode der "Schätzung" zu einer Erhebungsmethode der "Messung" übergegangen werden mußte.

Zusammen mit den nach 1956 verbliebenen Taxatoren der Waldstandsaufnahme war es meine Aufgabe, nunmehr im Rahmen der Ab-

teilung Forstinventur der Forstlichen Bundesversuchsanstalt in zahlreichen Voruntersuchungen, abgesehen von einzelnen schon während der Außenerhebungen der Waldstandsaufnahme in der Zeit von 1953 - 1956 durchgeführten kleineren Arbeiten, nun im größeren Umfange Grundlagen für die Planung der Österreichischen Forstinventur 1961 - 1970 zu erarbeiten. Es soll nicht Aufgabe dieser Arbeit sein, über die aus diesen Untersuchungen gewonnenen Erkenntnisse über Stichprobeerhebungen zur Ermittlung von Holzmassen, Zuwachs und Einschlag als solche bzw. Großrauminventuren im besonderen und der entsprechenden Erhebungstechnik sowie der mathematisch-statistischen Planung und Bearbeitung zu berichten, sondern lediglich über das Prinzip der Erhebung der Holzmassen auf den einzelnen Probeflächen, somit der "Messung" der Holzmasse der einzelnen stehenden Stämme und die allgemeine Anwendbarkeit dieser Massenermittlungsmethode zu beschreiben.

Auf Grund der Tatsache, daß bei einer künftigen Großrauminventur auf Stichprobenbasis einerseits die Merkmalswerte der einzelnen Probeflächen für eine erheblich große Teilfläche des Gesamtwaldes und andererseits die Massen der Einzelstämme für eine sehr große Bestandesteilmasse repräsentativ sein müßten, wurde der Feststellung einer möglichst genauen Methode der Volumsbestimmung an stehenden Stämmen größte Bedeutung beigemessen, denn was nützt bei entsprechender Stichprobenzahl bzw. Probenetzdichte ein sehr kleiner erzielbarer sogenannter "Stichprobefehler", wenn die Erhebung oder Messung der einzelnen Merkmalswerte der Aufnahmeeinheit große systematische Fehler in sich birgt - "Große einseitige Aufnahmefehler". Es war daher die Forderung zu stellen, daß nicht nur die Messungen der Brusthöhdurchmesser (Kreisflächen) und der Höhen der Einzelbäume innerhalb geringer Fehlergrenzen zu halten sind, sondern auch die Formfaktoren der Einzelbäume als wesentliche Faktoren der Volumsbestimmung möglichst genau an den stehenden Stämmen zu bestimmen sein werden, um somit für die einzelnen Aufnahmeeinheiten Schätzungen des Volumens zu erhalten, welche frei von systematischen Fehlern, also frei von jedem einseitigen Einfluß sind (estimations free from systematic errors i. e. free from bias).

Um in erster Linie gerade diese Frage allgemein gültig beantworten zu können, wurde 1956 die sogenannte "Probestammerhebung" eingeleitet und 1960, nach der Gewinnung zahlreicher Einzelstammdaten von mehr als 15.000 gefälltten Probestämmen aller wirtschaftlich bedeutsamer Baumarten aus allen Lagen, Wuchsgebieten und Bestandesformen bzw. Typen des österreichischen Waldes, vorläufig abgeschlossen. Auf die Probestammerhebung bzw. auf die Gewinnung der verschiedenen Einzelstammdaten kommen wir in einem späteren Abschnitt, unter Grundlagenermittlung, noch zurück.

1.1 Grundsätzliche Überlegungen bezüglich einer neuen Form- bzw. Massenermittlungsmethode

Mit Rücksicht auf die sehr hohen Genauigkeitsansprüche, die, wie vorhin angedeutet, bezüglich einer von einseitigen Fehlern freien Massenerhebung auf den einzelnen Probeflächen im Zuge einer Stichprobenaufnahme zu stellen sind, mußte ganz selbstverständlich, wie bereits erläutert, jedes Schätzverfahren, so die Ertragstafelmethode, ausscheiden. Es mußte daher zu einer Methode der Messung gegriffen werden. Nach heutigem Wissen stünden nun zwei grundsätzliche Methoden zur Debatte, nämlich eine Vollkluppierung auf Probeflächen bestimmter Größe (starre Probeflächen - entweder einfache Probekreise oder auch entsprechend bestimmter Stärkeklassen abgestufte, verschieden große konzentrische Probekreise) oder die Winkelzählprobe nach BITTERLICH (1959 u. 1960) (Variable Probeflächen). Betrachten wir vorerst einmal die Methode der Vollkluppierung auf starren Probeflächen hinsichtlich der Messung bzw. Bestimmung der einzelnen massenbildenden Faktoren d , h und f , ohne auf etwaige Nachteile der Rationalität oder Erhebungsgenauigkeit unter dem Blickwinkel der verschiedenen Bestandesdichte (Stammzahl pro Probefläche) näher einzugehen. Wir sind mit den zur Verfügung stehenden Geräten, Stahlkluppe, Blume-Leiss oder Relaskop ohne weiteres in der Lage, die beiden Faktoren d und h der Einzelstämme und somit der jeweiligen Probefläche mit hinreichender Genauigkeit zu messen. Es fehlt uns jedoch die Möglichkeit, eine objektive und dem individuellen Volumen des Einzelbaumes entsprechende Formzahl - Formfaktor - bestimmen zu können. Greifen wir hier nun zu Massentafeln, welche zur Bestimmung der Volumina von Einzelbäumen dienen, etwa den Massentafeln nach GRUNDNER-SCHWAPPACH (1952), oder zu irgendwelchen Massentarifen, damit indirekt wieder zu Massentafeln (denn solche liegen derartigen Tarifen zugrunde), so erhalten wir über die Eingangswerte d und h für jeden Einzelstamm einen ganz allgemeinen Wert für das Baumvolumen und keinesfalls einen, der individuellen Form eines bestimmten Einzelbaumes innerhalb eines eng gesetzten Genauigkeitsrahmen entsprechenden spezifischen Wert seines Volumens. Allen bisher üblichen Massentafeln, auch Formhöhen- oder Formzahltafeln, liegen nur durchschnittliche Formzahlen zugrunde, und zwar gelten diese durchschnittlichen Formzahlen genau genommen für das jeweils zur Berechnung verwendete Ausgangsmaterial, haben also, wie etwa die Ertragstafeln, nur lokale Gültigkeit. In Erkenntnis dieser Tatsache befaßten sich etwa R. SCHMITT und B. SCHNEIDER mit der "Aufstellung von (lokalen) Massentafeln nach der Methode der kleinsten Quadrate" (1959), jedoch nur unter Zugrundelegung der beiden bisher üblichen Variablen, Brusthöhen-durchmesser und Höhe. Bei Verwendung derartiger Massentafeln

außerhalb jenes lokal begrenzten Entstehungsgebietes (in engerem Sinne Bestände, aus denen das Probestammmaterial gewonnen wurde) treten zu den mittleren Fehlern (Mittlere quadratische Abweichung der Einzelwerte vom arithmetischen Mittel aller Einzelwerte), mit dem die abgelesenen Massen des Einzelstammes behaftet sind, oftmals nicht unwesentliche systematische Fehler in positiver oder negativer Richtung. GÜDE (1957) verweist diesbezüglich auf Fehler von - 36 % bis +24 %. Wir sind also bei Anwendung der starren Probeflächentechnik unter Heranziehung eines Massentafelverfahrens (worunter auch alle Formzahlen-, Formhöhen-Tafelverfahren, ebenso alle Massentarifverfahren zu verstehen sind) nicht in der Lage, für die Masse der Einzelstämme und somit der Probefläche, den örtlichen Verhältnissen entsprechend, einen repräsentativen, unseren Genauigkeitsforderungen gerecht werdenden Wert zu erhalten. Es fehlt uns die Möglichkeit, den verschiedenen Örtlichkeiten, den unterschiedlichen Beständen, entsprechende Einzelbaum- oder Bestandesformzahlen zu bestimmen, wie wir etwa die Brusthöhen-durchmesser bzw. Bestandeskreisflächen und die Baumhöhen bzw. Bestandesmittelhöhen zu messen in der Lage sind.

Betrachten wir nun in weiterer Folge die Methode der Winkelzählprobe in ihrer originellen Form der Durchführung und das auf dieser Methode fußende Massenermittlungsverfahren unter dem Blickwinkel der hohen Genauigkeitsansprüche bezüglich Probeflächenaufnahme einer Großrauminventur. Mit Hilfe der Winkelzählprobe und ihrer ursprünglichen Art der Anwendung erfassen wir auf jeder Probefläche die durchschnittliche Bestandeskreisfläche pro Hektar (und zwar nach Belieben getrennt nach Baumarten, oder innerhalb der Baumarten auch weitergegliedert etwa nach Güteklassen, Schaft- bzw. Kronengüte). Wir nehmen Stichproben, deren Kreisgröße proportional zu den Kreisflächen der einzelnen Bäume sind und damit auch näherungsweise proportional zum Standraum. Diese Probekreisaufnahme arbeitet daher gegenüber einer Aufnahme auf starren Probeflächen rationaler und zweckvoller, da die Größen der Probekreise in einem bestimmten Verhältnis zum Standraum der Bäume stehen - "variable Probeflächen".

(Bei einfachen starren Probekreisen muß man entsprechend den Stammzahlverteilungen damit rechnen, daß die vielleicht weniger bedeutungsvollen schwachen Stämme in unvergleichlich höherer Anzahl erhoben werden als die Hauptmassenträger, nämlich die starken Stämme. Dies ist auch der Grund, warum man sich bei Waldinventuren vielfach nicht mit nur einer Probekreisgröße begnügt, sondern, entsprechend den Stärkeklassen abgestuft, sich zweier oder mehrerer konzentrischer Probekreise unterschiedlicher Größe bedient. Die Wahl "variabler Probekreise", also die auf der Winkelzählprobe fußende variable Probekreistechnik nach BITTERLICH

(1960), stellt in diesem Sinne das idealste und elastischste System abgestufter konzentrischer Probekreise dar, wobei die vorkommenden Baumstärken automatisch für die Größe dieser konzentrischen Probekreise - "Grenzkreise" - maßgebend sind.)

Bestimmen wir nun etwa von jedem der in der Winkelzählprobe erfaßten Bäume die Höhe und bilden das arithmetische Mittel dieser Messungen, so erhalten wir nach LOREY einen repräsentativen Wert für die Bestandesmittelhöhe, Wir verfügen nunmehr über zwei wesentliche massenbestimmende Faktoren, welche für den jeweils erfaßten Bestandesteil (nähere Umgebung der Probefläche) als repräsentativ gelten können. Um die mittlere Bestandesmasse, welche durch diese Winkelzählprobe(fläche) repräsentiert wird, bestimmen zu können, fehlt uns nunmehr noch der dritte Faktor, nämlich die mittlere Form der Stämme. Diesen repräsentativen Wert des dritten Faktors müßten wir nun nicht gesondert bestimmen, sondern wären mit Hilfe des Spiegelrealskops in der Lage, die Formhöhe PRESSLERSche RICHTHÖHE - zu bestimmen, also einen repräsentativen Wert für die wirkliche Bestandesformhöhe. Hier ist aber nun ein entscheidender Einwand zu erheben: Wenn dieses Verfahren aus theoretischen Erwägungen heraus für Baumschaftkubierungen sehr gut geeignet ist, da es für Kegel oder Paraboloid genau, für Neiloid mit großer Annäherung genau, arbeitet, und wir etwa mit einem mittleren Fehler (Stichprobefehler) der Formhöhenbestimmung von nur $\pm 5\%$, BITTERLICH (1958/1959), zu rechnen hätten, so werden die - se Hoffnungen dadurch zunichte gemacht, daß dieser zu bestimmende Richtpunkt bei Nadelholz in den allermeisten Fällen im Bereich der grünen Krone zu suchen ist, und daher seine Lage, bedingt durch Sichtbehinderung (besonders in dichten Beständen), nur sehr ungenau bestimmt werden kann (Meßfehler), ganz abgesehen von Laubholz, wo außer der Sichtbehinderung durch tief herabreichende und astreiche Kronen dieses Verfahren mangels eines geeigneten durchlaufenden Schaftes zum Scheitern verurteilt ist. Wir können also feststellen, daß wir bei dieser Art der Massenbestimmung nicht in der Lage sind, den gestellten Genauigkeitsanforderungen zu entsprechen, da wir an sich den dritten massenbestimmenden Faktor - die Form - nur mit unbefriedigender Genauigkeit bestimmen können.

Ebenso gelangen wir unter dem Blickwinkel der hohen Genauigkeitsforderungen nicht zum gewünschten Resultat, wenn wir versuchen, über den Weg einer "mehrstöckigen Winkelzählprobe" zu einem Schätzwert für den mittleren Bestandesformfaktor zu gelangen. In höheren Bereichen der Schäfte ist es unter anderem nicht mehr ohne weiteres möglich, bei Grenzfällen Durchmesser-Kontrollen durchzuführen, so wie die Grenzstammkontrollen im Bereich des Brusthöhendurchmessers durchzuführen sind, um systematische Fehler zu vermeiden. (Nebenbei sei erwähnt, daß wir bei dieser Art der Stich-

probeerhebung im Hinblick auf die Berechnung des sogenannten Stichprobefehlers der Massenaufnahme mit Mittelwerten geglätteten Werten operieren, somit einen kleineren Standardfehler erhalten als wenn die Massen der einzelnen Probeflächen aus den Massen aller Einzelstämme (also unter Berücksichtigung der massenbildenden Faktoren jedes einzelnen Stammes) berechnet worden wäre. Dieser Umstand soll nun aber nicht zur Annahme verleiten, daß auf die oben genannte Weise nun tatsächlich eine bessere Schätzung für den Wert der effektiven Bestandesformzahl bzw. für die effektiv stockende Masse zustande gekommen sei. Gleiche Einwände können wir bezüglich der zuerst behandelten Methode der starren Probeflächentechnik unter Zuhilfenahme von Massentafeln oder Massentarifen geltend machen, mehr noch bezüglich der Massentarifmethoden als gegenüber Massentafelmethode(n).

Wir müssen also erkennen, daß unsere eingangs gestellten Genauigkeitsforderungen hinsichtlich Massenbestimmung auf den einzelnen Probeflächen im Zuge einer Großrauminventur bei den bisher bekannten und hier ganz allgemein diskutierten Verfahren letztlich an der befriedigenden Bestimmung eines repräsentativen Wertes der Form des Einzelbaumes oder eines Formfaktors des Bestandes scheitern. Es gilt also nun, eine Methode zu finden, die es erlaubt, für die wichtigsten in Österreich vorkommenden Baumarten einen geeigneten und einfachen Weg der Volumsbestimmung zu finden, der es gestattet, den mannigfaltigen Baumformen in jedem einzelnen Falle in befriedigender Weise gerecht zu werden.

Ein Weg, diesen Plan zu realisieren, wurde durch die in ausländischer Literatur bekanntgewordene Verwendung von Form- bzw. Kubierungs- oder Volumsfunktionen gewiesen, im besonderen durch die Arbeiten von NÄSLUND (1940 und 1947), dessen Untersuchungen die sogenannten schwedischen Form- bzw. Kubierungsfunktionen für Kiefer, Fichte und Birke in verschiedener Art und für bestimmte Regionen erbrachten.

Unterwerfen wir nun einige der bekannten Volums- oder Formfunktionen einer näheren Betrachtung, so müssen wir grundsätzlich einmal zwei Gruppen unterscheiden, arithmetische und logarithmische Funktionen.

SPURR (1952) unterteilt diese beiden Gruppen nun jeweils in Formklassenfunktionen (form-class equations) und in Standardfunktionen (standard or nonform-class equations).

Vergegenwärtigen wir uns einmal einige Volums- bzw. Formfunktionen aus der Gruppe der arithmetischen Standardfunktionen:

"Große schwedische Kubierungsfunktion für Fichte" (NÄSLUND)

$$v = a \cdot d^2 \cdot h + b_1 \cdot d^2 + b_2 \cdot d \cdot h^2 + b_3 \cdot h^2 + b_4 \cdot d^2 \cdot h_k, \quad (1)$$

Die entsprechende Brusthöhenformfunktion (Schätzfunktion für die unechte Schaftholzformzahl),

$$f = a + b_1 \frac{1}{h} + b_2 \frac{h}{d} + b_3 \frac{h}{d^2} + b_4 \frac{h_k}{h} \quad \text{oder} \quad (1a)$$

$$f = {}_x a + b_1 \frac{1}{h} + b_2 \frac{h}{d} + b_3 \frac{h}{d^2} + {}_x b_4 \cdot k_h, \quad k_h = \frac{1}{h} \quad \text{oder} \quad \frac{(h - h_k)}{h} \quad (1b)$$

(${}_x a$ nimmt einen anderen Wert an als a der vorhergegangenen Funktion, da sich ${}_x b_4$ zwar mit gleichem Zahlenwert wie b_4 , jedoch mit umgekehrten Vorzeichen ergibt.)

"Kleine schwedische Kubierungsfunktion für Fichte" (NÄSLUND),

$$v = a \cdot d^2 \cdot h + b_1 \cdot d^2 + b_2 \cdot d \cdot h^2 + b_3 \cdot h^2. \quad (2)$$

Die entsprechende Brusthöhenformfunktion,

$$f = a + b_1 \frac{1}{h} + b_2 \frac{h}{d} + b_3 \frac{h}{d^2}. \quad (2a)$$

"Meyer's Volumsfunktion",

$$v = a + b_1 \cdot d + b_2 \cdot d \cdot h + b_3 \cdot d^2 + b_4 \cdot h + b_5 \cdot d^2 \cdot h. \quad (3)$$

Die entsprechende Brusthöhenformfunktion,

$$f = a \frac{1}{d^2 h} + b_1 \frac{1}{dh} + b_2 \frac{1}{d} + b_3 \frac{1}{h} + b_4 \frac{1}{d^2} + b_5. \quad (3a)$$

"Meyer's modifizierte Volumsfunktion",

$$v = a + b_1 \cdot d + b_2 \cdot d \cdot h + b_3 \cdot d^2 + b_4 \cdot d^2 \cdot h. \quad (4)$$

Die sogenannte "Australische Volumsfunktion",

$$v = a + b_1 \cdot d^2 + b_2 \cdot h + b_3 \cdot d^2 \cdot h. \quad (5)$$

Die entsprechende Formfunktion,

$$f = a \frac{1}{d^2 \cdot h} + b_1 \frac{1}{h} + b_2 \frac{1}{d^2} + b_3. \quad (5 a)$$

"Combined variable-arithmetic standard equation",

$$v = a + b \cdot d^2 \cdot h; \quad \text{bzw.} \quad f = a \frac{1}{d^2 \cdot h} + b. \quad (6), (6 a)$$

Betrachten wir nun diese Gruppen von Volumsfunktionen bzw. die jeweils entsprechenden Formfunktionen für die unechte bzw. Brusthöhenschaftholzformzahl, so weisen sie alle als unabhängige Variable letztlich nur die beiden variablen Eingangswerte d und h oder Kombinationen dieser beiden Werte (Koeffizienten mit unterschiedlicher Bedeutung) auf, bis auf die "Große schwedische Kubierungsfunktion". Wir müssen daraus schließen, daß die dadurch erzielbaren Erfolge wohl gleich oder in manchen Fällen nicht wesentlich besser als etwa bei Verwendung von allgemeinen oder lokalen Massentafeln oder Formzahltafeln sein werden.

Daß diese Annahme richtig war, werden wir in einem späteren Abschnitt dieser Arbeit erkennen. Von der "Großen schwedischen Kubierungsfunktion" können wir jedoch annehmen, daß sie wohl günstigere Resultate zu liefern imstande sein müßte, als die übrigen Funktionen dieser Gruppe, da sie außer d und h noch einen dritten variablen Eingangswert, die Kronenansatzhöhe h_k bzw. das Kronenverhältnis k_h als unabhängige Variable beinhaltet.

Fassen wir nun die Kronenansatzhöhe bzw. die Kronenlänge oder das Kronenverhältnis als Weiser für die Formigkeit unserer Baumarten, im besonderen der Fichte, ins Auge, so müssen wir annehmen, daß zwischen der Form der einzelnen Stämme und deren Kronenlänge ein geringer Zusammenhang (schwache Korrelation) besteht, der jedoch zu gering ist, um als signifikanter Weiser für die Form gelten zu können. Etwas anders mögen vielleicht die Verhältnisse in den nordischen Ländern gelagert sein, wo die Bestockungsverhältnisse nicht so stark differenziert sind wie in unseren geographischen Breiten und gebirgigen Lagen. Zu einer günstigeren Beurteilung würden wir voraussichtlich gelangen, wenn wir die bei schwedischen Funktionen für Kiefer als unabhängige Variable eingeführte Rindenstärke auch für unsere Verhältnisse in Betracht ziehen. Voraussichtlich wären für unsere Baumarten Kiefer, Lärche und Schwarzkiefer ähnliche Ergebnisse wie in Schweden für die dortige Kiefer zu erwarten. Doch müßten wir uns hiebei letztlich doch auch vor Augen halten, daß wir kaum mehr als eine schwache Korrelation zwischen Form und Rindenstärke dieser Baumarten konstatieren könnten.

Nach diesen Betrachtungen erschien es also von Anfang an zweifelhaft, daß mit derartigen Standardfunktionen, auch von der Gestalt der "Großen schwedischen Kubierungsfunktion", mit Rücksicht auf die Mannigfaltigkeit der österreichischen Waldverhältnisse und der damit verbundenen wesentlich größeren Spreitung und Variabilität aller bei der Erstellung derartiger Funktionen verwendeten Größen in gleichen Faktorenkombinationen den eingangs gestellten Forderungen entsprechende Resultate erzielt werden könnten. Mit anderen Worten, es wird mit diesen von den zitierten Autoren verwendeten Variablen alleine nicht möglich sein, einerseits eine hohe Präzision bei der Schätzung des Formfaktors oder des Volumens der Einzelstämme zu erzielen. Vor allem das Risiko bleibt andererseits relativ groß, daß sich bei der Schätzung der Formfaktoren bzw. der Massen mit Hilfe von Funktionen, welche nur d und h als veränderliche Merkmalswerte enthalten, für verschiedene Wuchsgebiete, Landesteile, Höhenlagen, Stärkeklassen usw. systematische Fehler ergeben.

Zu denselben Schlüssen gelangen wir, wenn wir die hiezu parallele Gruppe von logarithmischen Funktionen, nämlich die logarithmischen Standardfunktionen, einer Beurteilung unterwerfen, so etwa:

"SCHUHMACHER-HALL - 1933",

$$\log v = a \log 10 + b_1 \log d + b_2 \log h, \quad (v = 10^a \cdot d^{b_1} \cdot h^{b_2}) \quad (7)$$

(Diese Regressionsgleichung bildete auch für die ausgezeichnete Arbeit "Die Aufstellung der Massentafeln nach der Methode der kleinsten Quadrate" von R. SCHMITT und B. SCHNEIDER (1959) die Ausgangsbasis.)

"DWIGHT-THORNBURGH - 1948",

$$\log v = a \log 10 + b \log h + (3 - b) \log d \quad (8)$$

$$(\text{oder } v = 10^a \cdot h^b \cdot d^{(3-b)}, \text{ abgeleitet aus } v = 10^a \cdot \frac{h}{d} \cdot d^2 \cdot h =$$

$$v = 10^a \cdot h^{(1+c)} \cdot d^{(2-c)}, \text{ wobei } (1+c) = b \text{ und somit } v = 10^a \cdot h^b \cdot d^{(3-b)})$$

"Logarithmic combined variable",

$$\log v = a \log 10 + b \log (d^2 \cdot h) \quad (\text{oder } v = 10^a (d^2 \cdot h)^b) \quad (9)$$

Wir werden bei Verwendung dieser Funktionen, gegenüber den vorhin erwähnten arithmetischen Funktionen, keine überzeugenden Fortschritte in bezug auf einen Genauigkeitserfolg erzielen können, auch dann nicht, wenn wir sie lediglich zur Erstellung lokaler Massenfunktionen bzw. Massentafeln verwenden, denn alleine d und h (bzw.

deren Logarithmen) als unabhängige Variable vermögen infolge ihrer relativen schwachen Korrelation mit f diesen Formfaktor nur mit unbefriedigender "Bestimmtheit" zu erfassen.

Wenden wir uns nun den von SPURR (1952) zitierten arithmetischen Formklassen-Funktionen zu, so finden wir folgende Gleichungen:

$$v = a + b_1 \cdot k + b_2 \cdot d^2 \cdot h + b_3 \cdot k \cdot d^2 \cdot h \quad (10)$$

(combined-variable formclass-equation) und

$$v = a + b \cdot k \cdot d^2 \cdot h \quad (11)$$

(short-cut formclass-equation),

wobei k als formclass-ratio, definiert nach $f = a + b \cdot k$, und f als Korrektionsfaktor der Form zu betrachten sind. Als k können wir die GIRARD formclass-ratio

$$\frac{d_u}{d}$$

oder den unechten Formquotienten

$$\frac{d_{0,5} h}{d}$$

einsetzen. Die combined-variable formclass-equation entsteht dadurch, daß wir die combined variable standard equation mit der Gleichung des Korrektionsfaktors f multiplizieren.

$$v = (a + b \cdot d^2 \cdot h) \cdot f = (a + b \cdot d^2 \cdot h) (a + b \cdot k) =$$

$$v = a + b_1 \cdot k + b_2 \cdot d^2 \cdot h + b_3 \cdot k \cdot d^2 \cdot h.$$

Die Gleichung (11) stellt, wie ihre Bezeichnung ausdrückt (short-cut formclass-equation), eine Kurzform der Gleichung (10) dar. Führen wir beide Funktionen in Gleichungen für die unechte Schaftformzahl über, so lauten die entsprechenden Formeln:

$$f = a \frac{1}{d^2 \cdot h} + b_1 \frac{d_{0,5} h}{d^3 \cdot h} + b_2 + b_3 \frac{d_{0,5} h}{d} \quad \text{und} \quad (10 \text{ a})$$

$$f = a \frac{1}{d^2 \cdot h} + b \frac{d_{0,5} h}{d}, \quad (11 \text{ a})$$

wenn wir als Formquotient $k = \frac{d_{0,5} h}{d}$ wählen.

Gegenüber den bisher betrachteten Volums- bzw. Formfunktionen ist wohl bei den letztgenannten der weitaus beste Erfolg zu erwarten, da

sie neben den beiden üblichen unabhängigen variablen Eingangswerten als dritte einen oberen Durchmesser - "upper diameter" - " d_u " beinhalten, bzw. als unabhängige Variable in den entsprechenden Formfunktionen einen unechten Formquotienten

$$\frac{d_u}{d} \text{ oder } \frac{d_{0,5 h}}{d}$$

aufweisen. Als "oberen Durchmesser" können wir also einen Durchmesser in absoluter oder relativer Höhe vom Boden oder Stockabtrieb aus wählen.

Als Beispiel eines verwendeten Durchmessers in absoluter Höhe sei der "Girard formclass diameter (diameter at the top of the first 16 foot log above a one-foot stump) angeführt, als oberer Durchmesser (Durchmesser in halber Höhe über dem Brusthöhendurchmesser - half-height above breastheight).

Vergegenwärtigen wir uns nun etwa den von SCHUBERG 1891 gefundenen "Index der Form", das Verhältnis d zu $d_{0,x h}$, oder die von KUNZE (1891) verwendete Formel

$$f = \frac{d_{0,5 h}}{d} - c,$$

bzw. den von SCHIFFEL (1899) verwendeten Formquotienten

$$\frac{d_{0,5 h}}{d} = k$$

in der Funktion

$$f = b_1 \cdot k + \frac{b_2}{k \cdot h} - a$$

und ganz besonders die von HOHENADL in seinen Arbeiten aufgezeigten Zusammenhänge zwischen Durchmessern in relativer Baumhöhe und dem Brusthöhendurchmesser, das heißt wie HOHENADL die unechte Formzahl f aus einer echten Formzahl $f_{0,1 h}$ und dem nach ihm benannten Formquotienten, "der die störenden Einflüsse des Wurzelanlaufes anzeigt", PRODAN (1951), herleitete, so müssen wir ganz zweifellos einem Durchmesser in relativer Baumhöhe gegenüber einem oberen Durchmesser in absoluter Höhe den Vorzug geben. An dieser Stelle sei eine auf "HOHENADLs Formquotienten" aufbauende, von ASSMANN, zitiert bei DITTMAR (1958), angeregte Formfunktion von der Gestalt

$$f = a + b \frac{d}{d_{0,1 h}}$$

angeführt.

Bei Wahl eines oberen Durchmessers in absoluter Höhe hätten wir,

gemessen an den vorkommenden Baumhöhen, stets nur für ein relativ kurzes oder langes Stück des gesamten Schaftes, gute Hinweise für die Form eben dieses Stückes gefunden. Derartige Daten entbehren der Vergleichbarkeit von Stamm zu Stamm.

Hingegen erfassen wir durch Wahl eines oberen Durchmessers in relativer Höhe ein im Verhältnis zum Gesamtschaft relativ gleich langes Schaftstück. Wie HOHENADL (1922/1923) zeigen konnte, bietet nun aber jede ideelle Zerlegung des Schaftes zum Zwecke seiner Volums- bzw. Formbestimmung in Stücke gleicher relativer Länge den großen Vorteil, daß sich, unabhängig von der Schaftlänge und den Dimensionen der Durchmesser, starke Gesetzmäßigkeiten der Form (Ausbauchungszahlen bzw. Formquotienten) nachweisen lassen.

Diese Vorteile, die uns die ideelle Zerlegung des Schaftes in relativ gleich lange Schaftstücke, etwa hinsichtlich der geringen Unterschiede zwischen gleichwertigen echten Formquotienten, bieten kann, können wir in ähnlicher Weise, jedoch mit geringen Einschränkungen, auch für unechte Formquotienten erwarten. Wie bereits festgestellt, werden wir mit den beiden zitierten arithmetischen Formklassen-Volumsfunktionen bzw. mit den entsprechenden Formfunktionen wesentlich zufriedenstellendere Resultate erzielen, als mit allen vorher genannten Funktionen. Die Tatsache, daß beide Gleichungen einen oberen Durchmesser (vornehmlich dann, wenn es ein Durchmesser in relativer Baumhöhe ist) enthalten, erhöht ganz wesentlich ihren Wert gegenüber den anderen Gleichungen. An sich umfaßt die combined variable-formclass equation ein Zuviel an Gleichungsgliedern bzw. an unabhängigen Variablen. Bei "zweckmäßiger Anordnung" der drei variablen Eingangswerte können wir mit einer einfacheren Gleichung vollkommen das Auslangen finden. Bei der short-cut formclass equation könnten wir die Wirksamkeit erhöhen, wenn wir die veränderlichen Werte d , h und $d_{0,5h}$ in anderer Kombination in eine Formfunktion einführen, wie wir später in Analogie hiezu am Beispiel des $d_{0,3h}$ beim Vergleich der Funktionen (14), (20) und (22) sehen werden.

Untersuchen wir nun die vierte und letzte von SPURR zitierte Gruppe der Formfunktionen, nämlich die "logarithmischen Formklassenfunktionen", so können wir die "logarithmic combined variable form-class equation",

$$\log v = a \log 10 + b \log k \cdot d^2 \cdot h, \quad (12)$$

gleich wie die Funktionen der vorausgegangenen Gruppe beurteilen, jedoch bei der "logarithmic form diameter (logarithmic upper tree diameter) equation" von der allgemeinen Form

$$\log v = a \log 10 + b_1 \log d + b_2 \log h + b_3 \log d_u \quad (13)$$

wollen wir kurz verweilen.

Wenn wir als d_u einen oberen Durchmesser aus dem Stammbereich der geringsten Durchmesserabnahme "Mittelschaft" wählen, müssen wir von dieser Funktion die bestmögliche Anpassung an das jeweils zugrunde gelegte Stammmaterial erwarten. Daß wir mit Logarithmen arbeiten müssen, macht diese Funktion für praktische Zwecke unhandlich, abgesehen von der Möglichkeit einer vollmaschinellen Datenverarbeitung, wo dieser Umstand keine wesentliche Rolle spielt. Andererseits wollen wir aber auch versuchen, mit möglichst wenigen unabhängigen Variablen, etwa mit zwei, das Auslangen zu finden.

Alle bisher bekanntgewordenen bzw. hier behandelten oder angedeuteten Volums- oder Formfunktionen entsprachen noch vor jeder Prüfung an konkretem Probestammmaterial nicht meinen Vorstellungen bzw. den Bedingungen, die meines Erachtens an eine derartige Funktion zu stellen sind.

Welche sind nun diese Bedingungen: Da wir die Schätzungen für v bzw. indirekt für v mit Hilfe von Regressionsgleichungen durchführen wollen, haben wir bezüglich derartiger Funktionen bzw. bezüglich jeder verwendeten unabhängigen Variablen die drei folgenden Merkmale nach BRUCE-SCHUMACHER (1950) als prinzipielle Forderung zu stellen:

- 1) sie soll einfach und mit Genauigkeit zu messen sein,
- 2) sie soll mit der abhängigen Variablen stark korrelieren,
- 3) sie soll unwesentlich mit den anderen verwendeten unabhängigen Variablen korrelieren.

Einem persönlichen Hinweis von Prof. MATÉRN zufolge, wird den Forderungen 2) und 3) keine allzugroße Bedeutung beizumessen sein. Es gilt doch letztlich, geeignete "Probierfunktionen" zu finden, welche es gestatten, die Werte der Formfaktoren für alle Situationen, vor allem weitestgehend frei von systematischen Fehlern, aber auch mit höherer Präzision, zu schätzen.

Fügen wir diesen Forderungen bezüglich der einzelnen unabhängigen Variablen noch spezielle Forderungen bezüglich einer Formfunktion hinzu, so könnten sie wie folgt lauten:

- a) die Formfunktion (Volumsfunktion) soll mit Rücksicht auf ihre praktische Anwendung möglichst wenige unabhängige Variable umfassen und einfach zu berechnen sein,
- b) zur Bildung der unabhängigen Variablen sollen nur wenige, in der Natur rasch und genau zu ermittelnde veränderliche Eingangswerte (Meßwerte) herangezogen werden,

- c) die veränderlichen Eingangswerte sollen in den unabhängigen Variablen so eingeführt werden, daß wir Funktionen von bestmöglicher Anpassung an das vorliegende Stammaterial erzielen, so etwa, auch mit Rücksicht auf die Forderung a), als Quotienten.

Unter Beachtung dieser sechs Bedingungen führten meine Überlegungen zu folgender speziellen arithmetischen Formfunktion, POLLANSCHÜTZ (1961),

$$f = a + b_1 \frac{d^2_{0,3h}}{d^2} + b_2 \frac{h}{d^2}, \quad (14)$$

die nun hinsichtlich der gestellten Bedingungen und im Vergleich zu anderen bekannten Funktionen bezüglich ihres Wertes zu prüfen war und, wie wir später sehen werden, bis zu einem gewissen Grad den Erwartungen entsprach. Für die Gestaltung dieser Funktion zur "Schätzung" der unechten Schaffholzformzahl, waren die parallelen Überlegungen hinsichtlich einer entsprechenden echten Schaffholzformzahl nicht von unerheblicher Bedeutung. Betrachten wir nämlich in Anlehnung an den HOHENADL'schen Formquotienten ((Wurzelaufquotienten, wie auch KRENN (1944) bzw. ALTHERR (1953) ihn nennen)).

$$q_H = \frac{d}{d_{0,9}} \text{ bzw. } q_H = \left(\frac{d}{d_{0,9}} \right)^2$$

(der von HOHENADL verwendete Wert $d_{0,9}$ entspricht nach unserer Schreibweise $d_{0,1h}$) das Verhältnis

$$\frac{d}{d_{0,3h}} = \text{ bzw. } \frac{d^2}{d^2_{0,3h}} \quad k^2_{1,3/0,3h}$$

ebenfalls als einen Formquotienten oder Wurzel- bzw. Stammanlaufquotienten, so können wir weiter schließen, daß

$$f = \frac{f_{0,3h}}{k^2_{1,3/0,3h}} = \frac{f_{0,3h}}{\left(\frac{d}{d_{0,3h}} \right)^2}, \text{ bzw. } f_{0,3h} \cdot \frac{d^2}{d^2_{0,3h}}$$

ist, und erhalten durch diese Umformung eine Funktion für die "Schätzung" eines echten Schaffholzformfaktors, bzw. einer echten Schaffholzformzahl, bezogen auf den $d_{0,3h}$, von der Art

$$f_{0,3h} = a \frac{d^2}{d^2_{0,3h}} + b_1 \frac{h}{d^2_{0,3h}} + b_2 \cdot$$

Diese Funktion und die Funktion für einen Bruthöhenformfaktor weisen eine gewisse Spiegelgleichheit auf.

Die Formel für die letztlich gewünschte und entsprechende, spezielle arithmetische Kubierungs- bzw. Volumsfunktion lautet:

$$v = \hat{a} \cdot d^2 \cdot h + b_1 \cdot d_{0,3h}^2 \cdot h + b_2 \cdot h^2, \quad \text{da} \quad (14 a)$$

$$v = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h \cdot f \quad \text{und} \quad \hat{a} = a \frac{\pi}{4}, \quad b_1 = b_1 \frac{\pi}{4}, \quad b_2 = b_2 \frac{\pi}{4}.$$

Entsprechend der Standardgleichung für das Volumen eines Baumschaftes

$$v = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h \cdot f,$$

bei der wir f als den bei Erhebungen in der Natur bisher nicht erfaßten, jedoch entscheidenden dritten Eingangswert in dieser Gleichung zu werten haben, galt die Suche nicht einer geeigneten Kubierungs- oder Volumsfunktion als solcher, sondern ihrer entsprechenden Formfunktion als Regressionsgleichung, für die in weiterer Folge die entsprechenden Koeffizienten im Wege der Regressionsanalyse zu suchen waren. Eine geeignete Formfunktion ermöglicht uns eine repräsentative Schätzung des unechten Formfaktors, der allgemein als Brusthöhenformverhältniszahl zwischen der Masse eines Baumes und eines Zylinders mit gleichem Basisdurchmesser und gleicher Höhe definiert werden kann.

Diese spezielle arithmetische Formfunktion enthält als die entscheidende unabhängige Variable das Quadrat des unechten Formquotienten $k_{0,3/1,3}$, also

$$\frac{d_{0,3h}^2}{d^2},$$

und als zweite unabhängige Variable

$$\frac{h}{d^2},$$

Die Wahl von

$$\frac{d_{0,3h}}{d} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d_{0,3h}^2}{d^2}$$

gegenüber der Verwendung des unechten Formquotienten (unechte Ausbauchungszahl)

$$\frac{d_{0,5h}}{d}$$

etwa bei KUNZE, SCHIFFEL und bei den von SPURR zitierten Funktionen, oder des HOHENADLschen Formquotienten

$$\frac{d}{d_{0,1h}}$$

(wie ASSMANN für eine Funktion anregte) erfolgte auf Grund nachfolgender praktischer Überlegungen.

Wir haben also die drei variablen Eingangswerte d , $d_{0,3h}$ und h in Form von Quotienten für unsere Regressionsgleichung auf zwei unabhängige - gruppendifinierende - Variable (Einflußgrößen) zusammengefaßt, Die bekannte Tatsache, daß ein unechter Formquotient

$$k_{0,xh/1,3} \frac{d_{0,xh}}{d},$$

also das Verhältnis eines oberen Durchmessers in relativer Baumhöhe zu einem Basisdurchmesser in absoluter Höhe - 1,3 m - in relativ starker Korrelation zur unechten Formzahl - Brusthöhenformfaktor - steht, wies den Weg, wie die beiden variablen Werte d und $d_{0,xh}$ in unserer Formfunktion unterzubringen sind.

Jedoch nicht jeder unechte Formquotient zeigt eine gleich starke Korrelation mit dem Brusthöhenformfaktor, sondern jene Formquotienten, bei denen der gewählte obere Durchmesser im Stammbereich der geringsten Durchmesserabnahme, also im Bereich des Mittelschaftes liegt, lassen die günstigsten Ergebnisse erwarten. Dieser Bereich liegt im großen Durchschnitt bei Bäumen mit durchlaufendem Schaft im Bereich von 0,2 bis 0,6 der Höhe vom Boden oder Stockabtrieb aus gerechnet. In diesem Zusammenhang sei auf die Feststellung verwiesen, die ZIMMERLE (1941 und 1947) machte, daß ein Durchmesser aus 0,2 der Höhe als Bezugsdurchmesser für einen unechten Formquotienten besser ist, als der Durchmesser $0,1h$, wie ihn HOHENADL empfahl, da der $d_{0,2h}$ bereits oberhalb des stark konkav gekrümmten Teiles der Schaftkurve, also in der Regel im Bereich des Mittelschaftes, liegt.

Bezugsdurchmesser aus dem Bereich des Stammfußes (Neiloidstumpf) scheiden ebenso aus, wie Durchmesser aus dem Bereich des Oberchaftes, da dort die Durchmesserabnahme pro Längeneinheit zu groß ist (Übergänge vom quadratischen Paraboloid zum geradseitigen Kegel).

Daß wir aus dem Mittelschaft - Bereich der geringsten Durchmesserabnahme pro Längeneinheit - den $d_{0,3h}$ wählten, dafür war nun folgende Erwägung maßgebend:

Mit Rücksicht auf relativ starke, niedrige Bäume einerseits und relativ tiefbeastete Bäume andererseits müssen wir wohl den Bereich 0,3 - 0,5 der Höhe einengen. Bei Wahl des $d_{0,5h}$ für einen unechten Formquotienten und in weiterer Folge für unsere Formfunktion müssen wir wohl etwas günstigere Ergebnisse erwarten als etwa bei

Wahl des $d_{0,3h}$. Doch steht dem entgegen: Bei der Bestimmung eines oberen Durchmessers sind wir infolge großer vorkommender Baumhöhen auf eine optische Meßmethode angewiesen. Wir ziehen für die Messung bzw. Schätzung eines oberen Durchmessers in erster Linie das von BITTERLICH entwickelte Spiegelrelaskop wegen seiner praktischen Handhabung, seiner relativ hohen Meßgenauigkeit und wegen seiner vielseitigen Verwendbarkeit in der Forsttaxation in Betracht. - Bei einer relativ großen Anzahl von Bäumen reicht die Krone bzw. die Beastung (zumindest einseitige Krone) bis zur halben Baumhöhe und bei sehr vielen Bäumen noch tiefer herab. Es würde sich daher für die Bestimmung des $d_{0,5h}$ wesentlich häufiger eine Sichtbehinderung und damit Meßungenauigkeiten (auch infolge der Anschwellungen bei den Astansätzen) ergeben, als bei der Bestimmung des Bezugsdurchmessers in $0,3h$.

Der weitaus größere Teil des österreichischen Waldes liegt im Bereich von geneigtem oder gar stark geneigtem Gelände. Da die Messungen mit dem Spiegelrelaskop nun von der Bergseite her durchgeführt werden (analog der Meßrichtung für die Bestimmung des Brusthöhendurchmessers), ergeben sich relativ flache Visuren (selten stark schleifende Visuren) und kurze Entfernungen (Objekt - Instrument) bei $d_{0,3h}$ gegenüber $d_{0,5h}$, und daher auch eine relativ höhere Genauigkeit der "Durchmesserschätzung". (Bei einer Untersuchung über die Genauigkeit der "Messung" bzw. Schätzung von Durchmessern mit Hilfe des Spiegelrelaskops im Rahmen des Institutes Forstinventur - diese Ergebnisse wurden durch SUTTER (1964) veröffentlicht - ergab sich, daß sich bei der "Schätzung von Durchmessern" aus kurzen Distanzen, wie zu erwarten, bessere Ergebnisse erzielen lassen als aus relativ weiten Entfernungen.)

Wir können also feststellen, daß die Durchmesser in $0,3h$ günstiger zu bestimmen und relativ genauer zu "messen" sind als die Durchmesser in $0,5h$. Durch diesen Umstand würde eine durch die Einführung eines $d_{0,5h}$ erzielbare, geringfügig bessere Anpassung einer Funktion an das Material praktisch infolge geringer Meßgenauigkeit aufgewogen bzw. illusorisch gemacht.

Mit Rücksicht auf die günstigere Bestimmbarkeit und die erzielbare höhere Genauigkeit der Messung haben wir also die untere Grenze des als günstigsten Bereich anzusehenden Teiles des Mittelschaftes für die Lage unseres Bezugsdurchmessers gewählt.

Gegenüber anderer bekannter Formfunktionen, etwa von KUNZE, SCHIFFEL, oder der von SPURR angeführten Volumsfunktion, gab ich ursprünglich dem Quadrat eines unechten Formquotienten als unabhängige Variable den Vorzug und versprach mir eine größere Wirksamkeit, wenn nicht die Durchmesserwerte, sondern deren

Quadrate - indirekt die entsprechenden Kreisflächen - ins Verhältnis zueinander gesetzt werden. Daß diese Annahme nur zum Teil eine Berechtigung hatte, werden wir insbesondere im Abschnitt 4 dieser Arbeit feststellen können.

Nun zur Wahl der zweiten unabhängigen Variablen. SCHIFFEL (1899) stellte bereits fest, "ein Durchmesserquotient wird erst mit der Beziehung zur Höhe ein Formweiser des Schaftes". Es ist nun aber nicht einerlei, wie wir die Höhe in einer Formfunktion in Beziehung zu einem "Durchmesserquotienten" bzw. Formquotienten bringen. SCHIFFEL stellte weiters bereits fest, daß bessere Ergebnisse zu erzielen sind, wenn man statt

$$h \text{ oder } \frac{1}{h}$$

- wie KUNZE dies tat - die Höhe bei der zweiten Variablen mit dem Brusthöhendurchmesser (bzw. mit dem "Durchmesserquotienten") in Beziehung setzt. SCHIFFEL (1905, 1907, 1908) wählte eine Funktion von folgender Gestalt:

$$f = a + b_1 \frac{d_{0,5} h}{d} + b_2 \frac{d}{h \cdot d_{0,5} h} \quad (35)$$

(nach älterer Schreibweise:

$$f = a \cdot q_s + \frac{b}{q_s \cdot H} + c, \text{ wobei } q_s = \frac{D_{0,5}}{D_{1,3}} =$$

SCHIFFELscher Durchmesserquotient)

und erzielt damit, wie auch wir später nachweisen können, bessere Resultate als KUNZE. Obzwar SCHIFFEL (1899) auch die Feststellung traf, "ein Dimensionsquotient

$$\frac{h}{d}$$

hat mit Schaftform und Formzahl nichts zu schaffen', können wir später nachweisen, daß wir mit dem Verhältnis

$$\frac{h}{d'}$$

bzw. noch zweckvoller mit

$$\frac{h}{d^2}$$

als zweite unabhängige Variable günstigere Ergebnisse erzielen können, als wenn wir den von SCHIFFEL aufgezeigten Weg beschreiten.

Die grundsätzlichen Überlegungen bezüglich einer neuen Formfunktion, und damit in weiterer Folge für eine neue Massenermittlungsmethode, können wir mit folgenden Feststellungen abschließen: Mit

der vorerst gewählten Schaffformfunktion

$$f = a + b_1 \frac{d^2 0,3 h}{d^2} + b_2 \frac{h}{d^2}$$

haben wir die eingangs gestellten prinzipiellen Forderungen bezüglich der einzelnen unabhängigen Variablen und die speziellen Bedingungen bezüglich einer Formfunktion erfüllt, denn gemäß Bedingung a) umfaßt diese Formfunktion mit Rücksicht auf ihre einfache praktische Anwendbarkeit nur zwei gruppendifinierende Variable (Einflußgrößen - Einflußvariable), und sie ist somit auch relativ einfach zu berechnen. Zu Forderung b): Die drei notwendigen veränderlichen Eingangswerte, die zur Bildung der zwei Einflußvariablen herangezogen wurden, sind in der Natur rasch und relativ genau zu messen (Brusthöhendurchmesser mit Stahlkluppe, die Baumhöhe mit Blume-Leiss oder Spiegelrelaskop und der obere Durchmesser in 0,3 h mit dem Spiegelrelaskop oder mit anderen optischen Geräten, etwa dem Zeiss-Teletop). Damit ist auch die prinzipielle Forderung Nr. 1) bezüglich unabhängiger Variablen erfüllt. ((Zu Forderung 2): Der Quotient

$$\frac{d^2 0,3 h}{d^2}$$

ist mit f stark korreliert, diese Beziehung trägt einen deutlich ausgeprägten linearen Charakter. Der Quotient

$$\frac{h}{d^2}$$

ist mit f deutlich korreliert. Diese Beziehung läßt sich mit geringen Einschränkungen ebenfalls als Gerade darstellen. Zu Forderung 3): Zwischen den beiden unabhängigen Variablen unserer Formfunktion besteht lediglich eine mäßige Korrelation.))

Die spezielle Forderung c), "die veränderlichen Eingangswerte sollen in die unabhängigen Variablen - etwa als Quotienten - so eingeführt werden, daß wir eine Formfunktion von bestmöglicher Anpassung an das vorliegende Stammaterial erzielen", können wir mit ganz geringen Einschränkungen ebenfalls als erfüllt betrachten, wie aus später angeführten Gegenüberstellungen mit anderen Kombinationen ersichtlich gemacht werden soll.

2 GRUNDLAGENERMITTLUNG FÜR DIE FOLGENDEN BERECHNUNGEN

Wie bereits früher erwähnt, wurde 1956 die sogenannte "Probestammerhebung" eingeleitet, um für die Entwicklung eines neuen Massenermittlungsverfahrens, im besonderen für die Berechnung von, den hohen Genauigkeitsforderungen möglichst gerecht werdenden, Funktionen für die Bestimmung des Volumens von Einzelbäumen geeignete Unterlagen aus allen möglichen Bestandestypen und Wuchsgebieten, Landesteilen und Höhenlagen, für alle Wirtschaftsbaumarten zu erhalten. Die "Probestammerhebung" wurde im Zuge von Kahlhieben, Einzelstammnutzungen und Durchforstungen im Bereich von Forstbetrieben und Kleinwaldbesitzungen (Bauernwald) durchgeführt. Wie aus der großen Zahl von Einzeldaten, die pro Baum ermittelt wurden, zu erkennen ist, sollte diese "Probestammerhebung" nicht nur allein für die Berechnung von Volums- und Formfunktionen die erforderlichen Daten liefern - dies war wohl der Hauptzweck -, sondern darüber hinaus soll dieses Probestammmaterial ganz allgemein für weitere ertragskundliche Probleme, je nach Fragestellung, zur Gänze oder zum Teil als Grundlagenmaterial dienen.

Wir wollen in dieser Arbeit nun einen Auszug aus der Vielzahl der Daten näher beschreiben, insoweit sie für diese Arbeit von Bedeutung sind. Die Abschrift eines Erhebungsmanuales ist im Anhang beige-schlossen (Beilage 1).

Aus der Beschreibung der Probeflächen interessiert uns einmal die Region oder das Wuchsgebiet, aus dem die gewonnenen Probestammdaten stammen. Diese ist grob durch das angegebene Bundesland, den Gerichtsbezirk und die Katastralgemeinde festzustellen. Die Lage der Örtlichkeit selbst ist auf Karten 1 : 50.000 mit Probeflächennummer verzeichnet worden. Für die vorliegende Arbeit interessiert uns zur Charakterisierung des Standortes und des Bestandes die Meereshöhe und der Altersaufbau des Bestandes (gleichaltrig-einstufig, zweistufig, mehrstufig-plerterwaldartig). Von den Probestammdaten interessieren uns, außer der Angabe der Holzart, von den allgemeinen Angaben die Bestandesertragsklasse - Absolutbonität, basierend auf HDZ₁₀₀ -, um einen allgemeinen Hinweis auf die Bestandesbonität zu erhalten, weiters der Kronendurchmesser.

Aus den Daten der Liegendmessung entnehmen wir d (BHD mit Rinde), Age_{st} (Alter in Stockhöhe), h (L Länge des Baumes von Stockabtrieb bis zur Wipfelspitze plus h_{st} - Stockhöhe), h_k (LK - Länge des Schaftes vom Stockabtrieb bis zum Beginn der grünen Krone plus h_{st}), weiters die oberen Durchmesser mit Rinde in 0,1, 0,3, 0,5 und 0,7 der Länge bzw. Höhe des einzelnen Baumes. Die Durchmesserbestimmung mit Rinde in 1 m-Sektionen benützen wir für die

Berechnung des Schaftvolumens der einzelnen Stämme und weiters auch der Volumsgleichung mit konstantem Formfaktor (constant formfactor equation)

$$v = a \cdot d^2 \cdot h = \frac{\pi}{4} f \cdot d^2 \cdot h$$

zur Bestimmung des individuellen unechten Schaftformfaktors (Brusthöenschaftholzformzahl) als Verhältniszahl des konkreten Schaftholzvolumens zum Volumen eines gleichlangen, basisgleichen (Brusthöhendurchmesser) Zylinders.

Sowohl die Länge des Stammes als die Länge bis zum Kronenansatzpunkt wurden mit einem Stahlmaßband auf Dezimeter genau gemessen. Alle Durchmesser, d , $d_{0,1h}$, $d_{0,3h}$ usw. und die Mitteldurchmesser der einzelnen 1 m-Sektionen wurden durch Messungen auf gleicher Meßrichtung (um die Vergleichbarkeit zu wahren) auf Millimeter mit einer Stahlkluppe bestimmt. Hier könnte man den Einwand geltend machen, daß eine kreuzweise Kluppierung vorteilhafter gewesen wäre und den von der Kreisform abweichenden Stammquerschnitten wohl wesentlich besser Rechnung getragen hätte. Arbeitstechnisch hätte dies eine zeitliche Mehrbelastung bedeutet, aber, abgesehen davon, wäre dadurch ein wirklichkeitsnäheres oder, mit Rücksicht auf die spätere Verwertung der Daten, ein günstigeres Ergebnis erzielt worden? Betrachten wir einmal die Verhältnisse im ebenen oder leicht geneigten Gelände, in welchem nach allen Richtungen an sich die Möglichkeit der Fällung gegeben ist. Wäre etwa eine gesetzmäßige Exzentrizität der Bäume in einer bestimmten Himmelrichtung gegeben, so würden diese systematischen Abweichungen, bedingt durch die zufällig wechselnde Fällrichtung, indirekt ausgeglichen. (Messungen erfolgten am liegenden Baum senkrecht zur Stammachse von oben her.) Der Einwand, die Stämme würden sich im Fallen, dem Gesetz der Schwerkraft folgend, zur Verlagerung des Schwerpunktes drehen, trifft - gemäß den persönlichen Beobachtungen - nur zeitweilig zu, und zwar vor allem bei Bäumen mit einseitiger Krone. Bietet der Stammabstand in der Fällrichtung genügend Platz, so wird sich der Stamm, besonders bei erheblich einseitiger Krone, so drehen, daß der stärkere Teil der Krone, die längeren Äste, in die Lage über dem Stamm kommen - Bremswirkung der Luft. Zum Teil bleiben solche Stämme nun mit der einseitigen Krone nach oben am Boden liegen, andere drehen sich nach dem Aufprall jedoch so, daß sie mit seitlich zum Stamm gedrehter halbseitiger Krone liegen bleiben. Besteht eine gesetzmäßige Exzentrizität in Richtung der einseitigen Krone, so kommen wir hier ebenfalls in bezug auf die Gesamtheit der Bäume wieder zu einem gewissen Ausgleich, da wir einmal Stämme ihren stärkeren Durchmessern und ein anderes Mal ihren schwächeren Durchmessern folgend messen.

Halten wir uns die Verhältnisse im geneigten oder steilen Gelände (etwa 70 - 75 % der österreichischen Waldfläche) vor Augen, so wird die Fällrichtung fast ausnahmslos hangaufwärts (längs der Falllinie) gewählt, um das Brechen der zu fallenden Stämme zu vermeiden. In den meisten Fällen bleiben die Stämme direkt am Fallkerb des Stockes liegen, also in der Fällrichtung hangaufwärts. Da es nun international eingeführt ist, bei Stehendmessungen die Durchmesser von der Bergseite her zu messen (Klupprichtung wieder in Richtung der Falllinie), ist es wohl gerechtfertigt, daß die Bestimmung aller Durchmesser bei der Probestammerhebung nun in der Regel in analoger Meßrichtung und nur einmal, der allgemeinen Gepflogenheit entsprechend, erfolgte. Wenn nun bei den Messungen der Probestämme systematische Abweichungen Exzentrizität der Stämme in Richtung Falllinie enthalten sind, so können diese systematischen Abweichungen mit Rücksicht auf eine spätere praktische Anwendung der daraus gewonnenen Volums- oder Formfunktion auf Stehendmessungen (Kluppierung von der Bergseite her) toleriert oder sogar berücksichtigt werden, soweit es sich um die veränderlichen Merkmalswerte (bzw. unabhängigen Variablen) d und $d_{0,xh}$ (so etwa $d_{0,3h}$) handelt.

Die Angabe des Schaffholzvolumens und die daraus abgeleitete Brusthöhenformzahl beziehen sich auf das "geerntete" Schaffholz mit Rinde, also nicht vom Boden, sondern vom Stockabtrieb ab gerechnet. Da man heute fast ausschließlich Motorsägen zur Fällung verwendet und damit auch in die Lage versetzt wird, die Stockhöhen auf ein notwendiges minimales Maß zu reduzieren, in dieser Hinsicht auch keine nennenswerte Verbesserung mehr zu erwarten ist, wählten wir zur Bestimmung des Schaffholzvolumens jenen Teil, der tatsächlich geerntet werden kann. Also ohne Stockholz, das fast ausnahmslos im Walde verbleibt, und heute, eben bedingt durch die maschinelle Fällung, besonders in Hanglagen einen bedeutungslosen Anteil an der Gesamtmasse der einzelnen Bäume ausmacht. Die in engen Grenzen wechselnde Stockhöhe wird den "Fehler" der Formfunktion und weiters der Volumsfunktion, also den nicht erfaßten Anteil der, die Form bedingenden, Einflüsse, nur unwesentlich erhöhen. Wir können also unsere Berechnungen in wirklichkeitsnaher Weise nur auf das praktisch bedeutungsvolle nutzbare Volumen der Stämme abstellen, wenn wir diesen geringfügigen Nachteil bezüglich Genauigkeit der Form- und Volumsbestimmung in Kauf nehmen.

3 DIE HERLEITUNG BZW. ALLGEMEINE BE- RECHNUNG VON FORM- BZW. KUBIERUNGS- FUNKTIONEN MIT HILFE DER REGRESSIONS- ANALYSE (METHODE DER KLEINSTE QU- DRATE) UND DIE VERGLEICHENDE BEURTEI- LUNG DERSELBEN

Die naturgegebene Tatsache, daß zwischen bestimmten veränderlichen - meßbaren - Merkmalswerten gleichartiger Einzelindividuen feststellbare Beziehungen bestehen, machen wir uns dahingehend zunutze, daß wir, ausgehend von festgestellten, also bekannten Werten eines oder mehrerer bestimmter Merkmale, unter Ausnutzung einer bekannten, bereits errechneten Beziehung, Schlüsse auf entsprechende unbekannt, jedoch abhängige Werte eines weiteren Merkmales ziehen. Die Güte dieses Schlusses oder die Genauigkeit einer derartigen "Schätzung" hängen von der Straffheit der Beziehungen ab, die zwischen den Werten dieser Merkmale besteht.

Im Idealfall besteht zwischen zwei verschiedenen Merkmalen ein streng funktioneller Zusammenhang. Wir können in solchen Fällen, so die Beziehung bekannt bzw. festgestellt ist, direkt von einem bekannten auf einen andersartigen, unbekannt Merkmalswert schließen, ohne dabei für die Bestimmung des unbekannt Merkmalswertes einen "Schätzfehler" veranschlagen zu müssen. So besteht z. B. zwischen dem Radius oder dem Durchmesser eines Kreises und dessen Flächeninhalt ein bekannter funktioneller Zusammenhang.

Wollen wir jedoch von bekannten Brusthöhendurchmessern einer bestimmten Baumart innerhalb einer Population auf deren - unbekannt - Baumhöhen schließen, so sind wir an Hand einer berechneten Gleichung für die Beziehung h zu d - Höhenkurve über Brusthöhendurchmesser - lediglich in der Lage, eine mit einem Fehler behaftete "Schätzung" der unbekannt Höhe für einen bestimmten bekannten Brusthöhendurchmesser durchzuführen. Denn weitere, jedoch uns unbekannt oder nicht erfaßte Einflüsse verdecken den funktionellen Zusammenhang. Diesbezüglich stellt man die Forderung, daß die Quadrate aus den Abweichungen zwischen den beobachteten Werten und den berechneten Funktionswerten (den theoretisch erwarteten Funktionswerten) ein Minimum werden. Mit Hilfe der Regressionsanalyse kann man den funktionalen Einfluß, der von den unabhängigen Variablen auf die abhängige Variable ausgeübt wird, aus den Meßergebnissen herausarbeiten. Dieser funktionale Einfluß wird durch die Beziehungsgleichung - Regressionsgleichung - zwischen den unabhängigen und der abhängigen Variablen dargestellt.

3.1 Die Berechnung von Beziehungs- oder Regressionsgleichungen

Die einfachste Beziehungsgleichung zwischen zwei in Abhängigkeit zueinander stehenden Merkmalswerten x und y stellt die Gleichung einer Geraden dar. Stellen wir jedoch die Bedingung einer bestmöglichen Anpassung einer Beziehungsgleichung oder Funktion an ein gegebenes Material, so können wir uns, wie etwa im Falle der Beziehung d zu h , einer Gleichung höheren Grades (etwa einer Parabel zweiter Ordnung von der allgemeinen Gestalt

$$y = a + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2,$$

bedienen und eine dementsprechende Anzahl von Normalgleichungen mit mehreren Unbekannten aufstellen und dieses Gleichungssystem lösen.

Wollen wir an Hand von mehreren verschiedenartigen bekannten Merkmalswerten x_1, x_2, \dots, x_m auf einen "abhängigen" Merkmalswert y einen Schluß ziehen, so gelingt uns dies in gleicher Weise mit Hilfe einer Beziehungsgleichung, die durch Auflösen entsprechender Normalgleichungen mit mehreren Unbekannten entstanden ist. Bei einer solchen mehrfachen Beziehung sprechen wir von multipler Regression. Die Erstellung einer derartigen Beziehungsgleichung ist jedoch nur dann von gewünschtem Erfolg begleitet, wenn zwischen den einzelnen Merkmalswerten x_1, x_2, \dots, x_m und dem "abhängigen" Merkmalswert y eine lineare Beziehung besteht, sich also die Einzelbeziehungen als Gerade oder zumindest angenähert als Gerade darstellen lassen. (Genauer genommen soll die Beziehung zwischen y und den unbekanntem Parametern - Regressionskoeffizienten - linear sein). Wir werden daher, um sinnvolle Ergebnisse zu erzielen, vielfach nicht direkt die einzelnen Merkmalswerte als sogenannte "unabhängige Variable" dem Wert y in einer Beziehungs- bzw. "Regressionsgleichung" gegenüberstellen, sondern die Merkmalswerte in geeigneter Weise entweder umformen, etwa Logarithmen derselben bilden, oder aus den verschiedenen bekannten Merkmalswerten (geometrisch) sinnvolle Quotienten als unabhängige Variable bilden, die mit y in guter Beziehung stehen.

Die Methode der kleinsten Quadrate bietet nun die Möglichkeit, die Abhängigkeit der verschiedenen variablen Werte voneinander in geeigneter Weise, in Form einer Beziehungsgleichung bzw. Regressionsgleichung, einer Funktion, darzustellen, aber auch die Straffheit der Beziehung oder die gegenseitige Abhängigkeit, die Korrelation, zu bestimmen. Hierbei wird, wie schon erwähnt, in bezug auf die zu erwartenden Zufallsfaktoren bzw. nicht erfaßten Einflüsse die Bedingung gestellt, daß die Summe der quadratischen Abweichungen der "beobachteten" von den "berechneten" (mit Hilfe der Beziehungsgleichung) Werten ein Minimum wird. Je mehr ge-

eignete unabhängige Variable wir in eine Beziehungsgleichung einführen, umso geringer wird die Summe der Residualquadrate und somit der Wert der Fehlervarianz. Als geeignet ist eine unabhängige Variable anzusehen, und ihre Einbeziehung in eine Funktion ist erstrebenswert, wenn ihr Einfluß eine erhebliche Verringerung der Fehlervarianz bewirkt.

Die Berechnung einer Regressionsgleichung mit mehreren unabhängigen Variablen Unbekannten - führt über die Erstellung der entsprechenden Zahl von Normalgleichungen. Die Auflösung von Normalgleichungen mit mehreren Unbekannten erfolgt am einfachsten nach der "Methode Doolittle", welche sich die eigenartige Symmetrie der Normalgleichungen zunutze macht. Diese Symmetrie der Normalgleichungen oder Beziehungsgleichungen besteht darin, daß sich die Koeffizienten der Unbekannten den untereinander geschriebenen Normalgleichungen horizontal von links nach rechts und vertikal von oben nach unten von den Diagonalen des Gleichungssystems aus wiederholen. Diese Tatsache ermöglicht es, nach den Regeln der "Methode Doolittle" die Berechnung der Werte der Unbekannten beträchtlich abzukürzen.

Ausgehend von der "abgekürzten Doolittle-Methode" ("abbreviated Doolittle method", which may be considered as an abbreviated form of the method of single division - DWYER (1951)), bedient sich die schwedische forstliche Forschungsanstalt eines Rechenschemas, das in einem Zuge sowohl die Erstellung der Regressionsgleichung (die Berechnung der zu den einzelnen unabhängigen Variablen zugehörigen Regressionskoeffizienten und der Regressionskonstanten), als auch die Berechnung der Fehler der Regressionskoeffizienten und der Regressionskonstanten, weiters der mittleren quadratischen Abweichung der "beobachteten Werte" von ihrem Mittelwert, sowie die mittlere quadratische Abweichung der "beobachteten" von den "berechneten" Werten ermöglicht. Dieses Rechenschema, welches sich der GAUSSschen Multiplikatoren (Elemente einer inversen Matrix) bedient, wurde mit geringfügigen, unwesentlichen Änderungen, auch vom Verfasser dieser Arbeit zur Berechnung der diversen "Formfunktionen" verwendet und soll an einem speziellen Rechenbeispiel, sowie in seiner allgemeinen Form nun dargestellt werden (Beilage 2 - 6).

Haben wir uns einmal für eine bestimmte Gestalt einer Regressionsgleichung, etwa für die Funktion

$$f = a + b_1 \frac{d^2 0,3h}{d^2} + b_2 \frac{h}{d^2},$$

entschieden, so bilden wir zunächst aus den Beobachtungsreihen unserer veränderlichen Merkmalswerte d , $d_0,3h$ und h die entsprechenden unabhängigen Variablen für unsere allgemeine Glei-

chung

$$y = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2$$

In unserem Falle bilden wir Quotienten, die wir aus rechentechnischen Gründen gleichzeitig in ganzzahlige Werte überführen. Es empfiehlt sich, für die abhängige wie für die unabhängigen Variablen die Einzelwerte in der Regel in dreistelligen Zahlen auszudrücken. Die Werte der abhängigen Variablen bilden wir aus den einzelnen Schaffformfaktoren $y = f \cdot 10^3$, die unabhängigen Variablen definieren wir in unserem Beispiel als

$$x_1 = \frac{d^2 0,3h}{d^2} \cdot 10^3 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{h}{d^2} \cdot 10^5$$

(siehe Beilage 2). Gleichzeitig bilden wir für spätere Kontrollzwecke die Einzelsummen U_i der jeweils entsprechenden variablen Werte y_i , x_{1i} und x_{2i} .

Als Ausgangswerte für die Regressionsanalyse benötigen wir nun die sogenannten "Summenquadrate" und "Summenprodukte", Summen der Quadrate und Produkte der Abweichungen der Einzelwerte von den entsprechenden Mittelwerten (geteilt durch die entsprechende Zahl an Freiheitsgraden ergeben sich die Varianzen und Kovarianzen), die zwecks einfacher Schreibweise nun mit den Symbolen a_{00} , a_{11} , ..., a_{mm} und a_{01} , a_{02} , ..., a_{12} , ..., $a_{(m-1)m}$ gekennzeichnet werden (siehe Beilage 3). Zur Kontrolle auf richtige Berechnung der Quadrat- und Produktsummen führen wir, entsprechend den Angaben in Beilage 3 nun die Kontrolle an Hand der U-Werte durch. Sind die Berechnungen bis hierher fehlerfrei, übernehmen wir die Summenquadrate und Summenprodukte unter zweckdienlicher Verschiebung der Dezimalstellen (im Beispiel: 10-6) in das eigentliche Rechenschema der Regressionsanalyse, siehe Beilage 4 a.

Den Berechnungsgang eingehend zu schildern, würde zu weit führen, daher wird er in Beilage Nr. 5 und 6 als allgemeines Rechenschema dargestellt. Wir berechnen also zuerst durch Auflösung der Normalgleichungen im abgekürzten Verfahren die einzelnen Regressionskoeffizienten b_i und die "Fehlervarianz" s_F^2 , kontrollieren die Berechnung der b_i und ermitteln die Regressionskonstante a . In weiterer Folge bestimmen wir die mittleren Fehler der Regressionskoeffizienten und der Regressionskonstanten, die prozentuale mittlere quadratische Abweichung $s_F\%$ der "berechneten" von den "beobachteten" Werten

$$s_F\% = \frac{s_F \cdot 100}{\bar{y}}$$

und das Bestimmtheitsmaß B für diese multiple Regression.

Die in unserem Beispiel errechnete Funktion lautet:

$$y = 0,1084 + 0,5157 \cdot x_1 + 0,0644 \cdot x_2$$

Unsere Formfunktion für die Stichprobe (aus Areal 521) lautet demnach unter Berücksichtigung der ursprünglichen Umformung bzw. Dezimalpunktverschiebung:

$$\left| f \cdot 10^3 = 0,1084 \cdot 10^3 + 0,5157 \frac{d^2 0,3h}{d^2} \cdot 10^3 + 0,0644 \frac{h}{d^2} \cdot 10^5 \right| \cdot 10^{-3};$$

also $f = 0,1084 + 0,5157 \frac{d^2 0,3h}{d^2} + 6,44 \frac{h}{d^2}$ (wenn d und $d_{0,3h}$ in mm und h in m angegeben werden.)

oder $f = 0,1084 + 0,5157 \frac{d^2 0,3h}{d^2} + 0,644 \frac{h}{d^2}$ (wenn d und $d_{0,3h}$ in dm und h in dm angegeben werden.)

Diese Formfunktion können wir durch folgende Ergebnisse zusammenfassend charakterisieren:

$$n = 25,$$

$$a = +0,1084 \pm 0,0156 \text{ (bzw. } 14,4 \text{ \%)},$$

$$b_1 = +0,5157 \pm 0,0308 \text{ (bzw. } 6,0 \text{ \%)},$$

$$b_2 = +0,0644 \pm 0,0298 \text{ (bzw. } 46,6 \text{ \%)},$$

$$\bar{y} = 0,4154$$

$$s_y = \pm 0,05366 \text{ (bzw. } 12,9 \text{ \%) - Standardabweichung der beobachteten Werte vom arithmetischen Mittel (y von } \bar{y}\text{),}$$

$$s_F = \pm 0,01234 \text{ (bzw. } 3,0 \text{ \%) - Standardabweichung der berechneten von den beobachteten Werten, bzw. von der Funktion (y von } y_e\text{),}$$

$$B = R^2 = 0,947 \text{ - Bestimmtheitsmaß für diese Funktion.}$$

((Da im Rahmen dieser Arbeit auch logarithmische Funktionen diskutiert und hierfür berechnete $s_F\%$ - Standardabweichung von der Funktion in % - mit für arithmetische Funktionen berechneten $s_F\%$ verglichen werden, sei an dieser Stelle eingefügt: bei logarithmischen (Form-) Funktionen ist zu beachten, daß danach berechnete delogarithmierte Werte (Formfaktoren) mit einem kleinen systematischen Fehler, der logarithmischen Transponierungsdiskrepanz, belastet sind. Wir bringen daher an einer logarithmischen Funktion den Korrekturfaktor z an. Dieses z hängt von der Streuung der Einzelwerte um das Mittel ab, somit also vom Standardfehler der Schätzung.

Anders gesprochen: wir haben bei logarithmischen Funktionen im Vergleich zu arithmetischen Funktionen also zu beachten, daß die Werte für die Konstante a um die stochastische Komponente z zu gering ausfallen, denn die Regressionsgleichungen werden nicht für

die Variablen selbst, sondern für deren Logarithmen berechnet. Dementsprechend berechnen wir auch die Konstante a in diesem Fall über die Mittelwerte der Logarithmen der einzelnen Variablen. Beim Delogarithmieren ergeben diese Mittelwerte der Logarithmen die geometrischen Mittel der Meßwerte, und diese sind stets kleiner als die arithmetischen Mittelwerte der Meßwerte.

Setzen wir voraus, daß die Werte für z mit der Varianz σ^2 um Null normal verteilt sind, dann erhalten wir für 10^z den Mittelwert $10^{1,1513} \sigma^2$, wobei 1,1513 der halbe natürliche Logarithmus von 10 ist - nach MEYER (1944). Als Schätzung für 2 verwenden wir s^2_F der logarithmischen Funktion. Die endgültige Form unserer logarithmischen Funktion bzw. der entsprechenden Exponentialfunktion wird, etwa auf den Typ (13 a) angewendet, lauten:

$$f = 10^a \cdot d^{b_1} \cdot h^{b_2} \cdot d_{0,3h}^{b_3} \cdot 10^z = 10^{a+z} \cdot d^{b_1} \cdot h^{b_2} \cdot d_{0,3h}^{b_3} \quad \text{bzw.}$$

$$f = c \cdot d^{b_1} \cdot h^{b_2} \cdot d_{0,3h}^{b_3}, \quad \text{denn } \log f = \log c + b_1 \log d + b_2 \log h + b_3 \log d_{0,3h},$$

wenn wir $(a+z) \log 10 = \log c$ setzen.

Berechnen wir nun nach dem Delogarithmieren unmittelbar die Summe der quadratischen Abweichungen der beobachteten Werte f von diesen berechneten und "korrigierten" Werten f , so ist dieser Wert mit den Werten für s^2_F (oder $s_F\%$) arithmetischer Funktionen vergleichbar. Siehe eine diesbezügliche Anwendung auf Beilage 8))

Das in Beilage Nr. 5 und 6 skizzierte allgemeine Rechenschema ist vor allem für Berechnungen unter Zuhilfenahme elektrischer Tischrechenmaschinen (Rechenautomaten) gedacht. Haben wir Material geringen Umfanges zu bearbeiten, werden wir die "Vorbereitungsarbeiten", die gewünschten Umformungen und Bildungen von Kombinationen in bezug auf die Einzelwerte der Beobachtungsreihen, sowie die Bildung der notwendigen Ausgangswerte für die Regressionsanalyse (Summen, Summen der Quadrate, Summen der Produkte der Variablen) mit einer Tischrechenmaschine unter besonderer Berücksichtigung aller vorgesehenen Kontrollrechenoperationen, durchführen. Ist Material großen Umfanges zu bearbeiten, dann ist eine weitgehende regressionsanalytische Bearbeitung wohl nur durchführbar, wenn zumindest die gesamten "Vorbereitungsarbeiten", nämlich die Unzahl sich wiederholender gleichartiger Rechenoperationen, mit Hilfe einer automatischen Rechanlage (konventionelle Lochkartenmaschinen) in entsprechend kurzer Zeit und unter relativ geringem Kostenaufwand bewältigt werden können. Infolge der zahlreichen verschiedenen Einzelrechenoperationen, die dann im Zuge der Regressionsanalysen erforderlich sind, wird man in manchen Fällen aus Gründen der Rentabilität und einfacheren Bewältigung der Arbeiten auf Tischrechenmaschinen zurückgreifen.

Steht jedoch eine entsprechende elektronische Großrechenanlage (elektronische Datenverarbeitungsanlage), ein Computer, zur Verfügung, so wäre es ein Luxus, dessen Kapazität nicht auch für die zahlreichen erforderlichen Einzelrechenoperationen der eigentlichen Regressionsanalysen heranzuziehen. In diesem Falle erscheint mir allerdings die Wahl eines anderen Rechenschemas von Vorteil zu sein, und zwar eines Schemas, welches auf das Verfahren von CHOLASKY, - einer Methode zur Auflösung von linearen symmetrischen Gleichungssystemen -, aufbaut. Hinweise auf das CHOLASKY-Verfahren finden sich etwa bei PERSSON (1958), ausführliche Angaben bei ZURMÜHL (1964).

3.2 Allgemeine Bewertung einer Regressionsgleichung

Ein erstes Urteil über die Güte einer Funktion ermöglicht uns die Standardabweichung der berechneten von den beobachteten Werten (s_F) im Vergleich zur Standardabweichung der beobachteten Werte von ihrem arithmetischen Mittel (s_y). Je kleiner s_F bzw. $s_F\%$ im Vergleich zu s_y bzw. $s_y\%$ geworden ist, umso wertvoller ist die berechnete Funktion. Das Bestimmtheitsmaß B gibt uns in diesem Zusammenhang darüber Auskunft, in welchem Maße wir funktionale Einflüsse erfaßt haben, und indirekt darüber, in welchem Maße wir die Zufallsfaktoren verringert bzw. ausgeschaltet haben. In unserem Falle haben wir mit einem $R^2 = B = 0,947$ einen ganz erheblichen Anteil an funktionalen Einflüssen erfaßt, den Anteil der Zufallsfaktoren auf $1 - 0,947 = 0,053$ verringert. Anders gesprochen, sind rund 95 % von der Varianz der "abhängigen Variablen" (der "Bezugsgröße") durch Veränderungen der "unabhängigen Variablen" (der "Einflußgrößen") verursacht worden bzw. mit diesen verbunden, und nur 5 % sind durch unberücksichtigte, unbekannte Variable (sogenannte Zufallseinflüsse) verursacht worden. In unserem Beispiel lassen sich also rund 95 % der Varianz von y aus Veränderungen von x_1 und x_2 erklären. Wir haben somit eine sehr gute Anpassung der Funktion an das vorliegende Material erzielt.

((Daß wir in unserem Beispiel eine Bestimmtheit von 95 % erzielen, darf nicht zu einer Überbewertung dieser speziellen Formfunktion Anlaß geben. Wir haben zu bedenken, daß wir dem Rechenbeispiel eine Stichprobe von nur $n = 25$ zugrunde gelegt haben. Erhöhen wir den Umfang der Stichprobe - aus demselben Kollektiv -, so nimmt mit steigendem n der Betrag von B in der Regel mehr oder minder ab. Je kleiner n war, umso stärker kann B bei der Erhöhung des Stichprobenumfanges, in Abhängigkeit von den hinzugenommenen Beobachtungen abnehmen. Bei Stichproben großen Umfanges spielt diesbezüglich eine weitere Erhöhung von n keine nennenswerte Rolle mehr. Dieser Umstand erklärt sich dadurch, daß mit steigendem Stichprobenumfang auch die Variation der y -Wer-

te bis zu einem gewissen Grade zunimmt.

Die Bestimmtheit, gemessen durch $B = 1 - \frac{s_F^2}{s_y^2} = 1 - \frac{\sum (y - y_e)^2 (n-1)}{\sum (y - \bar{y})^2 (n-m-1)}$

(bei großen n kann auch $B = \frac{\sum (y_e - \bar{y})^2}{\sum (y - \bar{y})^2}$, also "B - unkorrigiert"

Verwendung finden), ist ganz allgemein umso größer, je weniger die beobachteten Werte y von den mit Hilfe der Beziehungsgleichung Gleichung der mehrfachen Regression - errechneten Werten y_e abweichen.))

Es sei hier eingeflochten, eine Form- bzw. Kubierungsfunktion erweist sich meines Erachtens erst dann als praktisch brauchbar (bzw. in ihrer praktischen Anwendung wertvoller als bisher gebräuchliche Massentafeln), wenn ihr multipler Korrelationskoeffizient R oder das Bestimmtheitsmaß einen den Freiheitsgraden entsprechenden Zufallshöchstwert R_0 oder B_0 bei einer Sicherheit von 99,9 % (bei einer Überschreitungswahrscheinlichkeit von 0,1 %) wesentlich übersteigt. Ob ein Bestimmtheitsmaß sehr gut gesichert ($P = 0,1 \%$) von Null verschieden ist, können wir mit Hilfe eines F-Tests prüfen, wobei F nach der Formel

$$F = \frac{B (n - m - 1)}{m (1 - B)}$$

berechnet wird. Bei großem n kann die Formel

$$F = \frac{(n - m - 1)}{m} \frac{\sum (y_e - \bar{y})^2}{\sum (y - y_e)^2}$$

Verwendung finden. (n = Stichprobenumfang, m Zahl der unabhängigen Variablen.)

Hat man zahlreiche Funktionen - Regressionsgleichungen - zu beurteilen, (für die man den F-Test zwecks Prüfung der Existenz einer multiplen Korrelation bzw. in bezug auf eine von Null statistisch gesichert verschiedenen Bestimmtheit durchführen will), ist es zweckmäßig, für die vorkommenden Freiheitsgrade bei einer bestimmten geforderten Sicherheit die "Zufallshöchstwerte von B" oder die "Sicherheitspunkte für B", wie LINDER (1951) sie bezeichnet, im voraus zu berechnen und in einer Tabelle festzuhalten. Bezeichnen wir B_0 als die "Sicherheitspunkte von B", so erhalten wir

$$B_0 = \frac{m \cdot F}{(n - m - 1) + m \cdot F} \quad \text{oder} \quad \frac{n_1 F}{n_2 + n_1 F}$$

durch Umformung der Formel für F und sind nunmehr in der Lage, diese Grenzwerte von B für verschiedene Freiheitsgrade, unter Zugrundelegung der einer geforderten Sicherheit entsprechenden F-Werte, zu ermitteln. Eine Zusammenstellung von B_0 -Werten für verschiedenen Stichprobenumfang und wechselnde Zahl von unabhängigen Variablen (1 3) sei hier in Tabelle Nr. 1 angeschlos-

sen. Siehe diesbezüglich die ausführlichen Tabellen V, Seite 229 - 231, bei LINDER (1951) für die "Sicherheitspunkte für B" bei den Überschreitungswahrscheinlichkeiten $P = 5 \%$, 1% , $0,1 \%$ und eine analoge Tabelle 33 bei HOSEMANN (1949), welche allerdings Zufallshöchstwerte für einfache Korrelationskoeffizienten bei einer Überschreitungswahrscheinlichkeit von $0,27 \%$, 3σ Äquivalent, angibt.

Tabelle Nr. 1

Sicherheitspunkte für das Bestimmtheitsmaß - B - und für Formfunktionen, als praktisch erforderliche erachtete Werte von B.

Stichprobenumfang N	Freiheitsgrade		F bei $P = 0,1 \%$ (99,9 % Sicherheit)	Sicherheitspunkte f. d. Bestimmtheitsmaß B_0	praktisch erforderliche Werte von B $B_{\text{erf}} = \left(\frac{1 + \sqrt{B_0}}{2} \right)^2$
	$n_1 = m$ Zahl d. unabh. Variablen	n_2 ($n-m-1$)			
25	1	23	14,19	0,382	0,654
	2	22	9,61	0,466	0,709
	3	21	7,94	0,531	0,748
50	1	48	12,26	0,203	0,527
	2	47	7,99	0,254	0,566
	3	46	6,45	0,295	0,595
100	1	98	11,50	0,105	0,438
	2	97	7,39	0,132	0,465
	3	96	5,86	0,154	0,484
∞	1	∞	10,83	0,000	0,250
	2	∞	6,91	0,000	0,250
	3	∞	5,42	0,000	0,250

Diese Werte B_0 stellen also bei gegebenen Freiheitsgraden jeweils die unterste Grenze eines Wertes von B, bei einer Überschreitungswahrscheinlichkeit von $0,1 \%$, dar, bei der die Existenz einer (multiplen) Korrelation noch als statistisch sehr gut gesichert gelten kann.

Für den Fall unseres Rechenbeispielles ergibt sich bei zwei unabhängigen Variablen und einem Stichprobenumfang von 25, entsprechend unserer Tabelle, ein Zufallshöchstwert des Bestimmtheitsmaßes von 0,466. Unser errechnetes B dagegen beträgt 0,947. Die Existenz einer multiplen Korrelation ist also bei weitem statistisch gesichert, und der praktische Wert dieser Funktion in bezug auf das Areal, aus dem die Stichprobe entnommen wurde, trotz der geringen Zahl an Freiheitsgraden wohl nicht anzuzweifeln.

Da eine Beziehungsgleichung für unsere Zwecke (als Form- bzw. Kubierungsfunktion) erst dann von entsprechender Bedeutung ist bzw. bedeutsam praktischen Wert besitzt, wenn die Korrelation zwischen den unabhängigen und den abhängigen Variablen entsprechend stark ist, müssen wir die Bedingung für die Anerkennung eines Bestimmtheitsmaßes B und damit der allgemeinen praktischen Brauchbarkeit einer Funktion (gemeint sind Form- bzw. Kubierungsfunktion) gegenüber der sonst üblichen alleinigen Prüfung auf Existenz einer (multiplen) Korrelation entsprechend höher ansetzen.

Wenn wir davon sprachen, daß ein Bestimmtheitsmaß B den Zufallshöchstwert des Bestimmtheitsmaßes B_0 (Sicherheit 99,9 %) wesentlich übersteigen soll, so war damit gemeint, daß, unserer Meinung nach, bei Formfunktionen bzw. Kubierungsfunktionen ein beobachtetes Bestimmtheitsmaß B gleich oder größer dem Quadrat der halben Summe von 1 plus dem Zufallshöchstwert des multiplen Korrelationskoeffizienten $R_0 = \sqrt{B_0}$, bei einer Überschreitungswahrscheinlichkeit von 0,1 %, sein soll, um der aus einer Stichprobe berechneten Form- bzw. Kubierungsfunktion in bezug auf die betreffende Gesamtheit (Areal) eine entsprechende praktische Bedeutung beimessen zu können. Die Bedingung lautet somit:

$$B \geq \left(\frac{1 + \sqrt{B_0}}{2} \right)^2 B_{\text{erf.}}$$

Diese als für praktische Zwecke erforderlich erachteten Werte von B sind in der vorhergegangenen Übersicht in der Kolonne B_{erf} festgehalten. In unserem Rechenbeispiel steht ein ermitteltes $B = 0,947$ einem B_{erf} von 0,709 gegenüber, eine praktische Verwendbarkeit ist dieser Funktion in bezug auf die Gesamtheit, aus der die Stichprobe vom Umfang 25 gezogen wurde, keinesfalls abzusprechen.

Diese für B gestellte Bedingung wurde im Zuge des Studiums zahlreicher verschiedener Schaffformfunktionen rein intuitiv formuliert. Diese Schaffformfunktionen waren auf Grund von Beobachtungsreihen relativ kleinen Stichprobenumfanges berechnet worden. Da eine derartige Bedingung wohl bei kleiner Zahl von Freiheitsgraden einen entsprechend strengen Maßstab darstellt, jedoch bei großem Stichprobenumfang erheblich an Strenge verliert, ist es möglicherweise zweckvoller, an Stelle dieser Forderung, die allgemeinere Bedingung zu stellen, daß B unabhängig von der Anzahl der Freiheits-

grade größer als 0,5 sein soll ($B \geq 0,5$). Somit würde etwa für Schaffformfunktionen oder ähnliche Regressionsgleichungen die ganz allgemeine Bedingung gestellt, daß zumindest 50 % der Varianz der abhängigen Variablen auf Veränderungen der verwendeten unabhängigen Variablen zurückzuführen sein sollen.

3.3 Auswahl zwischen wertvollen und "unnützen" unabhängigen Variablen

Wollen wir die einzelnen verwendeten unabhängigen Variablen, besonders wenn wir anfangs mit einer relativ großen Zahl von Variablen arbeiten, auf ihren Wert innerhalb der Funktion prüfen, so stehen uns hierfür mehrere adäquate Verfahrenswege zur Verfügung. Diese unterscheiden sich lediglich in der Art bzw. Formulierung der Fragestellung, führen jedoch zum selben Ziele.

Zuerst einmal geben uns die Δ'_i (siehe Rechenbeispiel, Beilage 4 a, 4 b und 5) einen Überblick, in welchem Maße die unabhängigen Variablen, jede für sich in Unabhängigkeit von den übrigen Variablen, im Rahmen der betreffenden Funktion die Quadratsumme der Abweichungen und damit den mittleren Fehler zu vermindern imstande sind (durch Konstanthaltung der übrigen unabhängigen Variablen wird deren Einfluß auf die Beziehung der zu prüfenden unabhängigen Variablen zur abhängigen Variablen ausgeschaltet). Anders gesprochen, geben uns die

$$\Delta'_i = \frac{b_i^2}{a_{ii}}$$

darüber Auskunft, mit welcher Vergrößerung der Residualquadrate wir im Rahmen einer bestimmten Funktion zu rechnen haben, wenn wir die entsprechende unabhängige Variable x_i eliminieren.

Wird ein Δ'_i im Vergleich zur Fehlervarianz s^2_F bei Probierfunktionen zu klein befunden (wenn Δ'_i erheblich kleiner als s^2_F ist), so empfiehlt es sich, diese Variable zu "werfen" und eine neue Funktion mit den restlichen unabhängigen Variablen zu berechnen. Verfügen wir über eine entsprechende Anzahl von unabhängigen Variablen, so können wir diesen Vorgang mehrmals wiederholen, bzw. bereits ausgeschiedene Variable falls dies vorteilhaft erscheint - anstelle anderer Variablen wieder in die Berechnung aufnehmen. Diese Prozedur führen wir so weit, bis wir eine Funktion mit befriedigender Anpassung an das vorliegende Material gefunden haben, in der keine "unnütze" unabhängige Variablen enthalten sind. Wir werden mit Rücksicht auf einen rationellen Berechnungsgang bei der Aufstellung einer Funktion für ein bestimmtes Material daher in der Regel die vermeintlich schlechteste unabhängige Variable an den Schluß und die beste an den Anfang stellen.

Dadurch sind wir in die Lage versetzt, ohne großen Rechenaufwand die notwendigen Werte für eine um die letzte Variable verkürzte Funktion, etwa nach den Angaben von R. A. FISHER "Statistische Methoden für die Wissenschaft", 12. Auflage, 1956, Abschnitt 28.1 (Seite 166 167), zu ermitteln.

Die einfachen Regressionskoeffizienten

$$b = \frac{\sum y_i x_i - \bar{y} \sum x_i}{\sum x_i^2 - \bar{x} \sum x_i} = \frac{a_{0i}}{a_{ii}}$$

(siehe Rechenschema, Beilage 3) eignen sich in der Regel als Maßstab für die Reihung der unabhängigen Variablen (sofern nicht bestehende erhebliche Korrelationen zwischen den Einflußvariablen die Werte der einfachen Regressionskoeffizienten stark verschleiern bzw. verfälschen). In unserem Rechenbeispiel ergibt sich b_1 mit 0,549, b_2 mit 0,318. Unsere Reihung war daher richtig, denn wir haben die voraussichtlich schlechtere Variable, jene mit dem kleinsten Wert des einfachen Regressionskoeffizienten, an die zweite Stelle, also an den Schluß, gestellt. Der Wert der einzelnen Einflußvariablen wird noch deutlicher hervorgehoben, wenn wir statt der einfachen Regressionskoeffizienten die entsprechenden Regressionsquotienten

$$\frac{(a_{0i})^2}{a_{ii}}$$

als Maßstab für die Reihung der Einflußvariablen heranziehen, welchen wir später dann bei der Varianzanalyse wieder begeben.

Einen konkreten Schluß darüber, ob die eine oder andere unabhängige Variable in einem bestimmten Funktionssystem "belassen" werden soll oder nicht, können wir ziehen, wenn wir die obige Fragestellung in Form einer Varianzanalyse formulieren.

Aus der Varianztabelle, Beilage 4 b, können wir an Hand des F-Testes ablesen, daß die zweifache Regression abseits jedes Zweifels "sehr gut gesichert" ist, wir also eine Nullhypothese $\beta_{01,2}$

$\beta_{02,1} = 0$ verwerfen können. Diese Funktion zeigt in ihrer Gesamtheit demnach eine sehr gute Anpassung an das vorliegende Material - bzw. hohe Signifikanz der mehrfachen Regression. Dieser Teil der Varianzanalyse entspricht der im vorausgegangenen Abschnitt erläuterten Prüfung des Bestimmtheitsmaßes, genau genommen in der Fragestellung, in welchem Maße das "unkorrigierte" Bestimmtheitsmaß gesichert von Null verschieden ist.

Prüfen wir weiter den Wert der einzelnen Einflußvariablen (diese Tests sind nicht orthogonal, sie sind jedoch unabhängig), so finden wir, daß der Einfluß von x_2 nach Ausschaltung des Effektes von x_1

((in anderen Worten die Regression ($a_{00,1} - 0,00,12$), welche Δ^2 entspricht, also bei Hinzugabe von x_2 zu x_1)) gesichert ist. Die Hypothese $\beta_{02,1} = 0$ kann daher verworfen werden, die unabhängige Variable x_2 ist daher bedeutsam und soll "belassen" und nicht "geworfen" werden. Ganz unzweifelhaft "sehr gut gesichert" ist der Wert x_1 , bzw. des entsprechenden Regressionskoeffizienten $b_{01,2}$

b_1 , eine Hypothese $\beta_{01,2} = 0$ können wir bedenkenlos verwerfen (b_i stellt einen Schätzwert, eine Statistik, aus einer Stichprobe für den wahren Regressionskoeffizienten - Parameter - β_i der Grundgesamtheit dar).

Soll die Frage beantwortet werden, ob eine bestimmte weitere Einflußvariable in eine bestehende Regressionsgleichung aufgenommen werden soll, bzw. will man klären, welche unabhängige Variable eines bestimmten Funktionssystems "belassen" und nicht "geworfen" werden sollen, so können wir anstelle der im Zuge einer Varianzanalyse durchzuführenden F-Tests derartige Prüfungen in Form von t-Tests durchführen. Diese gleichwertige und zweckvolle Möglichkeit der Beurteilung des Wertes der einzelnen unabhängigen Variablen ergibt sich, wenn wir für die Fehler der zugehörigen Regressionskoeffizienten den t-Test durchführen. Wir vergleichen hierbei die Differenzen ($b_i - \beta_i$) oder auch ($a - \alpha$), welche die Fehler der zufallsmäßig gewählten Beobachtungsreihen unserer Statistiken b_i bzw. a sind, mit den entsprechenden empirischen Fehlern bzw. den Standardfehlern von b_i bzw. a . Wir müssen also etwa

$$t = \frac{b_i - \beta_i}{s_F \cdot \sqrt{a_{ii}}} = \frac{b_i - \beta_i}{\mathcal{E} b_i}$$

berechnen, mit dem wir in üblicher Weise in eine t-Tabelle ("Studentverteilung") bei einem Wert von $(n-m-1)$ -Freiheitsgraden eingehen, um festzustellen, ob b_i bedeutsam von einem hypothetischen Wert β_i verschieden ist oder nicht. Diese Formulierung kommt jener Fragestellung gleich, welche darnach fragt, in welchem Maße ein Schätzwert b_i im Rahmen der betreffenden Funktion als bedeutsam anzusehen ist, das heißt, in welchem gesichertem Maße eine Hypothese $\beta_i = 0$ nicht zutrifft. An Hand der für die Fehler der Regressionskoeffizienten der unabhängigen Variablen x_1 und x_2 ermittelten t-Werte aus Beilage 4 a und den F-Werten (Variationsquotienten) aus Tabelle 4 b können wir uns von der Identität dieser beiden Tests ($F = t^2$) überzeugen. Für die Variable x_1 ergab sich ein $F = 279,8$, welches einem $t^2 = 16,729^2$ entspricht, und für x_2 lauten die Werte $F = 4,65$ $t^2 = 2,156^2$.

Ein wie oben beschrieben durchgeführter t-Test ist vor allem dann von entsprechender Bedeutung, wenn Beobachtungsreihen mit kleineren n als 100 den Berechnungen zugrunde liegen. Liegen Beobach-

tungsreihen mit einem n von mehr als 100 vor, so wird es für bestimmte Zwecke genügen, wenn wir je nach Strenge des Maßstabes, den wir anzulegen gedenken, prüfen, ob der Wert des jeweiligen Regressionskoeffizienten b_i den zweifachen oder eben den dreifachen Wert seines Standardfehlers übersteigt.

Entgegen der sonst üblichen Wahl der Sicherheitsgrenzen bei Anwendung des t -Tests empfiehlt es sich, Einflußvariable mit Rücksicht auf eine bessere Anpassung der linearen Regressionsfunktion an das Material zu "belassen", ihren entsprechenden Koeffizienten also nicht Null zu setzen, wenn der Quotient

$$\frac{b_i}{\varepsilon b_i} \geq \sqrt{2}$$

ist. Hierbei ist es wünschenswert, daß $(n - m)$ relativ groß ist. Auf diesen kritischen Wert von F oder $t^2 > 2$, welchem im Hinblick auf die Nullhypothese eine verhältnismäßig große Wahrscheinlichkeit entspricht, machte JONES (1946) im Zusammenhang mit dem σ^2 -Kriterium, einer weiteren Testmöglichkeit, aufmerksam. Ist es, abgesehen von der durchschnittlich besseren Anpassung der linearen Regressionsfunktion an das Material, welches einer bestimmten Grundgesamtheit entstammt, andererseits von Bedeutung, Schätzungen ohne einseitige Abweichungen zu erhalten, dann gibt uns, laut JONES (1946) ein Wert für t^2 bzw. $F > 1$ einen Hinweis, daß das Null-Setzen des geprüften oder der geprüften Koeffizienten Schätzungen mit systematischen Abweichungen verursachen wird. Die richtige Wahl des Kriteriums, bzw. des Grenzwertes der Bedeutsamkeit eines Regressionskoeffizienten, hängt natürlich vom Zweck ab, für den man es anwendet. Eine klare Entscheidung in allen Fällen ist dann möglich, wenn der Quotient

$$\frac{b_i}{\varepsilon b_i} < 1,0$$

wird. Unter dieser Voraussetzung erweist sich eine Einflußvariable bzw. ihr entsprechender Koeffizient als gänzlich unbrauchbar. Setzt man in diesem Falle den Regressionskoeffizienten nicht gleich Null, das heißt, beläßt man diese unabhängige Variable in der betreffenden linearen Regressionsfunktion, so muß mit einer Verschlechterung der Anpassung, also einer Erhöhung der Fehlervarianz bzw. der mittleren quadratischen Abweichung der beobachteten von den errechneten (geschätzten) Werten der abhängigen Variablen gerechnet werden.

Das oben erwähnte σ^2 -Kriterium verwirft eine unabhängige Variable das heißt, sie setzt ihren Koeffizienten in der Schätzung der Funktion gleich Null - wenn t^2 oder F nicht größer als 2 sind, wobei t und F "STUDENTS" t und "SNEDECORS" F repräsentieren.

Während ein F- oder t-Test genau genommen nur darüber Auskunft gibt, ob eine Variable "belassen" werden soll, uns aber nicht sagt, ob es gegebenenfalls zweckvoll ist, sie zu "werfen", ermöglicht uns das δ^2 -Kriterium eine Beantwortung dieser Frage in beiden Richtungen. Eine Entscheidung auf Grund des δ^2 -Kriteriums hängt nämlich davon ab, ob die Verminderung der mittleren quadratischen systematischen Abweichung im Verhältnis zur Zunahme der mittleren Stichprobenvarianz zu überwiegen scheint.

Bei der Wahl zwischen mehreren Regressionsfunktionen, welche auf einer verschiedenen Auswahl aus den gegebenen unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m$ aufbauen, kann δ^2 (bzw. d_i^2 als Schätzwert für δ^2) für jede Funktion geschätzt werden, wobei dasselbe für alle m Variablen berechnete s^2 verwendet wird, um jene Funktion zu ermitteln, für welche die Schätzung von δ^2 am kleinsten ist. Für die Funktion mit m Variablen können wir δ^2 schätzen, indem wir das mittlere Residualquadrat, nämlich

$$\frac{a_{00,1 \dots m}}{n} \quad (\text{entspricht} \quad \frac{\sum (f_m - y)^2}{n})$$

nach der Schreibweise JONES) mit $(n + m) / (n - m)$ multiplizieren. Der Quotient s^2 ($= s_F^2$ - die Restvarianz bzw. Fehlervarianz) hingegen wird, wie bereits früher festgehalten, ermittelt, indem gemäß der Methode der kleinsten Quadrate für die Regressionsfunktion aller m Variablen die Summe der quadrierten Abweichungen berechnet und durch $(n - m)$ dividiert wird. Hierbei soll n die Zahl der Beobachtungen und m allerdings die Anzahl unabhängiger Variablen sein, einschließlich $x_1 \equiv 1$, wenn die Regressionsfunktion einen konstanten Faktor b_1 (nach der bisherigen Schreibweise eine Regressionskonstante a) beinhalten soll. Der erwartete Wert von s^2 ist gleich oder größer als σ^2 , gleich oder größer als die Stichprobenvarianz der abhängigen Variablen. In diesem Sinne ist s^2 als eine vorsichtige Schätzung für σ^2 zu werten.

Nehmen wir also an, daß n Beobachtungen der abhängigen Variablen y und der unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_m$ gegeben seien, wobei $k < l \leq m$ sein soll, und wir die linearen Regressionsfunktionen f_k, f_l und f_m (f bedeutet in diesem Falle, gemäß der Schreibweise von JONES, "Funktion" und nicht etwa "Formfaktoren", entsprechend der in dieser Arbeit gewählten Symbole) für die ersten k , die ersten l und alle m Variablen (für $1 \dots k$, für $1 \dots l$, und für alle m Variablen) berechnet haben. Die d_k^2 und d_l^2 als Schätzungen für δ^2 für f_k und f_l werden gemäß den nachfolgenden Formeln berechnet:

(nach Schreibweise JONES, wo-
bei m, k und l die Regressions-
konstanten miteinschließen)

(nach unserer im Rechenschema
gewählten Schreibweise)

$$s^2 = \frac{\sum (f_m - y)^2}{(n-m)}$$

$$s_F^2 = \frac{a_{00.1 \dots m}}{(n-m-1)}$$

$$d_k^2 = \frac{1}{n} \left[\sum (f_k - y)^2 + 2k \cdot s^2 \right]$$

$$d_{(k+1)}^2 = \frac{1}{n} \left[(a_{00.1 \dots k}) + 2(k+1)s_F^2 \right]$$

$$d_1^2 = \frac{1}{n} \left[\sum (f_1 - y)^2 + 2l \cdot s^2 \right]$$

$$d_{(1+1)}^2 = \frac{1}{n} \left[(a_{00.1 \dots 1}) + 2(1+1)s_F^2 \right]$$

Als Schätzung für δ^2 für die Funktion f_m fanden wir d_m^2 gemäß den Formeln:

$$d_m^2 = \frac{1}{n} \sum (f_m - y)^2 \cdot \frac{(n+m)}{(n-m)}$$

$$d_{(m+1)}^2 = \frac{1}{n} (a_{00.1 \dots m}) \cdot \frac{(n+m+1)}{(n-m-1)}$$

Die Entscheidung, ob es zweckmäßig ist, etwa die Variable x_1 zu belassen, den Wert ihres Regressionskoeffizienten in der linearen Regressionsfunktion nicht Null zu setzen, fällt dann positiv aus, wenn $d_1^2 < d_k^2$ ist.

Berechnen wir
$$F = \frac{[\sum (f_k - y)^2 - \sum (f_1 - y)^2]}{\sum (f_m - y)^2 / (n-m)},$$

dann kann überdies leicht gezeigt werden, daß entsprechend den Hinweisen von JONES $d_1^2 < d_k^2$, wenn, und nur dann, wenn F bzw. $t^2 > 2$ ist.

JONES: "Bei der Anpassung einer empirischen Funktion (Probierfunktion, Erfahrungsfunktion) an eine Gruppe von Beobachtungen haben wir zu bedenken, daß es tatsächlich keine Gewähr dafür gibt, daß das δ^2 - oder irgend ein anderes Kriterium - eine ausreichende Sicherheit für nichtbeobachtete Punkte außerhalb oder innerhalb des Bereiches der Beobachtungen, oder auch für das Wiederauftreten der beobachteten Kombinationen der Werte, der unabhängigen Variablen, bietet, wenn irgend eine unbeobachtete Variable die abhängige Variable beeinflusst. Es gibt auch Probleme, bei denen unsere Annahmen in bezug auf die Zufallskomponenten nicht genügend realistisch sind. Nur die praktische Erfahrung bringt es mit sich, darüber zu entscheiden, welche Annahme und welche Kriterien für irgend eine Art eines Problems im Bereich eines speziellen Forschungsgebietes am geeignetsten sind."

3.4 Wahl einer geeigneten "Probierfunktion" für eine bestimmte Grundgesamtheit (für ein bestimmtes Probestammmaterial)

Aus dem bisher Gesagten können wir bereits schließen, daß uns bei der Suche nach einer Funktion mit der besten Anpassung an das jeweils vorliegende Material nur die Wahl bleibt, verschiedene Möglichkeiten und Kombinationen der Unterbringung von unabhängigen Variablen in Regressionsgleichungen nach Maßgabe der zur Verfügung stehenden Merkmalswerte "auszuprobieren". Wir gehen daher nicht fehl, wenn wir, wie NÄSLUND oder auch PETERSON, derartige Funktionen als "Probierfunktionen" bezeichnen. PETERSON (1955) charakterisiert den Auswahlvorgang wie folgt: "Eine solche Anpassung der Regressionsfunktion an das Material ist eine ziemlich zeitraubende Angelegenheit. Unterstützung gibt die Streuung der Funktion. Die Schwierigkeit besteht darin, daß man nicht weiß, in welchem Maße die Abweichungen auf eine unzureichend präzierte Gruppendifinition oder einem Ausgleichsfehler beruhen. Die immer angestrebte Verbesserung der Funktion kann im ersten Falle durch eine neue primäre Variable (neuer Merkmalswert) erreicht werden, während im anderen Falle eine Umformung oder Kombination Voraussetzung ist. (Umformung = Austausch einer primären Variablen gegen eine Funktion derselben Variablen, Kombination als neue Variable Einführung einer Funktion von mehreren primären Variablen, etwa als Quotienten). Der einzig mögliche Weg sind wiederholte Versuche, welche durch die Streuung oder ein anderes Maß der Anpassung kontrolliert werden. Während "einfachere" Regressionsaufgaben sich mit Tendenzen beschäftigen können, bezwecken wir in dieser Arbeit die Beschreibung der wahrscheinlichsten Form von Einzelstämmen auf Grund der uns zur Verfügung stehenden primären Variablen, die in für uns nicht direkt erkennbarer Weise ursächliche Einflüsse auf die Formbildung bzw. auch Formveränderung widerspiegeln. Hiezu sind anpassungsfähige Funktionen erforderlich, welche nur durch sorgfältige Abstimmung auf das Material erreicht werden können. Dazu sind viele Versuche mit verschiedenen Variablen nötig."

In bezug auf ein bestimmtes Material werden wir in den meisten Fällen jener "Probierfunktion" letztlich den Vorrang geben, die einerseits mit einer geringen Zahl an unabhängigen Variablen (deren Einfluß "gesichert" ist) und andererseits durch das relativ kleinste $s_F\%$ bzw. das größte B gegenüber anderen Funktionstypen die beste Anpassung an das Material zeigt. Diese Grundsätze gelten dann, wenn nicht etwa praktische Erwägungen, etwa in bezug auf schlechte praktische Bestimmbarkeit (relativ hohe zu erwartende Meß- oder Schätzfehler) eines Merkmalswertes bzw. einer unabhängigen Va-

riablen, geringe Einschränkungen zugunsten einer diesbezüglichen aussichtsreicheren Variante ratsam erscheinen lassen. Wir berücksichtigen bei einem derartigen Auswahlverfahren in bezug auf ein ganz bestimmtes Material, dies sei betont, bisweilen Unterschiede zwischen verschiedenen Funktionen, so bezüglich s_F oder $s_F\%$ bzw. damit auch von B und von Regressionskoeffizienten, gemessen an ihren Standardfehlern, die im sonst allgemein üblichen mathematisch statistischen Sinne mitunter keinesfalls als gesichert angesehen werden könnten. (So etwa bei der Gegenüberstellung der für verschiedene Material - verschiedene Grundgesamtheiten oder Teilgesamtheiten berechneten analogen Statistiken des gleichen Funktionstyps.) Vergleichen wir Regressionsgleichungen verschiedener Gestalt, die für das gleiche Material berechnet wurden, so sind wir eben nicht in der Lage, etwa die entsprechenden R oder B auf signifikante Unterschiede hin zu prüfen, denn infolge des zugrunde liegenden gleichen Materials sind die für verschiedene Funktionstypen erhaltenen R bzw. B miteinander korreliert. Wir richten aus diesem Grunde unseren Blick in solchen Fällen eben unter den Aspekten der Auswirkungen bei Anwendung einer dieser "Probierfunktionen" innerhalb der durch das zugrunde liegende Material gesetzten Grenzen letztlich nur auf die kleinste zu erwartende mittlere (prozentuale) Abweichung der Schätzwerte von der Funktion, bzw. dem Rang, den eine bestimmte Funktion im Vergleich zu anderen Funktionen einnimmt. Dem Sinn und Zweck derartiger "Probierfunktionen" entsprechend, möge daher bei mancher dieser, im Zuge der später folgenden Funktionstypenauswahl augenscheinlich vollführten mathematischen "Bocksprünge" ein biometrisch strenges Auge zgedrückt werden.

Den biometrischen Regeln und Gepflogenheiten weitgehend gleichkommende strenge Maßstäbe müssen wir dann wohl anlegen, wenn wir die Überlegenheit oder Unterlegenheit einer bestimmten Probierfunktion gegenüber anderen Probierfunktionen nicht nur für ein ganz bestimmtes Material, sondern unter dem Blickwinkel der allgemeinen Anwendbarkeit prüfen wollen. Erscheinen hinsichtlich s_F und B bzw. R zwei Funktionen verschiedener Gestalt für dasselbe Material annähernd gleichwertig, so ermöglichen uns Vergleiche der Varianz der einzelnen Regressionen einerseits, oder Vergleiche der Regressionskoeffizienten und der Regressionskonstanten inklusive ihrer Standardfehler andererseits, eine Entscheidung für die eine oder andere Art bzw. Gestalt der Funktionsgleichung. Hiebei ist es jedoch zweckvoll zu beachten, welche Anteile der Regressionskonstanten und welche Anteile den Produkten aus Regressionskoeffizienten und den zugehörigen Mittelwerten der unabhängigen Variablen an dem Mittelwert der unabhängigen Variablen zukommen. Je höher dieser Anteil und je geringer gleichzeitig der Standardfeh-

ler des betreffenden Regressionskoeffizienten ist, umso bedeutungsvoller ist dieser Teil der Funktion. In einem späteren Abschnitt dieser Arbeit kommen wir auf derartige Vergleiche zurück. (Siehe etwa Beilage Nr. 10) Im Verein mit derartigen Feststellungen werden uns schon erwähnte praktische Erwägungen, z. B. die Meßgenauigkeit, mit der verschiedene Variable oder Meßwerte bestimmt bzw. beobachtet werden können, die Entscheidung für die eine oder andere Gestalt einer Beziehungsgleichung ermöglichen.

3.5 Berechnung von gleichartigen Funktionen für verschiedene Teilgesamtheiten (für verschiedenes Probestammmaterial)

Wollen wir demgegenüber Funktionen gleicher Gestalt für verschiedene Teilgesamtheiten derselben Grundgesamtheit oder für verschiedenen Kollektive auf gesicherte Unterschiede hin untersuchen, so geben uns die einzelnen Standardabweichungen s_F gegenüber den entsprechenden Standardabweichungen s_Y und die Bestimmtheitsmaße einen ersten Hinweis. Wollen wir etwa mit Rücksicht auf die Verallgemeinerung von Probiefunktionen feststellen, ob zwei B oder an deren Stelle zwei R gesichert voneinander verschieden sind, so gilt es, den Unterschied zweier R_i im Vergleich zum Fehler ihrer Differenz zu prüfen;

$$t = \frac{R_1 - R_2}{s_{\Delta}}, \quad s_{\Delta} = \sqrt{s_{R1}^2 + s_{R2}^2}.$$

((In Analogie zu einfachen Korrelationskoeffizienten könnte man annehmen, daß dieser Weg der Prüfung nur dann mit Berechtigung beschritten werden sollte, wenn den Berechnungen Stichproben großen Umfanges zugrunde liegen. FISHER (1956) empfiehlt für einfache Korrelationskoeffizienten eine Transformation, wenn den Berechnungen Stichproben kleinen Umfanges zugrunde liegen. Sofern eine derartige Transformation für multiple Korrelationskoeffizienten gleiche Gültigkeit besitzt, wäre bei kleinen Stichproben anstelle der Differenz der R_i die Differenz der entsprechenden Korrelationsziffern z_i im Verhältnis zur Streuung der Differenz dieser Korrelationsziffern auf gesicherte Unterschiede zu prüfen, nämlich

$$t = \frac{z_1 - z_2}{\sigma_{\Delta}} = \frac{z_1 - z_2}{\sigma_{(z_1 - z_2)}}, \quad \text{wobei } z_i = 1/2 \log \text{nat} \frac{1 + R_i}{1 - R_i} \text{ und}$$

$$\sigma_{(z_1 - z_2)} = \sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}}.$$

Haben wir uns entsprechend der im vorausgegangenen Abschnitt erwähnten Arbeitsweise an Hand einer Stichprobe entsprechenden Um-

fanges aus dem gesamten Unterlagenmaterial für eine bestimmte Art bzw. Gestalt einer Funktion entschieden, erhebt sich die Frage, ob wir mit dieser Funktion in die Lage versetzt sind, für Teilstichproben oder eben Teilgesamtheiten Schätzungen der Bezugsvariablen zu erzielen, welche möglichst frei von systematischen Abweichungen sind.

Wir werden daher für verschiedene, nach Möglichkeit gleichgroße Stichproben so etwa für verschiedene Wuchsgebiete oder etwa Stärkeklassen - separate Funktionen gleicher Gestalt für das Material aller Teilstichproben berechnen. Einen ersten Überblick können wir uns durch Vergleich der durchschnittlichen zu den durchschnittlich berechneten Formfaktoren bilden (siehe diesbezüglich etwa Beilage 15 a) oder uns, wie bereits angedeutet, an Hand der Bestimmtheitsmaße bzw. durch Vergleich der Variationsquotienten (Varianz zwischen den berechneten Werten im Verhältnis zur Fehlervarianz) ein erstes Urteil bilden. Wir werden uns aber weiter unter Berücksichtigung der bereits erwähnten Anteilswerte fragen, ob die Differenzen zwischen den betreffenden Regressionskonstanten einerseits und insbesondere die Differenzen zwischen den einzelnen Regressionskoeffizienten andererseits als "gesichert" zu betrachten sind. (Die Differenzen von zwei Regressionskoeffizienten werden durch einen t-Test mit ihren Standardfehlern verglichen in der Fragestellung, ob die beiden Koeffizienten als ein und derselben Grundgesamtheit zugehörig betrachtet werden können oder ob sie signifikant zwei verschiedene β zweier Grund- bzw. Teilgesamtheiten repräsentieren:

$$t = \frac{\Delta b}{s \Delta} = \frac{b_1 - b_2}{\sqrt{\varepsilon b_1^2 + \varepsilon b_2^2}},$$

wobei die Anzahl der Freiheitsgrade gleich ist der Summe der für die Bestimmung von εb_1^2 und εb_2^2 verfügbaren Freiheitsgrade. In analoger Weise prüfen wir die Differenz zweier Regressionskonstanten $\Delta a \quad a_1 - a_2$. Beide Tests können nur dann angewendet werden, wenn gleichwertige Regressionsgleichungen gleiche Gestalt - für verschiedene Stichproben bzw. Teilstichproben, mit anderen Worten für verschiedenes Material, berechnet wurden, die Koeffizienten also voneinander unabhängig sind.) Hiebei sind meines Erachtens etwa knapp "gesicherte" Differenzen von Regressionskoeffizienten von geringer Bedeutung, wenn gleichzeitig und zwangsläufig der entsprechende Anteilswert an der Funktion (Regressionskoeffizient mal Mittelwert der unabhängigen Variablen) relativ gering ist, so etwa bei Funktionssystemen mit nur zwei unabhängigen Variablen, dieser Anteilswert im Mittel weniger als 5 % beträgt. Stellt sich im Zuge einer derartigen Untersuchung heraus, daß eine bestimmte Funktion nicht für alle Bereiche einer Gesamtheit eine

befriedigende Anpassung gewährleistet, sondern für gewisse Teilgesamtheiten Schätzungen zu erwarten sind, welche mit nicht vertretbaren systematischen Abweichungen behaftet sind, so ergibt sich, entsprechend den persönlichen Hinweisen von Prof. MATERN, die Notwendigkeit, nach einer anderen flexibleren Funktion zu suchen.

Solche flexiblere Funktionen können wir finden, wenn wir aus den bereits verwendeten Merkmalswerten noch andere Kombinationen bilden und der untersuchten Funktion als weitere unabhängige Variable hinzugeben, oder die angestrebte Verbesserung durch Aufnahme einer weiteren primären Variablen (bzw. Aufnahme eines neuen noch nicht verwendeten Merkmalswertes) in das Funktionssystem zu erzielen suchen.

Die mühsame Suche werden wir dann abschließen, wenn wir eine "Probierfunktion" gefunden haben, die auch für gewisse Teilgesamtheiten Schätzungen der gefragten Bezugsvariablen erlaubt, welche nur mit geringen, vertretbaren, systematischen Abweichungen behaftet sind bzw. den für eine allgemeine praktische Anwendung zu wählenden Maßstäben gerecht werden.

Wir werden in der Regel letztlich in bezug auf eine nicht allgemeine, sondern ganz spezielle, praktische Verwendung für eine Baumart nur dann getrennte Funktionen gleicher Gestalt für verschiedene Areale, Wuchsgebiete, Bestandestypen, Altersgruppen, Stärkeklassen usw. berechnen, wenn sich "gut gesicherte" oder "sehr gut gesicherte" Differenzen zwischen den Regressionskonstanten oder einzelnen entsprechenden Regressionskoeffizienten ergeben, denen außerdem ein entsprechend hoher Anteilswert am Zustandekommen der zu berechnenden Schätzwerte zukommt. Diese Entscheidung, ob wir unter ganz bestimmten Gesichtspunkten, nämlich für eine spezielle praktische Verwendung, separate Funktionen (von gleicher Art) berechnen sollen oder nicht, setzt selbstverständlich das Vorhandensein von genügend Unterlagenmaterial voraus, das sich in entsprechend besetzte Untergruppen gliedern läßt. Ganz allgemein möchte ich an dieser Stelle festhalten, wenn eine allgemein gültige Form- oder Kubierungsfunktion für eine Baumart ermittelt werden soll, müssen Daten von 100 oder besser mehr Stämmen bei relativ homogenem Material, andernfalls von wesentlich mehr Bäumen, zur Erstellung der Funktion herangezogen werden. Wollen wir ein Gesamtmaterial in Untergruppen gliedern, so müssen für jede Gruppe von mindestens 50, besser von 100 Stämmen oder mehr, Daten zur Verfügung stehen. Nur bei sehr homogenem Material - nur geringe Spreitung der gemessenen Merkmalswerte - kann man schon ab 25 Stämmen eine aussagekräftige, zufriedenstellende, allerdings nur lokal oder für die betreffende Gruppe gültige Funktion erzielen, besonders dann, wenn solche unabhängige Variable gewählt werden,

die mit der abhängigen Variablen in starker Korrelation stehen, wie etwa in unserem vorhin behandelten Beispiel für die Berechnung einer Formfunktion.

3.6 Umwandlung einer Formfunktion in eine Volums- bzw. Kubierungsfunktion

Haben wir, wie in unserem Beispiel, eine Formfunktion berechnet, so erhalten wir eine gleichwertige Volums- oder Kubierungsgleichung durch die Umformung

$$v = f \cdot d^2 \cdot h \frac{\pi}{4}.$$

Im Falle unseres Rechenbeispiels ist

$$v = a \cdot d^2 \cdot h + b_1 \cdot d_{0,3h}^2 \cdot h + b_2 \cdot h^2 \quad \text{somit}$$

$$v = 0,00851 \cdot d^2 \cdot h + 0,04050 \cdot d_{0,3h}^2 \cdot h + 0,05058 \cdot h^2;$$

$$(h \text{ in m, } d \text{ und } d_{0,3h} \text{ in cm, } v \text{ in dm}^3).$$

4 BERECHNUNG, BEURTEILUNG UND PRÜFUNG SPEZIELLER ARITHMETISCHER FORM- UND KUBIERUNGSFUNKTIONEN FÜR DIE BAUMART FICHTE

In diesem Abschnitt werden einerseits verschiedene neue Formfunktionen, welche als variable Merkmalswerte obere Durchmesser enthalten, an Hand von Fichtenprobestammmaterial gegeneinander geprüft und andererseits diversen bisher bekannten Funktionen gegenüber gestellt. Weiters werden einzelne dieser speziellen arithmetischen Formfunktionen daraufhin geprüft, ob und in welchem Maße bei ihrer praktischen Verwendung hinsichtlich bestimmter Teilgesamtheiten (Wuchsgebiete, Alters-, Höhen- und Stärkeklassen) mit einseitigen Abweichungen zu rechnen ist.

4.1 Eine spezielle arithmetische Formfunktion (Nr. 14) für Fichte im Vergleich zu anderen Funktionen

Den nun folgenden Berechnungen und Vergleichen liegen Probestammdatensätze von 50 Fichten (*Picea excelsa*) zugrunde, die als Stichprobe aus plenterwaldartigen Beständen verschiedener Höhenlagen des Areals Nr. 631 Bezirksforstinspektion Landeck gewonnen wurden. Es ist dies ein aus plenterwaldartigen Beständen stammendes relativ heterogenes Material, wie aus den nachfolgend angeführten Verteilungen einzelner Daten geschlossen werden kann. Die Brusthöhendurchmesserverteilung erstreckt sich von 7,5 - 63,5 cm, die Baumhöhenverteilung von 7,4 - 34,5 m und die Verteilung der Schaftholzformfaktoren von 0,306 - 0,686. Die Probestammdatensätze sind in Beilage 7 zusammengestellt.

Aus der Regressionsanalyse ergab sich für dieses Material gemäß Funktion (14) nachfolgende "spezielle arithmetische Formfunktion":

$$f = 0,1324 + 0,4410 \frac{d^2_{0,3h}}{d^2} + 7,27 \frac{h}{d}$$

(d, $d_{0,3h}$ in mm, h in dm, nach Berücksichtigung der aus rechentechnischen Gründen gemachten Dezimalpunktverschiebungen)

Diese Formfunktion können wir durch folgende Ergebnisse zusammenfassend charakterisieren: $\bar{y} = 0,4559$, die Standardabweichung der beobachteten Werte vom arithmetischen Mittel, $s_y = 0,07523$ bzw. $s_y\% = 16,50\%$, demgegenüber beträgt die Standardabweichung der beobachteten von den berechneten Werten $s_F = 0,02124$ bzw. $s_F\% = 4,66\%$. Die Bestimmtheit der Funktion beträgt $B = 0,920$.

Alleine aus diesen Daten können wir ersehen, daß wir mit dieser Funktion eine sehr befriedigende Anpassung der Funktion an das vorliegende Material erreicht haben, die Funktion also in der Lage sein wird, sehr gute Schätzungen für die gefragten f zu erbringen. Die Schätzwerte für die Parameter der Funktion weisen folgende Standardabweichungen auf:

a	$+ 0,13240$	$\pm 0,02157$	bzw. 16,4 %	(Werte direkt aus Rechen-
b_1	$+ 0,4410$	$\pm 0,0371$	bzw. 8,4 %	schema, ohne Berücksichti-
b_2	$+ 0,0727$	$\pm 0,0155$	bzw. 21,3 %	gung der Dezimalpunktver-
				schiebung, übernommen)

Eine Varianzanalyse ergibt, ganz abgesehen von der Wirkung der ersten unabhängigen Variablen, auch bei Hinzugabe der zweiten unabhängigen Variablen, eine sehr gut gesicherte Regression. Wir haben also mit diesen beiden unabhängigen Variablen die im Abschnitt 3 gestellten prinzipiellen Forderungen erfüllt.

Wir wollen nun diese spezielle arithmetische Formfunktion mit einigen bereits erwähnten bekannten Funktionen an Hand einzelner Statistiken vergleichen, welche, ausgehend von diesem vorliegenden Material, im Zuge entsprechender Regressionsanalysen ermittelt wurden. Diese Statistiken sind in Beilage 8 einander gegenübergestellt.

Die Standardabweichungen der beobachteten von den berechneten Werten - von der Funktion - und die Bestimmtheitsmaße zeigen eine ganz eindeutige Überlegenheit dieser speziellen arithmetischen Schaft-holzformfunktion gegenüber den anderen angeführten arithmetischen Funktionen. Es bedarf an sich keiner weiteren Prüfungen in bezug auf die Überlegenheit der Funktion (14), wenn wir etwa die große schwedische Formfunktion (1a) zum Vergleich heranziehen. Ein $s_F\%$ von 4,66 % gegenüber 8,52 % bei einem $s_y\%$ von 16,50 %, oder ein B von 0,920 gegenüber 0,734 sprechen eine eindeutige Sprache. Eine Formfunktion, die der "combined variable arithmetic standard equation" entspricht (6a), erweist sich als praktisch unbrauchbar, wenn wir das B von 0,494, entsprechend unserer im vorhergegangenen Abschnitt gestellten Bedingungen, als Maß für die Bedeutsamkeit einer der Schätzung von Formfaktoren dienenden Beziehungsgleichung heranziehen, denn die allgemeine Bedingung $B > 0,5$ wurde nicht erfüllt und der spezielle Grenzwert $B_{erf} = 0,527$ wurde nicht überschritten. Die B aller übrigen Funktionen überschreiten die entsprechenden Werte von B_{erf} , so etwa Funktion (5a) mit $B = 0,617$ gegen $B_{erf} = 0,595$ knapp aber doch, während Funktion (14) mit $B = 0,920$ den analogen Grenzwert $B_{erf} = 0,566$ ganz erheblich überschreitet. (Der Vergleich der Funktionen (5a) und (6a) gibt ein anschauliches Beispiel dafür, in welchem Maße die Anpassung gesteigert werden kann, wenn man zu einer Funktion (hier 6a) weitere, aus den bereits verwendeten Merkmalswer-

ten d und h gebildeten Gleichungsglieder zwecks Bildung einer anderen Funktion (hier 5a) hinzunimmt. Der geschmeidigere Ausgleich der Variation der Formzahl, bewirkt durch Hinzugabe von weiteren unabhängigen Variablen, $1/h$ und $1/d^2$ zu $1/d^2h$ spiegelt sich in der Erhöhung des Wertes B von 0,494 auf 0,617 am besten wider. In diesem Falle gelang es durch eine relativ einfache Maßnahme, eine neue Funktion zu finden, welche nunmehr auch der Bedingung $B > 0,5$ genügt).

Wir erzielen also gegenüber bereits in der forstlichen Praxis (Ausland) bewährten Formfunktionen einen ganz wesentlichen Genauigkeitsgewinn, wenn wir außer den üblichen variablen Eingangswerten d und h , den $d_0, 3h$ in geeigneter Weise in einer Formfunktion placieren. Daß die relativ ungünstige Anpassung der übrigen arithmetischen Formfunktionen tatsächlich nicht zufälliger Natur ist, sondern der Wirklichkeit entspricht, möge noch der nachfolgende Vergleich der Standardabweichungen bezüglich der "großen" und "kleinen" schwedischen Formfunktion für Fichte erhellen. Wir verwenden für diesen Vergleich die von Manfred NÄSLUND (1940 und 1947) publizierten Daten.

Tabelle Nr 2

Standardabweichungen der "großen" und "kleinen" schwedischen Formfunktion für Fichte

Material	Standardabweichungen		
	vom arithm. Mittel in %	von der Funktion in %	
		"große" schwed. Formf.	"kleine" schwed. Formf.
50 Fichten, Landeck	16,50	8,52	8,59
1500 Fichten, Nord- schweden	15,15	7,69	7,93
2425 Fichten, Süd- schweden	11,35	6,93	7,25

Unter Berücksichtigung der größeren Standardabweichungen der Formfaktoren vom arithmetischen Mittel bei unserem Material sind die größeren Standardabweichungen von der Funktion voll gerechtfertigt.

Betrachten wir die log-Formfunktion (7a), so können wir sie ihrem Wert nach den vorhin diskutierten arithmetischen Formfunktionen gleichsetzen. Demgegenüber ergab die spezielle logarithmische Formfunktion (13a), entstanden durch Hinzugabe von $\log d_0, 3h$ als dritte unabhängige Variable zu (7a), wie zu erwarten, eine ebenso gute Anpassung an das Material wie die spezielle arithmetische Formfunktion (14). Daß jedoch nicht jede beliebige arithmetische

Formfunktion, welche die drei Eingangswerte d , $d_{0,3h}$ und h enthält, so wie die Funktion (14) ein der speziellen log-Funktion (13a) entsprechendes Resultat erwarten läßt, werden wir später noch sehen.

Nochmals ein kurzer Blick auf die log-Funktion (7a), der Wert für $s_F\%$ von 8,84 % entspricht sehr gut dem $s_F\%$ von 9,0 %, das R. SCHMITT und B. SCHNEIDER (1959) für eine analoge log-Volumsfunktion für Fichte aus 2178 Stämmen hessischer Forstämter berechneten.

Vergleichen wir noch die unter Zuhilfenahme der GRUNDNER-SCHWAPPACHschen Massentafeln (1952) nach Überführung von Derbholz- in Schaftholzmassen errechneten Formzahlen mit den beobachteten, so ergibt sich eine mittlere quadratische Abweichung der beobachteten von den errechneten Formzahlen von 9,90 %, wobei sich die errechneten Formzahlen für das hier geprüfte Probestammmaterial mit einer durchschnittlichen systematischen Abweichung von + 6,2 % ergaben.

Wir können nun aus den vorausgegangenen Gegenüberstellungen schließen, daß sich durch die Einführung eines oberen Durchmessers in eine arithmetische Formfunktion (durch Einführung eines unechten Formquotienten oder dessen Quadrat als eine der unabhängigen Variablen) oder in eine logarithmische Formfunktion eine ganz erheblich bessere Anpassung der Funktion an das jeweils vorliegende Material erzielen läßt, als wenn wir nur d , h oder auch k_h als Eingangswerte verwenden. Da die spezielle arithmetische "obere Durchmesser"-Funktion (14) nur zwei unabhängige Variable enthält und außerdem die Bildung der Logarithmen der Einzelwerte erspart bleibt, muß ihr gegenüber einer an sich gleichwertigen speziellen logarithmischen "oberen Durchmesser"-Funktion (13a) in bezug auf eine eventuelle praktische Verwendung der Vorzug gegeben werden.

Wie stark die Korrelation etwa zwischen dem Quadrat des unechten Formquotienten - $k^2_{0,3h}/1,3$ als unabhängige Variable und dem Schaftholzformfaktor ist, bzw. wie wesentlich die Einführung dieser unabhängigen Variablen in eine Formfunktion ist, mögen die nachfolgenden Statistiken der Formfunktion (15)

$$f = a + b \frac{d^2_{0,3h}}{d^2}$$

zeigen. $s_F\%$ ergibt sich mit 5,58 %, also ganz erheblich unter dem vergleichbaren Wert der großen schwedischen Funktion (1a), B ergibt sich mit 0,885. Allein diese Funktion wäre all den bisher genannten Funktionen, die nur auf d und h bzw. auch k_h aufbauen, nicht unwesentlich überlegen.

Wenn auch die große schwedische Formfunktion (1a), infolge ihrer

relativ ungünstigen Anpassung an das Material, für weitere Betrachtungen ausscheidet, ist es nicht uninteressant, die Bedeutsamkeit der einzelnen unabhängigen Variablen innerhalb dieses oder ähnlicher Systeme von Funktionen zu studieren (siehe Beilage Nr. 8 a). Von den vier unabhängigen Variablen der Funktion (1a) ist offenbar

$$x_2 = \frac{h}{d}$$

die beste Variable; sie bewirkt gemessen an $\Delta_2 = 0,015156$ die stärkste Verringerung der Residualquadrate. Denselben Schluß können wir ziehen, wenn wir den analogen t-Wert von 3,17 als Maß für die Bedeutsamkeit dieser unabhängigen Variablen heranziehen, denn wir können konstatieren, daß dieser Wert innerhalb dieses Funktionssystems beinahe an den Grenzwert für eine Überschreitungswahrscheinlichkeit von nur 0,1 % heranreicht. Die Variable

$$x_3 = \frac{h}{d^2}$$

liegt in bezug auf ihre Bedeutsamkeit an letzter Stelle und erweist sich, gemessen an $\Delta_3 = 0,000005$ bzw. $t = 0,055$ als bedeutungslos, denn

$$\frac{b_i}{\varepsilon b_i} < 1,$$

sie muß sogar als unerwünscht angesehen werden, denn sie zehrt (insbesondere bei kleinem n, so in unserem Falle, durch die Verminderung um einen Freiheitsgrad, bei einer derart kleinen Verminderung der Restquadratsumme der Abweichungen), an der "Anpassung", da sie letztlich die Reststreuung zu erhöhen vermag. (Die relativ hohen Werte der Fehler der Regressionskoeffizienten bzw. die analogen sehr niedrigen Werte für t geben uns den Hinweis, daß wir bei einer eventuellen praktischen Verwendung dieses Funktionstyps bei verschiedenem Material auch mit ganz erheblichen Unterschieden bei den Werten der einzelnen Koeffizienten und damit auch in der Anpassung zu rechnen hätten). Wenn wir nun diese Variable "werfen", erhalten wir eine Funktion (1b) von der Gestalt

$$a + b_1 \frac{1}{d} + b_2 \frac{h}{d} + b_3 k_1 h.$$

Innerhalb dieses Systems ergeben sich für die Δ_i der Reihe nach die Werte $\Delta_1 = 0,0670$, $\Delta_2 = 0,0726$, $\Delta_3 = 0,0026$ im Vergleich zu s_F^2 von 0,001476. Sowohl die unabhängige Variable

$$x_1 = \frac{1}{h} \text{ wie } x_2 = \frac{h}{d}$$

treten nunmehr, frei vom störenden Einfluß (Korrelation zwischen den unabhängigen Variablen, besonders zwischen h/d und h/d^2) der ursprünglichen dritten Variablen, viel wirkungsvoller in Erscheinung, was sich auch in der erwarteten Verbesserung von $s_F\%$, nämlich von 8,52 % auf 8,43 % und für B von 0,734 auf 0,739 entsprechend zeigt. Daß die beiden Variablen $1/h$ und h/d bei diesem Material innerhalb dieses Funktionssystems entsprechende Bedeutung erlangen, zeigen uns die beiden Werte für t von 6,7 und 7,0 die den Grenz-

wert 3,52 (FG = 46) für eine Überschreitungswahrscheinlichkeit von 0,1 % erheblich übersteigen. Der relativ kleine Wert von $t = 1,34$ der dritten Variablen dieses Systems gibt in Anbetracht der geringen Zahl von Freiheitsgraden noch nicht die Möglichkeit, unbedingt die "Nutzlosigkeit" dieser Variablen zu bescheinigen. Sie bringt jedoch bei diesem Material keinen nennenswerten Genauigkeitsgewinn in bezug auf die Anpassung, bewirkt aber eine Verminderung der mittleren quadratischen systematischen Abweichung, denn $t > 1$. Dessen ungeachtet besteht aber auch die Möglichkeit, daß diese Variable in bezug auf ein anderes Material eventuell sogar eine Verschlechterung der Anpassung hervorrufen könnte, denn t ist kleiner als $\sqrt{2}$.

Mit dem "Wurf" der Variablen k_h aus (1a) zwecks Bildung der "kleinen schwedischen Funktion" (2a) ist uns in bezug auf dieses Material, wie alleine schon aus $s_F\%$ 8,59 % und $B = 0,729$ ersehen werden kann, nicht gedient. Ein vergleichendes Studium der Δ_i - bzw. der t -Werte bestätigt nur diese Tatsache.

Hätten wir etwa gar die beste Variable dieses Systems, nämlich h/d aus Funktion (1a) "geworfen", so hätte nunmehr wohl h/d^2 infolge des Wegfalls der Wechselwirkung zu h/d entsprechende Bedeutung erlangt, allerdings auf Kosten von $1/h$ und auch k_h , es wäre dadurch aber letztlich eine vollkommen unzufriedenstellende Funktion entstanden.

Wie ganz anders sich die Variable h/d^2 innerhalb andersartiger Funktionssysteme verhält, kann aus den Systemen die Formquotienten als unabhängige Variable enthalten ersehen werden, so etwa gleich an der Funktion (14). So beträgt in bezug auf das vorliegende Material für

$$x_2 = \frac{h}{d^2}$$

der Wert für $t = 4,69$, wobei der t -Wert für

$$x_1 = \frac{d^2 0,3h}{d^2}$$

gleichzeitig den Wert von 11,89 (bei $P = 0,1\%$, Grenzwert $t = 3,51$, wenn $FG = 47$) annimmt, also beide Werte nicht unerheblich den Grenzwert für t (Grenze der Bedeutsamkeit von b_i) bei einer Sicherheit von 99,9 % überschreiten. Wir könnten nun etwa die Frage erheben, ob wir unsere spezielle arithmetische Formfunktion durch Wahl einer anderen zweiten unabhängigen Variablen an Stelle von h/d^2 (in bezug auf das vorliegende Prüfmaterial) verbessern könnten. In Beilage Nr. 9 stellen wir nun verschiedene Möglichkeiten zur Debatte. Wir erkennen auf den ersten Blick, daß die ursprünglich gewählte spezielle Funktion (14) mit der abhängi-

gen Variablen

$$x_2 \quad \frac{h}{d^2}$$

bezüglich der Anpassung der Funktion an das vorliegende Material bis auf die Funktion (16) mit

$$x_2 \quad \frac{h}{d^2_{0,3h}}$$

allen anderen Möglichkeiten offenbar überlegen ist.

Wollen wir mit Rücksicht auf eine eventuelle allgemeine Anwendung einer dieser anderen Funktionen in bezug auf ein anderes als das vorliegende Material prüfen, welche Funktion unter Zugrundelegung verschiedener Niveaus der Bedeutsamkeit sich nicht gesichert von der speziellen Funktion (14) unterscheiden, also nur zufällige Unterschiede angenommen werden können, so bedienen wir uns der Regressionskoeffizienten und deren Standardfehler.

Unterstellen wir die Regressionskoeffizienten und deren Standardfehler der zur Debatte stehenden Funktionen einer Beurteilung, so müssen wir erkennen, daß bei Funktion (20) und (21) jeweils der Regressionskoeffizient b_2 einen relativ niedrigen Wert bei einem relativ großen Standardfehler annimmt. Setzen wir mit Rücksicht auf das kleine n von 50 vorsichtshalber die Grenze für die Bedeutsamkeit bei einer Überschreitungswahrscheinlichkeit von $P = 0,1 \%$ fest, so entspricht dies einem t -Wert von 3,51 (FG 47). Für die Funktion (19) errechnen wir ein $t = 3,4$, für (20) ein $t = 2,1$ und für Funktion (21) ein $t = 1,1$. Im Gegensatz zu den anderen Funktionen unterschreiten bei den Funktionen (20) und (21) die ermittelten t -Werte für b_2 die festgesetzte Grenze von $t = 3,51$ ganz erheblich, bei Gleichung (19) knapp, aber doch. Die jeweiligen unabhängigen Variablen x_2 , nämlich

$$\frac{1}{h \cdot d^2}, \frac{1}{h} \text{ und auch } \frac{1}{d}$$

erscheinen demnach im Verein mit der unabhängigen Variablen

$$x_1 = \frac{d^2_{0,3h}}{d^2}$$

als unbedeutend, die Funktionen (20) und (21), aber auch (19) daher allgemein gesehen als wenig wertvoll. Da bei (21) t für b_2 nur 1,1 beträgt, also kleiner als $\sqrt{2}$ ist, müßte damit gerechnet werden, daß bei anderem Material bei Hinzunahme dieser Variablen $1/h$ zur ersten Variablen

$$\frac{d^2_{0,3h}}{d^2}$$

sogar eine Verschlechterung der Anpassung eintreten könnte.

Als bedeutsamste Funktionen verbleiben unter alleiniger Berücksichtigung der Regressionskoeffizienten und deren Standardfehlern die Funktionen (14), (16) und (17). Lehnen wir aus praktischen Erwägungen, nämlich mit Rücksicht auf die zu erwartenden größeren "Meßfehler" für $d_{0,3h}$ gegenüber d , die unabhängige Variable

$$\frac{h}{d^2_{0,3h}}$$

ab, so könnte auch die im bezug auf das vorliegende Material beste, jedoch allgemein gesehen wohl gleichwertige, Funktion (16) für weitere Untersuchungen an anderem Material ausscheiden.

Eine nächste Frage in bezug auf das günstigste System einer Funktion mit den drei Eingangswerten d , $d_{0,3h}$ und h könnte lauten: Ist es tatsächlich zweckvoll, das Quadrat eines unechten Formquotienten als unabhängige Variable, anstelle eines unechten Formquotienten selbst zu wählen? Diesbezüglich ziehen wir die in Beilage Nr. 10 gegenübergestellten Funktionen zu Rate. Wir erkennen an den Werten für $s_F\%$ und für B sofort, daß wir in bezug auf unser vorliegendes Testmaterial eine etwas günstigere Anpassung mit den Funktionen (22) und (23) erzielen können.

Die Feststellung, daß, ähnlich wie bei Funktion (14), gegenüber (16) sich auch bei der Funktion (22) gegenüber (23) die unabhängige Variable h/d^2 praktisch gleichwertig im Vergleich zur Variablen

$$\frac{h}{d^2_{0,3h}}$$

erweist, ermutigt uns in bezug auf die allgemeine Anwendung, künftig auf Funktionen mit der unabhängigen Variablen

$$\frac{h}{d^2_{0,3h}} \quad \text{bzw. auch} \quad \frac{h}{d_{0,3h}}$$

aus den vorhin erläuterten praktischen Erwägungen zu verzichten.

In Anbetracht der relativ guten Anpassung der Funktionen an das Material, die wir innerhalb dieser in Beilage Nr. 10 charakterisierten Gruppe von Beziehungsgleichungen konstatieren können, ist es angebracht, die vorhin schon angewandte verhältnismäßig hohe Grenze für die Bedeutsamkeit eines Regressionskoeffizienten, nämlich bei einer Überschreitungswahrscheinlichkeit von 0,1 %, auf

alle Fälle beizubehalten, also entsprechend den 47 Freiheitsgraden ein $t = 3,51$ als Grenzwert festzulegen, zumal die Beziehungsgleichungen jeweils nur 2 unabhängige Variable umfassen. Der errechnete Wert t für b_2 in Funktion (25) und knapp auch jener für Funktion (24) reichen nicht aus, um die Bedeutsamkeit der Regressionskoeffizienten b_2 dieser beiden Funktionen zu sichern. Die relativ hohen prozentualen Standardfehler der b_2 selbst hatten uns bereits einen diesbezüglichen Fingerzeig gegeben.

Aus den schon erläuterten praktischen Erwägungen und der festgestellten Gleichwertigkeit der Funktionen mit den unabhängigen Variablen

$$x_2 = \frac{h}{d^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{h}{d}$$

((Dimensionsquotient oder Schlankheitsgrad wie MITSCHERLICH (1942) diesen Quotienten h/d bezeichnete)) gegenüber analogen Funktionssystemen mit den unabhängigen Variablen

$$x_2 = \frac{h}{d^2_{0,3h}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{h}{d_{0,3h}}$$

können wir also neben der ursprünglichen Funktion (14) die Funktion (22) und wohl auch die Funktion (17) (hoher Anteilswert von $b_2 \cdot \bar{x}$ bei gesicherter Bedeutsamkeit von b_2) für eine allgemeine Verwendung, zumindest in bezug auf die Baumart Fichte, in die engere Wahl ziehen und später ihre Tauglichkeit an verschiedenen Gruppen von Fichtenprobestammmaterial einer weiteren Prüfung unterziehen. Die Tatsache, daß die Regressionskonstante a bei Funktion (17) im Mittel einen Anteilswert von 12 % ergibt und dabei aber einen relativ großen Fehler von 32,5 % aufweist und ihre Bedeutsamkeit, gemessen am Wert $t = 3,07$, nicht hinreichend gesichert erscheint, gibt uns den Hinweis, daß diese Funktion gegenüber den Funktionen (22) und (14) allgemein gesehen keine bessere Anpassung erwarten läßt. Bei ganz bestimmten Gruppen von Fichtenmaterial erscheint jedoch eine bessere Anpassung eventuell nicht ausgeschlossen.

Zum Abschluß dieses Abschnittes wollen wir noch untersuchen, ob wir durch Hinzunahme einer weiteren unabhängigen Variablen, etwa zur speziellen arithmetischen Formfunktion (14), eine bessere Anpassung an das Probestammmaterial erzielen könnten. Dieser Untersuchung dient die Beilage Nr. 11. Wir erkennen, daß etwa das Kronenverhältnis k_h in Funktion (28), oder die Kronenbreite b_k als dritte Variable in Funktion (29) geradezu das Gegenteil der Erwartungen mit sich bringen. Man beachte besonders die zu großen

Fehler der betreffenden b_3 ; die Werte

$$t = \frac{b_i}{\varepsilon b_i}$$

unterschreiten den Schwellenwert $\sqrt{2} \cdot 1,4142$ und sind auch kleiner als 1,00. Es ist somit nicht verwunderlich, wenn diese Einflußvariablen innerhalb dieser Funktionstypen eine Verschlechterung der Anpassung mit sich bringen. Demgegenüber wäre die Länge der Krone l_k in geringem, wohl nicht sehr bedeutsamen Maße (t von b_3 nur 1,47) in der Lage, eine Verbesserung der Anpassung zu bewirken. Die Variable $1/d$ in Funktion (26) bewirkt bei dem vorliegenden Probestammmaterial eine nicht unwesentliche Verbesserung, doch erscheint es nicht ratsam, diese Tatsache unbedingt zu verallgemeinern, denn die Bedeutsamkeit dieser Variablen ($t = 2,39$) ist nach den gewählten Maßstäben einerseits nicht allzu erheblich gesichert, andererseits führt sie zu einer nicht unwesentlichen Verschlechterung der Wirkung von b_2 und könnte daher bei anderem Fichtenmaterial oder bei Probestammmaterial anderer Baumarten unter Umständen gerade das Gegenteil der Erwartungen mit sich bringen. Diese Einschränkungen besagen jedoch nicht, daß es bei einer künftigen Suche nach für praktische Zwecke gedachten Formfunktionen, so etwa für Waldinventuren, keinen Sinn hätte, etwa die Funktionen (14), (17), (22) und eventuell auch (24) um die Variablen $1/d$ aber auch l_k oder andere noch nicht untersuchte Variable (welche aus den bereits verwendeten Merkmalswerten gebildet werden) zu erweitern, um einen geschmeidigeren Ausgleich der Variation der Schaftformzahl, also eine bessere Anpassung, zu erzielen. Mit Rücksicht auf eine zu erwartende Verringerung systematischer Abweichungen etwa für ganz bestimmte Dimensionsbereiche erscheint es im Gegenteil sogar ratsam, bei den künftigen Berechnungen der effektiv für bestimmte praktische Zwecke vorzusehenden Funktionen, welche d , h und $d_{0,3}h$ als veränderliche Merkmalswerte aufweisen, derartige Untersuchungen anzustellen. Die obigen persönlichen Bedenken könnten durch solche Untersuchungen zum Teil oder sogar zur Gänze einmal zerstreut werden.

Im folgenden Abschnitt der Arbeit werden wir sehen, daß wir, wie zu erwarten, gegenüber den vorhin diskutierten zusätzlichen Variablen ganz erhebliche Verbesserungen erzielen können, wenn wir mit Rücksicht auf eventuelle spezielle ertragskundliche Verwendungszwecke weitere obere Durchmesser in einer dritten unabhängigen Variablen, allerdings in geeigneter Weise placiert, in ein entsprechendes Funktionssystem aufnehmen.

4.2 Prüfung der speziellen arithmetischen Formfunktionen für Fichte unter Einbeziehung verschiedener oberer Durchmesser

Setzen wir in unserer speziellen arithmetischen Formfunktion für Fichte an Stelle des oberen Durchmessers in 0,3 der Baumhöhe andere obere Durchmesser in relativer oder absoluter Baumhöhe ein, oder anders gesprochen, wählen wir die Quadrate anderer unechter Formquotienten als erste unabhängige Variable, dann ergeben sich, gemäß Beilage 12 a, folgende Tatsachen:

Durch Einführung eines Durchmessers in 0,1 der Baumhöhe erzielen wir wohl eine bessere Anpassung der Funktion an das vorliegende Material als bei allen anderen Funktionen, die keinen oberen Durchmesser als Eingangswert enthalten ((gemeint sind die Funktionen (1 a) - (7 a), die im Abschnitt 4.1 diskutiert wurden)), doch liegt ihre Anpassung bzw. Genauigkeit gleichfalls noch wesentlich unter jener der Funktion mit dem Eingangswert $d_{0,3h}$ (14). Ein relativ gleich ungünstiges Ergebnis wie mit Funktion (30) erzielen wir durch Wahl eines $d_{0,7h}$ als Eingangswert, wie aus den in der Beilage 12 a wiedergegebenen Statistiken der Funktion (32) zu ersehen ist. ((Eine etwas bessere Anpassung an das Material könnten wir eventuell erzielen, wenn wir die Funktion (30) dahingehend ändern, daß wir d im Wurzel- bzw. Schaftanlaufquotienten um einen konstanten Betrag c erhöhen, also anstelle von

$$\frac{d^2_{0,1h}}{d^2}$$

einen Quotienten

$$\frac{d^2_{0,1h}}{(d+c)^2}$$

verwenden, wobei c etwa 2 oder 3 cm betragen könnte. Wollte man die Funktion (30) für praktische Zwecke verwenden, so mag diese Abänderung insbesondere bei niedrigen Bäumen von Bedeutung sein.))

Demgegenüber würde die Einführung eines $d_{0,5h}$ Funktion (31) gegenüber der Funktion (14), welche $d_{0,3h}$ enthält, eine geringfügige Verbesserung mit sich bringen, von der angenommen werden kann, daß sie von allgemeiner Bedeutung ist. Ein Augenmerk wäre in diesem Falle wohl dem relativ großen Standardfehler von b_2 zu widmen. Man beachte den Wert für t nach Maßgabe der bisher bereits gehandhabten Regeln in bezug auf die Bedeutsamkeit eines Regressionskoeffizienten bzw. einer unabhängigen Variablen.

Diese Ergebnisse sind nun so zu deuten, daß $d_{0,1h}$ vielfach in einem Schaftbereich liegt, wo sich der Wurzel- bzw. Stammanlauf

noch, wenn auch geringfügig, bemerkbar macht, besonders bei niedrigen Bäumen, und dieser Durchmesser bei Baumhöhen unter 13 m dann auch größer als der Bruthöhendurchmesser wird, wodurch sich gegenüber einem etwas höher gelegenen Durchmesser eine wesentlich größere Variabilität des $d_{0,1h}$ einerseits und des Wurzel- bzw. Stammanlaufquotienten

$$\frac{d}{d_{0,1h}}$$

andererseits ergibt. Sowohl $d_{0,3h}$ als auch $d_{0,5h}$ liegen gegenüber $d_{0,7h}$ und eben auch $d_{0,1h}$ im Stammbereich der geringsten Durchmesserabnahme (in der Nähe des Wendepunktes der Schaftkurve) und weisen eine geringere Variation auf, was sich in gleicher Weise auch bei den Stammanlaufquotienten

$$\frac{d}{d_{0,3h}} \text{ und } \frac{d}{d_{0,5h}}$$

bemerkbar macht und sich sehr günstig auf die Beziehung f zu

$$\frac{d_{0,3h}}{d} \text{ oder } \frac{d_{0,5h}}{d}$$

beziehungsweise zum Quadrat der Formquotienten auswirkt. (An dieser Stelle sei eine interessante Feststellung ASSMANNs (1961) zitiert: "Man würde über die Formänderungen noch bessere Aufschlüsse erhalten, wenn man als Beziehungs-Querfläche eine oberhalb des Wendepunktes der Schaftkurve und damit des Stammfußes gelegen wählen würde, etwa bei 0,2 oder 0,3 von unten gerechnet." Mit Rücksicht auf den von uns gewählten oberen Durchmesser in 0,3 der Baumhöhe ist keinesfalls uninteressant, daß bereits HOSSFELD (1812) für Liegendmessungen die Bestimmung der "Stärke der Schäfte bei einem Drittheil der Länge" und zum Zwecke der Bestimmung des Inhaltes eines Baumes mit oder ohne Reisisg die allgemeine Formel

$$K = \frac{3}{4} \cdot f \cdot H, \text{ bzw. } K = \frac{3}{4} \cdot G_1 \cdot H$$

(gültig für gemeinen und parabolischen Kegel) empfahl. In dieser Formel bedeutet f bzw. G_1 die Kreisfläche in 1/3 der Baumhöhe. BAUR (1875) bemerkt hiezu: "Da man bei dieser Formel nur einen Durchmesser in 1/3 der gesamten Stammlänge und zwar gerade an einer Stelle zu messen hat, wo der Schaft am allerregelmäßigsten gewachsen ist, so kann es keinem Zweifel unterliegen, daß dieselbe für unentwipfelte Stämme nicht nur die einfachste, sondern auch die genaueste sein muß." Gegenüber einem Durchmesser in 1/3 der Baumhöhe der Stammlänge oder dem $d_{0,3h}$ wurde

der Durchmesser in halber Stammlänge bzw. der $d_{0,5h}$ erst von STRZELECKI (bzw. STANECKI) (1883) näher ins Auge gefaßt und das Verhältnis

$$\frac{d_{0,5}}{d_{1,3}}$$

mit $f_{1,3}$ (Brusthöhenformzahl) in Beziehung gesetzt. NOSSEK (1889) unterbreitet hiezu Verbesserungsvorschläge, aber erst KUNZE (1891) entwickelte unter Zugrundelegung des Formquotienten

$$\frac{d_{0,5}}{d}$$

jene bemerkenswerte "Neue Methode zur raschen Berechnung der unechten Schaftformzahl für Kiefer und Fichte."

Wählen wir als oberen Durchmesser einen Durchmesser in absoluter Höhe, etwa wie in Funktion (33) den Durchmesser in 6,5 m, dann paßt sich diese Funktion etwas besser dem Material an als die Funktionen (1 a) - (7 a), doch hält sie einem Wertvergleich mit Funktion (14) durchaus nicht stand, ja selbst Funktion (30) mit $d_{0,1h}$ ist dieser Funktion nicht unwesentlich überlegen. Interessant ist wohl auch der Umstand, daß nunmehr h/d^2 die weitaus bedeutendere Variable ist, der Regressionskoeffizient der Einflußvariablen

$$\frac{d_{6,5}^2}{d_{1,3}^2}$$

weist infolge der großen Variabilität von $d_{6,5}$ einen beachtlich hohen Fehler auf. (6,5 m entspricht unter Berücksichtigung der Stockhöhe und eines üblichen "Übermaßes", der Länge des ersten 6 m-Bloches.) Es sei hier erwähnt, daß es vor allem in Finnland üblich ist, einen oberen Durchmesser in absoluter Höhe als Weiser für die Form zu verwenden. An dieser Stelle sei auch an die Untersuchungen MITSCHERLICHs (1942) erinnert, worin ein oberer Durchmesser in 5 m Höhe unter Berücksichtigung weiterer Faktoren in Beziehungsgleichungen zur Bestimmung der unechten Derbholzformzahlen mit gutem Erfolg verwendet wurde.

An Hand der in Beilage Nr. 12 a festgehaltenen Daten konnten wir feststellen, daß wir durch Einführung des $d_{0,5h}$ anstelle von $d_{0,3h}$ in die allgemeine Regressionsgleichung

$$f = a + b \frac{d_{0,xh}^2}{d^2} + b_2 \frac{h}{d^2}$$

eine etwas bessere Anpassung der Probierfunktion an das Material erzielen konnten. Abgesehen von dem bereits erwähnten relativ

großen mittleren Fehler von b_2 der Funktion (31) spricht folgende praktische Überlegung gegen einen oberen Durchmesser in $d_{0,5h}$ und somit auch gegen die Funktion (31), jedoch für ein Funktionssystem etwa in Gestalt der Funktion (14) oder (22), das den $d_{0,3h}$ als Formweiser enthält. Bei sehr vielen Bäumen, besonders in lockeren Beständen oder in plenterwaldartigen Beständen, reicht die Krone bzw. die Beastung bis zur halben Baumhöhe oder noch tiefer herab. Es würde sich daher bei der Bestimmung eines $d_{0,5h}$ am stehenden Stamm im Zuge einer Großrauminventur oder bei Stichprobeerhebungen in der Forsteinrichtung wesentlich häufiger eine Sichtbehinderung ergeben, als bei der Messung bzw. "Schätzung" eines tiefer gelegenen Durchmessers, so etwa des Durchmessers in 0,3 der Baumhöhe. Außerdem ergeben sich bei der optischen Messung oberer Durchmesser für $d_{0,5h}$ in der Regel (abgesehen von sehr steilem Gelände bei bergseitiger Messung) länger Visuren als für $d_{0,3h}$ und daher für diesen Durchmesser größere Meßfehler. Eine Untersuchungsreihe, SUTTER (1964), nämlich über die Genauigkeit der "Messung" bzw. "Schätzung von Durchmessern" mit Hilfe des Spiegelrelaskopes, das wohl in erster Linie für derartige Messungen im Zuge von Forstinventuren in Frage kommt, ergab, daß sich bei der "Schätzung von Durchmessern" aus kurzen Distanzen bessere Ergebnisse erzielen lassen, als aus relativ weiten Entfernungen. Diese Einwände in bezug auf eine erzielbare geringere Meßgenauigkeit für $d_{0,5h}$ gegenüber $d_{0,3h}$ und die Tatsache, daß letzterer Durchmesser im allgemeinen noch im Stammbereich der geringsten Durchmesserabnahme liegt und daher auch bei Ungenauigkeiten der Lagebestimmung der Meßstelle unempfindlich reagiert, führten für die praktische Verwendung bei der österreichischen Forstinventur zur Wahl des oberen Durchmessers in 0,3 der Baumhöhe.

Ziehen wir die bisher wenig beachtete Arbeit HEMPELS (1951) zu Rate, in der er den Formquotienten q_{666} (entspricht $k_{0,334h}$) als Vergleichsbasis für Formuntersuchungen empfiehlt, da der entsprechende Durchmesser $d_{0,334h}$ in einem Stammbereich liegt, der mit zunehmendem Alter von Bäumen nur unwesentliche Formveränderungen aufweist, so kann dies wohl als weiterer Beweis für die günstige Lage des von uns gewählten oberen Durchmessers in $d_{0,3h}$ gewertet werden, obzwar dieser Durchmesser im Falle unserer Untersuchungen mit der Ermittlung unechter Formfaktoren in Beziehung gebracht wurde.

Mit Rücksicht auf Zuwachsuntersuchungen und Zuwachsinventuren scheint mit der Wahl des $d_{0,3h}$ ebenfalls ein guter Griff getan, denn wie ASSMANN (1961) ausführte, liegt "die Zone des gleichmäßigsten Zuwachses in 1/3 der Schafthöhe von unten her." Eben in dieser Zone des gleichmäßigsten Zuwachses liegt aber auch der gewählte obere Durchmesser $-d_{0,3h}$.

Betrachten wir die Aufeinanderfolge der $s_F\%$ der allgemeinen Probierrfunktion

$$f = a + b_1 \frac{d^2}{d^2} + b_2 \frac{h}{d^2}$$

wenn wir die Durchmesser für 0,1, 0,3, 0,5 und 0,7 der Höhe einsetzen (Beilage Nr. 12 a) und außerdem die Aufeinanderfolge der entsprechenden mittleren Fehler der Regressionskonstanten und der Regressionskoeffizienten oder statt dieser die analogen t-Werte, so müssen wir erkennen, daß in bezug auf dieses Funktionssystem der Bereich der günstigen Anpassung der Funktion an dieses Material hinsichtlich des oberen Durchmessers etwa oberhalb von 0,2 der Höhe beginnt und etwa bei 0,5 h bereits wieder endet siehe Abbildung Nr. 1. Diese Feststellung steht zwar nicht in direkter Beziehung zu den Untersuchungsergebnissen von ALTHERR (1960), daß nämlich "der Schaftteil zwischen 0,8 und 0,4 L (entspricht 0,2 h bis 0,6 h gemäß unserer Schreibweise) mit Hilfe von Sektionen der Länge 0,2 L praktisch frei von systematischen Fehlern erfaßt werden kann", jedoch erscheint diese Beobachtung erwähnenswert, denn sie charakterisiert in gleicher Weise die spezielle Eigenheit und die besonderen Vorteile dieses Stammabschnittes. In diesem weiteren Sinne stehen auch beide Resultate unbedingt miteinander im Einklang.

Entsprechend der in der Abbildung Nr. 1 eingetragenen "ausgezogenen Linien" konnten wir annehmen, daß zumindest für das getestete Probestammmaterial und für dieses Funktionssystem der günstigste obere Durchmesser etwa in der Nähe von 0,4 h zu finden gewesen wäre.

Dieser Umstand und eben die bereits erwähnten erkennbaren Gesetzmäßigkeiten hinsichtlich der $s_F\%$ und der mittleren Fehler der Regressionskoeffizienten bzw. deren t-Werte veranlaßte uns, die an den Probestämmen nicht direkt erhobenen Werte für die oberen Durchmesser $d_{0,2h}$, $d_{0,4h}$, $d_{0,6h}$ und $d_{0,8h}$ aus den Meßwerten der Kluppierung (in 1 m-Sektionen) durch Interpolation indirekt zu bestimmen und nunmehr auch die entsprechenden Probierrfunktionen von der Gestalt

$$f = a + b_1 \frac{d^2}{d^2} + b_2 \frac{h}{d^2}$$

unter Verwendung dieser oberen Durchmesser zu berechnen. Diese Ergebnisse sind in Beilage 12 b zusammen mit den Daten aus Beilage 12 a festgehalten. Wir erkennen, daß sich die neu hinzugekommenen Werte sehr gut in die Reihen der Werte der ursprünglich berechneten Funktionen einfügen und in der Lage sind, das in Abb. 1

dargestellte Bild der Zusammenhänge zu vervollständigen. (Offenbar bedingt durch die indirekte Bestimmung der $d_{0,xh}$ -Werte Interpolation aus den Durchmesserwerten der 1 m-Sektionen -, waren diese ausgeglichener, als die durch direkte Bestimmung erhaltenen anderen Durchmesserwerte in relativer Höhe geringere Streuung Diese Annahme scheint sich dadurch zu bestätigen, daß sich für alle Funktionen, denen indirekt bestimmte obere Durchmesser als Eingangswerte zugrunde liegen, etwas niedrigere $s_F\%$ -Werte und höhere t -Werte für b_1 ergaben, als auf Grund der bereits bekannten Werte ausgezogene Linien zu erwarten gewesen wäre. Trotz dieser Feststellung wurde der Versuch unternommen, alle ermittelten Werte durch gemeinsame ausgleichende Freihandkurven - strichlierte Linien zu ersetzen, um die gegenseitigen Gesetzmäßigkeiten augenfällig darstellen zu können).

Die Werte der Funktion (44) mit $d_{0,4h}$ als variablen Eingangswert selbst (insbesondere $s_F\% = 3,98$, $B = 0,942$ und $t_{b1} = 14,53$) bestätigen die Annahme, daß in diesem Stammbereich der günstigste obere Durchmesser in bezug auf das gewählte Funktionssystem und das zugrunde gelegte Probestammmaterial zu suchen gewesen wäre. Dessen unbeschadet, können wir unter Zuhilfenahme der Abb. 1 besonders anschaulich erkennen, daß der aus den bereits geschilderten praktischen Erwägungen für die Österreichische Forstinventur gewählte $d_{0,3h}$ hinsichtlich der charakteristischen Werte seiner Funktion und deren Zusammenspiel wohl bereits eindeutig im Bereich der günstigen Anpassung der Funktion an das Material liegt.

Sehr ähnliche Ergebnisse hätten wir wohl zu erwarten gehabt, wenn wir anstelle dieses Funktionssystems, Systeme analog den Beziehungen (17), (22) oder (24) verwendet hätten.

Wesentlich ist nun wohl der Umstand, daß einerseits im Hinblick auf andere Baumarten, oder etwa deren verschiedene Stärkeklassen, und andererseits bezüglich anderer Obere-Durchmesser-Funktionen hier ein Weg gezeigt wurde, wie der günstigste Bereich des oberen Durchmessers für ein bestimmtes Gleichungssystem und ein zu bearbeitendes Material gefunden und dokumentiert werden kann.

Im Rahmen dieses Abschnittes erscheint es nun angebracht, die Formeln von KUNZE und SCHIFFEL einer Prüfung zu unterziehen, aber auch zu prüfen, inwieweit wir besser Formfunktionen ermitteln können, wenn wir außer $d_{0,3h}$ weitere obere Durchmesser in Regressionsgleichungen einführen. Siehe diesbezüglich nun Beilage Nr. 13.

Die Feststellung SCHIFFELs, daß durch Wahl von

$$\frac{d}{h \cdot d_{0,5h}}$$

anstelle von $1/h$ (KUNZE) als zweite unabhängige Variable in einem Funktionssystem, das als erste unabhängige Variable

$$\frac{d_{0,5h}}{d}$$

(= q_s = SCHIFFEL'scher Formquotient) aufweist, eine Verbesserung erzielt werden kann, wird durch die vorliegende Untersuchung bestätigt. Doch beide Funktionssysteme, (34) und (35), liefern trotz der Verwendung des oberen Durchmessers in $0,5h$ nicht ebenso befriedigende Ergebnisse wie etwa die Funktion (14) oder die unmittelbar vergleichbare Funktion (31), welche die gleichen Merkmalswerte $d_{0,5h}$, d und h erfordert. In beiden Fällen unterschreiten die t -Werte von b_2 den bei einer Überschreitungswahrscheinlichkeit von $0,1\%$ gewählten Grenzwert für die Bedeutsamkeit ganz wesentlich, was eine entsprechende Beachtung verdient. Bei Funktion (35) macht sich vor allem die zwangsläufig zu erwartende Wechselwirkung Abhängigkeit der beiden "unabhängigen" Variablen störend bemerkbar. Vergleichen wir, abgesehen davon, die an Hand des vorliegenden Materials berechnete Funktion (35) für Fichte

$$f = 0,822 \cdot q_s + \frac{0,29}{q_s \cdot h} - 0,11 \quad (q_s = \frac{d_{0,5}}{d})$$

mit den von SCHIFFEL erarbeiteten Formeln, so erkennen wir eine beachtliche Ähnlichkeit in bezug auf die von ihm empirisch gefundenen Werte für die einzelnen Koeffizienten.

SCHIFFEL fand folgende Formeln:

Lärche (1905)	$f = 0,87 \cdot q_s + \frac{0,47}{q_s \cdot h} - 0,155$
Kiefer (1907)	$f = 0,896 \cdot q_s + \frac{0,34}{q_s \cdot h} - 0,16$
Tanne (1908)	$f = 0,88 \cdot q_s + \frac{0,36}{q_s \cdot h} - 0,15$
((Fichte (1908)	$f = 0,66 \cdot q_s^2 + \frac{0,32}{q_s \cdot h} + 0,14,$

SCHIFFEL verwendete bei Fichte q_s^2 anstelle von q_s , somit ist eine unmittelbare Vergleichbarkeit mit den anderen Formeln nicht gegeben.) Diese Tatsache erscheint aber nun hinsichtlich der Verwen-

dung ähnlicher Funktionssysteme, etwa Funktion (14) oder (22) für andere Baumarten als Fichte von Bedeutung.

Folgen wir nun den Vorschlägen von PRODAN (Diss.) insoferne, als wir vorerst einmal eine Beziehungsgleichung für den echten Formfaktor $\lambda_{0,9}$ ($\lambda_{0,9} = f_{0,1h}$ unserer Schreibweise entsprechend) berechnen, so finden wir für das verwendete Material folgende Schätzfunktion:

$$f_{0,1h} = 0,6690 \frac{d_{0,5h}}{d_{0,1h}} + 0,0403 \quad (41)$$

Im Gegensatz zu der von KRENN und PRODAN (1944) zitierten, aus den Einzelstammdatensätzen von 22 Beständen (11 Ta-Bestände mit 310, 5 Fi-Bestände mit 523, 3 Ki-Bestände mit 157 und 2 Douglasienflächen mit 63, demnach insgesamt 1053 Einzelstämmen) berechneten Beziehungsgleichung

$$f_{0,1h} = 0,777 \frac{d_{0,5h}}{d_{0,1h}} - 0,038,$$

mit einem die Anpassung dieser Funktion charakterisierenden $r = 0,997$, ergab sich für unser verwendetes Material (50 Fichten aus plenterwaldartigen Beständen) ein r von 0,919 ($B = 0,845$), also durchaus keine so straffe Beziehung. Aber auch in bezug auf den Regressionskoeffizienten und die Regressionskonstante unterscheiden sich beide Gleichungen nicht unerheblich. Nehmen wir $b = 0,777$ als dem wahren Wert β ungefähr entsprechenden an, so ist $b = 0,669$ unserer Gleichung entsprechend dem Fehler der Regressionskoeffizienten

$$\epsilon_b \pm 0,0408 \quad (\epsilon_b \% = 6,1 \%)$$

mit einer etwas größeren Sicherheit (Wahrscheinlichkeit) als 95 % von $\beta \doteq 0,777$ verschieden. (Da uns der Fehler des Regressionskoeffizienten $b = 0,777$ nicht bekannt ist, wurde der Vergleich in dieser Weise durchgeführt). Die Regressionskonstanten unterscheiden sich infolge ihrer Vorzeichen ganz erheblich voneinander.

Worin sind diese Unterschiede zu suchen?

Unsere $f_{0,1h}$ der Einzelstämme wurden aus

$$f_{0,1h} = \frac{4 \cdot v}{\pi \cdot h \cdot d_{0,1h}^2}$$

berechnet, wobei die Schaftmasse v aus 1 m-Sektionen ermittelt worden war. Demgegenüber waren die $f_{0,1h}$ der Einzelwerte bei KRENN und PRODAN direkt entsprechend der HOHENADLschen

Formel

$$\lambda_{0,9} \quad 0,2 (1 + \eta_{0,7}^2 + \eta_{0,5}^2 + \eta_{0,3}^2 + \eta_{0,1}^2),$$

also unter Zugrundelegung von 5 Sektionen gleicher relativer Länge, berechnet worden, diese beiden Beziehungsgleichungen sind daher nicht unmittelbar miteinander vergleichbar. Bedenken wir nun, daß bei einer Kubierung nach 5 Sektionen gleicher relativer Länge das "Überholz" des unteren Schaftteiles, das Schenkelholz der Wurzelanläufe gegenüber einer Kubierung nach 1 m-Sektion unberücksichtigt bleibt, sich außerdem für den in den meisten Fällen einem quadratischen Paraboloid entsprechenden "Oberschaft" bei Stämmen über 5 m Länge bzw. Höhe bei einer Kubierung nach 1 m-Sektionen eben der wahren Form entsprechend etwas höhere Anteilswerte an der Schaftmasse ergeben, als nach 5 Sektionen gleicher relativer Länge, so mag sich daraus erklären, warum sich bei unserer Beziehungsgleichung die Regressionskonstante mit positivem Vorzeichen ergab. Unseren Berechnungen lagen also, insbesondere bei den starken und langen Stämmen, relativ höhere Schaftmassenwerte und demzufolge auch höhere Werte für $f_{0,1h}$ zugrunde. Die, entsprechend 5 Sektionen gleicher relativer Länge, ermittelten Einzelwerte $f_{0,1h}$ sind nun aber auch "ausgeglichen" und weisen eine geringere Varianz als unsere Einzelwerte für $f_{0,1h}$ auf, was mit ein Grund der schlechteren Anpassung der Funktion (41) ist. Daß der Wert des Regressionskoeffizienten unserer Gleichung wesentlich niedriger liegt als jener der KRENN-PRODANschen Beziehungsgleichung, erklärt sich zum Teil wohl darin, daß für Fichte in der Regel eine etwas geringere Steigung der Geraden (welche den stochastischen Zusammenhang des $f_{0,1h}$ in Abhängigkeit von

$$\frac{d_{0,5h}}{d_{0,1h}} = \eta_{0,5}$$

darstellt) zu verzeichnen ist, als etwa bei Kiefer, Douglasie und Tanne oder bei einer "Mischfunktion" mehrerer Baumarten, bei der die Tanne einen entscheidenden Anteil hat. Da unserer Funktion nur Fichtenprobestammmaterial zugrunde liegt, ist es wohl gerechtfertigt, daß der Regressionskoeffizient einen erheblich niedrigeren Wert angenommen hat. In bezug auf den Korrelationskoeffizienten bzw. auf die Bestimmtheit der Funktion haben wir dabei überdies noch zu bedenken, daß unsere Probestämme nur aus plenterwaldartigen Beständen stammen und daher die $\eta_{0,5}$ -Werte eine verhältnismäßig hohe Varianz bzw. Streuung haben.

Des Verständnisses wegen sei an dieser Stelle auf die unterschiedliche Problemstellung hingewiesen. Während KRENN und PRODAN, den Anregungen HOHENADLs folgend, vor allem mit Rücksicht auf

ertragskundliche Untersuchungen nach unmittelbar für verschiedene Baumarten, Bestandesformen, Bestandestypen usw. vergleichbaren Ausbauchungsreihen, echten Schaftholzformzahlen und damit auch Schaftholzmassen (5 Sektionen gleicher relativer Länge) für Einzelstämme und vor allem für Bestände suchten ihren Bemühungen war demzufolge auch ein hervorragender Erfolg beschieden -, gingen unsere Bemühungen, wie eingangs schon erwähnt, dahin, für die Zwecke einer Großraumstichprobeinventur bzw. auch für Stichprobeerhebungen der Forsteinrichtung möglichst einfache Beziehungsgleichungen (Probierfunktionen) zu finden, welche uns in die Lage versetzen, die "wahren Schaftmassen" der Einzelstämme in allen Fällen möglichst gut zu beschreiben; daher auch die Zugrundelegung der nach 1 m-Sektionen ermittelten Einzelstammenschaftmassen.

Vergleichen wir jedoch unsere Funktion (41) mit den nachstehend angeführten Beziehungsgleichungen, welche ALTHERR (1953) jedoch auch unter Zugrundelegung von 5 Sektionen gleicher relativer Länge gefunden hat, so können wir einerseits eine gute Übereinstimmung feststellen, andererseits unsere Ergebnisse als Bestätigung für die Empfehlung ALTHERRs ansehen, keine gemeinsame Funktion, sondern für die einzelnen Baumarten getrennte Beziehungsgleichungen

$$\lambda_{0,9} = b \cdot \eta_{0,5} + a$$

zu berechnen.

$$\text{Fichte (n = 50)} \quad f_{0,1h} \quad 0,6690 \frac{d_{0,5h}}{d_{0,1h}} + 0,0403, \quad r = 0,919 \pm 0,022, \quad (41)$$

ALTHERR:

Fichte (n = 412)	$\lambda_{0,9} = 0,6987$	$\eta_{0,5} + 0,023$	$r = 0,8106 \pm 0,0029$
Dougl. (n = 190)	$\lambda_{0,9} = 0,71479$	$\eta_{0,5} + 0,00632$	$r = 0,9071 \pm 0,0136$
Jap. Lär. (n = 163)	$\lambda_{0,9} = 0,77197$	$\eta_{0,5} - 0,033107,$	$r = 0,8947 \pm 0,0156$
Eur. Lär. (n = 50)	$\lambda_{0,9} = 0,81441$	$\eta_{0,5} - 0,05888$	$r = 0,9299 \pm 0,0189$
Kiefer hiebsreif (n = 577)	$\lambda_{0,9} = 0,77783$	$\eta_{0,5} - 0,03705$	$r = 0,8348 \pm 0,0399$

Wir können nach diesem Vergleich in bezug auf intensive ertragskundliche Untersuchungen der Ansicht ALTHERRs beipflichten, wenn er eine ursprünglich von PRODAN (1944) geäußerte Meinung nicht unterstreicht. (PRODAN: "Aus den untersuchten Beständen konnten keine Unterschiede zwischen den Holzarten in obiger Beziehung festgestellt werden, so daß für eine erste Annäherung die ermittelten Gesetzmäßigkeiten innerhalb des vorgefundenen Bereiches für alle untersuchten Holzarten gelten können").

Mit Rücksicht auf ertragskundliche Untersuchungen war die Gegenüberstellung der eben diskutierten (jedoch mit Rücksicht unterschiedlicher Kubierung der Probestämme nicht bedingungslos miteinander vergleichbaren) Beziehungsgleichungen, welche der Beschreibung der echten Schaftholzformfaktoren dienen, wohl von Interesse. Dies trifft insbesondere dann zu, wenn bei bestimmten ertragskundlichen Untersuchungen der echte Formquotient bzw. die Ausbauchungszahl

$$\eta_{0,5} = \frac{d_{0,5h}}{d_{0,1h}}$$

nur an stehenden Stämmen bestimmt werden kann.

In diesem Sinne leiten wir nun weiters aus unserer Gleichung für den echten Formfaktor durch Einführung des HOHENADLschen Formquotienten bzw. Wurzelanlaufquotienten, wie KRENN ihn bezeichnete, die analoge Schätzfunktion für einen unechten Formfaktor ab

$$f_{1,3} = \frac{\lambda_{0,9}}{\left(\frac{d_{1,3}}{d_{0,9}}\right)^2}$$

so ergibt sich die Gleichung (41 a). (Wir entsprechen damit der Empfehlung HOHENADLs, welcher die unechte Formzahl in die echte Formzahl $\lambda_{0,9}$ und in den "Faktor"- q^2_H -der störende Einflüsse anzeigt, zerlegt). Berechnen wir die Standardabweichung der beobachteten Einzelwerte von den (mit Hilfe dieser Gleichung) berechneten Werten, so finden wir ein $s_F\%$ von 3,76. Berechnen wir in Analogie zu Gleichung (41 a) die entsprechende Regressionsgleichung (36), so zeigt ein $s_F\%$ 3,70 eine etwas günstigere Anpassung an. Infolge der zwangsläufigen Wechselwirkung der beiden unabhängigen Variablen könnte eine derartige Beziehungsgleichung zum Zwecke der Bestimmung unechter Schaftholzformfaktoren trotz ihrer guten Anpassung an das Material nicht befriedigen. Die mittleren Fehler der Konstanten a und insbesondere des Koeffizienten b_1 und dessen zugehöriger t-Wert,

$$\frac{b_i}{\varepsilon b_i} < 1$$

erhellen die ungünstige Situation.

Ersetzen wir jedoch in der ersten unabhängigen Variablen den Merkmalswert $d_{0,1h}$ durch $d_{0,3h}$ (Funktion 37), so erzielen wir neben einer besseren Anpassung an das vorliegende Material wesentlich günstigere "Prüfwerte" für die Regressionskonstante und die Regressionskoeffizienten. Eine weitere Verbesserung erzielen wir, wenn wir h/d^2 als weitere unabhängige Variable hinzunehmen (38). Gegenüber unserer speziellen Funktion (14) erzielen wir also durch Hinzunahme von $d_{0,5h}$ und $d_{0,1h}$ als variable Merkmalswerte eine beachtenswerte bessere Anpassung an das Material. Dies zeigen die Werte $s_F\%$ 3,23 und $B = 0,962$ für Funktion (37) gegenüber $s_F\% = 4,66$ und $B = 0,920$ für Funktion (14).

((Wenn bei bestimmten ertragskundlichen Untersuchungen, entsprechend den Empfehlungen von KRENN und PRODAN, an stehenden Stämmen mit Hilfe eines geeigneten optischen Instrumentes (Spiegelrelaskop, Zeiss-Teletop oder einem Dendrometer, etwa dem BARR and STRAUD Dendrometer) zwecks Ermittlung des echten Formquotienten die oberen Durchmesser $d_{0,5h}$ und $d_{0,1h}$ gemessen bzw. geschätzt werden, um gemäß der festgestellten straffen Beziehung der echten Formquotienten zu den echten Formfaktoren eben diese und in weiterer Folge die Einzelstammvolumen, vor allem aber die Bestandesschaftmassen, zu ermitteln, würde es keinen nennenswerten Aufwand an Zeit bedeuten, wenn auch der $d_{0,3h}$ in gleicher Weise gemessen würde. Entsprechend der an Hand der Funktionen (36), (37), (38) zur Bestimmung unechter Schaftholzformfaktoren gewonnenen Erfahrungen könnten zweifellos Funktionen zur Bestimmung der echten Schaftholzformfaktoren ermittelt werden, welche eine noch höhere Bestimmtheit hätten als die für die Gleichung

$$f_{0,1h} = a + b \frac{d_{0,5h}}{d_{0,1h}} \quad (= \lambda_{0,9} = b \cdot \eta_{0,5} + a)$$

festgestellte straffe Beziehung. Legen wir den Berechnungen der Einzelwerte von $f_{0,1h}$ im Sinne einer notwendigen "Vergleichbarkeit", in bezug auf Ausbauchungsreihen und die echten Schaftholzformzahlen, 5 Sektionen gleicher relativer Länge zugrunde, so könnte es in Anlehnung an Funktion (38) wohl von Interesse sein, eine Beziehungsgleichung, etwa von der Gestalt

$$f_{0,1h} = a + b_1 \frac{d_{0,5h}}{d_{0,1h}} + b_2 \frac{d^2_{0,3h}}{d^2_{0,1h}}$$

näher zu untersuchen. Werden die Einzelwerte der $f_{0,1h}$ jedoch aus, auf Grund von 1 m-Sektionen bestimmten, Schaftmassen ermittelt, dann könnte es vielleicht nicht von Schaden sein, wenn

obige Beziehungsgleichung um

$$\frac{h}{d^2_{0,1h}}$$

als dritte Einflußvariable erweitert würde.

Die eben gemachten Vorschläge beinhalten Vermutungen, welche erst durch weitere Untersuchungen erhärtet werden müßten.)

Daß es, wie schon einmal erwähnt, nicht egal ist, in welcher Art wir unsere Funktion (14) durch eine mit den variablen Merkmalswerten $d_{0,5h}$ und $d_{0,1h}$ gebildeten dritten unabhängigen Variablen erweitern, erhellt der Vergleich der Funktionen (38) und (39). Ein weiterer Vergleich mit Funktion (40), wo gegenüber Funktion (39) $d_{0,1h}$ durch d ersetzt wurde, gibt Aufschluß darüber, wie wesentlich es ist, zur Verfügung stehende variable Merkmalswerte in geeigneter Weise innerhalb eines Funktionssystems zu placieren. Obwohl wir gegenüber Funktion (40) mit den variablen Werten d , h , $d_{0,3h}$ und $d_{0,5h}$ in Funktion (39) einen weiteren oberen Durchmesser, nämlich $d_{0,1h}$ ins Funktionssystem aufgenommen haben, erzielen wir infolge ungünstiger Placierung dieses Wertes, entgegen den Erwartungen, eine bemerkenswerte Verschlechterung in bezug auf die Anpassung der Funktion an das vorliegende Material.

Zuletzt seien des Interesses wegen im Zusammenhang mit den Formeln von KUNZE und SCHIFFEL noch die Statistiken der Funktion (42) in Beilage Nr. 13 festgehalten. Diese Funktion entsteht, wenn wir ausgehend von der Volumsgleichung von PRYTZ (1888)

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{d_{0,5}}{d} \right)^2 + \frac{1}{8} d^2 \quad (H + 2,08)$$

eine allgemeine Beziehungsgleichung für die unechte Formzahl ableiten, welche dann lautete:

$$f = a + b_1 \frac{d^2_{0,5h}}{d^2} + b_2 \frac{d^2_{0,5h}}{d^2 \cdot h} + b_3 \frac{1}{h}.$$

Wir erzielen unter Verwendung der gleichen variablen Merkmalswerte d , $d_{0,5h}$ und h gegenüber den Funktionen (34) und (35) von KUNZE und SCHIFFEL, gemessen an dem vorliegenden Material, eine bessere Anpassung, ("da bei PRYTZ die Abhängigkeit von d/d_m schärfer heraustritt als bei KUNZE" SCHIFFEL, 1899). In Anbetracht der relativ großen mittleren Fehler der Regressionskonstanten und der Regressionskoeffizienten b_2 und b_3 und eben mit Rücksicht auf die Abhängigkeit zwischen der ersten und der zweiten "unabhängigen" Variablen erscheint eine derartige Beziehungsgleichung nicht sinnvoll. Dies bestätigt auch ein Vergleich

mit der einfacheren Funktion (31), bei welcher wir durch Verwendung derselben Merkmalswerte zweifellos bessere Resultate erzielen.

Abschließend können wir aus diesem Abschnitt nun folgende Schlüsse ziehen: Da die Funktion (40) (siehe Beilage Nr. 13) außer den Meßwerten d , h und $d_{0,3h}$ auch $d_{0,5h}$ und die Funktion (38) außerdem noch $d_{0,1h}$ verlangt, kommt diesen beiden Funktionen für Waldinventurzwecke wohl kaum entscheidende praktische Bedeutung zu. Man kann in Frage stellen, ob der erzielbare Genauigkeitsgewinn, etwa bei Anwendung in der Forsteinrichtung oder bei Forstinventuren, ganz allgemein gesehen, den Mehraufwand an Zeit und Kosten für die Messung weiterer oberer Durchmesser rechtfertigt. Dagegen ist diesen beiden Probierfunktionen, etwa in annähernd gleicher Weise wie der PRODANschen Funktion (41) für den echten Formfaktor bezogen auf $d_{0,1h}$, mit Rücksicht auf ihre relativ sehr gute Anpassung, keinesfalls ein gewisser wissenschaftlicher Wert abzusprechen. Man denke etwa an ertragskundliche Untersuchungen, bei denen man für die Massenermittlung nicht auf genaue Liegendmessungen zurückgreifen kann und daher alleine auf etwas ungenauere Stehendmessungen angewiesen ist. Ein Standardfehler bei der Formzahlbestimmung und damit auch der Massenbestimmung von rund 3 % Funktion (38) schließt die Brauchbarkeit einer derartigen Probierfunktion für manche wissenschaftliche Untersuchungen nicht mehr aus. Im Falle der praktischen Verwendung müßten wir bei beiden Funktionen der Variablen h/d^2 und bei Funktion (38) auch der Variablen

$$\frac{d^2_{0,3h}}{d^2}$$

in Anbetracht der relativ niedrigen Werte von t ein Augenmerk schenken; sie liegen unter dem Grenzwert $t = 3,52$ bei einer Überschreitungswahrscheinlichkeit von $P = 0,1$ %. In einem solchen Falle wäre es sicherlich angebracht, derartige Funktionen für einzelne Gruppen des jeweiligen Materials, etwa gegliedert nach Stärkeklassen, zu berechnen und hinsichtlich systematischer Abweichungen zu prüfen.

Überdies enthält dieser Abschnitt die Anregung im Interesse vergleichender ertragskundlicher Untersuchungen der Beziehungsgleichung für echte Formfaktoren

$$f_{0,1h} = a + b \frac{d_{0,5h}}{d_{0,1h}}$$

welche eingehend von KRENN und PRODAN (1944) und ALTHERR (1953) behandelt wurde, eine noch elastischere Beziehungsgleichung

mit dem weiteren Eingangswert $d_{0,3h}$, etwa von der Gestalt

$$f_{0,1h} = a + b_1 \frac{d_{0,5h}}{d_{0,1h}} + b_2 \frac{d_{0,3h}^2}{d_{0,1h}^2}$$

gegenüberzustellen und einer Analyse und Prüfung zu unterziehen.

4.3 Prüfung der speziellen Formfunktionen für Fichte hinsichtlich verschiedener Wuchsgebiete, Alters-, Höhen- und Stärkeklassen

Entsprechend den in Abschnitt 4.1 und 4.2 getroffenen Feststellungen ziehen wir für die praktische Anwendung, so etwa bei der Österreichischen Forstinventur, die Funktionen

$$(14) \quad f = a + b_1 \frac{d_{0,3h}^2}{d^2} + b_2 \frac{h}{d^2}$$

$$(17) \quad f = a + b_1 \frac{d_{0,3h}^2}{d^2} + b_2 \frac{h}{d}$$

$$(22) \quad f = a + b_1 \frac{d_{0,3h}}{d} + b_2 \frac{h}{d^2}$$

oder auf diesen Funktionen aufbauende, um weitere Variable ergänzte Beziehungsgleichungen und für ertragskundliche Untersuchungen die Funktion

$$(38) \quad f = a + b_1 \frac{d_{0,3h}^2}{d^2} + \frac{d_{0,1h} \cdot d_{0,5h}}{d^2} + \frac{h}{d^2},$$

oder eventuell auch

$$(40) \quad f = a + b_1 \frac{d_{0,3h}^2}{d^2} + b_2 \frac{d_{0,5h}^2}{d^2} + \frac{h}{d^2}$$

als grundlegende Gleichungen in Betracht. Es ist daher eingezeigt, die Brauchbarkeit dieser Beziehungsgleichungen an verschiedenem Material, bzw. an Untergruppen desselben, zu erproben und zu prüfen.

Wenden wir uns zuerst den Funktionen (14), (17) und (22) zu, welche nur $d_{0,3h}$ neben den bisher üblichen Werten d und h als Einflußgrößen enthalten.

Um die allgemeine Verwendbarkeit dieser speziellen Formfunktionen in Anbetracht einer späteren Umformung zu Volums- bzw. Kubierungsfunktionen zu prüfen, wurden aus 8 ganz verschiedenen Wuchsgebieten Österreichs aus den Aufnahmedaten Stichproben von je 100 Fichten dem genannten Probestammmaterial entnommen und

vorerst einmal für jedes Areal separate Funktionen berechnet. Auch die Anpassung der aus allen 800 Stämmen berechneten gemeinsamen Formfunktionen an das Material der einzelnen Gruppen Areale wurde geprüft.

Beilage Nr. 14 gibt einen Überblick über die Herkunft und die Struktur des verwendeten Testmaterials.

Bei Funktion (14) können wir allgemein feststellen, daß die Anpassung bei Verwendung verschiedenen Fichtenprobestammmaterials aus sehr verschiedenen Arealen im allgemeinen in allen Fällen befriedigt (siehe Beilage 15 a), daß sich jedoch in einzelnen Fällen absolut nicht jener Grad der Anpassung erzielen läßt, wie wir bei dem ursprünglich verwendeten Testmaterial, 50 Stämme aus Areal 631 Landeck, beobachten konnten. So fanden wir für Areal Nr. 2 nur ein B von 0,780 und bei Areal Nr. 7 von 0,773. Abgesehen davon, daß die einzelnen Koeffizienten, insbesondere b_2 (zugeordnet der Variablen

$$x_2 = \frac{h}{d^2},$$

für die einzelnen Areale mitunter recht unterschiedliche Werte annehmen, sind sie mit Ausnahme von b_2 des Areals Nr. 6 alle sehr gut gesichert von Null verschieden. Bei Verwendung dieses Materials (Areal Nr. 6) bringt die Hinzugabe von x_2 zu x_1 als weitere Variable keine nennenswerte Verbesserung der Anpassung der Funktion an das Material. Wir sehen daraus aber auch, daß die für ein bestimmtes Material festgestellten Statistiken eben nur für jenes Material gelten und annähernd ähnliche Ergebnisse nur für Material ähnlicher Struktur zu erwarten sind.

((Noch wesentlich deutlicher kommt dieser zu beachtende Umstand zum Ausdruck, wollten wir Funktionen mit relativ "schwachen" unabhängigen Variablen berechnen, so Funktion (1a) und (2a), siehe Tabelle Nr. 16. Dieser Übersicht können wir unter anderem entnehmen, daß beispielsweise die Variable

$$x_4 = \frac{l_k}{h}$$

nur bei Areal Nr. 3 (junges und relativ schwaches Material, gute Bonitäten) von entsprechender Bedeutung ist, denn $t_{b4} = 3,253$. Dies ist daher auch der einzige Fall, wo wir beim Übergang von der Funktion (2 a), "kleine schwedische Funktion", zur Funktion (1 a), "große schwedische Funktion", eine nennenswerte Verbesserung in der Anpassung erzielen könnten, nämlich $s_F\%$ von 6,5 % auf 6,2 %, bzw. B von 0,482 auf 0,534. In diesem Falle findet der Umstand auch Beachtung, daß durch Hinzunahme von x_4 die drei übrigen

Variablen an Bedeutung gewinnen; die Werte für t erhöhen sich.
Die Variable

$$x_3 = \frac{h}{d^2}$$

ist sowohl für (1a) und (2a) nur bei Areal Nr. 8 von entscheidender Bedeutung und verdient bei Areal Nr. 7 eine gewisse Beachtung. Gänzlich ungeeignete Funktionen (1a) und (2a) erhalten wir für Areal Nr. 4, siehe B und die Fehler, bzw. t -Werte der einzelnen Koeffizienten. Entsprechend unseren Maßstäben liefern beide Funktionen für Areal Nr. 2 keine zufriedenstellenden Resultate, denn die Werte für B unterschreiten die eingangs erwähnten Werte B_{erf} . Bei drei unabhängigen Variablen und einem Stichprobeumfang von $N = 100$ wäre $B_{\text{erf}} = 0,484$. Wir fanden indessen für Funktion (2a) ein $B = 0,341$ und für Funktion (1a) ein $B = 0,336$. Die relativ niedrigen t -Werte der einzelnen Koeffizienten geben uns in diesem Falle Auskunft darüber, warum wir nur eine so mäßige Anpassung der Funktionen an das Material erzielen konnten. Im übrigen fällt bei dieser Gegenüberstellung auch auf, daß die Fehler der Regressionskoeffizienten bei Funktion (2a) im Vergleich zu (1a) kleinere Werte annehmen und die Anpassung der Funktion an das Material bei Übergang von der Funktion (2a) zu (1a), also bei Hinzunahme von l_k/h als 4. Einflußvariable, mit Ausnahme von Areal Nr. 3, Nr. 5 und Nr. 8, verschlechtert wird. Dies ist auch nicht verwunderlich, denn nur für die letztgenannten Areale überschreiten die t -Werte der 4. Variablen zumindest den kritischen Grenzwert $t > 1$! (Siehe diesbezüglich JONES 1946.)

Berechnen wir nun für jedes Areal an Hand der für das gesamte Material ermittelten Funktion (14) die durchschnittliche Abweichung der beobachteten von den nach dieser gemeinsamen Funktion errechneten Formfaktoren (Beilage 15 b), so können wir feststellen, daß wir durchschnittlich nur sehr geringe systematische Abweichungen in Kauf zu nehmen hätten, wenn wir eine gemeinsame Funktion verwenden. Nur bei einer der 8 Gruppen, nämlich bei Areal Nr. 1, sind die beobachteten Formfaktoren im Durchschnitt um 1 % höher

$$(101,02 \% \quad \frac{f(b) \cdot 100}{f(e)})$$

als die aus der gemeinsamen Funktion errechneten. Betrachten wir die mittlere quadratische Abweichung der beobachteten von den errechneten Formfaktoren in Prozent ($s_F\%$), so können wir feststellen, daß wir eben bei diesem Material eine nennenswert bessere Anpassung der Funktion an das Material erzielen, wenn wir eine separate Funktion berechnen (Verbesserung des $s_F\%$ von 4,09 % auf 3,47 %), denn sowohl a wie b_2 sind sehr gut gesichert voneinander verschieden, die Überschreitungswahrscheinlichkeit ist

kleiner als 0,1 % (c bzw. t bei $P_{0,1} \% 3,29$). Separate Funktion (14) des Areals Nr. 1 gegen gemeinsame Funktion:

Δa	$s_{\Delta a}$	c_a	Δb_1	$s_{\Delta b_1}$	c_{b_1}	Δb_2	$s_{\Delta b_2}$	c_{b_2}
-0,0297	$^+0,00821$	3,61 xxx	+0,0370	$^+0,0294$	1,26	+0,0521	$^+0,0147$	3,54 xxx

Diesbezüglich steht Areal Nr. 6 mit einer Verbesserung des $s_F\%$ von 5,09 % auf 4,68 % an zweiter Stelle. Im Gegensatz zu Areal Nr. 1 hätten wir in diesem Falle mit Hilfe der gemeinsamen Funktion die Formfaktoren um nahezu 1 % (99,06 %) überschätzt. In gleicher Weise hätten wir Formfaktoren des Areals Nr. 5, Material ebenfalls aus plenterwaldartigen Beständen stammend, überschätzt und im Gegensatz dazu die Formfaktoren für Areal Nr. 3 sowie für Areal Nr. 1 unterschätzt.

Betrachten wir die Werte für Areal Nr. 1 und 3 gegenüber Areal Nr. 2 und 4, so drängt sich einem der Eindruck auf, daß wir mit Hilfe der gemeinsamen Funktion die Formfaktoren für gute oder sehr gute Bonitäten, egal ob es sich um relativ junges-schwaches oder relativ altes-starkes Material handelt, unterschätzen, während für mittlere bis schlechte Bonitäten, welche dem Hauptanteil dieses Materials entsprechen, die gemeinsame Funktion ähnliche Ergebnisse wie die separat berechneten Beziehungsgleichungen liefert. Wir erhielten aber durch diese Beobachtungen den Hinweis, daß wir nicht für verschiedene Wuchsgebiete, sondern für andere Gliederungen nach unterschiedlicher Anpassung des Materials an separat berechnete Funktionen zu suchen hätten; so etwa nach Altersklassen, oder besser noch nach Stärkeklassen oder auch Baumhöhenklassen (damit indirekt aber wieder zum gewissen Teil nach Altersklassen Alter und Bonität vermengt) zu gliedern hätten.

Diese Vermutung wird am augenfälligsten wohl dadurch bekräftigt, wenn wir eine Prüfung auf signifikante Unterschiede der Regressionskoeffizienten durchführen, so etwa für Areal Nr. 1 (sehr gute Bonitäten, alte Bestände, daher relativ starke und hohe Stämme) gegen Areal Nr. 3 (gute Bonitäten, junge Bestände, daher relativ schwache und im Vergleich zu Areal Nr. 1 niedrige Stämme). Wir finden für Areal Nr. 1 gegen Areal Nr. 3:

Δa	$s_{\Delta a}$	t_a	Δb_1	$s_{\Delta b_1}$	t_{b_1}	Δb_2	$s_{\Delta b_2}$	t_{b_2}
-0,0652	$^+0,00831$	7,85 xxx	+0,0650	$^+0,0416$	1,56	+0,0611	$^+0,0157$	3,89 xxx

(Grenzwerte für t bei $P_{5\%} = 1,97$, $P_{1\%} = 2,60$, $P_{0,1\%} = 3,34$, bei $FG = 200$). Für die Regressionskonstanten, wie für den Regressionskoeffizienten b_2 ergeben sich bei Funktion (14) für die beiden Areale sehr gut gesicherte Unterschiede, die Überschreitungswahrscheinlichkeit ist in beiden Fällen kleiner als 0,1 %. Es wird daher zweckvoll sein, separate Funktionen für nach Dimensionsklassen gegliedertes Material zu berechnen und in dieser Richtung nach systematischen Abweichungen zu suchen.

Nun noch ein Hinweis in bezug auf die Funktionen (17) und (22). Die für diese Funktionstypen berechneten Beziehungsgleichungen brachten für die 8 Areale ganz analoge Ergebnisse, es kann daher auf eine tabellarische Gegenüberstellung verzichtet werden. In Anbetracht späterer Vergleiche sei jedoch erwähnt, daß Funktion (17), wie auch Funktion (24),

$$f = a + b_1 \frac{d_{0,3h}}{d} + b_2 \frac{h}{d}$$

in allen Fällen, mit Ausnahme von Areal Nr. 6, gegenüber Funktion (14) eine geringfügig schlechtere Anpassung mit sich brachten, während Funktion (22), mit Ausnahme von Areal Nr. 4 (hohe Lagen, schlechte Bonitäten, vollformige Probestämme), bei allen übrigen Arealen und bei der Gesamtfunktion eine nicht unbedeutend bessere Anpassung als die Beziehungsgleichung vom Typ (14) mit sich brachte. Funktion (22) werden wir also künftig ein besonderes Augenmerk zuwenden müssen. Die an Hand des ursprünglich verwendeten Testmaterials (50 Stämme aus Areal Landeck) gemachten Beobachtungen, daß die Funktionen (17) und (24) schlechter und Funktion (22) besser als Funktion (14) seien, wurden, ganz allgemein gesehen, durch die Prüfung am Material der 8 Areale somit bestätigt.

Sehen wir uns nun einmal die Ergebnisse an, wenn wir das gesamte Material der 8 Areale nach Altersklassen gliedern und dafür separate Funktionen berechnen. Diese Betrachtungen führen wir wiederum an Hand der Funktion (14) durch (siehe Beilagen 17 a und 17 b), bemerken aber, daß wir bei den Altersklassen über 60 Jahre mit Funktion (22) gegenüber (14) eine geringfügig bessere Anpassung erzielen konnten, somit geringere systematische Abweichungen zu erwarten haben. Bis zum Alter 60 Jahre waren beide Funktionen gleichwertig. Die gemeinsame Funktion (22) fügte sich dem Material der einzelnen Altersklassen besser an, als dies bei der gemeinsamen Funktion (14) der Fall war. Die Werte

$$\Delta_{sF} = s_{F(g)} \% - s_{F(s)} \%$$

waren bei (22) niedriger als bei (14).

Gliedern wir das Testmaterial der 8 Areale nach Altersklassen, so fällt uns bei den separaten Funktionen für die einzelnen Altersklassen auf, daß die Werte der Konstanten, von den niederen

zu den höheren Altersklassen hin, eine abnehmende Tendenz und die Werte der beiden Regressionskoeffizienten eine zunehmende Tendenz aufweisen (siehe Beilage 17 a). Weiters finden die relativ niederen Werte t_{b2} bei der niedrigsten und der höchsten Altersgruppe eine gewisse Beachtung, obzwar wir hiebei zu bedenken haben, daß die Stammzahlen dieser Gruppen jeweils sehr niedrig waren. Weiters ist bemerkenswert, daß die Anpassung der Funktionen an das Material, von der höchsten zu den niederen Altersklassen hin, eine abnehmende Tendenz zeigt. Wir erzielen also bei älterem (stärkerem) Material eine wesentlich bessere Anpassung als bei jüngeren (relativ schwächeren) Probestämmen.

Aus Beilage 17 b können wir ersehen, daß wir sowohl bei der niedrigsten Altersklasse (27 40) als auch bei der höchsten Altersgruppe (161 280) mit Hilfe der gemeinsamen Funktion die Formfaktoren durchschnittlich um 1 % überschätzen würden. Bei diesen beiden Gruppen erzielen wir durch Berechnung separater Funktionen eine nennenswert bessere Anpassung an das Material der Gruppen, siehe $s_F(g)\%$ und $s_F(s)\%$ und deren Δ . Dieser Umstand läßt sich zum Teil wohl dadurch erklären, daß diese beiden Gruppen die beiden (jeweils schwach besetzten) Enden der Stammverteilung darstellen und somit relativ weit vom Mittel entfernt liegen. Wir werden also in bezug auf spezielle Verwendungszwecke gut daran tun, für relativ eng begrenzte Stammverteilungen, also für Gruppierungen mit nicht zu weit gesteckten Grenzen des Gruppierungsmerkmals, separate Funktionen gleichen Typs zu berechnen, sofern umfangreiches Probestammmaterial zu Verfügung steht. Eine derartige Maßnahme kann aber dann als nicht notwendig erachtet werden, wenn durch andere, etwa um weitere Variable ergänzte, elastischere Funktionen ohnedies ein hinreichender Ausgleich der Variation von f gewährleistet erscheint.

Ziehen wir nun als nächsten Schritt eine Gliederung des Materials nach Baumhöhenklassen zu Rate (Beilage 18 a und 18 b), so erkennen wir, daß die bei der Gruppierung nach Altersklassen festgestellten Tendenzen hinsichtlich a , b_1 , b_2 und B sich auch bei der Gruppierung nach Höhenklassen zeigen, wobei die letzte Gruppe (Baumhöhen über 35 m) aus nicht eruierten Gründen offenbar etwas aus der Reihe tanzt. Der Wert der prozentuellen mittleren quadratischen Abweichung der beobachteten Formfaktoren von den mit Hilfe der Funktion errechneten Formfaktoren ($s_F\%$) ist bei der Höhenklasse "bis 10 m" mit 5,98 % am höchsten, nimmt mit steigenden Höhenklassen ab und erreicht bei der Baumhöhenklasse "über 35 m" mit 3,56 % den tiefsten Wert dieser Gruppierung.

Der relativ hohe Wert von $s_F\%$ 5,98 im Vergleich zu $s_y\%$ 9,38 oder statt dessen insbesondere der niedrige Wert von B 0,594, welcher wohl gerade an der von uns gestellten Grenze der prak-

tischen Brauchbarkeit (B_{erf}) liegt, geben uns den Fingerzeig, daß dieser Funktionstyp (14) bei Anwendung eines strengen Maßstabes nicht in der Lage ist, die Formfaktoren von Probestämmen unter 10 m Baumhöhe in befriedigender Weise zu beschreiben. Dieser Umstand war in gleicher Weise bei Funktion (17) und (22) festzustellen.

Aus Beilage Nr. 18 b können wir ersehen, daß wir mit Hilfe von separaten Funktionen gegenüber einer gemeinsamen Funktion am unteren und am oberen Ende der in diesem Falle nach Baumhöhenklassen gegliederten Stammverteilung wesentlich kleinere $s_F\%$, somit aber auch eine bessere Anpassung, erzielen können. Diese Unterschiede kommen bei der Gliederung nach Baumhöhenklassen deutlicher zum Ausdruck als bei der nach Altersklassen.

In Beilage 19 a sind nun Statistiken des Funktionstyps (14) für Stärkeklassen festgehalten. Bei dieser Art der Zusammenstellung kommt in ganz eindeutiger Weise zum Ausdruck, daß mit dem Funktionstyp (14)

$$f = a + b_1 \frac{d^2 \cdot 0,3h}{d^2} + b_2 \frac{h}{d^2}$$

bei starkem Material die beste und bei schwachem Material die schlechteste Anpassung der Funktion an das Material zu erzielen ist.

Die prozentuelle mittlere quadratische Abweichung der beobachteten von den errechneten Formfaktoren ($s_F\%$) ist bei der Stärkeklasse "5,0 10,0 cm" mit 4,60 % am höchsten und erreicht bei der Stärkeklasse "über 50 cm" mit 3,50 % den niedrigsten Wert. In Analogie hiezu nimmt B bei der schwächsten Stärkeklasse einen Wert von 0,566 und bei der stärksten einen Wert von 0,866 an. Dies ist in erster Linie wohl darauf zurückzuführen, daß x_2 einen erheblichen Einfluß ausübt und bei den starken Stämmen am besten zur Geltung kommt. Die Werte von a nehmen von den schwächsten zu den stärksten Stämmen hin ab, während die Werte von b_1 und b_2 von der ersten bis zur fünften Stärkeklasse hin zunehmen. Was wir bereits bei der Gliederung nach Höhenklassen für Stämme bis 10 m Baumhöhe feststellen mußten, müssen wir nun, wie zu erwarten, in ähnlicher Weise für die Stärkenklasse bis 10 cm Brusthöhendurchmesser zur Kenntnis nehmen, daß nämlich Funktion (14) für schwache (niedrige) Stämme nicht in der Lage ist, eine unbedingt zufriedenstellende Anpassung zu bewirken. B 0,566 liegt bei dieser Durchmesserklasse an der Grenze der praktischen Bedeutsamkeit. Die zweite Einflußvariable

$$x_2 = \frac{h}{d^2}$$

ist, gemessen an dem Wert $t = 1,54$, bei derartigem Material kaum von nennenswerter Bedeutung in bezug auf die Anpassung.

Wenn wir an Stelle der gemeinsamen Funktion für die einzelnen Stärkeklassen separate Funktionen berechnen, erzielen wir erwartungsgemäß beim schwächsten und beim stärksten Material eine erheblich bessere Anpassung der Funktion an das Material. Mit der gemeinsamen Funktion hätten wir besonders bei der Stärkeklasse "über 50 cm" einen systematischen Fehler in Kauf nehmen müssen, wir hätten die Formfaktoren um rund 2 % überschätzt.

Nun erhebt sich die Frage, welche der Gliederungen des Materials im Zuge einer derartigen Untersuchung die zweckvollste ist. Nehmen wir nochmals der Reihe nach die Beilagen 17b, 18b und 19b zur Hand und vergleichen einerseits die für die einzelnen Klassen "beobachteten durchschnittlichen Formfaktoren" und andererseits die "mittleren quadratischen Abweichungen der beobachteten Formfaktoren von deren arithmetischen Mitteln".

Bei der Gliederung nach Altersklassen nehmen die arithmetischen Mittel von der niedrigsten zur höchsten Altersklasse ganz deutlich ab (0,536 0,423), die Standardabweichungen vom arithmetischen Mittel nehmen mit steigenden Altersklassen höhere Werte an. Bei der Gliederung nach Höhenklassen nehmen die Werte der beobachteten durchschnittlichen Formfaktoren von der niedrigsten zur höchsten Klasse noch deutlicher ab (0,569 0,419). Die Standardabweichungen nehmen, grob gesprochen, annähernd gleiche Werte für alle Klassen an.

Die deutlichste Gliederung ergibt sich nach Aufteilung in Stärkeklassen, mit dem höchsten Wert für das arithmetische Mittel von 0,582 bei der ersten Stärkeklasse und mit dem niedrigsten Wert von 0,404 bei der höchsten Stärkenklasse. Die Standardabweichungen sind im Vergleich zu den beiden anderen Gliederungen am niedrigsten. Daß ihr Wert von der ersten bis zur fünften Stärkeklasse hin zunimmt, ist wohl in erster Linie auf die nach oben hin zunehmenden Klassenbreiten zurückzuführen. Unbeschadet dieser Tatsache können wir feststellen, daß wir bei Gliederung nach Stärkeklassen in bezug auf die Formfaktoren zweifellos die homogensten, gleichwertigsten Gruppen erzielen. Welche Klassenbreiten man wählt, wird sich nach den praktischen Erfordernissen richten.

Wenn wir uns bei einem Probestammmaterial mit großer Spreitung der Merkmalswerte und mit Rücksicht auf eine relativ schlechte Wiedergabe der Formzahlwerte für das schwache und das starke Material (systematische Abweichungen) nicht mit einer gemeinsamen Funktion begnügen wollen, oder keine um weitere Variable erweiterte elastischere Beziehungsgleichungen zur Verfügung stehen, dann erscheint für die speziellen Zwecke einer möglichst individuellen fehlerfreien Massenbestimmung von Einzelbeständen die

Berechnung separater Funktionen gemäß einer Gliederung nach Stärkeklassen ein zweckvoller Weg zu sein. Man wird für solche Fälle, im Unterschied zur im Rahmen der vorliegenden Untersuchungen angewandten Abgrenzung, bei der Berechnung derartiger separater Funktionen, den Bereich des Berechnungsmaterials weiter stecken als den zu veranschlagenden Anwendungsbereich. (z. B.: Anwendungsbereiche (20,1 35,0) und (35,1 50,0) cm BHD, jedoch Berechnungsbereich etwa (15,1 40,0) und (30,1 55,0) cm BHD. Während die Anwendungsbereiche scharf abzugrenzen wären, sollen sich die zugrundegelegten Berechnungsbereiche nach Möglichkeit überlappen).

Mit Rücksicht auf die Genauigkeitsansprüche und die Forderungen nach einheitlicher Massen- aber auch Zuwachsermittlung, welche demgegenüber im Rahmen von allgemeinen Forst- bzw. Waldinventuren zu stellen sind, wird man sich in der Regel mit nur einer einzigen möglichst elastischen Funktion pro Baumart begnügen und entsprechend den persönlichen Empfehlungen von MATERN auf eine Untergliederung des Berechnungsmaterials und Erstellung verschiedener Funktionen verzichten. In diesem Sinne wird man ausgehend von einem bestimmten als wertvoll erkannten Funktionstyp, etwa von Funktion (22) durch Hinzunahme von neuen Einflußvariablen (so auch von weiteren aus bereits verwendeten Merkmalswerten gebildeten Variablen z. B.: $1/d$ oder $1/d^2$ und anderen Kombinationen) nach einer einzigen Beziehungsgleichung pro Baumart forschen, welche den geschmeidigsten Ausgleich der Variation der Formzahlen gewährleistet.

Soll jedoch ein bestimmter Typ einer Funktion auf zu erwartende systematische Abweichungen hin geprüft werden, so kann, abgesehen von direkten stärkeklassenweisen Vergleichen der berechneten mit den beobachteten Formfaktoren, im Zuge weiterer Untersuchungen, die diesem besonderen Zwecke dienen, durch Vergleiche einer gemeinsamen Funktion mit für Stärkeklassen separat berechneten Funktionen (gleicher Gestalt) ein geeigneter Einblick verschafft werden.

Bedenkt man, daß im allgemeinen verschieden alte Stämme gleicher Dimensionen (Brusthöhdurchmesser und Baumhöhen gleich) sich in der Formigkeit mitunter nicht unwesentlich unterscheiden (etwa junge herrschende Stämme bei guter Bonität, gegenüber alten beherrschten oder unterdrückten Bäumen minderer Bonität), so kann bei Vorliegen von genügend Probestammmaterial eine weitere Präzisierung der Gruppdefinition, also weitere Untergliederung (etwa Stärkeklassen noch untergliedert nach Altersklassen somit indirekt nach Bonitätsgruppen), eine Verfeinerung der Testung der Funktionen mit sich bringen. Nun wollen wir uns aber der

Funktion (22)

$$f = a + b_1 \frac{d_0,3h}{d} + b_2 \frac{h}{d^2}$$

zuwenden, für die wir bereits bei der Gliederung nach Arealen, Altersklassen und Höhenklassen eine etwas bessere Anpassung an das Material als für Funktion (14) beobachten konnten. Die Daten dieser Funktion sind, gegliedert nach Stärkeklassen, in den Beilagen 20 a und 20 b festgehalten und bieten uns an Hand der analogen Beilagen 19 a und 19 b für Funktion (14) eine Vergleichsmöglichkeit. Ein Vergleich der Werte $s_F\%$ und B weist uns darauf hin, daß wir, wie bereits erwähnt, mit Funktion (22) etwas bessere Resultate erzielen können. Bezüglich der Koeffizienten unterscheidet sich dieser Funktionstyp (22) vom Typ (14) insofern, als die Regressionskonstanten nunmehr das Vorzeichen "minus" und, entsprechend der anderen Gestalt der Funktion, auch die Regressionskoeffizienten b_1 andere Werte annehmen.

Die äußerst wirkungsvolle erste Variable in der Funktion (22) verfügt im Mittel über einen größeren Anteilswert als die erste Variable der Funktion (14), wobei überdies die Fehler der b_1 der Gleichung (22) im Durchschnitt etwas kleinere relative Werte annehmen, als die Fehler der b_1 der Gleichung (14), siehe Beilage 19 a und 20 a und nachfolgende Tabelle Nr. 3:

Tabelle Nr 3

Anteilswerte der einzelnen Glieder der Regressionsgleichungen, bezogen auf den durchschnittlichen Formfaktor:

$$\bar{y} = a + b_1 \cdot \bar{x}_1 + b_2 \cdot \bar{x}_2$$

Funktions- typ	\bar{y}		a		$b_1 \cdot \bar{x}_1$		$b_2 \cdot \bar{x}_2$	
	abs.	in %	abs.	in %	abs.	in %	abs.	in %
(14)	0,4913	100	+0,1221	24,8	+0,3497	71,2	+0,0195	4,0
(22)	0,4913	100	-0,2176	23,5	+0,6891	74,4	+0,0198	2,1 ⁺

⁺ Anmerkung: Da bei Gleichung (22) die Regressionskonstante einen Minuswert annimmt, werden die Anteilswerte in diesem Falle zu $\bar{y} + 2a$ und nicht zu \bar{y} ins Verhältnis gesetzt, um vergleichbare %-Werte zu erhalten).

Die relativ höhere Wirksamkeit der ersten unabhängigen Variablen der Funktion (22) gegenüber der analogen Variablen von (14), bei gleich großem oder eher kleinerem Fehler des Regressionskoeffizienten, spricht für eine allgemeine Verwendung dieser Beziehungsgleichung als solche oder als Grundtyp für um zusätzliche Variable

erweiterte Funktionen.

Daß mit dieser Funktion ganz allgemein eine bessere Anpassung an das Material zu erzielen ist, zeigt wohl auch der Umstand, daß geringere Abweichungen zu verzeichnen sind, wenn wir gegenüber separaten Funktionen für die einzelnen Gruppen an Hand einer gemeinsamen Funktion die Formfaktoren berechnen. Dies zeigt sich am deutlichsten an den Werten Δ_{sF} $s_{F(g)}\%$ $s_{F(s)}\%$. (Siehe Beilage 20 b im Vergleich zu 19 b). Insbesondere bei der höchsten Stärkeklasse wirkt sich die Verwendung der gemeinsamen Funktion (22) gegenüber einer separaten Funktion nicht so nachteilig aus wie bei Funktion (14); $\Delta_{sF} = 0,37$ bei (22) gegenüber $\Delta_{sF} = 0,66$ bei (14).

(Um zu zeigen, wie sehr es darauf ankommt, eine Funktion nur innerhalb jener Grenzen zu verwenden, innerhalb welcher das den Berechnungen zugrunde gelegte Material liegt, werden als Beispiel die Formfaktoren der einzelnen Stärkeklassen mit Hilfe der für die Stärkeklasse 10,1 20,0 cm ermittelten Funktion (22) berechnet und die ermittelten Abweichungen im Vergleich zu den bei Verwendung der gemeinsamen Funktion welche ja alle Stärkeklassen umfaßt registrierte Abweichungen in Beilage 20 c festgehalten. Mit der Beziehungsgleichung der Stärkeklasse 2 würden wir die Formfaktoren aller anderen Stärkeklassen ganz erheblich überschätzen. Sogar bei den unmittelbar angrenzenden Stärkeklassen würden wir bei Verwendung der für die 2. Stärkeklasse berechneten Funktion ganz erhebliche Fehler begehen. Davon abgesehen würden bei den entfernter liegenden Stärkeklassen die Fehler nicht mehr vertretbare Ausmaße annehmen).

Da wir mit Funktion (17) bzw. auch (24) im allgemeinen keine Verbesserungen erzielen konnten (auf eine tabellarische Gegenüberstellung und Analyse der mit diesen Funktionen erzielten Ergebnisse sei daher verzichtet), bleibt wider den ursprünglichen Erwartungen Funktion (22)

$$f = a + b_1 \frac{d_0,3h}{d} + b_2 \frac{h}{d^2}$$

auch gegenüber der ursprünglich favorisierten Funktion (14) als jene elastischere Funktion übrig, welche in ihrer vorliegenden Gestalt oder um weitere Variable ergänzte Beziehungsgleichung am besten geeignet sein könnte, die Brusthöhenformfaktoren von Fichte einzelstämmen ohne erhebliche systematische Fehler zu beschreiben. Für die Zwecke von Waldinventuren, so etwa auch für die Zwecke der Österreichischen Forstinventur, würden damit aber auch die besten "Schätzungen" der Volumina der Einzelstämmen mit Hilfe der aus dieser oder erweiterten Schaftformfunktionen abgeleiteten Volums- bzw. Kubierungsgleichungen ermöglicht werden.

Multiplizieren wir die Schaffformfunktion (22) mit

$$d^2 \cdot h \cdot \frac{\pi}{4},$$

so erhalten wir die entsprechende Volumes- bzw. Kubierungsgleichung von der allgemeinen Gestalt

$$v = a \cdot d^2 \cdot h + b_1 d \cdot h \cdot d_{0,3h} + b_2 h^2$$

(wobei $a = a \frac{\pi}{4}$, $b_1 = b_1 \frac{\pi}{4}$ usw.)

Auf Grund der Erkenntnisse dieser Arbeit wird es eine weitere Aufgabe sein, unter Zugrundelegung des gesamten aus allen Teilen Österreichs gesammelten Fichtenprobestammmaterials und in gleicher Weise des Probestammmaterials der übrigen Wirtschaftsbaumarten für die Berechnung und Testung derartiger Form- bzw. Kubierungsfunktionen heranzuziehen, welche dann die endgültigen Grundlagen für die Vorratsberechnungen der Österreichischen Forstinventur bilden sollen. Entsprechend den bereits erwähnten Empfehlungen von MATERN ist hiebei an je eine möglichst elastische Funktion pro Baumart und pro Art des Formfaktors (z. B. bezogen auf Schaffmasse mit Rinde oder Schaffmasse ohne Rinde) zu denken.

(In bezug auf ertragskundliche Aspekte wäre es zweifellos von Interesse, wenn man in einer weiteren Untersuchung nach bonitätsbedingten Verschiedenheiten oder, unter anderen Gesichtspunkten, nach Unterschieden in der Ausbildung der Form suchen wollte, welche sich bei Vergleichen analoger Gruppen von Probestammmaterial auch in den für die unechte Schaffholzformzahl errechneten Werten widerspiegeln. So könnte man daran denken, umfangreiches Probestammmaterial nach Bonitätsklassen zu gliedern und nunmehr innerhalb der einzelnen Klassen, etwa getrennt nach Stärkestufen oder auch Stärkeklassen, Funktionen von Typ (22), (14) oder besser noch vom Typ (38) bzw. (38a) berechnen. Eine Gegenüberstellung der für verschiedene Bonitätsklassen ermittelten Statistiken vergleichbarer Stärkestufen oder eben Stärkeklassen könnte Hinweise in bezug auf unterschiedliche Ausbildung der Form, bzw. hinsichtlich gesetzmäßiger Unterschiede der Formfaktoren erbringen.

In gleicher Weise könnte das Probestammmaterial etwa nach Altersklassen gegliedert werden und für nach Stärkestufen und Baumhöhenstufen gebildete Untergruppen oder für Untergruppen, welche nach Berücksichtigung eines der beiden Merkmale gebildet wurde, Funktionen gleicher Gestalt berechnet werden und für derartige Gruppierungen nach gesetzmäßigen Unterschieden in bezug auf die Formfaktoren geforscht werden).

Es ist etwas enttäuschend, daß diese Grundtypen von Formfunktionen (22), (14) usw. nicht in der Lage sind, die Formfaktoren schwachen Materials in unbedingt befriedigender Weise zu beschreiben. Es wird daher angebracht sein, besonders mit Rücksicht auf das schwache Material (etwa bis zu einem Brusthöhendurchmesser von 10 oder besser noch 15 cm) andere Funktionen zu erproben. Da die Österreichische Forstinventur die Kluppschwelle mit 10 cm festgelegt hat, ist die Prüfung dieser Frage nicht vor-dringlich. Zweifellos bessere Resultate würde man für spezielle Zwecke (Formzahl- bzw. Massenbestimmung von Einzelbeständen) wohl erzielen, wenn man bei schwachem Stammmaterial an Stelle des $d_{0,3h}$ den $d_{0,5h}$ verwendet; $s_F\%$ und B würden durch günstigere Werte dann eine bessere Anpassung der Funktion an das Material anzeigen. Die zweite Variable h/d^2 könnte wegen zu geringer Wirksamkeit bei fallweise notwendiger gesonderter Behandlung von schwachem Stammmaterial vernachlässigt werden. Es würde also in Analogie zu (22) etwa folgende Funktion mutmaßlich ein günstiges Resultat liefern:

$$f = a + b_1 \frac{d_{0,5h}}{d}$$

Die daraus abgeleitete Volumsfunktion für schwaches Material würde dann lauten:

$$v = a \cdot d^2 h + b_1 \cdot d \cdot h \cdot d_{0,5h}$$

Zum Abschluß dieses Abschnittes noch ein Blick auf die für er-tragskundliche Untersuchungen eventuell interessante Funktion (38) mit den Eingangswerten d , h , $d_{0,1h}$, $d_{0,3h}$ und $d_{0,5h}$.

Im Zuge einer ertragskundlichen Untersuchung wurden für das "Zillertal" Funktionen für die Stärkeklassen 5,0 20,0, 20,1 35,0 und über 35,0 sowie für das gesamte Probestammmaterial, gemäß den Funktionstypen (14), (22) und (38), berechnet. Die Statistiken sind in Beilage Nr. 21 festgehalten.

Abermals zeigt sich, daß die Funktion (22), abgesehen vom schwachen Material, der Funktion (14), überlegen ist. Eine sehr beachtliche Verbesserung der Anpassung erzielen wir durch Übergang von Funktion (14) auf (38), nämlich durch Hinzunahme der Einflußvariablen

$$\frac{d_{0,1h} \cdot d_{0,5h}}{d^2}$$

An Hand dieses Materials zeigte sich bei allen drei Funktionen sehr deutlich, daß die Variable h/d^2 nur bei starkem Material von Be-lang ist. Bei schwachem Material zeigt sie in diesem Falle bei (38)

keinen nennenswerten Einfluß, bei (14) und (22) hingegen muß sie bei schwachen Probestämmen sogar als unerwünscht betrachtet werden. Man beachte die Werte für t_{b2} , welche erheblich unter 1,0 liegen.

Würde man, entsprechend den mit Funktion (14) und (22) gemachten Erfahrungen, zu Funktion (22) die Einflußvariable

$$\frac{d_{0,1h} \cdot d_{0,5h}}{d^2}$$

hinzunehmen, so würde man in diesem Falle, wie die an diesem Material durchgeführten Untersuchungen zeigten, sicherlich die gleiche Anpassung an das Material wie mit Funktion (38) erzielen. Ähnliche Ergebnisse, jedoch eine etwas niedrigere Bestimmtheit, wären zu erwarten, wenn wir unter bestimmten Voraussetzungen eine Funktion ohne $d_{0,1h}$ wählen, z. B. Funktion (40)

$$f = a + b_1 \frac{d_{0,3h}^2}{d^2} + b_2 \frac{d_{0,5h}^2}{d^2} + b_3 \frac{h}{d^2}$$

Zusammenfassend können wir also feststellen, daß es prinzipiell empfehlenswert ist, jedes Probestammmaterial in Gruppen, am besten nach Stärkeklassen, zu gliedern und die in Erwägung zu ziehenden Funktionen an diesen Probestammgruppen zu testen. Bei allgemeiner Verwendung für Waldinventuren und insbesondere für die Anwendung bei der Österreichischen Forstinventur wird man pro Baumart jedoch nur eine für alle Stärkeklassen geltende gemeinsame möglichst anpassungsfähige Funktion auswählen. Gemäß den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit wird man zumindest für die Baumart Fichte die Formfunktion des Types (22)

$$f = a + b_1 \frac{d_{0,3h}}{d} + b_2 \frac{h}{d^2}$$

und die daraus abgeleitete Kubierungsfunktion

$$v = a \cdot d^2 \cdot h + b_1 d \cdot h \cdot d_{0,3h} + b_2 \cdot h^2$$

in die engere Wahl aufnehmen. Diese Funktionen als solche, aber mehr noch Funktionen, welche ausgehend von diesen Grundtypen durch Hinzugabe von weiteren geeigneten Variablen gefunden werden, versprechen bezüglich der Anpassung an das jeweilige Material gute Erfolge.

Für die speziellen Zwecke einer individuellen Form- bzw. Massenbestimmung von Einzelbeständen könnten nach Stärkeklassen gegliederte separate Form- bzw. Volumsfunktionen berechnet werden.

Bei vorgesehener alleiniger Formzahl- und Massenbestimmung schwacher Einzelbestände, demnach für schwaches Probestammmaterial, etwa bis 15 cm Brusthöhendurchmesser, kann die Berechnung einer Formfunktion

$$(34 a) f = a + b_1 \frac{d_{0,5h}}{d}$$

(verkürzte Gleichung der Formfunktion von KUNZE bzw. SCHIFFEL), bzw. die Ermittlung der entsprechenden Volumsfunktion

$$v = a d^2 h + b_1 \cdot d \cdot h \cdot d_{0,5h}$$

in Erwägung gezogen werden.

Hingegen erscheint etwa für spezielle ertragskundliche Untersuchungen für Fichte die erweiterte Formfunktion (38)

$$(38) f = a + b_1 \frac{d_{0,3h}^2}{d^2} + b_2 \frac{d_{0,1h} \cdot d_{0,5h}}{d^2} + b_3 \frac{h}{d^2}$$

bei mittlerem und starkem Probestammmaterial und eine Formfunktion

$$(38 a) f = a + b_1 \frac{d_{0,3h}^2}{d^2} + b_2 \frac{d_{0,1h} \cdot d_{0,5h}}{d^2}$$

für schwaches Material von Vorteil.

(An Stelle des Quotienten

$$\frac{d_{0,3h}^2}{d^2}$$

könnte bei diesen beiden Formfunktionen der Quotient

$$\frac{d_{0,3h}}{d}$$

treten). Die entsprechenden aus den obigen Formfunktionen abgeleiteten Volums- bzw. Kubierungsfunktionen würden lauten:

$$v = a \cdot d^2 \cdot h + b_1 \cdot h \cdot d_{0,3h}^2 + b_2 \cdot h \cdot d_{0,1h} \cdot d_{0,5h} + b_3 \cdot h^2$$

$$v = a \cdot d^2 \cdot h + b_1 \cdot h \cdot d_{0,3h}^2 + b_2 \cdot h \cdot d_{0,1h} \cdot d_{0,5h}$$

5 AUSBlick AUf DIE BRaUCHBARKEIT DIE- SER AUSGEWÄHLTEN SPEZIELLEN FORM- BZW. KUBIERUNGSFUNKTIONEN HINSICHT- LICH ANDERER BAUMARTEN

Die aus dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse wurden lediglich aus den mit Fichtenprobestammmaterial angestellten Studien erschöpft. Lassen sich nun diese für Fichte erarbeiteten Erkenntnisse insbesondere bezüglich des Funktionstyps (22), auch auf andere Baumarten übertragen? Erinnern wir uns in dieser Hinsicht der im Abschnitt 4.2 zitierten Beziehungsgleichungen, welche SCHIFFEL in seinen hervorragenden Arbeiten für Lärche, Kiefer und Tanne gefunden hat, so können wir durch Vergleiche der einzelnen Koeffizienten mit den analogen Koeffizienten der von uns für Fichte (Areal Landeck) berechneten Funktion (35) wohl schließen, daß ähnliche Funktionssysteme mit gleichem oder annähernd gleichem Erfolg auch für andere Baumarten, insbesondere für Nadelbaumarten, aber auch für Laubbaumarten mit durchlaufendem Schaft, Anwendung finden können. Für die Zwecke der Österreichischen Forstinventur denken wir hiebei, gemäß den an Fichtenprobestammmaterial gesammelten Erfahrungen, in erster Linie an den Funktionstyp (22), womit nicht gesagt ist, daß andere Beziehungsgleichungen, so Gleichung (14) oder (19) und weitere auf diesen grundsätzlichen Typen aufbauende Funktionssysteme anlässlich einer Prüfung nicht doch auch auf ihre Brauchbarkeit hin an anderen Baumarten untersucht werden sollten.

Bedenken wir, daß sich etwa die Lärche, die Kiefer, die Schwarzkiefer ab einem gewissen Alter durch die Bildung einer dicken Borke im unteren Schaftteil auszeichnen, so liegt der Gedanke nahe, für diese Baumarten anstelle der Einflußvariablen h/d^2 oder zusätzlich zu dieser eine unabhängige Variable, etwa die Rindenstärke oder das Verhältnis r/d oder eine andere Variable, welche mit der Rindenstärke im Zusammenhang steht, in die entsprechenden Beziehungsgleichungen aufzunehmen. Eine derartige Maßnahme könnte besonders dann von Bedeutung sein, wenn wir zwar die Eingangswerte d und $d_{0,3h}$ am stehenden Stamm "mit Rinde" bestimmen, jedoch sie in einer Gleichung mit v bzw. f "ohne Rinde" in Beziehung setzen, wir also Funktionen zur Ermittlung der "Schaftmasse ohne Rinde" berechnen wollen.

Es besteht kein Grund, daran zu zweifeln, daß derartige "Obere-Durchmesserfunktionen", welche der Ermittlung der Schaftholzmasse bzw. der Schaftholzformzahl (genauer genommen der Ermittlung von Äquivalenten dieser Werte) dienen, nicht auch für Laubbaumarten mit durchgehendem Schaft günstige Resultate ergeben könnten. Ja selbst für Laubbäume, welche sich erst in der oberen Stamm-

hälfte (zumindest aber oberhalb von $0,3h$) gabeln oder verzweigen, müßte die Bestimmung von Äquivalenten der "Schaftholzmasse" bzw. der "Schaftholzformzahl" mit Hilfe von Beziehungsgleichungen, welche $d_{0,3h}$ als veränderlichen Merkmalswert in unabhängigen Variablen aufweisen, akzeptable Ergebnisse mit sich bringen.

Bei den Laubbaumarten könnte es von Vorteil sein, wenn man das zu untersuchende Material, entsprechend der Gabelung bzw. Verzweigung, gliedert und dementsprechend verschiedene Typen von Funktionen testet oder auch gegebenenfalls separate Funktionen erprobt. ((A) durchlaufende Schäfte oder Gabelung bzw. starke Verzweigung erst oberhalb von $0,7$ der Baumhöhe, B) Gabelung bzw. starke Äste bereits im Bereich zwischen $0,5h$ und $0,7h$, C) Gabelung bzw. starke Äste bereits zwischen $0,3h$ und $0,5h$ vorhanden. Für "Protzen", welche bereits unterhalb $0,3h$ starke Äste aufweisen, wird es wohl ganz allgemein kaum gelingen, für Äquivalente der Schaftholzmasse bzw. der Schaftholzformzahl geeignete Funktionen zu finden.)) Bei der Berechnung von Laubholzfunktionen wird es wohl zweckmäßig sein, neben d , h und $d_{0,3h}$ verschiedene meßbare Kronenmerkmale als Eingangswerte bzw. Einflußvariable zu erproben.

6 PRAKTISCHE ANWENDBARKEIT DIESER FORM- BZW. KUBIERUNGSFUNKTIONEN IN PRAXIS UND FORSCHUNG

Mit Rücksicht auf den primären Zweck dieser Arbeit, nämlich für die Österreichische Forstinventur eine Massenermittlungsmethode zu entwickeln, welche in der Lage ist, den wahren Holzvorräten möglichst nahekommende Werte zu liefern, wollen wir die praktische Anwendbarkeit der entwickelten Form- bzw. Kubierungsfunktionen in erster Linie unter diesen Gesichtspunkten prüfen.

6.1 Prinzipielle methodische Fehler bei Anwendung von Form- bzw. Kubierungsfunktionen

Bei der Österreichischen Forstinventur siehe Instruktion der Österreichischen Forstinventur (1961) ist in ihrer gegenwärtigen Form vorgesehen, daß alle Stämme, die auf den "variablen Probeflächen" (Winkelzählprobe, Zählfaktor 4) ausgezählt werden, gleichzeitig auch als Probestämme zu gelten haben. Von jedem Stamm werden somit, neben der Angabe von Klassifikationsmerkmalen, der Brusthöhendurchmesser d , die Baumhöhe h und der obere Durchmesser $d_{0,3h}$ und andere Merkmalswerte gemessen. Es werden somit die massenbildenden Komponenten, die Kreisflächen, die Baumhöhen, die Schafformen nicht in methodisch getrennten Verfahren bzw. in räumlich und zeitlich getrennten Vorgängen ermittelt, sondern die Massen der Probeflächen bzw. der Trakte (Aufnahmeeinheit, die mehrere Probeflächen umfaßt) direkt in einem Vorgang aus den Einzelstammmassen hergeleitet. Es erübrigt sich somit, Höhenkurven zu entwickeln und daraus die Höhen, etwa für die verschiedenen Klassenmittelstämme, abzuleiten, bzw. weiters für die Klassenmittelstämme die mittleren Formfaktoren zu errechnen. Bei dieser Art der Massenermittlung werden somit die Eingangsgrößen d und h direkt ermittelt und sind frei von methodischen Fehlern, lediglich f wird indirekt bestimmt, und zwar behaftet mit dem methodischen Fehler, dem wir unter dem Symbol s_F bzw. $s_F\%$ vielfach bereits begegnet sind, wenn es galt, die Anpassung einer Funktion an das jeweils zugrunde gelegte Probestammmaterial zu prüfen. Das Fehlerprozent der Schaftholzmasse ist also gleich dem der Schaftholzformzahl, welche wir mit Hilfe einer Formfunktion ermittelt haben, denn nach TISCHENDORF (1925) können wir das Fehlerprozent der Masse in folgender Weise den Fehlerprozenten der Teilgrößen gleichsetzen: wenn

$$v = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot h \cdot f,$$

dann ist der mittlere Fehler der Masse gleich:

$$m_v = v \sqrt{\frac{4 m_d^2}{d^2} + \frac{m_h^2}{h^2} + \frac{m_f^2}{f^2}}.$$

Da wir d und h , wie wir bereits festgehalten haben, methodisch einwandfrei ermitteln (Unsicherheiten, Meßfehler in der Kreisflächen- und Höhenermittlung können wir in diesem Zusammenhang außer Betracht lassen, sie sind vermeidbar und haben mit der Methodik der Massenbestimmung an sich nichts zu tun), können die Fehleranteile oder die Fehlerprozente der beiden Teilgrößen, Kreisfläche bzw. "doppelter Durchmesser" und Höhe, unberücksichtigt bleiben, die Fehlerformel der Masse reduziert sich auf:

$$m_v = v \sqrt{\frac{m_f^2}{f^2}} \text{ bzw. } p_v = p_f \left(\text{da } p_v = \frac{m_v \cdot 100}{v} = \frac{m_f \cdot 100}{f} = p_f \right)$$

Der Fehler der Massenerhebung hängt demnach nur von der Standardabweichung der f -Werte von der betreffenden Formfunktion ab (m_f entspricht dem bisher verwendeten Symbol s_F). Durch eine gesteigerte Anzahl von Beobachtungen sind wir in die Lage versetzt, die mittlere Abweichung der einzelnen f -Werte bzw. der v -Werte von der betreffenden Funktion auf den mittleren Fehler des Mittels aus vielen Beobachtungen herabzudrücken, gemäß der Formel

$$\hat{p}_f = \sqrt{\frac{p_f^2}{n}}, \text{ bzw. auch } \hat{p}_v = \sqrt{\frac{p_f^2}{n}},$$

da ja $p_v = p_f$. Wäre beispielsweise eine Einzelbeobachtung von f mit einem mittleren Fehler von $\pm 5\%$ behaftet, so würde durch 25 Beobachtungen (25 Probestämme) ein $\hat{p}_v = \pm 1\%$ resultieren, durch 2500 Beobachtungen ein $\hat{p}_v = \pm 0,1\%$. Selbst die auf den einzelnen Probestämmen ermittelten Massen werden demnach eine relativ hohe Genauigkeit aufweisen, ganz abgesehen von den mit großer Genauigkeit ermittelten Massen der einzelnen Regionen oder gar des Bundesgebietes.

Diese Feststellung in bezug auf die hohe erzielbare Genauigkeit in der Massenermittlung wird wohl zu Überlegungen Anlaß geben, ob die Österreichische Forstinventur in einer späteren Erhebungsphase nicht etwa dazu übergehen sollte, lediglich die Kreisfläche auf einer großen Zahl von Probeflächen zu ermitteln, die zuzuordnenden Formzahlen und Höhen bzw. die Massen jedoch nur auf einem Teil dieser Probeflächen zu erheben. Überlegungen in bezug auf die Stichprobengenauigkeit bzw. den erzielbaren oder anzustrebenden Repräsentationsfehler im Verein mit Überlegungen in bezug auf unterschiedlichen Zeitaufwand werden die Maßstäbe für das günstigste Verhältnis Kreisflächenproben zu Massenprobeflächen geben.

Diese Feststellung, daß der methodische Fehler der Massenermittlung bei der Österreichischen Forstinventur mit Rücksicht auf die große Zahl der Probeflächen und damit der Probestämme (bzw. der

Einzelbeobachtungen) so gering ist, daß er überhaupt nicht ins Gewicht fällt, wir also den "wahren Vorratswerten" sehr nahe kommende Werte ermitteln, hat nur dann Gültigkeit, wenn wir zur Berechnung der Einzelstammmassen die Kubierungsfunktionen (analog den Formfunktionen) nur innerhalb der Bereiche der Merkmalswerte verwenden, innerhalb derer wir die Funktion berechnet haben, also nur im Bereich jener Grundgesamtheit, für die wir aus einer entsprechend großen Stichprobe unsere Beziehungsgleichung hergeleitet haben. ((Diese Einschränkung würde insbesondere für den Funktionstyp (2 a) - "kleine schwedische Formfunktion" und nur in stark abzuschwächendem Maße auch für den Typ (22) - "obere Durchmesserfunktion" als zutreffend zu betrachten sein.)) Würden wir nun etwa für die Baumart Fichte unter Einbeziehung aller rund 10.000 Probestämme, welche im Zuge von Kahlhieben, Plenterhieben, Einzelstammnutzungen und Durchforstungen aus allen Teilen Österreichs, somit aus allen Bestandestypen, Altersklassen, Bonitätsklassen usw. gesammelt wurden, eine einzige Form- bzw. Kubierungsfunktion, etwa vom Typ (2 a) oder auch vom Typ (22), berechnen, so hätte diese uneingeschränkte Gültigkeit für dieses Material. Sie könnte auch ohne Bedenken für die Massenberechnungen der Einschlagsinventur (für diese "Anwendungsgesamtheit") Anwendung finden, unter der Voraussetzung, daß die ausschlaggebenden Merkmale d , h und $d_{0,3h}$ bzw. die Quotienten

$$\frac{d_{0,3h}}{d} \text{ und } \frac{h}{d^2}$$

und vor allem f die gleichen Verteilungen aufweisen wie innerhalb der "Berechnungsgesamtheit".

Abgesehen von der Tatsache, daß derartige arithmetische Funktionen auch in bezug auf die "Berechnungsgesamtheit" im zentralen Bereich der Merkmalsverteilungen wohl gute Resultate liefern, müssen in den Randbereichen bei einfachen Funktionen jedoch beachtliche und bei "oberen Durchmesserfunktionen" geringe einseitige Abweichungen in Kauf genommen werden (bedingt dadurch, daß Beziehungen zwischen der Bezugs- und einzelnen Einflußvariablen nur bedingt linear beschrieben werden können, z. B. Beziehung f zu h/d^2). Diese Abweichungen werden umso größer, je größer die Spreitungen der Merkmalswerte bzw. der Einflußvariablen sind. Dieser Umstand veranlaßte uns, wie wir im Abschnitt 4.3 gesehen haben, das Material in homogenere Untergruppen (am zweckmäßigsten Stärkeklassen) zu gliedern und neben einer gemeinsamen Funktion für jede dieser Teilgesamtheiten separate Funktionen des gleichen Typs zu berechnen und auf diese Weise die Anpassungsfähigkeit des betreffenden Funktionstyps zu prüfen. Diese Tatsache, daß die Verteilungen der Merkmalswerte bzw. der Einflußvariablen sowie der Bezugsvariablen innerhalb der "Berechnungsgesamtheit" in keiner Weise den analogen Verteilungen innerhalb der "Anwendungsgesamt-

heit" entsprechen, erzwingt meines Erachtens überdies zumindest für die Zwecke der Anwendung bei einmaligen bestandesindividuellen Massenaufnahmen von Einzelbeständen, somit im Interesse einer "Erfassung des (effektiven) Tatbestandes" KRENN (1944), eine adäquate Untergliederung der Berechnungsgesamtheit und der Anwendungsgesamtheit.

Halten wir uns zur Illustration dieses Umstandes vor Augen, daß innerhalb der Berechnungsgesamtheit die starken Stämme (die Probestämme wurden im Zuge von Fällungen gewonnen) im Verhältnis zu den schwachen Stämmen in größerer Anzahl vertreten sind, als dies der Häufigkeitsverteilung innerhalb der Anwendungsgesamtheit (dem stehenden Vorrat) entspricht, so wird uns sofort klar, daß diese beiden Gesamtheiten einander nicht entsprechen.

Gliedern wir jedoch das gesamte den Funktionsberechnungen unterstellte Probestammmaterial in Teilstichproben (Teilgesamtheiten), etwa nach Stärkeklassen, innerhalb nicht zu großer Klassenabstände, so sind wir wohl berechtigt anzunehmen, daß die Häufigkeitsverteilungen der ausschlaggebenden Merkmalswerte bzw. Einflußvariablen und der Bezugsvariablen den entsprechenden Häufigkeitsverteilungen der Anwendungsteilgesamtheiten weitgehend adäquat sind.

Wollen wir also, in Anbetracht hoher Genauigkeitsforderungen, welche bei speziellen bestandesindividuellen einmaligen Massenaufnahmen von Einzelbeständen im Sinne einer Erfassung des effektiven Tatsachenbestandes zu veranschlagen wären, methodisch systematische Fehler, das heißt einseitige Abweichungen, vermeiden, dann ist es bei Verwendung arithmetischer Formfunktionen, etwa vom Typ (22) und (14), wohl notwendig, das Grundlagenmaterial nach geeigneten Gruppen, zweckmäßigerweise nach Stärkeklassen, zu gliedern, für jede Gruppe eine separate Formfunktion gleichen Typs zu berechnen und die daraus abgeleiteten separaten Kubierungsfunktionen nur innerhalb adäquater Gruppen der "Anwendungsgesamtheit" zur Massenberechnung heranzuziehen.

Denkt man daran, derartige Volumsfunktionen auch bei Stichprobenerhebungen in der Forsteinrichtung zu verwenden, dann kann es mit Rücksicht auf räumliche und zeitliche Gegenüberstellungen bzw. Vergleiche, besonders aber in bezug auf Zuwachsermittlungen, welche sich zweier zeitlich aufeinanderfolgender Masseninventuren bedienen, jedoch von Vorteil sein, wenn man sich anstelle separater Funktionen einer gemeinsamen Kubierungsfunktion bedient, um in solchen Fällen jene Art von systematischen Fehlern zu vermeiden, welche sich bis zu einem gewissen nicht zu vermeidenden Maße beim Übergang von einem Dimensionsbereich (etwa Stärkeklasse) zum nächst höheren einstellen würden. Im Interesse solcher Anwendungsmöglichkeiten und im Hinblick auf die Verwendung bei Massen-, Zu-

wachs- und Einschlagsinventuren einer Großraumstichprobeerhebung wird man bemüht sein, mit einer einzigen und daher möglichst elastischen Form- bzw. Kubierungsfunktion pro Baumart das Auslangen zu finden (auch auf die Gefahr hin, daß eine derartige Funktion durch ihre relativ große Zahl an Variablen, welche zwar als Kombinationen weniger greifbarer Merkmalswerte - etwa d , h , h_k oder $d_{0,3h}$ - gebildet wurden, für die praktische Verwendung unhandlich erscheinen mag. Steht jedoch für die Auswertung einer Waldinventur eine Rechenanlage zur Verfügung, verliert selbst dieser Einwand seine Bedeutung.)

Wird die Anwendung arithmetischer Form- bzw. Kubierungsfunktionen für ertragskundliche Untersuchungen bei vergleichenden Formzahl- und Massenleistungsstudien in Erwägung gezogen, dann mag eine weitere Untergliederung des nach Stärkeklassen gegliederten Berechnungs- und des Anwendungsmaterials von Vorteil sein, so zum Beispiel nach Höhen- bzw. Bonitätsstufen oder nach Merkmalen, die mit der Voll- bzw. Abholzigkeit der Schäfte in gewissem Zusammenhang stehen. Ob nun tatsächlich eine weitere Untergliederung in solchen Fällen Vorteile mit sich bringt und nach welchen Gesichtspunkten sie erfolgen könnte, müßten weitere Untersuchungen erbringen.

6.2 Durch Meßfehler in den Eingangswerten hervorgerufene Abweichungen der mit Hilfe von Funktionen berechneten Formfaktoren bzw. Massen

Bis hierher haben wir vorausgesetzt, daß sämtliche Merkmalswerte, die in Beziehung zur Schaftformzahl bzw. zur Schaftholzmasse stehen, mit einwandfreien Instrumenten und frei von einseitigen Beobachtungsfehlern ermittelt werden. Wenn wir an eine praktische Anwendung von Form- bzw. Kubierungsfunktionen, etwa von der Art des Types (22), für die Zwecke der Österreichischen Forstinventur oder für Stichprobeverfahren in der Forsteinrichtung denken, so mag es zweifellos nicht minder von Interesse sein, wenn wir nach der Diskussion über methodische Fehler nun einmal feststellen, wie sich einseitige, also systematische Meßfehler, welche sich bei der Bestimmung der verwendeten Merkmalswerte d , $d_{0,3h}$ und h unter Umständen einschleichen, auf die Formzahl- bzw. Volumbestimmung mit Hilfe derartiger Funktionen auswirken. Die nachfolgenden Tabellen Nr. 4 und Nr. 5 geben darüber Aufschluß, wie sich die prozentuellen Meßfehler der verwendeten Eingangswerte im einzelnen als Abweichungen in der Formzahl f oder im Volumen v bemerkbar machen.

Tabelle Nr. 4

Positive oder negative Meßfehler in d , $d_{0,3h}$ oder h bewirken durchschnittlich nachfolgende einseitige Fehler in der Schaftformzahl- und der Schaftholzbestimmung in bezug auf den Funktionstyp (22)

"d"			"d _{0,3h} "			"h"		
Δd %	f %	v %	$\Delta d_{0,3h}$ %	f %	v %	Δh %	f %	v %
+ 1,0	+ 1,5	+ 0,50	+ 1,0	+ 1,4	+ 1,4	+ 1,0	+ 0,06	+ 1,1
+ 1,5	+ 2,3	+ 0,75	+ 2,0	+ 2,9	+ 2,9	+ 2,0	+ 0,12	+ 2,1
+ 2,0	+ 3,1	+ 1,00	+ 3,0	+ 4,3	+ 4,3	+ 3,0	+ 0,18	+ 3,2
+ 2,5	+ 3,8	+ 1,25	+ 4,0	+ 5,8	+ 5,8	+ 4,0	+ 0,24	+ 4,2
+ 3,0	+ 4,6	+ 1,50	+ 5,0	+ 7,2	+ 7,2	+ 5,0	+ 0,30	+ 5,3

Tabelle Nr. 5

Eine Erhöhung um 1 % des Meßfehlers von:	(Einheiten in %)		
	d	d _{0,3h}	h
bewirkt bei der Formzahlbestimmung im Mittel eine Erhöhung des Fehlers um:	1,53	1,44	0,06
bewirkt bei der Volumsbestimmung im Mittel eine Erhöhung des Fehlers um:	0,50	1,44	1,06

Relativ am stärksten wirken sich einseitige Fehler, welche bei der Messung von d gemacht werden, auf Abweichungen bei der Ermittlung von f aus. Mißt man d zu groß, so ermittelt man f mit Hilfe der Funktion (22) zu klein. Dasselbe gilt im umgekehrten Fall. Dieser Umstand findet insoferne besondere Beachtung, daß sich diese beiden Fehler in bezug auf die Ermittlung der jeweiligen Formzahl zu einem bemerkenswerten Teil dann ausgleichen, wenn man nämlich sowohl d als auch $d_{0,3h}$ zu groß oder zu klein bestimmt.

Berechnen wir Formfunktionen vom Typ (22), so spielen einseitige Meßfehler der Höhenmessung praktisch keine Rolle, wenn wir ihren direkten Einfluß auf die Berechnung der Formfaktoren ins Auge fassen, aber indirekt kommen sie durch Verschiebung der Meßstelle des $d_{0,3h}$ zur Geltung. Der obere Durchmesser $d_{0,3h}$ wird in solchen Fällen,

insbesondere bei abholzigen Stämmen, abgesehen von möglichen Fehlern der optischen Durchmesserbestimmung, fehlerhaft bestimmt. Wird die Höhe zu groß ermittelt, rückt die Meßstelle für $d_{0,3h}$ um $0,3$ des Höhenmeßfehlers nach oben, der $d_{0,3h}$ wird je nach Abholzigkeit mehr oder minder zu klein bestimmt, im umgekehrten Falle zu groß. Es tritt auch hier ein gewisser Ausgleich, etwa zwischen einem positiven Meßfehler der Höhenbestimmung und einer negativen Abweichung eines zu klein bestimmten oberen Durchmessers, ein. Ist h mit einem negativen Meßfehler behaftet, wird $d_{0,3h}$ entsprechend zu groß bestimmt, und damit der ungünstige Einfluß auf die Formzahl bzw. Massenbestimmung zum Teil wieder aufgehoben.

Bedenken wir, daß es bei der optischen Bestimmung oberer Durchmesser relativ am häufigsten vorkommen kann, daß ein Beobachter systematische Fehler macht, so wird man gerade diesem Meßvorgang in Verbindung mit der notwendigen Höhenmessung in bezug auf die Meßgenauigkeit ein besonderes Augenmerk schenken müssen. Eine einseitige Abweichung bei der Bestimmung des oberen Durchmessers $d_{0,3h}$ von 2% bewirkt einen systematischen Fehler in der Formzahlbestimmung von $2,9\%$. Mit jeder Fehlerzunahme bei $d_{0,3h}$ um 1% erhöht sich der einseitige Fehler mit gleichem Vorzeichen bei der Formzahlbestimmung um $1,44\%$.

Die Tatsache, daß bei der Österreichischen Forstinventur jeweils 16 Dreimanngruppen die jährlichen Erhebungen durchführen, bringt den glücklichen Umstand mit sich, daß sich die systematischen Fehler der einzelnen Beobachter in bezug auf die Gesamtaufnahme im großen und ganzen ausgleichen. Infolge geringer systematischer Fehler, welche von den meisten Beobachtern gemacht werden, liegen nach den bisherigen Erfahrungen die mittleren Meßfehler etwas höher, als man diese für Einzelbeobachter annehmen kann. Bei der Bestimmung von d liegt dieser mittlere Fehler zwischen $\pm 1,0$ und $\pm 1,5\%$. (bei Einzelbeobachtern bei $1,0\%$), bei der Messung von $d_{0,3h}$ im Bereich von $\pm 3,0\%$ (Einzelbeobachter bei 2%), hinsichtlich der Baumhöhenmessung ebenfalls nahezu bei $\pm 3\%$ (Einzelbeobachter nahezu 2%). Da sich mittlere Meßfehler ("zufällige Meßfehler") bei einer Vielzahl von Messungen ausgleichen, und die geringen systematischen Fehler einzelner Beobachter bei einer größeren Zahl von Arbeitsgruppen in der Gesamtheit wie "zufällige Meßfehler" betrachtet werden können, ist bei den Außenerhebungen der Forstinventur vor allem darauf zu achten, daß nicht durch grobe systematische Fehler einer oder weniger Gruppen die Gesamtergebnisse hinsichtlich der Aufnahmegenauigkeit leiden. Schließen wir die Möglichkeit aus, daß einzelne Gruppen grobe systematische Fehler machen, und nehmen wir an, daß sich die kleinen systematischen Fehler der einzelnen für die Gesamtheit des Erhebungspersonals wie

"zufällige Fehler" behandeln lassen (sofern diese Meßfehler hinsichtlich aller beteiligten Beobachter normal verteilt sind, also auch keine erheblichen einseitigen Instrumenten- oder Beobachtungsfehler auftreten), dann ergäbe sich für die Formzahlbestimmung einzelner Stämme ein mittlerer prozentueller Fehler von

$$\sqrt{2,3^2 + 4,3^2 + 0,18^2} = \pm 4,88 \%,$$

wenn wir den mittleren Meßfehler von d mit $\pm 1,5 \%$, den von $d_{0,3h}$ mit $\pm 3 \%$ und den von h mit $\pm 3 \%$ veranschlagen. Vergleichen wir den "mittleren Meßfehler" der Formzahlbestimmung mit den "mittleren methodischen Fehlern", $s_F\%$ bei Funktionstyp (22) (diese liegen etwa bei der Gliederung nach Stärkeklassen zwischen $\pm 3,48$ bis $\pm 4,57 \%$, siehe Beilage 20 a), so können wir feststellen, daß dieser "mittlere Meßfehler" (in Anbetracht des gesamten Erhebungspersonals der Österreichischen Forstinventur) ebenso wie der "mittlere methodische Fehler" selbst in bezug auf kleine Erhebungsregionen bedeutungslos ist. Hingegen werden die einzelnen Probedflächen und Trakte, entsprechend den systematischen Meßfehlern der jeweiligen Aufnahmegruppe, einseitige Abweichungen aufweisen. Diese eben angestellten Betrachtungen sollten keinesfalls Anlaß geben, daß man bei den Außenaufnahmen der Österreichischen Forstinventur hinsichtlich der Meßgenauigkeit Großzügigkeit walten läßt, im Gegenteil selbst geringfügige systematische Meßfehler sollten durch laufende Überprüfungen der verwendeten Geräte und durch gelegentliche unabhängige Aufnahmen derselben Probedflächen durch mehrere Beobachter und durch Vergleiche der Meßergebnisse aufgedeckt werden, um derartige einseitige Fehler weitestgehend vermeiden zu können.

In der Forsteinrichtung, wo meist nur eine oder zwei Arbeitsgruppen die Messungen durchführen, muß gewissenhaftest gearbeitet werden, sofern man an die Massenbestimmung im Zuge einer Stichprobeaufnahme hohe Genauigkeitsansprüche stellt, also eine hohe Stichprobegenauigkeit nicht durch erhebliche einseitige Meßfehler praktisch illusorisch gemacht werden soll.

Bei Großraumforstinventuren und Stichprobeaufnahmen in der Forsteinrichtung sind Formzahlermittlungen mit Hilfe von Formfunktionen in den meisten Fällen nur von mittelbarem Interesse (wenn wir davon absehen, daß in einzelnen Fällen auch ertragskundliche Fragestellungen miteinbezogen werden), vielmehr sind demgegenüber die Volumsberechnungen von unmittelbarer Bedeutung. Hinsichtlich Massenberechnungen mit Hilfe von Kubierungsfunktionen, welche aus Formfunktionen des Types (22) abgeleitet wurden, wirken sich einseitige Meßfehler von $d_{0,3h}$ zweifellos am stärksten aus. An zweiter Stelle kommen Meßfehler von h . Systematische Meßfehler in der Be-

stimmung von d wirken sich bei der praktischen Verwendung von derartigen Kubierungsfunktionen am wenigsten aus, denn wie wir bereits feststellen konnten, bewirkt etwa ein positiver Fehler von d eine negative Abweichung von f und umgekehrt. Es kommt demzufolge nur ein geringer Teil des Fehlers von d durch das Multiplikationsglied d^2 in

$$v = \frac{d^2 \cdot h \cdot f \cdot \pi}{4}$$

zur Wirkung, da ein erheblicher Fehleranteil durch den aus d resultierenden, jedoch mit umgekehrten Vorzeichen innerhalb von f wirkenden Fehler aufgehoben wird.

Mehr noch als bei f kommt in bezug auf v auch jener Umstand zur günstigen Geltung, daß eine gewisse Egalisierung eines Meßfehlers von h durch Verschiebung der Meßstelle von $d_{0,3h}$ eintritt, denn wie wir bereits festgestellt haben, wird bei zu groß ermitteltem h die Meßstelle von $d_{0,3h}$ um 0,3 des Meßfehlers von h nach oben verschoben, $d_{0,3h}$ daher zu klein ermittelt und umgekehrt.

Veranschlagen wir in bezug auf die Erhebungen der Österreichischen Forstinventur unter der Annahme, daß sich die geringfügigen systematischen Abweichungen einzelner Beobachter in bezug auf die gesamte Zahl der Erhebungsorgane ausgleichen und wir demzufolge nur mit "zufälligen Meßfehlern" für die Gesamtheit der Aufnahmegruppen zu rechnen hätten, entsprechend den bisherigen praktischen Erfahrungen als obere Grenzwerte wie vorhin für d einen mittleren Meßfehler von $\pm 1,5\%$, für $d_{0,3h}$ und h je einen mittleren Meßfehler von $\pm 3\%$, so bewirken diese Meßfehler im Mittel eine gemeinsame Abweichung bei der Ermittlung des Volumens eines Einzelstammes von

$$\sqrt{0,75^2 + 4,3^2 + 3,2^2} \pm 5,41\%.$$

Ganz abgesehen von der unliebsamen Wirkung grober systematischer Fehler einzelner Instrumente oder Beobachter, muß uns selbst diese Tatsache ermahnen, im Zuge von Forstinventuren mit Rücksicht auf die Massenberechnungen vor allem $d_{0,3h}$ und h mit besonderer Sorgfalt zu bestimmen.

Es wäre sicherlich nicht verfehlt, zu fordern, daß die durch Meßfehler verursachte mittlere Abweichung bei der Ermittlung des Volumens bei Forstinventuren etwa in derselben Größenordnung liegen sollte wie der mittlere methodische Fehler der Volumensbestimmung, den man bei Verwendung von Kubierungsfunktionen zu veranschlagen hat.

Bei Stichprobeerhebungen in der Forsteinrichtung und vor allem bei ertragskundlichen Aufnahmen, bei denen in den meisten Fällen nur

eine oder zwei Erhebungsgruppen bzw. Beobachter und Instrumente zum Einsatz kommen, müssen systematische Fehler und selbst kleine einseitige Abweichungen vermieden werden, sollen die Aufnahmeergebnisse einerseits dem wahren Wert möglichst nahekommende Werte liefern, andererseits verlässliche Zuwachsbestimmungen mit Hilfe zweier zeitlich aufeinanderfolgender Massenerhebungen ermöglichen. Die Vorteile der relativ guten Anpassung oberer Durchmesserfunktionen (relativ hohe Genauigkeit der Form- und Volumsbestimmung) werden zunichte gemacht, wenn zur Ermittlung der Eingangswerte d , $d_{0,3h}$ und h ungeeignete Geräte verwendet werden oder die Beobachter nicht bemüht sind, möglichst präzise zu arbeiten, und dadurch die Aufnahmeergebnisse durch systematische Meßfehler verfälscht oder gar unbrauchbar gemacht werden.

Werden Formfunktionen vom Typ (14) oder die daraus abgeleiteten Volums- bzw. Kubierungsfunktionen verwendet, so können annähernd dieselben Fehlerwerte wie für den Funktionstyp (22) (Tabellen Nr. 4 und Nr. 5) veranschlagt werden.

6.3 Anwendung von Form- bzw. Kubierungsfunktionen bei Waldinventuren und Bestandesmassenermittlungen mit Hilfe stehender Probestämme

Nach der Diskussion über die prinzipiellen methodischen Fehler und die Auswirkungen von Meßfehlern (welche bei der Bestimmung der Eingangswerte gemacht werden können) bei der praktischen Verwendung von "oberen Durchmesser-Funktionen", wollen wir kurz auf die Möglichkeiten des Einbaues oberer Durchmesser und der Anwendung von Form- bzw. Kubierungsfunktionen in Stichprobeninventuren und Verfahren der Bestandesmassenermittlung "mit Hilfe stehender Probestämme" hinweisen.

6.31 Anwendung von Kubierungsfunktionen in der forstlichen Praxis (Waldinventuren)

Bringen wir bei Bestandaufnahmen, bei Vorrats-, Zuwachs- oder Einschlagsinventuren am Objekt Wald Stichprobeverfahren zur Anwendung, so kommen praktisch nur Stichprobeverfahren, welche sich einer gleichmäßigen bzw. systematischen Verteilung der Einzelproben bedienen, in Betracht. Dabei ist es einerlei, ob wir nun für die Gesamtbefundeinheit eine einheitliche Probenetzdichte veranschlagen oder die Gesamtbefundheit in Teilbefundheiten, bzw. Straten, gliedern und für dieses, entsprechend ihrer Bedeutung und ihres Wertes etwa unter Maßgabe der erwarteten Repräsentationsfehler, verschiedene Probenetzdichten wählen. Der Umstand, daß wir einerseits nur "systematische Stichprobeverfahren" und andererseits

eine Gliederung in "einfache" und "stratifizierte" systematische Stichprobeverfahren in Betracht ziehen, ist nur insofern von Belang, bzw. im Rahmen dieser Betrachtungen notwendig, als im Zusammenhang mit der Verwendung von Kubierungsfunktionen Hinweise über die zweckvolle Berechnung der Stichprobe- bzw. Repräsentationsfehler gemacht werden sollen.

Eine weitere Untergliederung der Stichprobeverfahren ergibt sich dadurch, daß wir als Einzelproben entweder Probeflächen bestimmter Größe, meist Kreisprobeflächen, also "starre Probekreise", oder eine Winkelzählprobe nach BITTERLICH bzw. "variable Probekreise" (1960) verwenden. Die Genialität des Grundgedankens, auf welchem die Winkelzählprobe basiert, und die zahlreichen Vorteile der "variablen Probekreistechnik" (im Ausland als "Point-Sampling" oder "Variable Plot Crusing" bezeichnet), die wir als bekannt voraussetzen können, veranlassen uns, die Verwendung von Kubierungsfunktionen im Zuge dieses Verfahrens zuerst zu behandeln.

Verwenden wir im Zuge einer Stichprobemessung des Vorrates einer bestimmten Befundeinheit (eines größeren Bestandes oder einer Abteilung, einer Betriebsklasse, eines Reviers, Forstbezirkes oder Landes, bzw. Teilbefundheiten oder Straten einer großen inhomogenen Gesamtbefundheit) als Einzelproben "variable Probekreise", Winkelzählproben, so ergibt die bei jeder Einzelprobe ausgezählte Stammzahl, multipliziert mit dem verwendeten Zählerfaktor, direkt einen Schätzwert für die Kreisfläche pro Hektar des betroffenen Bestandesteiles. Die auf allen "variablen Probekreisen" gezählte Gesamtstammzahl, multipliziert mit dem Zählerfaktor und dividiert durch die Anzahl der Einzelproben, ergibt die Kreisfläche pro Hektar der betreffenden Befundeinheit. In bezug auf einwandfreie Probestammauswahl und Auswertung der einfachste, aber hinsichtlich der Aufnahme der arbeitsintensivste Weg, nämlich die übrigen zur Massenberechnung notwendigen Merkmale zu bestimmen, ist wohl der, daß jeder im Zuge der Winkelzählprobe gezählte Stamm (eine einwandfreie Grenzstamm-Grenzkreis-Kontrolle wird als selbstverständlich vorausgesetzt) auch als Probestamm gilt. Dies wird gegenwärtig bei der Österreichischen Forstinventur, allerdings, dies sei betont, unter Bedachtnahme auf besondere Erfordernisse (welche auch seitens der forstlichen Forschung gegeben sind) so gehandhabt. Da h und f und fh (Formhöhe) eine wesentlich geringere Varianz bzw. Streuung aufweisen als die Bestandeskreisflächen, ist es im Sinne einer Verringerung des Arbeitsaufwandes (im allgemeinen bei einer Waldinventur) angebracht, h und f oder fh im Zuge einer Substichprobe zu erfassen, also etwa nur an jedem 2., 3., 4., ..., n -ten der ausgezählten Stämme diese Merkmale zu bestimmen. Dieses Verfahren der Probestammauswahl ist dann einwandfrei, wenn es dem Zufall überlassen bleibt, welche Stämme als Probestämme

gewählt werden, also mögliche subjektive Einflüsse des Aufnehmenden ausgeschaltet sind. Dies läßt sich dadurch erreichen, daß alle ausgezählten Stämme der Reihe nach, wie sie bei den einzelnen Winkelzählproben anfallen, verbucht werden, also über die einzelnen Proben hinweg jeweils jeder n-te Stamm als Probestamm gewählt wird. In diesem Falle ist zu beachten, daß die Stichprobefehler der Kreisflächenbestimmung und der f- und h- oder der fh-Ermittlung getrennt berechnet werden müssen und, entsprechend den Gesetzen der Fehlerfortpflanzung, zum Repräsentationsfehler der Massenbestimmung vereint werden können.

Das sinnvolle Verfahren der direkten Bestimmung der fh- bzw. fh/d-Werte mit Hilfe des Relaskops, BITTERLICH (1958/1959), fand insoferne bisher keinen nennenswerten Eingang in die forstliche Praxis, als das Aufsuchen des Richtpunktes nach PRESSLER vielfach durch Sichtbehinderung erschwert und die einwandfreie Bestimmung desselben bei Nadelbaumarten leider vielfach infolge tiefreichender Kronen verhindert wird, ganz abgesehen von Laubbäumen, welche keinen durchlaufenden Schaft aufweisen.

Begnügt man sich nicht mit einem Näherungswert, sondern ist man bestrebt, die Masse eines Bestandes oder einer anderen Befundeinheit (ihren effektiven Werten weitgehend entsprechend) zu bestimmen, so kann es nicht befriedigen, wenn man, gemäß den für die Probestämme ermittelten Werten für h und d (d dient auch zur Stammzahlermittlung), aus Massentafeln oder Massentarifen die Einzelstammmassen oder indirekt die Werte für f bzw. fh ableiten muß, soferne wir von den ganz groben Methoden, bei denen die f-Werte geschätzt werden oder als konstant betrachtet werden, absehen. Nimmt man die geringe Mehrbelastung in Kauf und bestimmt man von den einzelnen Probestämmen neben d und h auch $d_{0,3h}$, so ist man in die Lage versetzt, für die Einzelbäume, für die Aufnahmeeinheiten und insbesondere für die Befundeinheiten Werte für die Masse zu ermitteln, die den "wahrscheinlichsten Werten" sehr nahe kommen, wie wir aus den in früheren Abschnitten der Arbeit gemachten Feststellungen schließen können.

Bezüglich der Aufnahmetechnik (variable Probekreistechnik und Bestimmung oberer Durchmesser) verweise ich auf die Instruktion der Österreichischen Forstinventur (1961), wo diese sehr ausführlich beschrieben wurde. In dieser Arbeit dagegen interessiert uns vielmehr die Berechnungsmethode.

Da Stichprobeinventuren in der Regel nur dann in ihrem Informationsgehalt voll ausgenützt werden können, die Auswertung an sich sehr arbeitsintensiv ist, werden derartige Aufnahmen in der Regel

mit Hilfe von Großrechenanlagen (computer) oder zumindest unter Zuhilfenahme konventioneller Lochkartenmaschinen ausgewertet. Sind für die einzelnen Baumarten oder deren Untergruppen (etwa Stärkeklassen) allgemeine oder lokale Kubierungsfunktionen einmal vorhanden, so brauchen bei Verwendung von Rechenanlagen nur die entsprechenden Koeffizienten der Funktionen vorgegeben zu werden, um aus den Einzelangaben die Massen v der einzelnen Probestämme berechnen zu können. Waren alle auf den "variablen Probekreisen" ausgezählten Stämme gleichzeitig auch Probestämme, dann könnten die weiteren Berechnungen wie folgt fortgesetzt werden. Sind die Massen aller Probestämme berechnet, werden als nächster Schritt von jedem Stamm aus d die Kreisflächen g (in m^2) berechnet und der Zählerfaktor durch diesen Wert dividiert, es resultiert die entsprechend dem Zählerfaktor diesem Durchmesser (Kreisfläche) zukommende Stammzahl pro Hektar. Multipliziert man die Einzelstamm-massen mit der zugehörigen Stammzahl pro Hektar und summiert diese Produkte für eine Aufnahmeeinheit (Probefläche, Trakt), ergibt sich die Masse pro Hektar (in fm) der betreffenden Einheit. In einer allgemeinen Formel ausgedrückt, kann man diesen einfachen Rechengang wie folgt beschreiben:

$$\sum v_i \cdot \frac{k}{g_i} = V_{(fm/ha)} \text{ der einzelnen Probe,}$$

hiebei ist: v mit Hilfe der zutreffenden Kubierungsfunktion errechnete Einzelstamm-masse (in fm)

k Zählerfaktor

g Kreisfläche des Einzelstammes (in m^2)

$\frac{k}{g}$ n , die einem bestimmten Stammdurchmesser entsprechende Stammzahl pro ha.

Wie die Gesamtmasse bzw. die Masse pro Hektar für die jeweilige Befundeinheit oder deren zweckmäßige Untergruppen zu berechnen sind, braucht hier wohl nicht erwähnt zu werden. Die vorhin geschilderte einfache Berechnung der $V_{(fm/ha)}$ der einzelnen Proben wurde nur in Anbetracht der weiteren Hinweise bezüglich zweckvoller Berechnung der Repräsentationsfehler erwähnt. Sich weiter auch mit der Berechnung der Repräsentationsfehler von Stichprobeerhebungen mit systematischer Probenahme im Rahmen dieser Arbeit in knappen Zügen zu befassen, hat zwei Gründe; erstens ergibt sich hiebei eine Eigentümlichkeit in der praktischen Verwendung von Form- bzw. Kubierungsfunktionen, zweitens soll es nicht versäumt werden, auf eine Näherungsmethode der Ermittlung des Stichprobefehlers systematischer Stichprobeerhebungen hinzuweisen. Bekanntlich ist es an sich nicht zulässig, die für Stichprobeerhebungen mit "zufälliger Probenwahl" gültige einfache Art der Berechnung des Stichprobe-

fehlers auch bei Stichprobenahmen mit "systematischer Probenwahl" anzuwenden, denn, entsprechend der speziellen Art der Probenahme, würde der Repräsentationsfehler in der Regel überschätzt. Bedient man sich, in der Absicht, den "wahren Werten" möglichst nahekommende Resultate zu erzielen, der Vorzüge von Kubierungsfunktionen, welche auf d , h und einem oberen Durchmesser basieren, und führt man die Auswertung der Stichprobeaufnahme überdies mit Hilfe einer Rechenanlage durch, so wäre es sicherlich verfehlt, sich nicht auch einer Methode zur Ermittlung des Repräsentationsfehlers zu bedienen, welche den Besonderheiten einer Stichprobeaufnahme mit systematischer Probenwahl weitgehend gerecht wird.

Die Eigentümlichkeit der Anwendung von Form- bzw. Kubierungsfunktionen bei Stichprobenahmen mit "variablen Probekreisen" und die Berechnung der Repräsentationsfehler sei an einem allgemeinen Beispiel gezeigt. Hiebei werden die Annahme einer systematischen Probenahme und die Annahme, daß alle gezählten Stämme gleichzeitig auch Probestämme waren, zugrundegelegt. Einem persönlichen Hinweis Prof. MATERNs entsprechend, vereinfachen sich die Berechnungsarbeiten, wenn man nicht die Masse pro Hektar der Aufnahmeeinheit (Probe)

$$\sum v_i \cdot \frac{k}{g_i}, \text{ sondern die Werte } \sum \frac{v_i}{d_i^2} = w_i$$

einer Probe benützt. (V - Masse pro ha der Einzelprobe =

$$\sum v_i \cdot \frac{k}{g_i} = k \sum \frac{v_i}{g_i} = \frac{4 \cdot k}{\pi} \sum \frac{v_i}{d_i^2} = \frac{16}{\pi} w_i,$$

wenn der Zählerfaktor $k = 4$ beträgt.)

Diese Werte sind demnach um den konstanten Betrag $16/\pi$ kleiner als die Massen pro Hektar. Dieser konstante Betrag muß am Ende der Berechnungen, so bei der endgültigen Angabe der mittleren Masse bzw. der Gesamtmasse einer Befundeinheit, berücksichtigt werden. Die Berechnungsarbeiten gingen also so vonstatten, daß man zuerst für alle Probestämme mit Hilfe einer Kubierungsfunktion die einzelnen v berechnet, etwa nach

$$v = a \cdot d^2 \cdot h + b_1 \cdot d \cdot h \cdot d_{0,3h} + b_2 \cdot h^2$$

entsprechend Formfunktion (22), diese Massen der Einzelstämme durch die zugehörigen Werte d^2 dividiert oder, entsprechend der abgeleiteten Funktion

$$\frac{v}{d^2} = a \cdot h + b_1 \frac{h \cdot d_{0,3h}}{d} + b_2 \frac{h^2}{d^2},$$

die entsprechenden Einzelwerte direkt ermittelt und die Summen der

v/d^2 für jede Probe (variable Probekreise) bildet. Die Werte

$$\sum \frac{v_i}{d_i^2} = w_i$$

der Aufnahmeeinheiten würden dann für die weiteren Berechnungen benützt werden.

Dem spezifischen Charakter der "variablen Probekreistechnik" entsprechend, können wir noch einen anderen Schritt der Vereinfachung machen. Da wir die Masse eines Einzelstammes als

$$v = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot h \cdot f$$

definieren können, ergibt sich für den Einzelstamm

$$\frac{v}{d^2} = \frac{\pi}{4} h \cdot f,$$

bzw. für die Aufnahmeeinheit

$$\sum \frac{v_i}{d_i^2} = \frac{\pi}{4} \sum (h_i f_i).$$

Da sich bei variablen Probekreisen die Masse pro Hektar einer Einzelprobe als

$$V_{(\text{pro ha})} \sum v_i \frac{k}{g_i} = \frac{4 \cdot k}{\pi} \sum \frac{v_i}{d_i^2}$$

ergibt und

$$\sum \frac{v_i}{d_i^2} = \frac{\pi}{4} \sum (h_i f_i)$$

ist, können wir $V_{(\text{pro ha})}$ auch als $k \sum (h_i f_i)$ beschreiben,

$$V_{(\text{pro ha})} = k \sum (h_i f_i) \text{ oder } k \sum (fh)_i,$$

wobei $(fh)_i$ als Formhöhe des Einzelstammes zu verstehen ist.

Werden bei Anwendung der variablen Probekreistechnik alle im Zuge einer Winkelzählprobe ausgezählten Stämme als Probestämme verwendet, dann ergibt sich die Masse pro Hektar für jede einzelne Probe als Produkt Zählfaktor mal Summe der Einzelprodukte von Höhe und Formzahl, bzw. als Produkt Zählfaktor mal Summe der Formhöhen der Einzelstämme.

((Begründung: Bei einer Winkelzählprobe repräsentiert ein gezählter Stamm, dem jeweiligen Zählfaktor entsprechend, k (in m^2) Bestandesgrundfläche pro Hektar oder $n \cdot k \cdot h \cdot f = v$ (in fm) Bestandesmasse

pro Hektar (wenn h in m angegeben); n Stämme einer Winkelzählprobe repräsentieren demnach $n \cdot k$ (in m^2) Bestandesgrundfläche pro Hektar (gemäß der Grundgleichung

$$G = n \cdot k \cdot n \frac{w_g^2}{400}$$

wobei G die Bestandesgrundfläche pro Hektar und w_g einen Grenzwinkel in Strichen darstellt - ein Strich ist das Winkelmaß für das Verhältnis 1 : 1000), bzw.

$$n \cdot k \frac{\sum (h_i f_i)}{n} = n \cdot k \frac{\sum (fh)_i}{n} = V_{(\text{in fm})}$$

Bestandesmasse pro Hektar (denn die Bestandesgrundfläche pro Hektar mal mittlere Bestandesformhöhe ergibt die Bestandesmasse pro Hektar), n können wir aus der Formel kürzen und erhalten

$$V_{(\text{in fm})} \cdot k \sum (h_i f_i) = k \sum (fh)_i.$$

Zum selben Resultat kommen wir aber auch über einen anderen Weg.

Jedem unter einem bestimmten Grenzwinkel w_g (in Strichen) im Zuge einer Winkelzählprobe ausgezählten Stamm kann, seinem Brusthöhendurchmesser d (in m) entsprechend, ein bestimmter Grenzkreis mit dem Radius

$$r = \frac{d \cdot 50}{\sqrt{k}} \text{ (in m)}$$

gemäß der bekannten Zählbedingung $a < r$ zugeordnet werden (a = Horizontalabstand vom Beobachter zum Mittelpunkt des beobachteten Stammquerschnittes). Denn d verhält sich zu r wie w_g zu 1000, daher ist

$$r = \frac{d \cdot 1000}{w_g}$$

und die Fläche des Grenzkreises beträgt

$$Fl = \frac{d^2 \cdot 10^6 \cdot \pi}{w_g^2} \text{ (in m}^2\text{)}, \text{ bzw. } \frac{d^2 \cdot 10^2 \cdot \pi}{w_g^2} \text{ (in ha)}.$$

Die Stammgrundfläche eines Stammes beträgt

$$\frac{d^2 \cdot \pi}{4} \text{ (in m}^2\text{)},$$

daher ergibt dieser im Zuge einer Winkelzählprobe erfaßte Stamm einen, dem Zählerfaktor k entsprechenden, Anteil an der repräsentierten Bestandesgrundfläche pro Hektar, denn

$$\frac{d^2 \pi}{4} : \frac{d^2 \pi 10^2}{w_g^2} = \frac{w_g^2}{400} = k.$$

Der Grenzwinkel beträgt demnach

$$w_g = 20 \cdot \sqrt{k},$$

und in die Formel

$$r = \frac{d \cdot 1000}{w_g}$$

eingesetzt, erhalten wir

$$r = \frac{d \cdot 50}{\sqrt{k}}.$$

Die Masse des Einzelstammes beträgt

$$v \quad \frac{\pi}{4} d^2 \cdot h \cdot f \text{ (in m}^3 \text{ bzw. fm),}$$

die Fläche des zugehörigen Grenzkreises beträgt

$$Fl = \frac{r^2 \pi}{10^4} = \frac{d^2 \cdot \pi \cdot 2500}{k \cdot 10^4} \text{ (in ha),}$$

daher trägt dieser eine Stamm zur repräsentierten Bestandesmasse pro Hektar einen Anteil von

$$\frac{\pi}{4} d^2 \cdot h \cdot f \quad \frac{\pi d^2 \cdot 2500}{k \cdot 10^4} = k \cdot h \cdot f$$

bei. Umfaßt eine mit dem Zählfaktor k durchgeführte Winkelzählprobe n ausgezählte Stämme, so ergibt die Summe der einzelnen Anteile $k \cdot h_i f_i$ die repräsentierte Bestandesmasse pro Hektar,

$$V_{\text{(in fm)}} \quad \sum_{i=1}^n (k \cdot h_i f_i) = k \sum_{i=1}^n (h_i f_i) \quad k \sum_{i=1}^n (fh)_i \quad))$$

Der allgemeine Berechnungsgang vereinfacht sich in diesem Falle insofern, als wir von allen Einzelstämmen nur die Formhöhen mit Hilfe einer Formhöhenfunktion (so etwa

$$(fh) \quad a \cdot h + b_1 \frac{h \cdot d_0 \cdot 3h}{d} + b_2 \frac{h^2}{d^2}$$

aus Formfunktion (22) abgeleitet) berechnen und die Summen der Formhöhen für die einzelnen Aufnahmeeinheiten (Probeflächen Trakte) bilden müssen. Diese Summen dienen uns als Einzelwerte

der Aufnahmeeinheiten für weitere Berechnungen, insbesondere zur Bestimmung der Repräsentationsfehler. Am Ende der Berechnungen müssen wir in diesem Falle bei der Ermittlung der Masse pro Hektar und der Gesamtmasse der jeweiligen Befundeinheit den konstanten Betrag k Zählerfaktor berücksichtigen.

Durch diese Art der Umformung kommt nun deutlich die Eigentümlichkeit der "variablen Probekreistechnik" zum Ausdruck, nämlich daß die Größe des Stichprobefehlers der Masse pro Hektar oder der Gesamtmasse einer Befundeinheit lediglich von der Varianz bzw. Streuung der "Summen der Formhöhen der einzelnen Proben", also den Werten

$$u = \sum (fh)_i,$$

und der Zahl der Proben abhängig ist.

Bevor nun die näherungsweise Bestimmung der Stichprobefehler bei systematischer Probenwahl allgemein beschrieben wird, seien einige hiebei verwendete Begriffe definiert.

Aufnahmeeinheit: entweder eine "starre Probefläche" (etwa ein Probekreis bestimmter Flächengröße) oder eine "variable Probefläche" (entsprechend einer Winkelzählprobe nach BITTERLICH).

Stichprobeeinheit: eine einzige Probefläche oder mehrere Aufnahmeeinheiten, welche zu einem Trakt, cluster, oder camp-unit zusammengefaßt werden.

Berechnungseinheit: im Zuge der Schätzung des Standardfehlers einer systematischen Stichprobe werden, entsprechend dem Näherungsverfahren nach MATERN, zwei oder besser vier Stichprobeeinheiten zu einer Berechnungseinheit (Stichprobepaar oder Stichprobenvierling-Quadruplet) zusammengefaßt. Bei der Schätzung des Stichprobefehlers werden dann nicht die Merkmalswerte selbst, sondern die Differenzen zwischen den Summen von je zwei diagonal gegenüberliegenden Stichprobeeinheiten, sogenannte "Kreuzdifferenzen" (gebildet innerhalb eines Quadruplet) verwendet.

Das Prinzip und die Anwendungsmöglichkeiten der Näherungsmethoden zur Schätzung von Stichprobefehlern bei "systematischer Probenwahl" sei nun an einem einfachen und allgemeinen Beispiel sowohl für "starre" als auch für "variable Probeflächen" gezeigt.

Die theoretischen Grundlagen und praktischen Hinweise in bezug auf die Näherungsmethoden zur Schätzung der Repräsentationsfehler systematischer Stichprobeverfahren und deren charakteristische

Wesenszüge sind bei MATÉRN (1947 und 1960) eingehend beschrieben und wurden bei den nun folgenden Betrachtungen entsprechend verwendet.

Diese Näherungsmethode wird, ausgehend von einer "Verhältnisschätzung" ratio estimate -, beschrieben. Ist etwa nach der Gesamtmasse an Holzvorrat einer Befundeinheit gefragt, so wird man den Stichprobefehler für das Verhältnis Holzvorrat zu Waldfläche, "mittlere Masse pro Hektar Waldfläche", ermitteln, sofern das Ausmaß der Waldfläche genau bekannt ist. Der Schätzwert für die Masse pro Hektar Waldfläche und der Schätzwert für die Gesamtmasse an Holzvorrat haben unter der Voraussetzung, daß die genaue Waldfläche bekannt ist, den gleichen prozentuellen Stichprobefehler. Ist das genaue Ausmaß der Waldfläche nicht bekannt, sondern nur die Gesamtfläche der Befundeinheit, also die Waldfläche inklusive der Flächen anderer Kulturgattungen, so wird man in diesem Falle für das Verhältnis Holzvorrat zu Gesamtfläche, "mittlere Masse pro Hektar Gesamtfläche", den Repräsentationsfehler bestimmen, um über die Stichprobegenauigkeit der Erhebung des Gesamtvorrates eine zutreffende Aussage machen zu können.

Unserem allgemeinen Beispiel seien nun folgende einfache Annahmen zugrunde gelegt: Über eine Befundeinheit (etwa ein Revier) mit der Gesamtfläche G und einer bekannten Gesamtwaldfläche F in ha (egal ob es sich um einen geschlossenen Waldkomplex oder auseinanderliegende Waldteile handelt) wurden in einem gleichmäßigen quadratischen Probennetz (bei der praktischen Anwendung ist es in der Regel hingegen ratsamer, anstelle eines quadratischen ein gleichmäßiges rechteckiges Probennetz zu wählen) als Aufnahmeeinheit Probekreise ausgelegt, von denen n Mittelpunkte der Probekreise (Schnittpunkte der gedachten Linien des Gitternetzes) auf Waldboden oder in unmittelbarer Nähe der Grenze zwischen Wald und Nichtwald zu liegen kamen, also zumindest ein Teil dieser Aufnahmeeinheit auf Waldboden lag (siehe Abb. 2 a). Wir haben also angenommen, daß jede Aufnahmeeinheit (Probefläche) gleichzeitig auch eine Stichprobeinheit bildet. Von den Schnittpunkten des Gitternetzes ausgehend, wurden in diesem Falle, um das Beispiel einfach zu halten, nicht mehrere Aufnahmeeinheiten zu einer Stichprobeinheit (Trakt, cluster, campunit) zusammengefaßt.

Da nur die Grundsätze der Methode zur Schätzung von Stichprobefehlern angedeutet werden sollen, treffen wir die weitere Annahme, daß auf allen Probeflächen, welche zur Gänze oder zum Teil auf Waldboden zu liegen kamen (wenn einzelne Probekreise zu einem Teil auf Waldboden innerhalb der Befundeinheit und zum anderen Teil auf Nichtwaldboden innerhalb oder überhaupt außerhalb der Grenzen der Befundeinheit zu liegen kamen), egal ob starre oder variable Probe-

flächen gewählt wurden, alle erfaßten Stämme gleichzeitig als Probestämme bei der Massenerhebung und den Berechnungen des zugehörigen Repräsentationsfehlers Verwendung fanden. Wir wählten also ein einstufiges Stichprobeverfahren, bei welchem die Komponenten der Massenermittlung, die mittlere Grundfläche, die mittlere Baumhöhe und Bestandesformzahl, bzw. die mittlere Bestandesformhöhe in gleicher Intensität erhoben wurden.

Um den Unterschied zwischen der Methode zur Schätzung von Stichprobefehlern bei "systematischer Probenwahl" und der Methode zur Schätzung von Repräsentationsfehlern bei "zufälliger Probenwahl" zu verdeutlichen, sei zuerst der Auswertungsgang so dargestellt, als wenn es sich um eine "uneingeschränkte Zufallsstichprobe" gehandelt hätte.

Wären etwa starre Probekreise, also Proben gleicher Flächengröße, über die Waldfläche innerhalb der betreffenden Befundeinheit "uneingeschränkt zufällig" verteilt gewesen, so könnten wir den Stichprobefehler für das Verhältnis Masse zu (mittlerer Flächengröße der) Flächeneinheit je Stichprobeeinheit bzw. für die Masse pro Hektar Waldfläche wie folgt berechnen:

Von jeder der n Waldprobeflächen ist uns die relative Flächengröße, ausgedrückt in Anteilen der Flächengröße jeder Stichprobeeinheit (Waldflächenanteile) $e_1, e_2, \dots, e_i, \dots, e_n$, bekannt. (Liegt eine Stichprobeeinheit zur Gänze auf Waldboden, dann beträgt der Wert dieser Flächeneinheit $e = 1,0$.) Für jede der n Stichprobeeinheit wurde die dem Waldflächenanteil entsprechende Holzmasse $v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n$, durch Summierung der ermittelten Einzelstammvolumen ($v_1, v_2, \dots, v_j, \dots, v_m$) der jeweils erfaßten m Bäume

$$(v_i \sum_{j=1}^m v_j)$$

bestimmt. (Es ist dabei unerheblich, wenn bei einer auf Waldboden liegenden Stichprobeeinheit mit der Größe e , welche die Bedingung $0 < e \leq 1,0$ erfüllt, der zugehörige Wert $v = 0$ ist. Dies kommt in jenen Fällen vor, wo es sich um Blößen handelt, oder die Stärken aller Stämme oder Stämmchen der Probefläche die Kluppschwelle noch nicht erreicht haben.)

Bilden wir die Summe der Anteilswerte der Stichprobeeinheiten

$$\sum_{i=1}^n e_i,$$

so können wir daraus den mittleren Waldflächen-Anteilswert der Stichprobeeinheiten (mittlere relative Probeflächengröße)

$$\bar{e} = \frac{\sum_{i=1}^n e_i}{n}$$

berechnen. Weiters können wir als Verhältnis der gesamten, auf allen Probeflächen festgestellten, Masse zur Summe der Anteilswerte der Stichprobeneinheiten die durchschnittliche Masse pro Stichprobe(flächen)einheit

$$q_v = \frac{\sum_{i=1}^n v_i}{\sum_{i=1}^n e_i}$$

ermitteln.

Wurden starre Probekreise von der Flächengröße f in Hektar als Stichprobeneinheiten gewählt, dann beträgt die Masse pro Hektar Waldfläche der Befundeinheit

$$p_v = \frac{\sum_{i=1}^n v_i}{f \cdot \sum_{i=1}^n e_i} = \frac{q_v}{f}$$

und die Gesamtmasse der Befundeinheit (des Revieres)

$$M = \frac{q_v \cdot F}{f} = p_v \cdot F.$$

Da f und F zwei fixe Werte darstellen, ist der Stichprobenfehler für den variablen Wert q_v zu ermitteln. Dieser ergibt sich mit

$$s_{q_v} = \frac{s_d}{\sqrt{n} \cdot \bar{e}},$$

wobei sich bei einer "Zufallsstichprobe" s_d bzw. s_d^2 aus

$$s_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (v_i - q_v \cdot e_i)^2}{n - 1} = \frac{\sum_{i=1}^n (v_i^2 - 2q_v \cdot v_i \cdot e_i + q_v^2 \cdot e_i^2)}{n - 1}$$

errechnen läßt. Hiebei ist das Produkt $q_v \cdot e_i$ als durchschnittlicher Erwartungswert der Masse zu betrachten.

Die Summe der quadrierten Einzeldifferenzen zwischen den beobachteten Werten v_i und den erwarteten Werten $q_v \cdot e_i$, geteilt durch die Zahl der Freiheitsgrade, wird somit als Schätzung für die Varianz

von q_v verwendet. Der prozentuelle Standardfehler von q_v ergibt sich mit

$$s_{q_v} \% = \frac{s_{q_v} \cdot 100}{q_v} ,$$

und das Ergebnis der Stichprobeerhebung lautet: Das Verhältnis Holzmasse zu Flächeneinheit wurde mit $q_v \pm s_{q_v} \%$ und die Masse pro Hektar Waldfläche der Befundeinheit mit demselben prozentuellen Stichprobenfehler $s_{q_v} \%$ $s_{p_v} \%$ bei "einfacher Sicherheit" ermittelt. ("Einfache Sicherheit" bedeutet mit anderen Worten, daß die beiden Endpunkte des gewählten Vertrauensintervalles mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3 % zu beiden Seiten des "wahren Wertes" zu liegen kommen, oder die Überschreitungswahrscheinlichkeit in bezug auf die angegebenen Fehlergrenzen somit 31,7 % beträgt.)

Würde man eine "systematische Stichprobe" (Stichprobe mit gleichmäßiger, systematischer Probenwahl) nun tatsächlich analog einer "uneingeschränkten Zufallsstichprobe" auswerten, so käme es, entsprechend den empirisch gewonnenen Erkenntnissen der Forstwissenschaften, (in den meisten Fällen) zu einer nicht unerheblichen Überschätzung des Stichprobenfehlers.

Um nun eine derartige Unterbewertung einer "systematischen Stichprobe" einzuschränken, empfiehlt es sich, gemäß dem von MATÉRN beschriebenen Näherungsverfahren zur Schätzung der Standardfehler systematischer Stichprobefahren, "Berechnungseinheiten", MATÉRN nennt sie "Quadruplets" (Vierlinge), zu bilden und die quadrierten, innerhalb dieser Berechnungseinheiten zwischen je zwei entsprechend gewählten Paaren von Stichprobeneinheiten errechneten "Kreuzdifferenzen" bei der Schätzung der Varianz, in weiterer Folge des Repräsentationsfehlers eines bestimmten Merkmalswertes oder des Verhältnisses zweier Merkmalswerte, zu verwenden. Siehe diesbezüglich Abb. 2 b und 3 und die dort angebrachten Hinweise.

Legen wir zuerst bei der Erörterung dieser Methode eine Holzvorratsstichprobe, welche sich starrer (gleichgroßer) Probekreise bzw. Stichprobeneinheiten bedient, zugrunde. Halten wir also wiederum fest: Innerhalb einer Befundeinheit ist uns das genaue Ausmaß der Waldfläche mit F ha bekannt. Es wurden in der Natur an den innerhalb der Befundeinheit vorgesehenen gleichgroßen Probeflächen n Stichprobeneinheiten (oder Teile derselben) auf Waldboden festgestellt und für alle n Stichprobeneinheiten, ihren Waldflächenanteilen entsprechend, die zugehörigen Massen

$$v_i \quad \sum_{j=1}^m \quad v_j$$

aus den Massen der jeweils erfaßten m Einzelstämme errechnet.

Berücksichtigen wir nun hiebei, daß einzelne von den n Stichproben nur zum Teil auf Waldboden oder auch nur zum Teil innerhalb der Befundeinheit lagen, dann müssen wir für die weiteren Berechnungen anstelle von n die Summe dieser Waldflächenanteilswerte aller Stichprobeeinheiten

$$\sum_{i=1}^n e_i \quad E$$

verwenden. (Hiebei erhält eine Stichprobeeinheit, welche innerhalb der Befundeinheit zur Gänze auf Waldboden liegt, den Wert $e_i = 1,0$.)

Das Gesamtvolumen der Probestämme aller Stichprobeeinheiten, welches diesen zur Gänze oder zum Teil innerhalb der Befundeinheit auf Waldboden gelegenen Probeflächen erhoben wurde, bezeichnen wir in diesem Falle mit

$$\sum_{i=1}^n v_i \quad V.$$

Haben wir starre Probekreise von der Flächengröße f gewählt, dann ergibt sich die Masse pro Hektar Waldboden mit

$$\frac{V}{E \cdot f} = p_v.$$

Die durchschnittliche Masse pro Stichprobeeinheit (Verhältnis Holzmasse zu Flächeneinheit) V/E kann daher auch mit $f \cdot p_v$ beschrieben werden.

Denkt man sich nun das Stichprobenetz über die Begrenzungslinie des Waldbodens bzw. der Befundeinheit hinaus ausgedehnt, so können N aktive Berechnungseinheiten - Quadruplets gebildet werden (siehe Abb. 2 b), bei denen jeweils zumindest eine Stichprobeeinheit oder ein Teil derselben auf Waldboden liegt. Kennzeichnen wir die vier Stichprobeeinheiten, die zu einem beliebigen Quadruplet gehören, mit den Buchstaben A, B, C, D (Abb. 3), dann entsprechen die Waldflächenanteilswerte dieser vier Stichprobeeinheiten den Quantitäten e_A, e_B, e_C, e_D , und die zugehörigen Massen dieser Stichprobeeinheiten haben die Werte v_A, v_B, v_C, v_D .

Liegt die Stichprobeeinheit C etwa zur Gänze außerhalb der Grenzen der Befundeinheit oder außerhalb des Waldes, dann nehmen sowohl e_C als auch v_C die Werte Null an ($e_C = 0, v_C = 0$). Liegt eine Stichprobeeinheit, etwa A, zur Gänze auf Waldboden, jedoch auf einer Blöße oder innerhalb eines Jungbestandes, dessen Stämmchen die Kluppschwelle noch nicht erreicht haben, dann lautet dieses Wertepaar $e_A = 1,0, v_A = 0$.

Der nächste Schritt, entsprechend MATERN (1962), ist nun der, daß man für jede Stichprobeeinheit der betreffenden Berechnungseinheit

die Differenz zwischen der "tatsächlich ermittelten Masse" v und der für diese Probe "erwarteten Masse" $f \cdot p_v \cdot e$ ermittelt,

$$x_A = v_A - f \cdot p_v \cdot e_A,$$

$$x_B = v_B - f \cdot p_v \cdot e_B,$$

$$x_C = v_C - f \cdot p_v \cdot e_C,$$

$$x_D = v_D - f \cdot p_v \cdot e_D$$

und weiters die quadrierten "Kreuzdifferenzen" $(x_A - x_B - x_C + x_D)^2 = X_j^2$ für jedes Quadruplet bildet. Die Anzahl der Stichprobeneinheiten oder die entsprechende der jeweiligen Berechnungseinheit zugehörige Summe der Waldflächenanteile (wenn einzelne Proben nur zum Teil auf Waldboden innerhalb der Befundeinheit lagen), ergibt sich mit: $(e_A + e_B + e_C + e_D) = E_j^2$.

Als Schätzung für den Stichprobenfehler von p_v wird die Quantität s_{pv} verwendet, welche sich aus der Quadratwurzel der Varianz

$$s_{pv}^2 = \frac{(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_j^2 + \dots + X_N^2)}{E \cdot f^2 (E_1^2 + E_2^2 + \dots + E_j^2 + \dots + E_N^2)} = \frac{\sum_{j=1}^N X_j^2}{E \cdot f^2 \cdot \sum_{j=1}^N E_j^2}$$

ergibt.

(Da ja die Flächenanteilswerte jener außerhalb der Grenzen der Befundeinheit "gedachten", bzw. zur Gänze außerhalb des Waldes liegenden Stichprobeneinheiten gleich Null sind ($e = 0$), ist die Summe in jenem Falle, daß alle Proben zur Bildung der Quadruplets herangezogen wurden, gleich

$$\sum_{j=1}^N E_j^2 = E,$$

und man kann in diesem speziellen Falle schreiben:

$$s_{pv}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N X_j^2}{E \cdot f^2}.$$

Würden weiters alle Stichprobeneinheiten außerdem zur Gänze auf Waldboden liegen, dann könnte E durch n ersetzt werden, und die beiden Formeln würden lauten:

$$p_v = \frac{V}{n \cdot f} \quad \text{und} \quad s_{pv}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N X_j^2}{n \cdot f^2}$$

Der prozentuelle Stichprobefehler von p_v beträgt

$$s_{pv} \% = \frac{s_{pv} \cdot 100}{p_v},$$

und als Ergebnis der Stichprobeaufnahme erhält man, daß die Masse pro Hektar bei "einfacher Sicherheit" $p_v \pm s_{pv} \%$ beträgt. Der Wert für den Gesamtvorrat ergibt sich mit $m_{pv} \cdot F$ und da die genaue Waldfläche F der Befundeinheit bekannt war, gilt auch für M der für p_v ermittelte prozentuelle Stichprobefehler $s_{pv} \%$. Die "Schätzung" (im mathematisch statistischen Sinne) des Gesamtvorrates lautet somit: $M \pm s_{pv} \%$.

Mit Rücksicht auf die Fragen, welche sich durch in Grenznähe einer Befundeinheit gelegenen Proben ergeben, scheint es angebracht, eine diesbezügliche Einschaltung zu machen. Diese Fragen ergeben sich bei der praktischen Anwendung der Näherungsmethoden zur Schätzung des Stichprobefehlers bei systematischer Probenahme bezüglich der Quantitäten e_i .

Aus prinzipiellen Gründen und mit besonderer Rücksicht auf die in weiterer Folge zu diskutierende Verwendung "variabler Probeflächen" wollen wir die Frage stellen, ob es bei der Berechnung der durchschnittlichen Masse (oder eines beliebigen anderen Merkmalswertes) pro Stichprobe(flächen)einheit oder der mittleren Masse pro Hektar und dem zugehörigen Stichprobefehler von Belang ist, verschieden große Werte e_i (Flächenanteilswerte), wie eben beschrieben, zu berücksichtigen. Vergewärtigen wir uns eine Stichprobe mit großer Probenzahl, etwa eine Großrauminventur. Wir können in diesem Falle, dem "Gesetz der großen Zahlen" zufolge, mit Recht annehmen, daß sich die Fälle, bei denen die Mittelpunkte der Proben bereits außerhalb der Waldfläche (der Befundeinheit) jedoch noch Teilflächen der "starrten" Probeflächen auf Waldboden zu liegen kommen, mit adäquaten Fällen, bei denen die Mittelpunkte der Proben zwar noch innerhalb der Grenze der betreffenden Befundeinheit, jedoch Teile der Probeflächen bereits außerhalb dieser zu liegen kommen, die Waage halten. Für diese beiden Gruppen von Proben, welche zu beiden Seiten der anzunehmenden Grenze der Befundeinheit in den Bereich eines in seiner Gesamtbreite dem Durchmesser des gewählten starren Probekreises entsprechenden kritischen Streifens zu liegen kommen, können wir daher die gleiche Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens von $1/2$ und somit eines fehlerlosen

Ausgleiches auch in bezug auf alle ermittelten Merkmalswerte annehmen.

Unter diesen Voraussetzungen wird es offenbar, daß wir den Berechnungen wohl verschieden große, einer bestimmten Befundeinheit (oder auch Straten) zugeordnete Flächenanteile von Probeflächen ($0 < e_i \leq 1$) berücksichtigen können, aber ohne Nachteil auch auf die Bestimmung und Berücksichtigung solcher Probenanteile (Waldflächenanteile) verzichten können. In diesem letzteren Fall ermitteln wir den Wert

$$\sum_{i=1}^n e_i = E,$$

indem wir alle Mittelpunkte der ausgelegten Proben zählen, welche auf Waldboden (oder allgemein innerhalb der Grenzen einer Befundeinheit oder eines Stratoms) festgestellt wurden. (Obzwar $E = n$ ist, erscheint es für jene Fälle, bei denen in weiterer Folge nur ein Teil der Stichprobeneinheiten dann zur Berechnung des Stichprobefehlers Verwendung finden, von Vorteil sich dieser Quantitäten e_i zu bedienen.) Bei der Ermittlung des Wertes E und den Berechnungen des Stichprobefehlers des Verhältnisses eines beliebigen Merkmalswertes pro Stichprobeneinheit haben wir, dem Charakter einer "Punktstichprobe" entsprechend, bei einem über die Grenze der Befundeinheit ausgedehnten Probennetz an dessen Kreuzungspunkten, nur zwischen den Fällen $e_i = 1$ (innerhalb der Befundeinheit) und $e_i = 0$ (außerhalb der Befundeinheit) zu unterscheiden. Bei der Ermittlung des Wertes

$$V = \sum_{i=1}^{n+z} v_i$$

und des Verhältnisses V/E sowie den weiteren Berechnungen ist es dabei jedoch von Belang, daß von den zu $(n + z)$ "zusätzlichen" z Punkten ausgehend, welche bereits außerhalb der Grenze der Befundeinheit lagen, der Ausdehnung der gewählten Probeflächengröße entsprechend, festgestellte $v_i > 0$ Berücksichtigung finden. Daß unter den oben erwähnten Voraussetzungen auf eine Feststellung und Berücksichtigung von Probeflächenanteilen e_i verzichtet werden kann, bringt hinsichtlich Feldarbeit und Auswertung einer Stichprobenahme nicht unwesentliche Vereinfachungen mit sich.

((Bei der Feldarbeit stößt man häufiger als zu erwarten auf besondere Fälle, daß nämlich der Mittelpunkt der Probe auf der anzunehmenden Grenze zwischen Wald und Nichtwald, oder auf der Grenze zwischen zwei Befundeinheiten (Straten) liegt, und man in bezug auf die Zuordnung (des Wertes e_i) auf Schwierigkeiten stößt. Einmal sind es die ganz seltenen Fälle, daß der Mittelpunkt einer Probe laut Vermes-

sung auf der gedachten Linie einer vermarkten Grenze liegt. Viel häufiger kommen dazu nun jene Fälle, daß bei nicht vermarkten Grenzen der Mittelpunkt der Probe praktisch in einen schmalen Grenzstreifen fällt, innerhalb welchen die gedachte Grenzlinie verlaufen soll. Überläßt man es, gerade mit Rücksicht auf diese letzteren Fälle, dem Taxator, im Zuge der Feldarbeit über eine Zuordnung zu entscheiden, läuft man Gefahr, daß sich durch dessen (eventuell sogar unbewußte) subjektive Entscheidung einseitige Fehler in die Ergebnisse einschleichen. In Instruktionen für Feldarbeiten müßte daher vorgesehen sein, daß alle Proben, bei denen eine klare Entscheidung in bezug auf die Zuordnung des Probenmittelpunktes zu einer Befundeinheit (oder Stratum) nicht möglich war, in den Aufzeichnungen (Manualen) besonders gekennzeichnet werden. Bei der Auswertung bleibt, so etwa in bezug auf Waldfläche - Nichtwaldfläche, die Wahl entweder nur jede zweite Probe als zur Waldfläche gehörend zu betrachten, oder die Flächenanteilswerte e_i , welche in den meisten Fällen rund 0,5 betragen, den Berechnungen zugrunde zu legen. Muß unter den oben erwähnten Gesichtspunkten der Mittelpunkt einer Probe als auf der Grenzlinie liegend betrachtet werden, werden außer Halbkreisen auch Kreisausschnitte, nämlich bei gekrümmt verlaufenden (natürlichen) oder gebrochenen Grenzlinien, zu berücksichtigen sein, sofern man verschieden große e_i -Werte in Rechnung stellen will, etwa mit besonderer Rücksicht darauf, daß eine Befundeinheit mehrere Straten umfaßt.)

Kann oder soll man nun bei einer Inventarisierung einer kleinen Befundeinheit bzw. bei einer Stichprobenahme mit relativ kleiner Probenzahl sich ebenfalls dieser oben geschilderten Vereinfachung bedienen? Wie die praktische Erfahrung lehrt, läuft man bei einer kleinen Befundeinheit bzw. bei kleiner Probenzahl Gefahr, daß entweder die Mittelpunkte der Proben, welche in der außerhalb der Befundeinheit gelegenen Hälfte des "kritischen Grenzstreifens" liegen, überwiegen und damit der Wert eines gefragten Merkmales (so etwa der Gesamtmasse bzw. der Masse pro Probe oder pro Hektar usw.) überschätzt wird, wenn man die zugehörigen Flächenanteilswerte (Probenteilswerte) e_i nicht berücksichtigt. Überwiegen demgegenüber die Probeflächen, deren Mittelpunkte e im Bereich der innerhalb der Befundeinheit zu berücksichtigenden Hälfte des "kritischen Grenzstreifens" liegen, dann werden die gefragten Werte (Masse, Kreisfläche, Zuwachs usw.) bei Nichtbeachtung der Flächenanteilswerte unterschätzt.

Aus diesem Grunde ist es bei Stichprobenahmen, welche der Forsteinrichtung dienen, vielfach üblich, Probeflächen der Grenzbereiche zur Gänze in den Bereich jener Befundeinheit zu verlegen, innerhalb welcher der Mittelpunkt der Probe festgestellt wurde, um die unan-

genehme Berücksichtigung von Flächenanteilen (Probeanteilen) vermeiden zu können. Man weicht in diesem Falle den oben erwähnten und zu befürchtenden einseitigen Schätzfehlern aus und nimmt damit eine andere Art von einseitigen Fehlern in Kauf. Wir brauchen uns nur die Tatsachen vor Augen zu halten, daß sich die Bäume der Bestandesränder (insbesondere an der Grenze zwischen Wald und Nichtwald) hinsichtlich Höhe, Formzahl, Masse, Zuwachs usw. meist erheblich von jenen des Bestandesinneren unterscheiden, so wird klar, daß sich in die Schätzungen der Werte der Befundeinheit einseitige Fehler einschleichen können, wenn man die Bestandesränder bei der Stichprobenahme unberücksichtigt läßt. Die Bestandesränder stellen auch einen Bestandteil der Befundeinheit dar und ihre Berücksichtigung ist umso wesentlicher, je kleiner die Bestände oder verstreut liegenden Teile der Befundeinheit sind.

In bezug auf Stichprobenahmen innerhalb kleiner Befundeinheiten bzw. bei relativ kleiner Probenzahl könnte, zwischen der unbequemen Möglichkeit der Berücksichtigung von Probeanteilen (Flächenanteilen) und der nicht einwandfreien Verlegung der "Grenzprobeflächen", ein vertretbarer Mittelweg eingeschlagen werden. Dieser Mittelweg bestünde darin, daß man alle Mittelpunkte der Proben, welche innerhalb oder außerhalb der Befundeinheit im Bereich des "kritischen" Grenzstreifens ab einer bestimmten Entfernung x (etwa $x = r/2$, halber Radius des Probekreises) auf die anzunehmende oder vermarktete Grenze (Grenzlinie) der Befundeinheit verlegt und alle Probeflächen, deren Mittelpunkte weiter als x von der Grenze liegen, soweit von dieser weg verschiebt, bis sie sich zur Gänze im Bereich der betreffenden Befundeinheit (oder auf Waldboden bzw. Nichtwaldboden) befinden. Bei der Feldarbeit und bei den Berechnungen wären in diesem Falle nur für jene Proben Anteilswerte (für Kreisabschnitte, in den meisten Fällen Halbkreise, gemäß dem Verhältnis $\alpha/360^\circ$) zu berücksichtigen, deren Mittelpunkte auf der Grenze der Befundeinheit (zwischen Wald und Nichtwald) bzw. auf der Grenze zwischen zwei Straten liegen.

Nach diesen die Flächenanteilswerte e_j , bei Verwendung "starrer Probeflächen" als Aufnahme- bzw. Stichprobeneinheiten, betreffenden Überlegungen wollen wir uns nun den "variablen Probeflächen" zuwenden. Würden wir in bezug auf die nachfolgenden Erläuterungen weiterhin bei der speziellen Vorstellung verharren, daß sich eine "variable Probefläche" aus so vielen konzentrischen Kreisen zusammensetzt wie Brusthöhenstärken im Bereich einer Befundeinheit vorkommen (dieses Modell wurde in einem vorausgegangenen Abschnitt, in einer wertmäßigen Gegenüberstellung zu Stichprobefahren, welche sich zweier oder mehrerer konzentrischer Probeflächen bedienen, in für diesen Zweck geeigneter Weise verwendet), so

würden sich im Hinblick auf die Berechnungen erhebliche Komplikationen ergeben. Indirekt würde damit aber auch die Einfachheit und Klarheit der vorzüglichen "variablen Probekreistechnik" nach BITTERLICH stark verschleiert. Einem persönlichen Hinweis MATERNs verdanke ich es, daß ich mich in bezug auf "Probenanteile variabler Probeflächen" letztlich nicht in damit verbundene Schwierigkeiten verstrickt habe, welche das Verfahren der "variablen Probekreistechnik" hinsichtlich Feldarbeit und Auswertung nicht unerheblich verkompliziert hätten.

Bei der Behandlung der "starrten Probeflächen" im Zusammenhang mit Stichproben großer Probenzahl wurde bereits und nicht unabhängig bei der Ermittlung des Wertes

$$E \sum_{i=1}^n e_i$$

der Begriff "Punktstichprobe" verwendet. Für die "Schätzung" des Verhältnisses V/E und die den Stichprobefehler betreffenden Berechnungen war es lediglich notwendig festzustellen, ob die Quantität e_i jeweils den Wert 1 oder 0 annimmt, je nachdem, ob der Mittelpunkt der Probe auf Waldboden (innerhalb einer fragten Befundeinheit oder Stratums) oder ob dieser auf Nichtwaldboden (außerhalb der fragten Befundeinheit oder Stratums) liegt. Bei der "Schätzung" des Volumens (bzw. anderer Stichprobemerkmale) verharren wir jedoch der Aufnahmetechnik entsprechend bei der Vorstellung einer "Probeflächenstichprobe". Anders liegen nun die Verhältnisse, wenn man die "starrten Probeflächen" durch "variable Probeflächen" - "Winkelzählproben" - ersetzt. Denn eine auf "Winkelzählproben" aufbauende Stichprobe, welche die Erfassung der Bestandeskreisfläche, der Bestandesmasse und anderer Stichprobemerkmale zum Ziele hat, verzichtet auf flächenmäßige Abgrenzungen von Proben (Probeflächen) und beschreibt alle Messungen für den Mittelpunkt der Probe, auf den "Aufstellungspunkt" des Beobachters bezogen. Diesen Wesenszug der "Winkelzählproben", der "variablen Probekreistechnik" hat GROSENBAUGH (1952) und in nachfolgenden Arbeiten durch die Definition "Plotless timber estimate" und vor allem durch die Charakterisierung als "Point-sampling" klar und eindeutig herausgestrichen und davon ausgehend ein spezifisches wahrscheinlichkeitstheoretisches Konzept entwickelt, welches die "variable Probekreistechnik" als die allgemeinste und einfachste Art einer forstlichen Stichprobenahme charakterisiert.

Durch die Art der Durchführung der "Winkelzählproben" erweist sich ein derartiges Stichprobeverfahren ganz augenscheinlich als "Punktstichprobe". Denn wir zählen alle Stämme im Umkreis, welche der durch das gewählte Winkelmaß gegebenen Zählbedingung entsprechen

und erhalten damit aus dem Produkt der Anzahl der gezählten Stämme mal Zählerfaktor eine Schätzung der Bestandeskreisfläche pro Hektar eben für diesen Punkt, von dem aus wir unsere Beobachtung durchführen. Denken wir uns nun jeden Stamm in Brusthöhe, wie GROSENBAUGH es empfiehlt, von einem Ring umgeben, dessen äußerer Radius dem zugehörigen "Grenzkreisradius" entspricht. Die Flächenausdehnung dieses gedachten Ringes hängt vom zugehörigen Brusthöhendurchmesser und dem gewählten Zählerfaktor - Winkelmaß - ab. Der Radius des Grenzkreises beträgt

$$r = \frac{d \cdot 50}{\sqrt{k}} \text{ (in m).}$$

Jeder gezählte Stamm und damit auch die zugehörige Fläche der gedachten Scheibe (Ring plus Stammquerschnitt) des betreffenden Stammes repräsentiert in allen Fällen einen dem Zählerfaktor k entsprechenden gleichen (konstanten) Anteil an Bestandesgrundfläche in m^2 pro Hektar. Bei der Stichprobenahme ist es nun lediglich von Bedeutung, ob eine "Punktprobe" (Kreuzungspunkt des Stichprobenetzes) diese durch den "Grenzkreisradius" genau bestimmte kreisförmige Zone trifft, welche ihren Mittelpunkt im Zentrum des Brusthöhenquerschnittes des betreffenden umgebenen Baumes hat. Wird diese gedachte Scheibe (die aufgebläht gedachte Brusthöhengrundfläche des einzelnen Baumes) von einer "Punktprobe" getroffen, dann ist dieser Baum zu zählen und von diesem außerdem eine komplette Aufnahme der vorgesehenen Stichprobemessungen durchzuführen.

Die Vorstellung, daß jeder der Bäume von einer kreisförmigen Zone (gedachte Grenzkreisfläche) umgeben ist, erlaubt es nun aber auch, sich gedanklich von einer anzunehmenden oder auch vermarkten Linie als Begrenzung einer Befundeinheit zu trennen. Denn im Sinne der "Punktstichprobe" ist es lediglich wesentlich, daß ein Probepunkt egal, ob innerhalb oder auch bereits außerhalb der Befundeinheit (oder Stratum), eine derartige kreisförmige Zone trifft bzw. diese Zone den Probepunkt überlappt und festgehalten wird, welcher Befundeinheit (oder Stratum) der von der getroffenen Zone umgebene Baum (genau genommen das Zentrum des Stammquerschnittes) zuzuordnen ist.

Haben wir uns nun mit der "variablen Probekreistechnik" wie vorhin ihrem Wesen nach als "Punktstichprobenahme" vertraut gemacht, fällt es für den allgemeinen Fall einer Stichprobenahme mit großer Probenzahl nicht schwer, sich gedanklich nunmehr von Probe(flächen)anteilswerten zu lösen.

Nun zurück zum eigentlichen Thema dieses Abschnittes. Wurden als Aufnahme- bzw. Stichprobeneinheiten nicht "starre" sondern "variable Probeflächen" gewählt, so ergibt sich die Masse pro Hektar je

Einheit (Probepunkt), wie wir früher bereits gesehen haben, mit k , u. wobei k der verwendete Zählerfaktor und

$$u = \sum_{j=1}^m (fh)_j$$

(m = Anzahl der gezählten "Treffer" bzw. Bäume), also die Summe der Formhöhen einer Stichprobeneinheit ist. Weiters ist die Formhöhensumme der Befundeinheit

$$U = \sum_{i=1}^{n+z} u_i.$$

(n = Anzahl der Probepunkte innerhalb der Befundeinheit, z. B. Waldfläche, und z = Anzahl der Probepunkte außerhalb der Grenze der Befundeinheit, bei welchen zumindest ein "Treffer" erzielt wurde, also zumindest eine der gedachten, einen bestimmten Baum umgebende, kreisförmige Zone getroffen wurde.) Den n Probepunkten, welche innerhalb der Grenze der Befundeinheit lagen, können wir zwecks Schätzung des Flächenausmaßes der Befundeinheit (z. B. Waldfläche) die Quantitäten $e_i = 1$ zugeordnet denken. Die Summe der Stichprobeneinheiten (Anzahl der Proben innerhalb) der Befundeinheit ergibt sich daher mit

$$E = \sum_{i=1}^n e_i.$$

Als durchschnittliche Formhöhensumme pro Einheit erhält man U/E und die Masse pro Hektar der Befundeinheit (z. B. Waldboden) ergibt sich mit

$$p_v = \frac{U}{E} k.$$

Setzen wir $k = 1/1$, dann erhält man in Analogie zu den für starre Probekreise vorausgegangenen Berechnungen

$$p_v = \frac{U}{E \cdot 1},$$

und die durchschnittliche Formhöhensumme je Probe beträgt

$$\frac{U}{E} = 1 \cdot p_v,$$

Für die Stichprobeneinheiten eines Quadruplets ermittelt man in diesem Falle die Differenzen zwischen den ermittelten und den erwarteten Werten für u ,

$$y_A = u_A - 1 \cdot p_v \cdot e_A,$$

$$y_B = u_B - 1 \cdot p_v \cdot e_B,$$

$$y_C = u_C - l \cdot p_v \cdot e_C,$$

$$y_D = u_D - l \cdot p_v \cdot e_D,$$

weitere die quadrierten Kreuzdifferenzen für jede Berechnungseinheit

$$(y_A - y_B - y_C + y_D)^2 \quad Y_j^{\wedge}, \text{ sowie } E_j^{\wedge} \quad (e_A + e_B + e_C + e_D)$$

und erhält als Schätzwert für den Stichprobenfehler von p_v den Wert s_{pv} aus der Quadratwurzel der Formel:

$$s_{pv}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N Y_j^{\wedge}}{E \cdot l^2 \cdot \sum_{j=1}^N E_j^{\wedge}}, \text{ bzw. da } \frac{1}{l} = k \text{ ist, } s_{pv}^2 = \frac{k^2 \cdot \sum_{j=1}^N Y_j^{\wedge}}{E \cdot \sum_{j=1}^N E_j^{\wedge}}.$$

Zieht man, um eine möglichst genaue Fehlerschätzung zu erhalten, nicht nur einen bestimmten Teil, sondern alle Stichprobeneinheiten zur Bildung der Berechnungseinheiten heran, dann ist

$$\sum_{j=1}^N E_j^{\wedge},$$

wie wir schon früher gesehen haben, gleich E .

(Auch bei Stichproben sehr großen Umfanges wird man zur Berechnung von U/E alle verfügbaren Stichprobeneinheiten heranziehen. Mit Rücksicht auf eine große Zahl von Proben können bei der Berechnung des zugehörigen Stichprobenfehlers jedoch zwischen den gewählten Quadruplets eine oder mehrere Reihen von Stichprobeneinheiten ausgelassen werden. Man bildet in diesem Falle ein gleichmäßiges Netz von Quadruplets, wobei in beiden Richtungen des Stichprobenetzes nach zwei für eine Berechnungseinheit verwendeten Stichprobeneinheiten eine oder mehrere Stichprobeneinheiten unberücksichtigt bleiben.) Da nun außerdem E identisch mit n ist, können wir

$$p_v = \frac{k \cdot U}{n}$$

setzen und im Falle, daß alle Stichprobeneinheiten zur Bildung der Berechnungseinheiten (Varianzeinheiten) herangezogen wurden, überdies die obige Formel für die Fehlervarianz s_{pv}^2 durch

$$s_{pv}^2 = \frac{k^2 \cdot \sum_{j=1}^N Y_j^{\wedge}}{n^2}$$

ersetzen.

((Die geäußerten Bedenken, daß im Zuge der Feldarbeiten die Probepunkte, welche in den unmittelbaren Bereich der gedachten Grenzlinie einer Befundeinheit oder der zwischen zwei Straten verlaufenden Grenze fallen, die Gefahr einer "subjektiven" Zuordnung der Quantitäten e_i und somit des Zustandekommens einseitiger Fehler besteht, müssen auch bei einer "Punktstichprobe", welche auf Winkelzählproben basiert, aufrecht erhalten werden. Dieser Umstand sollte daher sowohl bei der Feldarbeit, als auch bei den anschließenden Berechnungen entsprechende Beachtung finden.

Hinsichtlich "Punktstichprobe auf Winkelzählprobenbasis" für kleine Befundeinheiten gelten wie für "Probeflächenstichproben" dieselben Bedenken in bezug auf zu befürchtende, jedoch im Interesse einer Ermittlung des effektiven Tatsachenbestandes unerwünschte Über- oder Unterschätzungen der Stichprobemerkmale, welche durch die kleine Probenzahl aber auch die Flächengestalt bzw. Form der Befundeinheit ursächlich bedingt werden. Der im Zusammenhang mit der Anwendung von "Probeflächenstichproben" vorgeschlagene "Mittelweg" in bezug auf die Lagekorrektur der Grenzproben und die Beachtung der Quantitäten e_i scheint ohne Vorbehalt auch auf eine "Punktstichprobe auf Winkelzählprobenbasis" übertragbar. Ein Unterschied ergibt sich insofern, daß man in diesem Falle zwecks Feststellung der Größe x etwa den dem stärksten Stamm zuzuordnenden Grenzkreisradius als Maßstab wählen könnte. (Der stärkste Baum, welcher in der nächsten Umgebung der Punktprobe in der betreffenden Befundeinheit oder im Bereich der aneinandergrenzenden Straten gefunden wurde.)

Im Zusammenhang mit dem vorgeschlagenen "Mittelweg", jedoch nicht in unmittelbarer Beziehung zu diesem Vorschlag, seien die Empfehlungen BITTERLICHs (1959), betreffend schmale Aufnahmeflächen, in Erinnerung gebracht: "Bei schmalen Aufnahmeflächen (Befundeinheiten oder Teile derselben) ist darauf zu achten, daß der größte Grenzkreis (in diesem Falle konzentrische Kreise) nicht über die Parzellengrenze hinausreichen darf. Die Zerlegung einer Vollkreiszahlung in zwei Halbkreiszahlungen schafft günstige Aushilfe".)

Die grundlegenden Unterschiede in der rechnerischen Bearbeitung zwischen Stichprobeinventuren mit starren Probekreisen und Stichprobeinventuren, welche sich der variablen Probekreistechnik bedienen, liegen einmal darin, daß man im ersteren Falle die Merkmalswerte

$$\sum_{j=1}^m v_j = v$$

(Summe der Einzelstamm Massen der Probefläche) und im zweiten Falle die Merkmalswerte

$$\sum_{j=1}^m (fh)_j = u$$

(Formhöhen Summe der einer Punktprobe zugeordneten Stämme) in Rechnung stellt. Ein weiterer Unterschied liegt darin, daß man mit Rücksicht auf die Berechnung der Einzelstamm Massen starrer Probe flächen aus berechneten Formfunktionen zweckmäßigerweise die entsprechenden Volums- bzw. Kubierungsfunktionen herleitet, während es bei Anwendung der variablen Probekreistechnik der zweckvollere Weg ist, aus Formfunktionen Gleichungen zur Bestimmung der Formhöhen der einzelnen Stämme abzuleiten.

Die Schätzungen der Repräsentationsfehler nach der oben zitierten näherungsweise Berechnungsmethode, nämlich unter Zugrundelegung der innerhalb von Berechnungseinheiten gebildeten Kreuzdifferenzen, weisen eine wahrscheinliche Tendenz zu einer geringen Überschätzung dieser Fehler auf. Theoretische Beispiele zur Erläuterung dieser Überschätzung findet man in Tabelle 19 bei MATERN (1960). Man findet - unter den Annahmen, auf denen diese Tabelle basiert - bei einer Anordnung der Stichprobeneinheiten in einem quadratischen Probeflächennetz) und einem in der angenommenen exponentiellen Korrelationsfunktion zugrundegelegten Wert $h = 2$), daß die benutzte Formel zur Schätzung des Stichprobefehlers einen Durchschnittswert für diesen von 88,8 % des Fehlers der uneingeschränkten Zufallsstichprobe ergibt, wenn z. B. der wahre mittlere Fehler der systematischen Stichprobe 65,0 % des entsprechenden Fehlers der uneingeschränkten Zufallsstichprobe beträgt. Der ermittelte Stichprobefehler ergibt sich daher in diesem Falle im Durchschnitt mit 137 % des gesuchten wahren mittleren Fehlers einer systematischen Stichprobe.

Dieser grundsätzliche Weg zur Schätzung der Fehlervarianz unter Zuhilfenahme der quadrierten Kreuzdifferenzen kann dann mit Erfolg beschritten werden, wenn zumindest 30 aktive Quadruplets zur Verfügung stehen (MATERN 1962), und bei einer geringen Anzahl von aktiven Berechnungseinheiten die Befundeinheit keine zu langgestreckte Form aufweist, bzw. aus nicht zu vielen kleinen, relativ weit auseinanderliegenden Waldteilen besteht, nicht zu viele Randquadruplets entstehen. In solchen Fällen, das heißt bei relativ kleiner Anzahl von Berechnungseinheiten, etwa unter 100, ist es von Nutzen, wenn die Berechnungen (aus wirtschaftlichen Gründen wohl nur bei Vorhandensein einer automatischen Rechanlage) für die vier Grundvarianten der Quadrupletbildung durchgeführt werden und das quadratische Mittel der Fehlervarianzen,

$$s_{p(\text{ges})} = \sqrt{\frac{s_{pI}^2 + s_{pII}^2 + s_{pIII}^2 + s_{pIV}^2}{4}},$$

als Ergebnis der Gesamtschätzung betrachtet wird, oder eben alle nur möglichen aktiven Quadruplets, also alle vier Grundvarianten von Haus aus gemeinsam in die Berechnungen eingehen. (Von einer Stichprobeneinheit ausgehend, kann man vier verschiedene Muster - I, II, III, IV - der Quadrupletlagen bilden, je nachdem, ob diese eine Einheit als A-, B-, C- oder D-Einheit in das Muster eingeht. Faßt man alle vier Grundvarianten zusammen, dann geht jede Stichprobeneinheit, welche innerhalb der Grenzen der Befundeinheit liegt, insgesamt viermal in ein aktives Quadruplet ein. Die Stichprobeneinheiten außerhalb der Befundeinheit, also die gedachten "Schein-Stichprobeneinheiten" des über die Grenzen der Befundeinheit ausgedehnten gedachten Probenetzes, gehen 0-, 1-, 2- oder 3mal in ein aktives Quadruplet ein. Siehe Abb. 4.)

Stehen innerhalb der Befundeinheit nur relativ wenige Stichprobeneinheiten zur Verfügung, etwa weniger als 50, dann ist es vorteilhafter, wenn je zwei benachbarte Proben (Paare) anstelle von vier Proben eine Berechnungseinheit bilden. In diesem Falle werden anstelle der quadrierten Kreuzdifferenzen eben alle möglichen quadrierten einfachen Differenzen in Rechnung gestellt. (Berechnet man die Stichprobefehler getrennt für die zwei möglichen Muster der Differenzbildung - waagrecht und senkrecht -, so ist man überdies in der Lage festzustellen, ob in einer der Richtungen des Stichprobenetzes ein Trend anzunehmen ist.)

Bei Wahl des Gitternetzes einer systematischen Stichprobe kann es von Vorteil sein, wenn man in Anbetracht der Wirksamkeit der oben geschilderten Näherungsmethoden zur Schätzung der Fehlervarianzen den gedachten Linienabstand p und den Abstand der Punkte auf den Linien b (entgegen dem im Beispiel gewählten quadratischen Probenetz) so wählt, daß das Verhältnis

$$\frac{3 b}{2 \pi p}$$

annähernd den Wert 1 annimmt.

Hat man eine Befundeinheit (Region, Revier usw.) aus bestimmten Gründen (etwa verschieden hohe Genauigkeitsansprüche für die einzelnen Untereinheiten) nicht als Ganzes, sondern unterteilt nach Straten (Betriebsklassen, Altersklassen, Wuchsklassen usw., bezeichnet mit K, L, M, N), erhoben, so kann der Stichprobefehler des Volumens pro Hektar der gesamten Befundeinheit aus den innerhalb der einzelnen Straten ermittelten Stichprobefehlern berechnet werden, sofern die Stichprobefehler der einzelnen Straten als un-

korreliert betrachtet werden können. Dieser Fall kann angenommen werden, wenn die Probenetzdichte bzw. das Muster des Probenetzes von Stratum zu Stratum verschieden ist. Es ergibt sich dann

$$s_{pv(\text{ges})} = \sqrt{\frac{K_{pv}^s \cdot K^F + L_{pv}^s \cdot L^F + M_{pv}^s \cdot M^F + N_{pv}^s \cdot N^F}{(K^F + L^F + M^F + N^F)^2}}$$

Wurden jedoch in allen Straten die Stichprobeneinheiten nach einem gleichen systematischen Muster verteilt, so muß angenommen werden, daß die Stichprobefehler in den einzelnen Straten nicht unkorreliert sind. Bei der Schätzung der Fehlervarianz ist in diesem Falle nach MATÉRN (1962) anders vorzugehen.

Die Flächen der einzelnen Straten sind uns mit K^F , L^F , M^F und N^F genau bekannt. Als Schätzung für die Masse pro Hektar der einzelnen Straten haben wir erhalten K_{pv} , L_{pv} , M_{pv} , N_{pv} , und das Volumen pro Hektar der gesamten Befundeinheit ergibt sich mit

$$P_{v(\text{ges})} = \frac{K^F \cdot K_{pv}^p + L^F \cdot L_{pv}^p + M^F \cdot M_{pv}^p + N^F \cdot N_{pv}^p}{K^F + L^F + M^F + N^F}$$

Zur Schätzung des Stichprobefehlers von $p_{v(\text{ges})}$ bilden wir ein gleichmäßiges Netz (Muster) von Berechnungseinheiten (Quadruplets) über die ganze Befundeinheit. Bei der Bildung der x_A , x_B , x_C , x_D (bei starren Probeflächen) bzw. der y_A , y_B , y_C , y_D (bei Winkelzählproben - variable Proben) ist zu beachten, welchem Stratum die betreffende Stichprobeneinheit zugehört. Wenn eine Stichprobeneinheit A zum Stratum M gehört, dann ergibt sich

$$x_A = v_A - f \cdot M_{pv}^p \cdot e_A \quad (\text{starre Probekreise})$$

bzw.

$$y_A = u_A - l \cdot M_{pv}^p \cdot e_A \quad (\text{variable Proben})$$

Wenn nun etwa eine Stichprobeneinheit B aus Stratum M einen Anteil e_B^{\setminus} der Stichprobeneinheit und aus Stratum N einen Anteil e_B^{\sim} enthält (durch die Stichprobeneinheit verläuft die Grenze zwischen den Straten M und N), so ergibt sich allgemein

$$x_B = v_B - f \left(M_{pv}^p \cdot e_B^{\setminus} + N_{pv}^p \cdot e_B^{\sim} \right)$$

bei starren Probekreisen, bzw.

$$y_B = u_B - l \left(M_{pv}^p \cdot e_B^{\setminus} + N_{pv}^p \cdot e_B^{\sim} \right)$$

bei variablen Probeflächen, wobei die Summe $e_B^{\setminus} + e_B^{\sim}$ 1 beträgt.

Die Berechnung des Stichprobefehlers erfolgt nun analog den vorhin bei nicht stratifizierter Befundeinheit angegebenen Formeln. Die Stratifizierung wird in diesem Falle somit bei der Kalkulation des Stichprobefehlers der Masse pro Hektar der gesamten Befundeinheit (Region, Revier usw.) nur bei der Berechnung der Differenzen zwischen den "beobachteten" und den "erwarteten" Werten des Volumens, also den x- bzw. den y-Werten, berücksichtigt.

6.32 Verwendung von Form- und Kubierungsfunktionen in der forstlichen Forschung (Bestandesmassenermittlung mit Hilfe stehender Probestämme)

Im ertragskundlichen Forschungsbereich stößt man häufig auf die Schwierigkeit, daß die nicht unwesentliche massenbildende Komponente, der Formfaktor, nicht hinreichend genau bestimmt werden kann, da es nicht erwünscht oder nicht möglich ist, geeignete Probestämme aus dem zu untersuchenden Bestand zwecks Form- und Massenbestimmung zu fällen. Nehmen wir etwa einen Bestandesdüngungsversuch als Beispiel, dessen Beobachtungen man noch fortführen will, und daher der Zuwachsgang in der nachfolgenden Periode nicht durch einen mehr oder minder starken Durchforstungseffekt gestört werden soll. Oder stellen wir selbst die Massenermittlungsmethoden, die bei ertragskundlichen Dauerversuchen bei den Zwischenrevisionen, also vor der mit dem Abtrieb des Bestandes verbundenen Endaufnahme, zur Diskussion. Im ersten Falle sind wir gezwungen, die Bestandesmassenermittlung auf alle Fälle mit Hilfe stehender Probestämme durchzuführen, um absolute und brauchbare Werte zu erhalten. Im zweiten Falle könnten wir zumindest die für den betreffenden Bestand charakteristischen Werte der echten Formfaktoren - $f_{0,1h}$ - innerhalb des Bereiches der Durchmesser der beiden HOHENADLschen Mittelstämme des verbleibenden Bestandes aus den liegend gemessenen Probestämmen des bisher ausgeschiedenen Bestandes-Durchforstungsmaterials ermitteln, ohne erhebliche systematische Fehler zu riskieren. Gemäß KRENN (1944) müßten in diesem Falle, abgesehen von der genauen Bestandeskluppierung, nur die Baumhöhen und die "HOHENADLschen Formquotienten" - q_H - der Mittelstämme an einer entsprechend ausgewählten Zahl von stehenden Probestämmen ermittelt werden, um weiters die notwendigen Massen dieser Probestämme nach der Inhaltsformel

$$V = \frac{d^2 \cdot 1,3 \cdot \pi}{4} \cdot h \cdot \frac{\lambda \cdot 0,9}{q_H^2} = (g \cdot h \cdot f)$$

berechnen zu können.

Um die Werte für q_H bestimmen zu können, bedarf es der Messung von d in 0,9 der Länge des Stammes, vom Wipfel her gerechnet, also

$d_{0,9}$. Dieser Durchmesser ist entsprechend der in dieser Arbeit verwendeten Schreibweise identisch mit $d_{0,1h}$, also d in $0,1$ der Baumhöhe, vom Boden ab gerechnet; ebenso ist $\lambda_{0,9}$ identisch mit $f_{0,1h}$. Wir erhalten also

$$q_H = \frac{d}{d_{0,1h}} \quad (= \frac{d_{1,3}}{d_{0,9}},$$

entsprechend KRENN) und weiters

$$f = \frac{f_{0,1h}}{q_H^2}$$

(entspricht

$$f_{1,3} = \frac{\lambda_{0,9}}{q^2}$$

bei KRENN) für die einzelnen Probestämme. Wir mußten an den stehenden Probestämmen außer den üblichen Werten d und h auch noch den $d_{0,1h}$ (bei relativ hohen Bäumen unter Zuhilfenahme einer Leiter oder mit Hilfe eines optischen Gerätes) bestimmen.

Gehen wir, gemäß KRENN-PRODAN (1944), noch einen Schritt weiter und bestimmen auch die echte Schaftholzformzahl $\lambda_{0,9} = f_{0,1h}$ aus dem echten Formquotienten

$$\eta_{0,5} = k_{0,5h/0,1h} = \frac{d_{0,5h}}{d_{0,1h}}$$

unter Zuhilfenahme der bekannten Beziehung $\lambda_{0,9} = f(\eta_{0,5})$, (als allgemeine Beziehungsgleichung gilt gemäß KRENN-PRODAN

$$\lambda_{0,9} = 0,894 \eta_{0,5} - 0,126),$$

so müssen wir nunmehr auch noch $d_{0,5h}$ mit Hilfe eines geeigneten optischen Gerätes an den stehenden Probestämmen ermitteln.

Wenn man sich einmal dazu entschlossen hat, zumindest $d_{0,1h}$ oder auch $d_{0,5h}$ an stehenden Probestämmen zu bestimmen, bedeutet es keinen nennenswerten Aufwand an Zeit, wenn man an den ausgewählten Probestämmen gleich drei obere Durchmesser, nämlich $d_{0,1h}$, $d_{0,3h}$ und $d_{0,5h}$ ermittelt.

((Die Untersuchungsergebnisse von ALTHERR (1960) ermutigen überdies zu der Annahme, daß, in Analogie zur sektionsweisen Kubierung mit relativen Sektionslängen, die Wahl von drei Durchmessern im untersten Schafteil anstelle des $d_{0,1h}$ eine nicht unbeachtliche Reduktion zu erwartender systematischer Abweichungen bewirken würde. Man könnte demzufolge anstelle von $d_{0,1h}$ den Wert

$$d_{0,1 h}(\text{korr.}) = \frac{d^2_{0,033 h} + d^2_{0,1 h} + d^2_{0,167 h}}{3}$$

als Eingangsgröße in unabhängige Variable von Form- bzw. Kubierungsfunktionen in Betracht ziehen, oder diese zusätzlichen Durchmesser in anderen als den bisher vorgeschlagenen Funktionen als variable Werte verwenden. Eine zusätzliche Bestimmung der Durchmesser in 0,033 und 0,167 der Höhe stehender Probestämme würde bei ertragskundlichen Untersuchungen den geringen Mehraufwand an Zeit gewiß rechtfertigen. An dieser Stelle scheint es abermals angebracht, Schlüsse aus der Arbeit von HEMPEL (1951) zu ziehen. "Aus den Darstellungen der Schaftinhaltskurven nach relativen Koordinaten mit den als Vergleichsflächen gewählten Querschnitten q^2_{666} bzw. q^2_{950} nach SMALIAN geht eindeutig hervor, daß mit zunehmendem Alter wesentliche Formveränderungen, vor allem im Stockteil des untersuchten Fichtenstammes, aber auch im Bereich der HOHENADL'schen Mittelsektionen 0,6 - 0,4 L (entspricht 0,4 h - 0,6 h) zu verzeichnen sind."

Eine vorgeschlagene Verwendung von $d_{0,033 h}$ und $d_{0,167 h}$ zusätzlich zu $d_{0,1 h}$ scheint unter dem Gesichtspunkt vergleichender Formuntersuchungen, mit Rücksicht auf die starken Formveränderungen im Bereich des Stockteiles, daher zweifellos angebracht. Daß bei Verwendung von Form- bzw. Kubierungsfunktionen im Zuge ertragskundlicher Untersuchungen vor allem auch der $d_{0,5 h}$ mit einbezogen werden soll, scheint ebenfalls mit der Feststellung HEMPEL's in bezug auf die beobachteten Formveränderungen im Bereich des Mittelschaftes somit unbedingt gerechtfertigt. Bei ertragskundlichen Untersuchungen sollte man sich also auf keinen Fall mit einfachen Funktionen, so etwa vom Typ (22), wie sie für Waldinventuren empfohlen wurden, begnügen.)

Für jene Durchmesser, die nicht mehr vom Boden aus gemessen werden können, wird man sich ebenso wie bei Forstinventuren des Spiegelrelaskopes bedienen oder mit Rücksicht der noch höher anzusetzenden Genauigkeitsansprüche bei ertragskundlichen Untersuchungen ein Zeiß-Teletop oder etwa den Dendrometer von BARR and STRAUD verwenden.

Hat man diesen Schritt unternommen, so ist man in der Lage, gemäß Funktion (38)

$$f = a + b_1 \frac{d^2_{0,3 h}}{d^2} + b_2 \frac{d_{0,1 h} \cdot d_{0,5 h}}{d^2} + b_3 \frac{h}{d^2}$$

((bzw. Funktion (38 a)

$$f = a + b_1 \frac{d^2_{0,3 h}}{d^2} + b_2 \frac{d_{0,1 h} \cdot d_{0,5 h}}{d^2}$$

bei alleiniger Verwendung für schwache Durchmesserklassen)) oder mit Hilfe analoger um weitere Variable erweiterter Funktionen, die unechten Formfaktoren der einzelnen Probestämme zu errechnen, bzw. direkt deren Schaftinhalte aus den daraus abgeleiteten Volumsfunktionen zu ermitteln.

Voraussetzung ist allerdings, daß die Koeffizienten dieser Funktionen für ein größeres oder besser kleineres Wuchsgebiet einer Baumart, nach Möglichkeit nach Dimensionsklassen untergliedert (etwa Stärkeklassen), einmal bekannt sind, also aus einer genügenden Anzahl von liegend gemessenen Probestämmen ermittelt und die entsprechenden Funktionen getestet wurden. Für österreichische Verhältnisse können derartige Beziehungsgleichungen ebenso wie die für die Österreichische Forstinventur benötigten aus dem eingangs erwähnten Probestammmaterial der Probestammerhebung 1957 - 1960 hergeleitet werden.

Die zweifellos besten Resultate wird man erzielen, wenn man zur Berechnung derartiger Funktionen liegend aufgemessenes Probestammmaterial aus dem "Anwendungsbestand" (Anwendungskollektiv) oder aus angrenzenden gleichartigen unter gleichen bzw. sehr ähnlichen Wuchsbedingungen aufgewachsenen Beständen (Berechnungskollektiv) zugrunde legen kann. Gleichen sich Anwendungs-kollektiv und Berechnungskollektiv hinsichtlich der allgemeinen Wuchsbedingungen, Alter und Stammzahlverteilung, so wird man mit einer einzigen Funktion das Auslangen finden. Eine Untergliederung des Materials bzw. die Berechnung von nach Dimensionsklassen getrennten Beziehungsgleichungen wird sich in einem solchen Falle wohl erübrigen.

Stehen einmal geeignete Form- bzw. Kubierungsfunktionen zur Verfügung, so könnte die Ermittlung des stehenden Vorrates eines bestimmten Bestandes wie folgt vor sich gehen:

- a) Messung der Brusthöhendurchmesser aller Stämme auf mm oder zumindest nach 1 cm-Durchmesserstufen.
- b) Zusätzliche Messung von h , $d_{0,1h}$, $d_{0,3h}$ und $d_{0,5h}$ (eventuell auch $d_{0,033h}$ und $d_{0,167h}$) von jedem n -ten Stamm einer Baumart. (Die Anzahl der erforderlichen stehenden Probestämme hängt von der Homogenität und der geforderten Stichprobegenauigkeit ab.)
- c) Errechnung der Einzelstammmassen der stehenden Probestämme, getrennt nach Baumarten (und Dimensionsklassen), mit Hilfe der entsprechenden Kubierungsfunktionen bzw. über den Umweg der Formfunktionen.

- d) Berechnung der Massenkurven pro Baumart über d , etwa als Parabel zweiter Ordnung der allgemeinen Form

$$v = a + b_1 \cdot d + b_2 \cdot d^2.$$

- e) Gliederung der Kluppierungsergebnisse nach 1 cm-Durchmesserstufen und Berechnung der Masse des Gesamtbestandes über die getrennt nach Baumarten aus der Massenkurve für die einzelnen Durchmesserstufenmittel festgestellten Mittelstammmassen mal Anzahl der Stämme pro Durchmesserstufe.

Ist man auf manuelle Auswertung von Erhebungsdaten angewiesen, so muß zweifellos dem "arithmetischen Verfahren von HOHENADL" (siehe KRENN 1944), mit Rücksicht auf die hohe erzielbare Genauigkeit und die relativ geringe erforderliche Meß- und Rechenarbeit, vor anderen Bestandesmassenermittlungsverfahren der Vorzug gegeben werden. Man bestimmt demnach aus dem Kluppierungsergebnis die Durchmesser der beiden HOHENADL'schen Mittelstämme d_- und d_+ (pro Baumart) und mißt an den proportional den Kreisflächen (in Ermangelung der Massen) in den Durchmesserbereichen von d_- und d_+ aufgeteilten zwei Gruppen von stehenden Probestämmen die Werte d , h , $d_{0,1h}$, $d_{0,3h}$ und $d_{0,5h}$. Man berechnet nun das Volumen der einzelnen Probestämme unter Zuhilfenahme bereits bekannter zutreffender, etwa aus im Zuge der Aufarbeitung der Betriebsanfänge gewonnenen Meßunterlagen hergeleiteten Kubierungs- bzw. Volumsfunktionen und bestimmt durch graphischen Ausgleich oder Interpolation das den genau errechneten d_- und d_+ entsprechende Volumen v_- und v_+ der beiden Mittelstämme. Dieser Vorgang geht so vonstatten, daß man die errechneten Massen der Probestämme über den zugehörigen Kreisflächen aufträgt und durch eine Massengerade ausgleicht. Das gesuchte Volumen der beiden Mittelstämme findet man dann über den Kreisflächen, welche den genau errechneten d_- und d_+ entsprechen.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, daß man in analoger Weise, wie bei KRENN (1944) auf Seite 104 für h und q^2 dargestellt, die beiden Interpolationsfaktoren k bestimmt und die "korrigierten Gruppenmittelwerte" von v_- und v_+ durch Multiplikation der vorläufigen Gruppenmittelwerte mit diesem Faktor errechnet. Es wird im Falle der Bestimmung der "korrigierten Gruppenmittelwerte" von v_- und v_+ dabei aber von Vorteil sein, den Interpolationsfaktor nicht über die Durchmesserwerte, sondern über die entsprechenden Kreisflächenwerte zu berechnen. Im erwähnten Rechenschema treten in diesem Falle anstelle von h die für die einzelnen Probestämme aus den Kubierungsfunktionen errechneten v -Werte.

Das Gesamtvolumen des Bestandes beträgt dann in beiden Fällen

$$V = \frac{v_- + v_+}{2} N.$$

Unter Verwendung der in dieser Arbeit diskutierten Form- bzw. Volumsfunktionen verkürzt und vereinfacht sich der von KRENN ausführlich beschriebene Weg der Massenermittlung nach dem HOHENADLschen Verfahren nicht unwesentlich.

Bedenkt man, daß sich im Laufe des Bestandesalters ganz allgemein (wie man dies bei einer Dauerversuchsfläche beobachten kann), sowohl die Höhenkurve als auch die Kurve der Formfaktoren und somit auch die Bestandesmassenkurve verlagert, so ist leicht einzusehen, daß es bei Verwendung von Form- oder mehr noch von Kubierungs- bzw. Volumsfunktionen im Rahmen der ertragskundlichen Forschung, wie schon erwähnt, gegebenenfalls notwendig erscheint, pro Baumart die entsprechenden Funktionen bzw. Gleichungen nicht nur nach Durchmesserklassen, sondern eventuell weiter nach Altersklassen gegliedert zu berechnen oder für ein begrenztes Wachstumsgebiet oder besser noch für eine bestimmte Kategorie von Beständen zu ermitteln, um systematische Fehler weitestgehend zu vermeiden.

Entschließt man sich im Rahmen der ertragskundlichen Forschung zur Ermittlung und Verwendung von Form- bzw. Kubierungsfunktionen, welche neben d und h die variablen Eingangswerte $d_{0,1h}$, $d_{0,3h}$ und $d_{0,5h}$ enthalten, und beachtet man den oben erwähnten Umstand, dann bringt diese Art der Bestandesmassenermittlung mit Hilfe stehender Probestämme nicht nur eine erhebliche Erleichterung und Vereinfachung in der Bestimmung der wahrscheinlichsten Masse eines Bestandes mit sich, sondern läßt gegenüber älteren Massenermittlungsverfahren auch einen Gewinn an Präzision erwarten.

7 ZUSAMMENFASSUNGEN

7.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein neuer Weg der Bestimmung individueller Schaffformfaktoren und damit die Möglichkeit einer möglichst genauen Schätzung des Schaffholzvolumens stehender Waldbäume aufgezeigt. Vorgeschlagen werden Formfunktionen und daraus abgeleitete Volumsgleichungen, welche auf die Merkmalswerte "Brusthöhendurchmesser - d -, "Baumhöhe" - h - und "obere Durchmesser" - $d_{0,3h}$ - aufbauen.

Für die Messung der oberen Durchmesser wird vor allem eine optische "Schätzung" mit Hilfe des Spiegelrelaskopes nach BITTERLICH in Erwägung gezogen.

Im Hinblick auf eine möglichst genaue, von einseitigen Fehlern möglichst freie, bestandesindividuelle Massenbestimmung im Zuge von Waldinventuren, wird für die Baumart Fichte eine arithmetische Schaffformfunktion

$$f = a + b_1 \frac{d_{0,3h}}{d} + b_2 \frac{h}{d^2}$$

als um weitere Variable erweiterbarer Funktionsgrundtyp und eine daraus abgeleitete Volumsgleichung

$$v = a \cdot d^2 \cdot h + b_1 \cdot d \cdot d_{0,3h} \cdot h + b_2 \cdot h^2$$

vorgeschlagen. Die Standardabweichung von dieser Formfunktion (beobachtet von den berechneten Einzelwerten) betrug für verschiedene Gruppierungen des Berechnungsmaterials fast ausnahmslos weniger als $\pm 5\%$. Ähnliche Resultate können mit einer Formfunktion

$$f = a + b_1 \frac{d^2_{0,3h}}{d^2} + b_2 \frac{h}{d^2}$$

als Grundtyp einer Schaffformfunktion und einer daraus abgeleiteten Volumsgleichung erzielt werden.

Gegenüber der Verwendung von Massentafeln oder den daraus abgeleiteten Massentarifen, aber auch gegenüber Funktionen, welche nur d und h als veränderliche Merkmalswerte enthalten, bringen derartige arithmetische Obere-Durchmesserfunktionen einen erheblichen Genauigkeitserfolg.

Für andere Nadelbaumarten als Fichte und Laubbaumarten mit annähernd durchlaufendem Schaft versprechen die diskutierten Funktionen, welche als die entscheidende unabhängige Variable einen

unechten Formquotienten

$$\frac{d_{0,3h}^d}{d}$$

enthalten, ähnliche Erfolge.

Mit Rücksicht auf die praktische Anwendung derartiger Form- bzw. Kubierungsfunktionen enthält diese Arbeit Hinweise über die Bedeutung von Meßfehlern der Merkmalswerte d , $d_{0,3h}$ und h . Besondere Sorgfalt ist der "Schätzung" des $d_{0,3h}$ zu widmen, um systematische Abweichungen zu vermeiden.

Bei Anwendung der "variablen Probekreistechnik" nach BITTERLICH empfiehlt es sich, mit Rücksicht auf den speziellen Charakter dieses Verfahrens und des Berechnungsganges, aus den errechneten Schaftformfunktionen, anstelle von Volumsgleichungen, Gleichungen für die "Schätzung" der Formhöhen der Einzelstämme abzuleiten.

Im Zusammenhang mit der Anwendung der erwähnten Form-, Formhöhen- und Volumsfunktionen im Zuge von Waldinventuren, wird das Prinzip einer von MATERN entwickelten Näherungsmethode zur Schätzung von Stichprobefehlern bei "systematischer Probenwahl" erläutert.

Abschließend wird die Anwendung von Form- bzw. Kubierungsfunktionen bei bestimmten ertragskundlichen Massenermittlungen mit Hilfe stehender Probestämme für jene Fälle erörtert, wo es nicht möglich ist, etwa im Sinne KRENN-PRODAN, genaue Form- und Massenbestimmungen aus Betriebsanfällen oder anlässlich des Abtriebes, auf Grund von sektionsweisen Aufmessungen an liegenden Probestämmen zu gewinnen. Für derartige spezielle ertragskundliche Untersuchungen mit den relativ hohen Genauigkeitsansprüchen, erweist sich eine Schaftformfunktion

$$f = a + b_1 \frac{d_{0,3h}^2}{d^2} + b_2 \frac{d_{0,1h} \cdot d_{0,5h}}{d^2} + b_3 \frac{h}{d^2}$$

und die daraus abgeleitete Volumsgleichung als vorteilhaft.

7.2 Summary

In this paper a new way is demonstrated to determine individual stem-form factors, thus giving the possibility of estimating as exactly as possible the stemwood volume of standing trees. The suggestions concern form functions and volume equations derived from, on the basis of the feature values "diameter breast-high" - d -, "tree height" - h -, and "upper diameters" - $d_{0,3h}$.

For measuring the upper diameters, above all, an optical "estimate" by means of BITTERLICH's Spiegelrelaskop (Mirror Relascope) is considered.

With regard to a volume determination of individual standings in the course of forest inventories, being as accurate as possible and free of bias, for the species "Norway Spruce" an arithmetic stem-form function

$$f = a + b_1 \frac{d_{0,3h}}{d} + b_2 \frac{h}{d^2},$$

as a basic function type which may be extended by further variables, and a volume equation

$$v = a \cdot d^2 \cdot h + b_1 \cdot d \cdot d_{0,3h} \cdot h + b_2 \cdot h^2,$$

derived therefrom, is suggested. The standard deviation of this function (st. d. of the observed formfactors of individual trees from those calculated) computed for various groupings of the computational material with almost no exception was less than $\pm 5\%$. Similar results may be obtained by a function

$$f = a + b_1 \frac{d_{0,3h}^2}{d^2} + b_2 \frac{h}{d^2}$$

as basic type of a stem-form function, and a volume equation derived from it.

As compared with the use of volume-tables and the tariffs derived therefrom, but also with functions containing only d and h as variables, arithmetical upper-diameter functions of this kind involve a considerable gain of precision.

For coniferous species other than spruce and for broadleaved trees with an approximately continuous stem, the functions discussed, containing as the decisive independent variable an improper form-quotient

$$\frac{d_{0,3h}}{d}$$

promise similar success.

With regard to the practical application of form functions and cubic volume functions of this kind, the present paper contains references to the importance of measuring errors in the feature values d , $d_{0,3h}$, and h . Particular care has to be paid to the "estimation" of $d_{0,3h}$ in order to avoid systematic errors.

In applying the "variable plot-sampling technique" (point-sampling technique) according to BITTERLICH, it is recommended, with regard to the special character of this procedure and the method of calculation, to derive equations for "estimates" of individual-stem form heights, from the stem form functions calculated, instead of the volume equations.

In connection with the application of the above-mentioned form, form-height, and volume functions in the course of forest inventories, the principle of an approximative method developed by MATERN for estimating sampling error from the data of a systematic sample is explained.

Finally the application of form functions and cubic volume functions in definite volume-calculations for purposes of productivity research with the aid of standing model trees is discussed for such cases in which it is not possible to obtain exact form and volume determinations from the operational yield or on occasion of logging operations (in the sense of KRENN-PRODAN) on the basis of sectional measurements on felled sample-trees. For such special yield research work with its high requirements of precision, a stem-form function

$$f = a + b_1 \frac{d_{0,3h}^2}{d^2} + b_2 \frac{d_{0,1h} \cdot d_{0,5h}}{d^2} + b_3 \frac{h}{d^2}$$

and the volume equation derived from, prove favourable.

7,3 Résumé

Dans le présent ouvrage, on démontre une nouvelle manière de déterminer des coefficients de forme pour des tiges individuelles, et par là la possibilité d'une estimation aussi exacte que possible du volume de bois de tige d'arbres sur pied. On propose des fonctions de forme et des équations de volume dérivées de celles-là, se fondant sur les valeurs d'indice "diamètre à hauteur d'homme" - d -, "hauteur totale de l'arbre" - h - et "diamètres supérieurs" - $d_{0,3h}$.

Pour le mesurage des diamètres supérieurs on prend en considération, avant tout, une "estimation" optique à l'aide du relascope à miroir (Spiegelrelaskop) de BITTERLICH.

En vue d'une détermination de volume aussi exacte et aussi exempte d'erreurs systématiques que possible, de peuplements individuels au cours d'inventaires forestiers, on propose pour l'essence Epicéa une fonction arithmétique de conformation de la tige

$$f = a + b_1 \frac{d_{0,3h}}{d} + b_2 \frac{h}{d^2}$$

comme type fondamental qu'on peut compléter par des variables ultérieures et une équation de volume dérivée de celle-là

$$v = a \cdot d^2 \cdot h + b_1 \cdot d \cdot d_{0,3h} \cdot h + b_2 \cdot h^2.$$

La déviation carrée moyenne entre les valeurs observées et calculées de cette fonction de forme était presque sans exception, pour des groupements différents du matériel d'analyse, inférieur à $\pm 5\%$. On peut atteindre des résultats semblables par une fonction de forme

$$f = a + b_1 \frac{d_{0,3h}^2}{d^2} + b_2 \frac{h}{d^2}$$

comme type fondamental d'une fonction de conformation de la tige et une équation de volume dérivée de celle-là.

En comparaison de l'emploi de tarifs à deux entrées et de tarifs à une entrée qui en dérivent, mais aussi en comparaison de fonctions ne contenant que d et h comme valeurs d'indice variables, les fonctions arithmétiques de diamètres supérieurs de ce genre apportent un gain considérable en précision.

Pour les essences résineuses autres que l'épicéa, ainsi que pour les essences feuillues à tige approximativement continue, les fonctions que nous venons de discuter, contenant comme variable indépendant décisive un quotient de forme non véritable

$$\frac{d_{0,3h}}{d},$$

promettent des succès analogues. Eu égard à l'application pratique de ce genre de fonctions de forme ou de cubage, cet ouvrage contient encore des incications concernant l'importance d'erreurs de mesure dans les valeurs d'indice d , $d_{0,3h}$ et h . Il faut prêter une attention particulière à l'estimation de $d_{0,3h}$ pour éviter des erreurs systématiques.

En employant la "méthode des cercles-échantillons variables" ("variable Probekreistechnik") d'après BITTERLICH, il est recommandé vu le caractère spécial de cette méthode et du procédé de calcul, de dériver de fonctions calculées de conformation de la tige, au lieu d'équations de volume, des équations permettant une "estimation" des hauteurs rectifiées par le coefficient de forme pour des arbres individus.

En rapport avec l'emploi des fonctions de la forme mentionnées ci-dessus, de la hauteur rectifiée par le coefficient de forme et enfin du volume, au cours d'inventaires forestiers, on explique le principe d'une méthode d'approximation mise au point par MATERN pour estimer les erreurs d'échantillonnage lors du "choix systématique des échantillons".

En concluant, on discute l'emploi de fonctions de forme et de cubage pour certaines déterminations de volume au cours de recherches de production à l'aide d'arbres-échantillons sur pied, pour les cas où il n'est pas possible d'obtenir, des déterminations exactes de formes et de volumes à partir de déchets d'exploitation ou à l'occasion de la coupe au moyen de mesures par sections sur des arbres échantillons abattus, par exemple au sens de KRENN-PRODAN. Pour ce genre de recherches spéciales dans le domaine de la production, avec leurs exigences relativement hautes en fait de précisions, une fonction de conformation de la tige

$$f = a + b_1 \frac{d_{0,3h}^2}{d^2} + b_2 \frac{d_{0,1h} \cdot d_{0,5h}}{d^2} + b_3 \frac{h}{d}$$

et l'équations de volume qui en dérive s'avèrent avantageuses.

Р е з ю м е

В данной работе указывается новый путь определения факторов индивидуальных форм ствола и этим дается возможность самой точной оценки объёма стволовой древесины стоящих лесных деревьев. Предлагаются функции формы и выведенные из этого уравнения объёма, которые основаны на отличительных значениях "диаметр на высоте груди" - d -, "высота дерева" - h - и "верхний диаметр" - $d_{0,3h}$ -.

Для измерения верхнего диаметра принимается во внимание прежде всего оптическая оценка с помощью зеркального реласкопа по Б и т т е р л и х у

В ходе возобновления насаждений, предлагается для древесной породы ель арифметическая функция формы ствола

$$f = a + b_1 \frac{d_{0,3h}}{d} + b_2 \frac{h}{d^2}$$

и выведенное из этого уравнение объёма

$$v = \cdot d^2 \cdot h + b_1 \cdot d \cdot d_{0,3h} \cdot h + b_2 \cdot h^2,$$

чтобы достигнут по возможности точного определения массы, индивидуально по массе, которое свободно от односторонних ошибок. Среднее квадратное отклонение наблюдаемых значений составляло от вычисленных значений этой функции формы почти без исключения меньше $\pm 5\%$ для разных группировок вычисленного материала. Подобных результатов можно добиться с помощью формы

$$f = a + b_1 \frac{d_{0,3h}^2}{d} + b_2 \frac{h}{d^2}$$

и уравнения объёма, выведенных из этого.

Такие арифметические верхние диаметр-функции дают значительное уведение точности, по сравнению с употреблением массовых таблиц или выведенных из них тарифов, а так же по сравнению функциями, которые содержат только d и h , как непостоянные входные значения.

Рассматриваемые функции, которые содержат ненастоящее, формовое частное - $\frac{d_{0,3h}}{d}$ - как решающую, независимую переменную величину, подаёт надежду получить подобные результаты для других, хвойных пород деревьев, как ель, и для лиственных пород деревьев со стволом почти без ветвей.

Эта работа содержит указания на значение ошибок измерения ценностей признаков d , $d_{0,3h}$ и h , учитывая практическое применение таких формовых функций, или функций для определения объёма. Надо уделять особое внимание "оценке" "верхнего диаметра" $d_{0,3h}$, чтобы избежать систематических отклонений.

Применяя "переменную технику пробного круга" (варианте пробекрейстехник") по Биттерлиху, рекомендуется, учитывая особенный характер этого метода и расчётного хода, выводить уравнения из вычисленных функций формы ствола, для "оценок" видовых высот отдельных деревьев, вместо объёмных уравнений.

Принцип приближённого метода, разработанный по МАТЁРНУ для оценки ошибок пробы на выборку при "систематическом выборе пробы" объясняется в связи с применением упомянутых функций формы, видовой высоты и объёма, в ходе лесных инвентаризаций.

В заключение рассматривается применение формовых функций или функций для определения объёма при определённых таксациях с точки зрения учения о приросте с помощью стоящих модельных стволов в таких случаях, где в смысле КРЕННА - ПРОДАНА, невозможно, получить точные определения формы и массы при вырубке, на основании секционных измерений на лежащих модельных стволах. Для таких специальных исследований, с точки зрения учения о приросте с относительно высокими требованиями точности, оказывается выгодной функция стволовой формы

$$f = a + b_1 \frac{d^2_{0,3h}}{d^2} + b_2 \frac{d_{0,1h} \cdot d_{0,5h}}{d^2} + b_3 \frac{h}{d^2}$$

и уравнение объёма, выведенное из этого.

- ALTHERR, E. Vereinfachung des Hohenadlschen Massenermittlungsverfahrens durch Verwendung des "echten" Formquotienten. Mitt. d. Württbg. forstl. Versuchsanst. 1953, Bd. X, Heft 2.
- ALTHERR, E. Die Genauigkeit verschiedener Verfahren der Sektionierung in absoluten und relativen Schaftlängen. Allg. Forst- u. Jagdzeitg., 131. Jg., Heft 10, 1960.
- ASSMANN, E. Waldertragskunde. BLV-Verlagsgesellschaft München Bonn Wien, 1961.
- BAUR, F. Holzmeßkunst. II. Aufl., Verlag Braumüller, Wien, 1875 (1860).
- BITTERLICH, W. Das neue Relaskop. Preßlers Richthöhe in neuem Licht. Allg. Forstztg. 1958, 69. Jg., Folge 23/24; und 1959, 70. Jg., Folge 5/6.
- BITTERLICH, W. Relaskoptechnik. Centralbl. f. d. ges. Forstw. 76. Jg., Heft 1, 1959.
- BITTERLICH, W. Vorteile der variablen Probekreistechnik. Allg. Forstztg., Folge 11/12, Juni 1960.
- BRUCE, D. and SCHUMACHER, F. Forest Mensuration. Mc. Graw-Hill Book Comp. Inc. New York, 1950.
- DITTMAR, O. Formzahluntersuchungen mit dem Ziel der Verbesserung von Holzmassen- und Zuwachsermittlung langfristiger forstlicher Versuchsfelder. Akademie-Verlag Berlin 1958.
- DWYER, P. S. Linear Computations. John Wiley and Sons, Inc., New York 1951.
- FISCHER, R. A. Statistische Methoden für die Wissenschaft, Oliver and Boyd, Edingburgh, 12. Aufl., 1956.
- GROSENBAUGH, L.R. Plotless timber estimates - new, fast, easy. Journal of Forestry 50 32 - 37, 1952.
- GRUNDNER und SCHWAPPACH Massentafeln zur Bestimmung des Holzgehaltes stehender Waldbäume und Waldbestände. 10. Aufl., Verlag Paul Parey Berlin und Hamburg, 1952.
- GÜDE, H. Der Ernteverlust als Summe einzelner Faktoren. Fw. Cbl., 76. Jg., 1/2, 1957.

- HEMPEL, F. Zum Ausbau der Schaffformforschung. Allg. Forstztg., 62. Jg., Folge 3/4, 13/14 und 17/18, 1951.
- HOHENADL, W. Neue Grundlagen der Holzmessung. Fw. Cbl. 1922/1923.
- HOHENADL, W. Ziele und Methoden der forstlichen Forschung oder "praktischer Hinweis, daß die Mathesis bei dem Forstwesen unentbehrliche Dienste tue". (Öltelt 1765), Forstl. Cbl., 1923 und 1924, 45 und 46.
- HOHENADL, W. Die Berechnung des Holzgehaltes von Beständen mit Hilfe von zwei Mittelstämmen. Cbl. f. d. ges. Forstw., 1929, 55.
- HOHENADL, W. Einführung in die Bestandesberechnung mit Hilfe von zwei Mittelstämmen. Forstw. Cbl., 1939, 61.
- HOSEMANN, H. Die Grundlagen der statistischen Methoden für Mediziner und Biologen. Georg Thieme Verlag Stuttgart, 1949.
- HOSSFELD, W. Niedere und höhere praktische Stereometrie, Leipzig, 1812.
- JONES, Howard, L. Linear Regression Functions with neglected variables. Journal of the American Statistical Association, Vol. 41: 1946.
- KRENN, K. Die Bestandesmassenermittlung mit Hilfe stehender Probestämme. Mitt. aus d. Badischen Forstl. Versuchsanst. d. Univ. Freiburg i. Br. Bd. 8, 1944.
- KRENN, K. und
PRODAN, M. Die Bestimmung der echten Schaffholzformzahl und Ausbauchungsreihe aus dem echten Formquotienten. Mitt. aus d. Badischen Forstl. Versuchsanst. d. Univ. Freiburg i. Br., Bd. 8 1944.
- KUNZE, M. Neue Methode zur raschen Berechnung der unechten Schaffholzformzahl für Kiefer und Fichte. Dresden, 1891.
- LINDER, A. Statistische Methoden für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure. 2. Aufl., Verlag Birkhäuser Basel, 1951.

- MATÉRN, B. Method of Estimating the Accuracy of Line and Sample Plot Surveys. Meddelanden från Statens Skogsforskningsinstitut, Bd. 36, Nr. 1, 1947.
- MATÉRN, B. Special Variation. Meddelanden från Statens Skogsforskningsinstitut, Bd. 49, Nr. 5, 1960.
- MATÉRN, B. Estimating the Standard Error in Stratified Sampling with systematic Sampling in Side Strata. Department of Forestry Biometry, Royal College of Forestry, Stockholm 51, from Dec. 1962 with an addendum from Feb. 1963 (unpublished).
- MEYER, H. A. Forest Mensuration. Valley Publishes State College, Pennsylvania, 1944.
- MITSCHERLICH, G. Untersuchungen über die Derbholzformzahl und neue Wege zur ihrer Ermittlung. Mitt. aus Forstwirtsch. u. Forstwissensch., XIII. Jg., Heft 4, 1942.
- NÄSLUND, M. Funktionen und Tabellen zur Kubierung stehender Bäume. Kiefer, Fichte und Birke in Nordschweden. Meddelanden från Statens Skogsförsöksanstalt, Häfte 32, Nr. 4, 1940.
- NÄSLUND, M. Functions and Tables for Computing the Cubic Volume of Standing Trees. Meddelanden från Statens Skogsforskningsinstitut, Bd. 36, Nr. 3, 1947.
- NOSSEK, E. Über Formzahlen. Cbl. f. d. ges. Fw., 1889.
- PERSSON, O. Om Lösningen av ett Överbestämt Ekvationssystem enligt minsta Kvadratmetoden. Nordisk Matematisk Tidskrift, Bd. 6, Oslo, 1958.
- PETTERSON, H. Die Massenproduktion des Nadelwaldes. Meddelanden från Statens Skogsforskningsinstitut, Bd. 45, Nr. 1, 1955.
- POLLANSCHÜTZ, J. Eine neue Form- bzw. Kubierungsfunktion, IUFRO-Referat, 25/11-s/3, 1961.
- PRODAN, M. Statistische und mechanische Untersuchungen über die Schaftform. Fw. Cbl., 1944.

- PRODAN, M. Messung der Waldbestände. J. D. Sauerländers Verlag, Frankfurt a. Main, 1951.
- PRODAN, M. Zuwachs- und Ertragsuntersuchung im Plen-
terwald. Dissertation (siehe ALTHERR, E.,
1953).
- PRYTZ, C. V. Massenermittlungsmethode von Rittmeister H.
Prytz. Allg. Forst- u. Jagdztg., 1888.
- SCHIFFEL, A. Form und Inhalt der Fichte. Mitt. aus d. Forstl.
Versuchswesen Österr., 1899.
- SCHIFFEL, A. Form und Inhalt der Lärche. Mitt. aus d. Forstl.
Versuchswesen Österr., 1905.
- SCHIFFEL, A. Form und Inhalt der Weißföhre. Mitt. aus d.
Forstl. Versuchswesen Österr., 1907.
- SCHIFFEL, A. Form und Inhalt der Weißtanne. Mitt. aus d.
Forstl. Versuchswesen Österr., 1908.
- SCHMITT, R. und Aufstellung von Massentafeln nach der Methode
SCHNEIDER, B. der kleinsten Quadrate. Mitt. d. Hessischen
Landesforstverwaltung, Bd. 2, 1959.
- SCHUBERG, K. Formzahlen und Massentafeln für die Weiß-
tanne. Verlag Paul Parey, Berlin, 1891.
- SPURR, St. H. Forest Inventory. The Ronald Press Company,
New York, 1952.
- STRZELECKI, H. Eine einfache Ermittlung von Schaftformzahlen.
Cbl. f. d. ges. Fw., 1883.
- SUTTER, H. Über die Genauigkeit der Durchmesserbestim-
mung mit dem Spiegelrelaskop. Allg. Forst-
ztg., 75. Jg., 1964, Folge 9/10.
- TISCHENDORF, W. Die Genauigkeit von Messungsmethoden und
Messungsergebnissen bei Holzmassenermitt-
lung. Forstw. Cbl., 1925.
- ZIMMERLE, H. Beiträge zur Biologie der Lärche. Mitt. d.
Württemb. Forstl. Versuchsanst., 1941.
- ZIMMERLE, H. Beiträge zur Biologie der Fichte. Mitt. d.
Württemb. Forstl. Versuchsanst., 1947.
- ZURMÜHL, R. Matrizen und ihre technische Anwendung.
Springen Verlag Berlin, 1964.

Bonitierungs- und Ertragstabeln für die Waldstandsaufnahme. Herausgegeben vom Bundesministerium für Land- und Forstwirtschaft, Wien, 1952.

Instruktionen der Österreichischen Forstinventur. Druck in Eigenregie der Forstlichen Bundesversuchsanstalt, Wien XIII, Schönbrunn-Tirolergarten, 1961 (1962).

9. BEILAGEN (TABELLEN)

Nr.	STAMMMESSUNG										LIEGENDESMESSUNGEN										D z s											
	Kronen-Kl.	Kronen-Fläche	Kronen-höhe	Stammabtrieb		Stamm		Stamm		Stamm		Stamm		Stamm		Stamm		Stamm		Stamm												
				H _{1,3}	H _{1,3} (1,3)	H ₁₀	BHD	Ri (20)	Alter (1,3)	D _{101H}	Ri (20)	Alter (20)	D _{101H}	Ri (20)	Alter (20)	D _{101H}	Ri (20)	Alter (20)	D _{101H}	Ri (20)		Alter (20)	D _{101H}	Ri (20)	Alter (20)							
1	Fz	5,2	2	3	5	20	30	536	32	87	383	36	5	407	431	391	166	208	20	271	35	211	22	446	17	59	11	76				
2	Fz	2	2	1	1	40	40	309	24	60	368	29	11	414	408	414	78	266	16	403	315	252	15	253	10	149	17	22	10	228		
3	Fz	2	3	6	6	40	40	315	26	76	381	31	10	413	412	307	93	260	15	405	316	294	22	254	11	147	17	32	10	61		
4	Fz	5,2	3	6	20	30		215	22	77	259	24	5	284	300	213	91	187	112	400	216	219	20	188	11	102	12	46	7	50		
5	Fz	4,2	2	3	6	40	40	265	40	85	313	26	10	331	332	331	93	240	153	453	267	238	25	217	36	178	32	22	12	46		
6	Fz	4,2	1	3	3	20	25	351	26	85	393	23	15	422	441	402	92	192	200	453	320	201	20	260	10	203	17	22	12	86		
7	Fz	5,2	1	3	3	30	25	287	28	70	381	30	5	377	418	366	84	244	91	465	288	273	19	142	10	200	16	42	11	131		
8	Fz	4	3	5	30	30		332	26	89	370	33	11	410	333	419	91	114	82	334	281	25	231	11	102	16	229	12	61	10	37	
9	Fz	1	3	4	40	40		320	21	76	377	30	10	447	438	363	85	229	61	753	351	322	22	231	11	117	16	11	11	66	12	161
10	Fz	5,2	1	2	1	40	40	310	24	65	441	36	10	422	422	412	90	210	117	460	316	324	23	230	22	128	16	12	12	63	13	131

Angaben: Durchmesser u. Einheitsstärken in mm, Höhenmessungen in dm, H₁₀ in 5 cm.

Nr.	METERSKIZZIEN										STOCK										Schafstahl														
	D		H		Ri		Alter		D _{101H}		Ri		Alter		D _{101H}		Ri		Alter			D _{101H}		Ri		Alter									
1	3,2	3,2	3,19	3,02	2,92	2,82	2,72	2,62	2,52	2,42	2,32	2,22	2,12	2,02	1,92	1,82	1,72	1,62	1,52	1,42	1,32	1,22	1,12	1,02	0,92	0,82	0,72	0,62	0,52	0,42	0,32	0,22	0,12	0,02	
2	3,21	3,07	2,85	2,63	2,40	2,18	1,96	1,74	1,52	1,30	1,08	0,86	0,64	0,42	0,20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3	3,13	3,15	2,89	2,70	2,46	2,20	1,94	1,68	1,42	1,16	0,90	0,64	0,38	0,12	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	2,63	2,09	1,60	1,12	0,64	0,16	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	2,89	2,57	2,23	1,89	1,55	1,21	0,87	0,53	0,19	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	3,10	3,18	3,00	2,82	2,64	2,46	2,28	2,10	1,92	1,74	1,56	1,38	1,20	1,02	0,84	0,66	0,48	0,30	0,12	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
7	3,24	2,82	2,70	2,52	2,34	2,16	1,98	1,80	1,62	1,44	1,26	1,08	0,90	0,72	0,54	0,36	0,18	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
8	3,63	2,98	2,78	2,58	2,38	2,18	1,98	1,78	1,58	1,38	1,18	0,98	0,78	0,58	0,38	0,18	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
9	3,10	3,30	3,18	3,07	2,96	2,85	2,74	2,63	2,52	2,41	2,30	2,19	2,08	1,97	1,86	1,75	1,64	1,53	1,42	1,31	1,20	1,09	0,98	0,87	0,76	0,65	0,54	0,43	0,32	0,21	0,10	0,00	0,00	0,00	0,00
10	4,15	3,55	3,20	3,10	2,90	2,70	2,50	2,30	2,10	1,90	1,70	1,50	1,30	1,10	0,90	0,70	0,50	0,30	0,10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Berechnungsbeispiel (Formfunktion)

Stichprobe aus Areal 521, vertreten sind Probestämme
aus den Beständen 02, 03, 04, 05, 06, 08, 09, 10, 12

(Einzelwerte)

Stamm- Nummer	Schaftmasse mit Rinde ab Stockabtrieb v (dm ³)	unechte Schaftholz- formzahl	Durchm. in Brusth. (1,3 m) d (mm)	Oberer Durchm. in 0,3 h $d_{0,3h}$ (mm)	Baumhöhe ab Stock- abtrieb h (dm)	Variable			Kontroll- werte
						y	x_1	x_2	
1	3,069,64	0,355	575	397	333	355	477	101	933
2	2,878,88	0,346	572	377	324	346	434	99	879
3	1,463,68	0,313	428	271	325	313	401	177	891
4	1,030,30	0,409	346	257	268	409	552	224	1,185
5	293,83	0,473	208	173	183	473	692	423	1,588
6	494,16	0,358	318	216	174	358	461	172	991
7	1,733,90	0,446	426	344	273	446	652	150	1,248
8	1,032,40	0,448	357	280	230	448	615	180	1,243
9	1,181,61	0,406	392	290	241	406	547	157	1,110
10	1,992,99	0,459	451	371	272	459	677	134	1,270
11	619,76	0,470	275	221	222	470	646	294	1,410
12	6,875,73	0,367	822	587	353	367	510	52	929
13	1,596,14	0,468	411	340	257	468	684	152	1,304
14	1,541,94	0,407	415	299	280	407	519	163	1,089
15	1,668,75	0,509	389	335	276	509	742	182	1,433
16	2,920,42	0,370	556	392	325	370	497	105	972
17	1,480,13	0,429	402	301	272	429	561	168	1,158
18	1,666,89	0,450	415	338	274	450	663	159	1,272
19	1,884,01	0,418	427	317	315	418	551	173	1,142
20	1,977,08	0,410	445	329	310	410	547	157	1,114
21	1,470,41	0,398	392	284	306	398	525	199	1,122
22	370,24	0,532	204	176	213	532	744	512	1,788
23	1,732,56	0,406	457	354	260	406	600	124	1,130
24	766,26	0,348	339	235	250	348	481	218	1,047
25	826,72	0,391	365	266	202	391	531	152	1,074
n = 25					Σ	10.386	14.309	4.627	29.322

$$y = f \cdot 10^3 \text{ (abhängige Variable)}$$

$$x_1 = \frac{d^2 \cdot 0,3h}{d^2} \cdot 10^3, \quad x_2 = \frac{h}{d^2} \cdot 10^5 \text{ (unabhängige, bzw. "gruppendifinierende" Variable)}$$

$$U_i = y_i + x_{1i} + x_{2i} \text{ (dient Kontrollzwecken)}$$

Berechnungsbeispiel (Formfunktion)

Holzart: Fichte

(Ausgangswerte für
Regressionsanalyse)n = 25

$\sum y$	10.386	$\bar{y} = 415,44$	$(\sum U)^2 = 859,779.684$
$\sum x_1$	14.309	$\bar{x}_1 = 572,36$	$\sum U^2 = 35,514.886$
$\sum x_2$	4.629	$\bar{x}_2 = 185,08$	
<hr/>			
	29.322 = $\sum U$		

$\sum y^2$	4,383.878	$(\sum y^2 - \bar{y} \cdot \sum y)$	69.118	a_{00}
$\sum x_1^2$	8,405.431	$(\sum x_1^2 - \bar{x}_1 \cdot \sum x_1)$	215.532	= a_{11}
$\sum x_2^2$	1,086.319	$(\sum x_2^2 - \bar{x}_2 \cdot \sum x_2)$	229.954	= a_{22}
<hr/>			\sum	514.604
	13,875.628			

$\sum y \cdot x_1$	6,062.948	$(\sum y \cdot x_1 - \bar{y} \cdot \sum x_1)$	118.417	a_{01}
$\sum y \cdot x_2$	1,995.330	$(\sum y \cdot x_2 - \bar{y} \cdot \sum x_2)$	73.089	= a_{02}
$\sum x_1 \cdot x_2$	2,761.351	$(\sum x_1 \cdot x_2 - \bar{x}_1 \cdot \sum x_2)$	113.041	= a_{12}
<hr/>			\sum	304.547
	\sum 10,819.629			

Kontrolle:

$$\text{Quadratsummen} + \text{doppelte Produktsummen} = \sum U^2$$

$$13,875.628 + 2 \cdot 10,819.629 = 35,514.886$$

und

$$514.604 + 2 \cdot 304.547 = 1,123.698 \quad \left(\sum U^2 - \frac{(\sum U)^2}{n} \right)$$

$$1,123.699 \quad (\text{Rundungen})$$

Berechnungsbeispiel (Formfunktion)
(Stichprobe aus Areal 521)

(Regressionsanalyse
Berechnung der Funktion)

	Variable		x ₁	x ₂	y	Kontrollsummen	Kontrolle
		Dez.	10 ⁻⁶	10 ⁻⁶	10 ⁻⁶		
1	x ₁	10 ⁻⁶	0,215.532	0,113.041	0,118.417	0,446.990	
2	x ₂	10 ⁻⁶	0,113.041	0,229.954	0,073.089	0,416.084	
0	y	10 ⁻⁶	0,118.417	0,073.089	0,069.118	0,260.624	
1'	x ₁	10 ⁻⁶	0,215.532	0,113.041	0,118.417	0,446.990	
1''	4,639,682		- 1,000.000	- 0,524.474	- 0,549.417	- 2,073.891	= 2,073.891
2'				0,170.667	0,010.982	0,181.649	= 0,181.649
2''	5,859,364			- 1,000.000	- 0,064.348	- 1,064.348	= 1,064.348
b _i	Regressions- koeffizient		+ 0,515.668	+ 0,064.348	0,069.118	24	0,002.880
1'''			6,251.435	- 3,073.084	0,004.058	23	0,000.176
2'''			- 3,073.084	5,859.364	0,003.351	22	0,000.152
(b _i)	Kontrolle der Regressions- koeffizienten und von a _{00,12}		+ 0,740.276 - 0,224.609 + 0,515.667	- 0,363.905 + 0,428.255 + 0,064.350	+ 0,069.118 - 0,061.064 - 0,004.703 + 0,003.351	(Werte · 10 ⁻³) = 0,41544 $\bar{x}_1 = 0,57236$ $\bar{x}_2 = 0,18508$	a _y = ± 0,05366 s _y % 12,9 %
Δ' ₁	$\frac{b_i^2}{a_{ii}}$		0,042.536	0,000.707	Regressions- konstante	+ 0,10838	s _R = ± 0,01234 s _R % = 2,97 %
ε ² _{bi}	= s ² a _{ii}		0,000.950.218	0,000.890.623	ε ² _a = 0,000.242.858		R ² = 0,947 R
ε _{bi}	= √ε ² _{bi}		+ 0,030.825	+ 0,029.843	ε _a = + 0,015.584		
	$\frac{\epsilon_{bi}}{b_i}$		0,0598	0,4638	0,1438		(s _R = ± 0,0113)
t =	$\frac{b_i}{\epsilon_{bi}} \geq \sqrt{2}$		16,729	2,156	6,955		

VARIANZ TABELLE

Variationsursache	SQ	FG	MQ = s ²	Variations- quotient	F bei P			
					5 %	1 %	0,1 %	
Variation zwischen den beobachteten Werten ("Total")	0,069118	24	0,002880					
Varianz zwischen den berechneten Werten ("Regression")	0,065767	2	0,032884	216,3			9,61	xxx sehr gut gesichert
Abweichung der berechneten v. d. beobachteten Werten ("Fehler")	0,003351	22	0,000152					
"Regression", also x ₁ und x ₂ gemeinsam; hievon x ₁ alleine	0,065767 0,065060	2 1						
x ₂ nach Ausschaltg. des Effektes v. x ₁	0,000707	1	0,000707	4,65	4,30	7,94		x gesichert
"Regression", also x ₁ und x ₂ gemeinsam; hievon x ₂ alleine	0,065767 0,023231	2 1						
x ₁ nach Ausschaltg. des Effektes v. x ₂	0,042536	1	0,042536	279,8			14,38	xxx sehr gut gesichert
<p><u>Anmerkung</u></p> <p>"x₁ alleine" $\frac{(a_{01})^2}{a_{11}}$ (Regressionsquotient); "x₂ nach Ausschaltung des Effektes von x₁" = $\left[(b_{01.2} \cdot a_{01} + b_{02.1} \cdot a_{02}) - \frac{(a_{01})^2}{a_{11}} \right] = \Delta_2 = \frac{(b_{02.1})^2}{a_{22}}$, (siehe Rechenschema); in analoger Weise wird "x₂ alleine" und "x₁ nach Ausschaltung des Effektes von x₂" berechnet, wobei zu beachten ist, daß die Summenquadrate und die Summenprodukte jeweils mit 10⁻⁶ multipliziert wurden.</p>								

	Variable	x_1	x_2	x_3 m	y	Kontrollsummen	Kontrolle
	Des.							
1	x_1	a_{11}	a_{21}	a_{31}		a_{01}	a_{e1}	} $\sum (U - 0)^2$
2	x_2	a_{12}	a_{22}	a_{32}		a_{02}	a_{e2}	
3	x_3	a_{13}	a_{23}	a_{33}		a_{03}	a_{e3}	
m								
0	y	a_{10}	a_{20}	a_{30}		a_{00}	a_{e0}	
1'	x_1	a_{11}	a_{21}	a_{31}		a_{01}	a_{e1}	X
1''	$1/a_{11}$	- 1,000,000	$-b_{21}$	$-b_{31}$		$-b_{01}$	$-b_{e1}$	
2'			a_{22}	a_{32}		a_{02}	a_{e2}	$a_{e2} - b_{21}a_{e1}$
2''	$1/a_{22.1}$		- 1,000,000	$-b_{32.1}$		$-b_{02.1}$	$-b_{e2.1}$	$a_{e2.1}/a_{22.1}$
3'				$a_{33.12}$		$a_{03.12}$	$a_{e3.12}$	$a_{e3} - b_{31}a_{e1} - b_{32.1}a_{e2.1}$
3''	$1/a_{33.12}$			- 1,000,000		$-b_{03.12}$	$-b_{e3.12}$	$a_{e3.12}/a_{33.12}$
m'								
m''								
bi	Regressionskoeffizienten	$b_{01.23} + b_1$	$b_{02.13} + b_2$	$+b_{03.12} + b_3$		a_{00}	n - 1	$\frac{2}{a_0}$
1'''		a_{11}	a_{21}	a_{31}		$a_{00.1}$	n - 2	$\frac{2}{a_{0.1}}$
2'''		a_{12}	a_{22}	a_{32}		$a_{00.12}$	n - 3	$\frac{2}{a_{0.12}}$
3'''		a_{13}	a_{23}	a_{33}		$a_{00.123}$	n - 4	$\frac{2}{a_{0.123}}$
m'''						$a_{00.1...m}$	n - m	$\frac{2}{a_0} - a_{0.1...m}$
(bi)	Kontrolle d. Regressionskoeffizienten und von $a_{00.123...m}$	$a_{10}^{*11} + a_{20}^{*21} + a_{30}^{*31} + \dots + a_{01.23}$	$a_{10}^{*12} + a_{20}^{*22} + a_{30}^{*32} + \dots + b_{02.13}$	$a_{10}^{*13} + a_{20}^{*23} + a_{30}^{*33} + \dots + b_{03.12}$		$a_{00} - b_{10}a_{01.23} - b_{20}a_{02.13} - b_{30}a_{03.12} - \dots + a_{00.123...m}$	(Werte $\cdot 10^{-13}$)	$a_{y\%}$
Δ'_1	$\frac{b_1^2}{a_{11}}$	Δ'_1	Δ'_2	Δ'_3		Regressionskonstante:		
E^2_{bi}	$= \frac{2}{a_p} \cdot a_{ii}$	$E^2(b_{01.23})$	$E^2(b_{02.13})$	$E^2(b_{03.12})$		$E^2(a) =$		$a_{0.1...n} = a_p^2$
E_{bi}	$= \pm \sqrt{E^2_{bi}}$	$\pm E(b_{01.23})$	$\pm E(b_{02.13})$	$\pm E(b_{03.12})$		$E(a) =$		$a_p^2 =$
	$\frac{E_{(bi)}}{b_i}$	$\frac{E(b_{01.23})}{b_{01.23}}$	$\frac{E(b_{02.13})}{b_{02.13}}$	$\frac{E(b_{03.12})}{b_{03.12}}$				$R^2 = B =$
	$\frac{b_i}{E_{(bi)}} > 1/\sqrt{2}$	$\frac{b_{01.23}}{E(b_{01.23})}$	$\frac{b_{02.13}}{E(b_{02.13})}$	$\frac{b_{03.12}}{E(b_{03.12})}$				$(a_R =)$

Anmerkungen zum Rechengang (Regressionsanalyse)

- 1) Übernahme der Werte $a_{ii} [11 - 00]$ (Dez.: Stellenwertverschiebung aus Zweckmäßigkeitsgründen)
- 2) Kontrolle $\sum a_{si}$
- 3) Übernahme der Werte a_{11} , Zeile [1']
- 4) Berechnung Zeile [1''], b_{21} bzw. $a_{21} \cdot \frac{1}{a_{11}}, a_{31} \cdot \frac{1}{a_{11}}$
- 5) Kontrolle Zeile [1'']
- 6) Berechnung Zeile [2''],
- 7) Kontrolle Zeile [2']
- 8) Berechnung Zeile [2''], $b_{32,1} = a_{32,1}$:
- 9) Kontrolle Zeile [2'']
- 10) Berechnung Zeile [3'], $a_{33,12} = a_{33} - a_{31} b_{31} - a_{32,1} b_{32,1}$, $a_{03,12} = a_{03} - a_{01} b_{31} - a_{02,1} b_{32,1}$ usw.
- 11) Berechnung Zeile [3''], $b_{03,12} = a_{03,12} : a_{33,12}$ usw.
- 12) Berechnung und Kontrolle eventuell folgender Zeilen
- 13) Berechnung der Regressionskoeffizienten (Vorzeichenumkehr bei vorhergehenden b-Werten - 1'', 2'', 3'')

 $b_{02,13} = b_{02,1} - b_{32,1} b_{03,12}$, $b_{01,23} = b_{01} - b_{31} b_{03,12} - b_{21} b_{02,13}$
- 14) Berechnung $a_{00,1}$ bis $a_{00,1\dots m}$ und $s_{0,1}^2$ bis $s_{0,1\dots m}^2$

 $a_{00,1} = a_{00} - b_{01} a_{01}$ $s_{0,1}^2 = a_{00} : n - 1$

 $a_{00,12} = a_{00,1} - b_{02,1} a_{02,1}$ usw. $s_{0,1}^2 = a_{00,1} : n - 2$, usw.
- 15) Berechnung Zeile [n''' bzw. dann 3''']

 $a^{33} = 1/a_{33,12}$, $a^{23} = -b_{32,1} a^{33}$, $a^{13} = -b_{31} a^{33} - b_{21} a^{23}$
- 16) Berechnung Zeile [2'''], $a^{22} = 1/a_{22,1} - b_{32,1} a^{32}$, $a^{12} = -b_{21} a^{22} - b_{31} a^{32}$
- 17) Berechnung Zeile [1'''], $a^{11} = 1/a_{11} - b_{21} a^{21} - b_{31} a^{31}$
- 18) Kontrolle (bi)
- 19) Übernahme der $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{y}$ und Berechnung von $a = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2 \dots -$
- 20) Berechnung E^2 (bi) und folgende Zeilen
- 21) Berechnung von $E^2(a), E(a)$ und $E^2(a) = s_F^2 \left[\frac{1}{n} + \bar{x}_1 (a^{11} \bar{x}_1 + a^{21} \bar{x}_2 + a^{31} \bar{x}_3 \dots) + \right.$

 $\quad + \bar{x}_2 (a^{12} \bar{x}_1 + a^{22} \bar{x}_2 + a^{32} \bar{x}_3 \dots) +$

 $\quad + \bar{x}_3 (a^{13} \bar{x}_1 + a^{23} \bar{x}_2 + a^{33} \bar{x}_3 \dots) +$

 $\quad \left. \dots \right]$
- 22) $s_F \% = \frac{s_F \cdot 100}{\bar{y}}$, (für log-Funktion: $s_F \% = 2,30259 \cdot 100 \cdot s_F$)
- 23) Berechnung von $B = R^2$ und R . $R^2 = 1 - \frac{s_F^2}{s_y^2}$
- 24) $s_R = \frac{1 - R^2}{\sqrt{n - m}}$

Nr.	v in dm ³	f	d mm	h dm	h _k dm	b _k dm	d _{6,5} mm	d _{0,1 h} mm	d _{0,3 h} mm	d _{0,5 h} mm	d _{0,7 h} mm	Alter
1	900,25	0,438	310	272	148	25	262	280	253	211	142	120
2	1530,82	0,443	387	294	177	30	315	358	296	257	190	132
3	2147,01	0,396	505	271	133	50	390	440	383	314	209	135
4	24,62	0,548	83	83	68	15	35	86	74	62	45	128
5	1300,78	0,445	348	307	114	35	286	307	272	242	175	110
6	1349,60	0,353	417	280	108	40	333	368	317	246	162	120
7	2090,56	0,337	530	281	108	60	373	460	358	288	191	122
8	2523,89	0,383	493	345	187	60	385	412	365	305	205	125
9	1063,03	0,437	347	257	87	40	287	326	275	222	148	112
10	519,29	0,435	267	213	83	40	202	258	209	167	121	100
11	1119,49	0,437	342	279	75	40	288	300	280	225	147	119
12	389,99	0,514	202	233	113	35	172	198	174	152	108	112
13	1073,70	0,516	312	272	74	50	290	300	272	220	150	120
14	1297,85	0,485	364	257	105	50	326	365	314	250	170	160
15	1389,94	0,466	367	282	87	50	318	343	300	248	174	119
16	243,76	0,567	160	214	136	30	145	163	150	122	99	133
17	1788,82	0,398	452	280	38	45	373	420	338	273	170	165
18	771,96	0,436	326	212	108	35	268	312	271	214	132	160
19	1071,15	0,399	352	276	121	55	277	338	255	202	140	149
20	948,42	0,346	388	232	78	50	273	342	272	206	137	142
21	3034,96	0,306	635	313	91	60	446	524	420	319	210	105
22	2345,49	0,359	543	282	119	55	410	460	390	304	217	110
23	3013,36	0,376	562	323	104	65	451	495	414	338	220	110
24	2205,36	0,419	454	325	133	50	390	425	360	284	180	105
25	224,50	0,442	187	185	31	40	142	177	150	122	84	44
26	171,57	0,475	164	171	87	35	127	158	137	109	75	44
27	411,01	0,507	217	219	127	30	193	217	192	149	110	128
28	303,25	0,500	210	175	69	25	171	206	184	149	100	235
29	408,76	0,475	233	202	65	25	192	223	197	157	105	119
30	598,86	0,330	345	194	119	40	226	304	243	169	103	224
31	387,57	0,437	219	210	131	30	178	208	180	146	106	102
32	467,28	0,456	235	236	109	35	195	217	191	157	112	111
33	1690,80	0,423	389	217	78	55	324	365	325	269	177	183
34	646,11	0,506	267	228	114	40	232	257	228	197	134	212
35	1907,99	0,489	405	303	153	55	372	389	347	287	192	200
36	1192,13	0,408	382	255	135	40	310	362	290	222	143	148
37	760,49	0,485	272	270	184	35	238	254	229	189	133	140
38	203,18	0,420	183	184	129	35	129	173	142	105	80	112
39	1215,97	0,491	326	297	70	50	293	314	282	228	165	130
40	722,86	0,457	292	236	79	40	256	290	246	192	113	137
41	578,43	0,441	269	231	116	45	230	256	224	157	122	127
42	547,90	0,449	244	261	157	30	204	220	192	159	121	156
43	530,06	0,412	267	230	134	35	205	257	203	165	112	141
44	328,50	0,467	217	190	110	35	172	210	178	145	100	137
45	302,04	0,501	194	204	132	25	159	184	163	135	97	160
46	621,41	0,503	247	258	138	25	211	234	209	174	134	140
47	49,60	0,574	100	110	67	15	74	101	88	82	62	145
48	33,95	0,635	90	84	48	20	46	93	84	79	59	133
49	31,41	0,586	96	74	48	25	20	99	98	79	50	130
50	27,22	0,686	78	83	63	10	48	80	79	69	65	137

Beilage

Standardabweichungen und Bestimmtheitsmaße vergleichsweise berechneter Schafholzformfunktionen
 Material: 50 Fichten aus plenterwaldartigen Beständen der BFI Landeck (Areal 631)

Nr. der Funktion	Bezeichnung	Allgemeine Form der Regressionsgleichung	Standardabweichung		Bestimmtheitsmaß $B = R^2$
			v. arithm. Mittel in %	v. d. Funktion in %	
14	spezielle arithmetische Formfunktion	$f = a + b_1 \frac{d^{2,0,3} h}{d^2} + b_2 \frac{h}{d^2}$	16,50	4,66	0,920
1 a	große schwedische Formfunktion für Fichte	$f = a + b_1 \frac{1}{h} + b_2 \frac{h}{d} + b_3 \frac{h^k}{d^2} + b_4 \frac{h^k}{h}$	16,50	8,52	0,794
2 a	kleine schwedische Formfunktion für Fichte	$f = a + b_1 \frac{1}{h} + b_2 \frac{h}{d} + b_3 \frac{h}{d^2}$	16,50	8,59	0,729
3 a	Formfunktion entsprechend Meyer's Volumsfunktion	$f = a + b_1 \frac{1}{d^2 h} + b_2 \frac{1}{d h} + b_3 \frac{1}{d} + b_4 \frac{1}{4 h} + b_5 \frac{1}{d^2}$	16,50	8,44	0,738
5 a	Formfunktion entsprechend d. austral. Volumsfunktion	$f = a + b_1 \frac{1}{d^2 h} + b_2 \frac{1}{d h} + b_3 \frac{1}{d^2}$	16,50		0,617
6 a	Formfunktion entsprechend Combined variable arithmetic standard equation	$f = a + b_1 \frac{1}{d^2 h}$	16,50		0,494
7 a	logarithmische Formfunktion entspr. "Schuhmacher-Hall"	$\log f = \log c + b_1 \log d + b_2 \log h$		8,84 ^{x)}	0,704 ^{x)}
13 a	spezielle logarithmische Formfunktion	$\log f = \log c + b_1 \log d + b_2 \log h + b_3 \log d_{0,3} h$	16,50	4,61 ^{x)}	0,927 ^{x)}

x) Diese Werte werden entsprechend den Ausführungen bezüglich logarithmischer Funktionen im Abschnitt 3.1 nach unmittelbarer Berechnung der quadratischen Abweichungen der beobachteten Werte $f_{(b)}$ von den berechneten Werten $f_{(e)}$ ermittelt, wobei die $f_{(e)}$ -Werte aus den um den Korrekturfaktor z berichtigten log-Funktionen bestimmt wurden.

Analysierung der "großen" und "kleinen" schwedischen Formfunktion
in bezug auf die Bedeutsamkeit der unabhängigen Variablen

Material: 50 Fichten aus Areal 631 - BFI Landeck

Nr. der Funktion	Δ'_i der einzelnen unabhängigen Variablen innerhalb des betreffenden Funktionensystems				s_F^2	B	Freiheitsgrade	t-Werte f. verschied. Werte v. P% (Überschreitungswahrscheinlichkeit)		
	$\frac{1}{h}$	$\frac{h}{d}$	$\frac{h}{d^2}$	k_h				P% = 5%	P% = 1%	P% = 0,1%
1 a	0,008269 (2,342)	0,015156 (3,170)	0,000005 (0,055)	0,002599 (1,313)	0,001508	0,734	45	2,014	2,689	3,521
1 b	0,0670 (6,739)	0,0726 (7,013)		0,0026 (1,336)	0,001476	0,739	46	2,012	2,686	3,516
2 a	0,007622 (2,230)	0,014162 (3,040)	0,000037 (0,156)		0,001532	0,729	46	2,012	2,686	3,516
1 c	0,000320 (0,421)		0,057426 (5,641)	0,001606 (0,943)	0,001805	0,681	46	2,012	2,686	3,516

Die in Klammer stehenden Zahlen unter den betreffenden Δ'_i sind die t-Werte der unabhängigen einzelnen Variablen

Ein Hinweis: $t = \frac{b_i}{\epsilon_{bi}} = \sqrt{\frac{b_i^2}{s_F^2 a_{ii}}}$, während $\Delta'_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$

Der unmittelbare Zusammenhang dieser beiden Werte ist somit leicht erkennbar, wobei der jeweilige Wert t gegenüber den Δ'_i den Vorteil besitzt, in Zusammenhang mit der Zahl der Freiheitsgrade als eine effektive Maßzahl für die "Bedeutsamkeit" einer unabhängigen Variablen zu dienen.

Gegenüberstellung verschiedener arithmetischer Formfunktionen, welche alle die gleiche erste unabhängige Variable, $x_1 = \frac{d^2 0,3 h}{d^2}$, jedoch jeweils eine andere zweite unabhängige Variable x_2 enthalten, von der allgemeine Gestalt $y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2$

meinen Gestalt $y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2$

Nr. der Funktion	unabhängige Variable x_2	Standardabweichungen v. arithm. Mittel in %		Bestimmtheitsmaß B	ϵ_a		b_1	ϵ_{b_1}		ϵ_{b_2}		
		absolut	%		absolut	%		absolut	%	absolut	%	
14	$\frac{h}{d^2}$	16,50	4,66	0,920	+ 0,02157	16,4	+ 0,4410	+ 0,0371 - (11,9)	8,4	+ 0,0727	+ 0,0155 - (4,7)	21,3
16	$\frac{h}{d^2 0,3 h}$	16,50	4,61	0,922	+ 0,0176	16,7	+ 0,4776	+ 0,0310 - (15,4)	6,5	+ 0,0571	+ 0,0117 - (4,9)	20,6
17	$\frac{h}{d}$	16,50	4,85	0,914	+ 0,0177	32,5	+ 0,4933	+ 0,0319 - (15,4)	6,5	+ 0,0851	+ 0,0209 - (4,1)	24,5
18	$\frac{h^2}{d^2}$	16,50	4,93	0,911	+ 0,0178	20,7	+ 0,5014	+ 0,0319 - (15,7)	6,4	+ 0,0464	+ 0,0122 - (3,8)	26,3
19	$\frac{1}{d}$	16,50	5,05	0,906	+ 0,02202	19,0	+ 0,4654	+ 0,0410 - (11,4)	8,8	+ 0,0652	+ 0,0191 - (3,4)	29,4
20	$\frac{1}{hd^2}$	16,50	5,41	0,893	+ 0,0246	23,6	+ 0,5179	+ 0,0387 - (13,4)	7,5	+ 0,0215	+ 0,0105 - (2,1)	48,7
21	$\frac{1}{h}$	16,50	5,55	0,886	+ 0,0216	26,3	+ 0,5397	+ 0,0409 - (13,2)	7,6	+ 0,0233	+ 0,0207 - (1,1)	88,7

Die Werte in Klammern stellen die entsprechenden t-Werte dar.

Tabelle 9

Gegenüberstellung der speziellen arithmetischen Funktion (14) zu verschiedenen Funktionssystemen, die als erste unabhängige Variable nicht das Quadrat, sondern den einfachen Formquotienten $k_{0,3}h/1,3$ enthalten. Neben $s_F\%$, B und den prozentualen Fehlern der Regressionskonstanten und der Regressionskoeffizienten sind die Anteilswerte der einzelnen Glieder der Gleichung $\bar{y} = a + b_1 \frac{x_1}{d} + b_2 \frac{x_2}{d}$, sowie die t-Werte, angeführt.

Material: 50 Fichten aus Areal 631 - BFI Landeck

Nr. der Funktion	Standerabweichung von der Formfunktion in %	Bestimmtheitsmaß B	P r ü f w e r t e d e r				Regressionskoeffizienten b_j		Regressionskoeffizienten b_j				
			Regressionskonstanten Anteilsw. v. a in bezug auf \bar{y} in %	Regressionskoeffizienten ϵb_1	Anteilsw. v. $b_1 x_1$ in bez. auf \bar{y} in %	t_{b1}	ϵb_2	Anteilsw. v. $b_2 x_2$ in bez. auf \bar{y} in %	t_{b2}				
14	4,66	0,920	16,4	29	6,14	8,4	65	11,89	21,3			4,69	
22	4,40	0,929	25,2	(-37) x 21	3,97	7,8	(131) x 75	12,80	19,0			5,26	
23	4,46	0,927	16,5	(-49) 25	6,04	6,2	(143) 72	16,01	19,6			5,09	
24	4,96	0,909	12,8	(-63) 28	7,80	6,7	(150) 66	15,02	29,2			3,43	
25	5,01	0,908	10,8	(-75) 30	9,46	5,1	(182) 65	19,56	30,6			3,27	
Für Vergleichszwecke ergänzen wir die Tabelle um die beiden Funktionen (16) und (17), die wie (14) als erste unabhängige Variable das Quadrat des Formquotienten $k_{0,3}h/1,3$ enthalten													
16	4,61	0,922	16,7	23	5,98	6,5	70	15,40	20,6			7	4,86
17	4,85	0,914	32,5	12	3,07	6,5	73	15,44	24,5			15	4,08

x) Wenn etwa die Regressionskonstante einen Minuswert annimmt, so bieten die Anteilswerte (in Klammer) nicht die Möglichkeit, direkt mit den Werten anderer Funktionen, die nur positive Gleichungsglieder aufweisen, verglichen zu werden. Vergleichbare Werte erhalten wir in diesem Falle, wenn wir die Anteilswerte zu $(\bar{y} + 2a)$ und nicht zu \bar{y} ins Verhältnis setzen - Werte ohne Klammer.

Vergleich der Funktion (14) mit Funktionen, die durch Hinzugabe einer dritten unabhängigen Variablen zur speziellen arithmetischen Formfunktion gebildet wurden.

Nr. der Funktion	Gestalt der Formfunktion	Standardabweichung von der Funktion in %		Bestimmtheitsmaß B	Die mittleren Fehler der Konstanten in %			
		v. arithm. Mittel in %	von der Funktion in %		der Regressionskonstanten a	b ₁	b ₂	b ₃
14	$f = a + b_1 \frac{d^2 0,3h}{d^2} + b_2 \frac{h}{d^2}$	16,50	4,66	0,920	16,4 (6,14)	8,4 (11,89)	21,3 (4,69)	
26	$f = a + b_1 \frac{d^2 0,3h}{d^2} + b_2 \frac{h}{d^2} + b_3 \frac{1}{d}$	16,50	4,44	0,928	14,8 (6,74)	7,9 (12,69)	25,9 (3,86)	41,9 (2,39)
27	$f = a + b_1 \frac{d^2 0,3h}{d^2} + b_2 \frac{h}{d^2} + b_3 l_k$	16,50	4,60	0,922	22,8 (4,39)	8,3 (12,00)	21,6 (4,63)	68,2 (1,47)
28	$f = a + b_1 \frac{d^2 0,3h}{d^2} + b_2 \frac{h}{d^2} + b_3 k_h$	16,50	4,68	0,919	20,6 (4,87)	8,6 (11,69)	22,9 (4,38)	153,4 (0,65)
29	$f = a + b_1 \frac{d^2 0,3h}{d^2} + b_2 \frac{h}{d^2} + b_3 b_k$	16,50	4,69	0,919	21,3 (4,70)	8,6 (11,65)	29,7 (3,37)	179,4 (0,56)

(Die Werte in Klammern stellen die entsprechenden t-Werte dar)

Beilage 11

Standardabweichungen der unter Wahl verschiedener oberer Durchmesser berechneten arithmetischen "oberen Durchmesser" - Funktionen und die mittleren Fehler der Regressionskonstanten bzw. -koeffizienten
 Material: 50 Fichten aus plenterwaldartigen Beständen der BFI Landeck (Areal 631)

$$\text{Allgemeine Gestalt der Regressionsgleichung: } f = a + b_1 \frac{d^2_{0,x,h}}{d^2} + b_2 \frac{h}{d^2}$$

Nr. der Funktion	gewählter oberer Durchmesser $d_{0,x,h}$ bzw. d_x	Standardabweichungen von der Funktion in %		Bestimmtheitsmaß B	Die mittleren Fehler der Konstanten in %		
		v. arithm. Mittel in %	von der Funktion in %		a	b_1	b_2
30	$d_{0,1,h}$ - Durchmesser in 0,1 der Baumhöhe	16,50	7,33	0,803	90,0 (1,11)	18,6 (5,39)	19,9 (5,02)
14	$d_{0,3,h}$ - Durchmesser in 0,3 der Baumhöhe	16,50	4,66	0,920	16,4 (6,14)	8,4 (11,89)	21,3 (4,69)
31	$d_{0,5,h}$ - Durchmesser in 0,5 der Baumhöhe	16,50	4,45	0,927	7,1 (14,03)	7,9 (12,64)	31,8 (3,14)
32	$d_{0,7,h}$ - Durchmesser in 0,7 der Baumhöhe	16,50	7,34	0,802	4,0 (25,73)	18,6 (5,37)	37,0 (2,70)
33	$d_{6,5}$ - Durchmesser in 6,5 m	16,50	7,64	0,774	10,8 (9,31)	22,6 (4,41)	7,8 (12,64)

(Werte in Klammer sind entsprechende t-Werte; Der Grenzwert für die Bedeutsamkeit - Überschreitungswahrscheinlichkeit $P = 0,1$ % - beträgt bei 47 Freiheitsgraden $t = 3,51$)

Standardabweichungen der unter Wahl verschiedener oberer Durchmesser berechneten arithmetischen "oberen Durchmesser" - Funktionen und die mittleren Fehler der Regressionskonstanten bzw. -koeffizienten

Material: 50 Fichten aus plenterwaldartigen Beständen der BFI Landeck (Areal 631)

$$\text{Allgemeine Gestalt der Regressionsgleichung: } f = a + b_1 \frac{d^2}{d^2} - 0,2xh + b_2 \frac{h}{d^2}$$

Nr. der Funktion	gewählter oberer Durchmesser $d_{0,x}$	Standardabweichungen		Bestimmtheitsmaß B	Die mittleren Fehler der Konstanten in %		
		v. arithm. Mittel in %	von der Funktion in %		d. Regressionskonstanten a	der Regressionskoeffizienten b_1, b_2	
30	$d_{0,1h}$ - Durchmesser in 0,1 der Baumhöhe	16,50	7,33	0,803	90,0 (1,11)	b_1 19,9 (5,39)	b_2 19,9 (5,02)
43	$d_{0,2h}$ - Durchmesser in 0,2 der Baumhöhe	16,50	5,20	0,901	29,7 (3,37)	9,8 (10,21)	17,7 (5,65)
14	$d_{0,3h}$ - Durchmesser in 0,3 der Baumhöhe	16,50	4,66	0,920	16,4 (6,14)	8,4 (11,89)	21,3 (4,69)
44	$d_{0,4h}$ - Durchmesser in 0,4 der Baumhöhe	16,50	3,98	0,942	12,7 (8,29)	6,9 (14,53)	27,1 (3,69)
31	$d_{0,5h}$ - Durchmesser in 0,5 der Baumhöhe	16,50	4,45	0,927	7,1 (14,03)	7,9 (12,64)	31,8 (3,14)
45	$d_{0,6h}$ - Durchmesser in 0,6 der Baumhöhe	16,50	5,05	0,907	6,0 (16,61)	9,4 (10,66)	51,8 (1,93)
32	$d_{0,7h}$ - Durchmesser in 0,7 der Baumhöhe	16,50	7,34	0,802	4,0 (25,73)	18,6 (5,37)	37,0 (2,70)
46	$d_{0,8h}$ - Durchmesser in 0,8 der Baumhöhe	16,50	7,56	0,790	3,8 (26,47)	20,2 (4,95)	29,4 (3,41)

(Werte in Klammer sind entsprechende t-Werte; Der Grenzwert für die Bedeutsamkeit - Überschreitungswahrscheinlichkeit P = 0,1 % - beträgt bei 47 Freiheitsgraden t = 3,51)

Gegenüberstellung verschiedener "oberer Durchmesser"-Funktionen
 Material: 50 Fichten aus plenterwaldartigen Beständen der BFI Landeck (Areal 631)

Nr. d. Funktion	Gestalt der Formfunktion	Standardabweichungen		Bestimmtheitsmaß B	Die mittleren Fehler der Konstanten in %		
		v. arithm. Mittel in %	von der Funktion in %		a	b ₁	b ₂
14	$f = a + b_1 \frac{d^2}{d^2} + b_2 \frac{h}{d^2}$	16,50	4,66	0,920	16,4 (6,14)	5,4 (11,89)	21,3 (4,69)
34	$f = a + b_1 \frac{d}{d} + b_2 \frac{1}{h}$ (Kunze)	16,50	4,72	0,918	31,3 (9,19)	6,2 (16,19)	47,6 (2,10)
35	$f = a + b_1 \frac{d}{d} + b_2 \frac{d}{d_0,5 h}$ (Schiffel)	16,50	4,66	0,920	21,9 (4,56)	4,9 (20,56)	42,2 (2,37)
36	$f = a + b_1 \frac{d^2}{d^2} + b_2 \frac{d_0,5 h \cdot d_0,1 h}{d^2}$ (analog 41 a bzw. Hohenadl-Prodan)	16,50	3,70	0,950	75,2 (1,33)	348,6 (0,29)	6,5 (15,37)
37	$f = a + b_1 \frac{d^2}{d^2} + b_2 \frac{d_0,5 h \cdot d_0,1 h}{d^2}$	16,50	3,43	0,957	47,0 (2,13)	36,1 (2,77)	11,2 (8,94)
38	$f = a + b_1 \frac{d^2}{d^2} + b_2 \frac{d_0,5 h \cdot d_0,1 h}{d^2} + b_3 \frac{h}{d^2}$	16,50	3,23	0,982	28,7 (3,48)	32,9 (3,04)	13,9 (7,19)
39	$f = a + b_1 \frac{d^2}{d^2} + b_2 \frac{d^2}{d^2} + b_3 \frac{h}{d^2}$	16,50	4,16	0,937	18,9 (5,02)	10,8 (9,26)	27,7 (3,61)
40	$f = a + b_1 \frac{d^2}{d^2} + b_2 \frac{d^2}{d^2} + b_3 \frac{h}{d^2}$	16,50	3,54	0,954	11,2 (8,92)	18,8 (5,33)	16,8 (5,96)
41	$f_{0,1 h} = a + b_1 \frac{d_0,5 h}{d_0,1 h}$ (Prodan)	9,15	3,60	0,845	26,3 (3,81)	6,1 (16,37)	
41 a	$f = a \cdot \frac{d^2}{d^2} + b_1 \frac{d_0,5 h \cdot d_0,1 h}{d^2}$ (analog Hohenadl aus 41 abgeleitet)	16,50	(3,76)	(0,948)			
42	$f = a + b_1 \frac{d^2}{d^2} + b_2 \frac{d^2}{d^2} + b_3 \frac{1}{h}$ (Prytz)	16,50	4,58	0,923	40,7 (2,29)	9,2 (10,9)	37,7 (2,66)

(Klammerausdrücke unterhalb der Fehler der Konstanten sind t-Werte. Grenzwerte von t in bezug auf die Bedeutsamkeit der Variablen bei einer Überschreitungswahrscheinlichkeit von P = 0,1 %: bei FG = 46/t = 3,52; bei FG = 47/t = 3,51; bei FG = 48/t = 3,50)

Beschreibung des Testmaterials aus 8 Arealen

Nr.	Areal		Seehöhe in m	Bestandesstruktur	Einzelbaum- alter in Jahren	Absolutbo- nitäten (HDZ ₁₀₀)	Brusthöhendurch- messer d in mm	Baumhöhen h in dm	Brusthöhenform- faktor f	Stamm- anzahl
	Bezeichnung									
1	Kobernaufferwald		400 - 700	Altersklassen- bestände	$\frac{60-200}{100}$	$\frac{5,0-10,0}{9,0}$	176 - 867	188 - 397	$\frac{0,329-0,558}{0,447}$	100
2	Tamsweg, Murau		1300 - 1800	Altersklassen- bestände	$\frac{63-280}{110}$	$\frac{2,0-5,5}{3,0}$	70 - 598	66 - 325	$\frac{0,376-0,621}{0,496}$	100
3	Manhartsberg, Melk, Krems		200 - 800	Altersklassen- bestände	$\frac{30-72}{50}$	$\frac{5,0-8,5}{6,5}$	68 - 268	79 - 223	$\frac{0,412-0,644}{0,545}$	100
4	Judenburg, Kittelfeld		1000 - 1600	Altersklassen- bestände	$\frac{35-141}{70}$	$\frac{1,5-5,5}{3,5}$	76 - 318	66 - 249	$\frac{0,373-0,697}{0,516}$	100
5	Landeck		900 - 1800	plenterwaldartige Bestände	$\frac{44-246}{120}$	$\frac{2,0-7,5}{4,0}$	78 - 635	73 - 342	$\frac{0,309-0,643}{0,473}$	100
6	Feldkirch		400 - 1400	plenterwaldartige Bestände	$\frac{27-274}{80}$	$\frac{5,0-9,0}{8,0}$	90 - 724	113 - 451	$\frac{0,335-0,578}{0,463}$	100
7	Wechsel, Ober- wart, Aspang		400 - 1500	Altersklassen- bestände	$\frac{30-161}{70}$	$\frac{1,0-6,5}{4,0}$	72 - 548	50 - 337	$\frac{0,366-0,617}{0,499}$	100
8	Gurktal		700 - 1000	Altersklassen- bestände	$\frac{29-127}{70}$	$\frac{3,0-8,5}{5,0}$	80 - 576	113 - 379	$\frac{0,394-0,617}{0,492}$	100
Gesamtmaterial			200 - 1800		27 - 280	1,0 - 10,0	66 - 924	50 - 451	$\frac{0,309-0,697}{0,491}$	800

Übersicht über die wesentlichsten Statistiken der separaten Funktionen für 8 Areale und deren gemeinsame Funktion
 Funktionstyp: $(14) f = a + b_1 \frac{h}{d^2} + b_2 \frac{h}{d^2}$

Areal Nr.	Stamm- anzahl	Standardabweichungen v. arithm. Mittel in %		Bestimmt- heitsmaß B	Regressionskonstante			Regressionskoeffizienten					
		3,47	9,47		0,892	absolut ϵ_a in %	t_a	b_1	absolut ϵ_{b1} in %	t_{b1}	b_2	absolut ϵ_{b2} in %	t_{b2}
1	100	10,45	3,47	0,892	+ 0,0924 ± 0,00501	5,4	18,4	+ 0,5334 ± 0,0275	5,2	19,4	+ 0,0896 ± 0,0145	16,1	6,2
2	100	9,53	4,52	0,780	+ 0,1517 ± 0,00690	4,5	22,0	+ 0,4532 ± 0,0334	7,4	13,6	+ 0,0395 ± 0,0103	26,2	3,8
3	100	8,94	3,70	0,832	+ 0,1576 ± 0,00663	4,2	23,8	+ 0,4684 ± 0,0312	6,7	15,0	+ 0,0285 ± 0,0061	21,6	4,6
4	100	11,04	4,73	0,820	+ 0,1282 ± 0,00636	5,0	20,2	+ 0,4913 ± 0,0303	6,2	16,2	+ 0,0329 ± 0,0094	28,5	3,5
5	100	15,22	4,15	0,927	+ 0,1191 ± 0,00441	3,7	27,0	+ 0,4765 ± 0,0240	5,0	19,9	+ 0,0674 ± 0,0090	13,4	7,4
6	100	12,47	4,68	0,862	+ 0,1163 ± 0,00544	4,7	21,4	+ 0,5155 ± 0,0291	5,6	17,7	+ 0,0115 ± 0,0081	70,0	1,43
7	100	10,01	4,82	0,773	+ 0,1317 ± 0,00850	6,5	15,5	+ 0,4785 ± 0,0412	8,6	11,6	+ 0,0492 ± 0,0133	27,0	3,7
8	100	8,82	3,83	0,815	+ 0,1279 ± 0,00634	5,0	20,2	+ 0,4814 ± 0,0298	6,2	16,2	+ 0,0444 ± 0,0070	17,3	5,8
Ges.	800	12,34	4,41	0,872	+ 0,1221 ± 0,00651	5,3	18,8	+ 0,4964 ± 0,0103	2,1	48,0	+ 0,0375 ± 0,0027	7,2	13,9

Der Grenzwert von $t = 3,39$, bei einer Überschreitungswahrscheinlichkeit von $P = 0,1\%$, bei $n = 100$

Vergleich der beobachteten mit den nach der gemeinsamen Funktion errechneten Formfaktoren, geordnet nach verschiedenen Arealen, und Vergleich der gemeinsamen Funktion (insgesamt 800 Fichten) mit den separaten Funktionen (je 100 Fichten) hinsichtlich Anpassung an das Material

$$\text{Funktionstyp (14): } f = a + b_1 \frac{0,3h}{d^2} + b_2 \frac{h}{d^2}$$

Areal	Stamm- anzahl	Beobachteter durch- schnittlicher Form- faktor (arithm. Mittel) \bar{f}	Beobachteter durch- schnittlicher Form- faktor "f(b)" in % d. errechneten durch- schnittlichen Form- faktors "f(e)" (ge- meinsame Funktion)	Mittlere quadratische Abweichung der beob- achteten Formfaktoren vom arithm. Mit- tel in %	Mittlere quadratische Abweichung der beobachteten von den errechneten Formfaktoren in %	
					Gemeinsame Funktion (n = 800) $s_{F(g)}\%$	separate Funktion (n = je 100) $s_{F(s)}\%$
1	100	0,447	101,01	10,45	4,09	3,47
2	100	0,496	99,94	9,53	4,56	4,52
3	100	0,545	100,93	8,94	3,93	3,70
4	100	0,516	99,83	11,04	4,74	4,73
5	100	0,473	99,24	15,22	4,52	4,15
6	100	0,463	99,06	12,47	5,09	4,68
7	100	0,499	100,29	10,01	4,85	4,82
8	100	0,492	99,69	8,82	3,86	3,83
Ges.	800	0,491	100,00	12,34	4,41	

Übersicht über Statistiken der Funktionen (1 a) und (2 a) für 8 Areale
und die entsprechenden gemeinsamen Funktionen

Areal Nr.	n	s_y^2	s_z^2	B	Regressionskonstante		Regressionskoeffizienten							
					a	$E_a\%$	t_a	b_1	$E_{b1}\%$	t_{b1}	b_2	$E_{b2}\%$	t_{b2}	b_3

$$(1 a) f = a + b_1 \frac{1}{h} + b_2 \frac{h}{d} + b_3 \frac{h}{d^2} + b_4 \frac{h^k}{h}$$

1	100	10,45	7,16	0,531	+ 0,1859	42,7	2,34	+ 0,4413	25,0	4,00	+ 0,2116	39,4	2,54	- 0,1618	81,6	1,23	+ 0,0200	204,7	0,49
2	100	9,53	7,43	0,383	+ 0,2876	19,8	5,05	+ 0,1448	33,6	2,97	+ 0,1876	37,6	2,66	- 0,0532	109,7	0,91	+ 0,0017	1311,3	0,08
3	100	8,94	6,23	0,515	+ 0,1856	53,2	1,88	+ 0,1961	29,8	3,36	+ 0,1946	37,6	2,66	- 0,0306	136,6	0,73	+ 0,1576	30,7	3,25
4	100	11,04	9,00	0,336	+ 0,2833	33,9	2,95	+ 0,1155	58,0	1,72	+ 0,1247	82,6	1,21	+ 0,0139	527,0	0,19	+ 0,0207	161,6	0,62
5	100	15,12	8,18	0,711	+ 0,1103	49,3	2,03	+ 0,2191	22,4	4,47	+ 0,3074	17,7	5,65	- 0,0843	85,5	1,53	+ 0,0385	85,7	1,17
6	100	12,47	8,73	0,510	+ 0,2509	17,5	5,73	+ 0,1553	39,4	2,54	+ 0,2099	21,5	4,65	- 0,0894	53,1	1,88	- 0,0223	151,5	0,66
7	100	10,01	6,81	0,537	+ 0,2353	23,0	4,35	+ 0,1605	24,3	4,11	+ 0,2916	23,9	4,18	- 0,1464	47,2	2,12	- 0,0163	124,5	0,80
8	100	8,82	6,35	0,482	+ 0,1662	30,7	3,26	+ 0,2014	18,1	5,53	+ 0,2546	18,7	5,34	- 0,1590	27,8	3,60	+ 0,0285	86,9	1,15
Ges.	800	12,34	7,93	0,587	+ 0,2711	5,4	18,63	+ 0,1442	8,1	12,30	+ 0,1754	8,9	11,24	- 0,0375	34,4	2,91	- 0,0010	933,5	0,11

$$(2 a) f = a + b_1 \frac{1}{h} + b_2 \frac{h}{d} + b_3 \frac{h}{d^2}$$

1	100	10,45	7,13	0,535	+ 0,1839	32,6	3,06	+ 0,4390	25,0	4,00	+ 0,1991	39,6	2,52	- 0,1584	82,8	1,21			
2	100	9,53	7,39	0,399	+ 0,2891	18,5	5,40	+ 0,1446	33,5	2,99	+ 0,1872	37,3	2,68	- 0,0533	108,9	0,92			
3	100	8,94	6,53	0,466	+ 0,2646	32,8	3,05	+ 0,1604	37,5	2,67	+ 0,1636	46,4	2,15	- 0,0255	172,0	0,58			
4	100	11,04	8,97	0,341	+ 0,3038	32,2	3,11	+ 0,1143	58,4	1,71	+ 0,1277	80,3	1,25	+ 0,0084	882,3	0,12			
5	100	15,22	8,19	0,710	+ 0,1441	32,0	3,13	+ 0,2179	22,5	4,44	+ 0,2966	18,1	5,52	- 0,0923	59,5	1,68			
6	100	12,47	8,70	0,513	+ 0,2396	16,8	5,96	+ 0,1532	39,8	2,51	+ 0,2137	20,9	4,79	- 0,0882	53,6	1,86			
7	100	10,01	6,80	0,539	+ 0,2181	22,8	4,39	+ 0,1612	24,2	4,13	+ 0,3054	22,1	4,53	- 0,1511	45,5	2,20			
8	100	8,82	6,36	0,480	+ 0,1946	23,0	4,35	+ 0,2948	18,4	5,43	+ 0,2376	19,1	5,23	- 0,1535	26,7	3,49			
Ges.	800	12,34	7,93	0,588	+ 0,2704	4,8	20,76	+ 0,1442	8,1	12,33	+ 0,1757	8,7	11,44	- 0,0374	34,3	2,92			

(Die Grenzwerte von bei n = 100 sind: bei P 5 % - t = 1,98; bei P 1 % - t = 2,63; bei P 0,1 % - t = 3,39)

Übersicht über die Statistiken des nach Altersklassen gegliederten Fichtenprobestammmaterials der 8 Areale für den Funktionstyp (14)

Altersklassen	Stamm- anzahl	Standardabweichungen		Bestimm- heitsmaß B	Regressionskonstante			Regressionskoeffizienten					
		v. arithm. Mittel in %	von der Funktion in %		a	ϵ_a %	t	b ₁	ϵ_{b1} %	t	b ₂	ϵ_{b2} %	t
(27) - 40	45	9,55	4,89	0,737	+ 0,1588	26,2	3,8	+ 0,4481	14,1	7,1	+ 0,0323	35,8	2,79
41 - 60	163	9,42	4,12	0,809	+ 0,1352	13,4	7,5	+ 0,4695	5,6	17,7	+ 0,0433	13,1	7,6
61 - 80	164	9,77	4,45	0,792	+ 0,1387	11,5	8,7	+ 0,4722	5,2	19,3	+ 0,0464	18,6	5,4
81 - 120	307	11,83	4,23	0,872	+ 0,1290	7,8	12,8	+ 0,4798	3,5	28,8	+ 0,0491	12,4	8,0
121 - 160	93	14,74	4,94	0,887	+ 0,1192	15,2	6,6	+ 0,4914	6,4	15,7	+ 0,0662	22,7	4,4
161 - (280)	28	13,41	3,37	0,937	+ 0,0857	22,0	4,5	+ 0,5273	7,2	14,0	+ 0,1281	38,8	2,58
Gesamt	800	12,34	4,41	0,872	+ 0,1221	5,3	18,8	+ 0,4964	2,1	48,0	+ 0,0375	7,2	13,9

Vergleich der beobachteten mit den nach der gemeinsamen Funktion errechneten Faktoren, geordnet nach Altersklassen, und Vergleich der gemeinsamen Funktion (insgesamt 800 Fichten) mit den separaten Funktionen hinsichtlich der Anpassung an das Material

Funktionstyp (14): $f = a + b_1 \frac{d^2}{d^2} + b_2 \frac{h}{d^2} + b_3 \frac{h}{d^2}$

Altersklassen	Stamm- anzahl	Beobachteter durch- schnittlicher Form- faktor (arithm. Mittel) \bar{f}	Beobachteter durch- schnittlicher Form- faktor "f(b)" in % d. errechneten durch- schnittlichen Form- faktors "f(e)" (ge- meinsame Funktion)	Mittlere quadratische Abweichung der beob- achteten Formfaktoren vom arithm. Mittel in %	Mittlere quadratische Abweichung der beobachteten von den errechneten Formfaktoren in %		$\Delta s_F =$ $\frac{s_F(g)}{s_F(g)} \%$ $\frac{s_F(s)}{s_F(s)} \%$
					gemeins. Funktion (n = 800) $\frac{s_F(g)}{s_F(g)} \%$	separate Funktion (n = je 100) $\frac{s_F(s)}{s_F(s)} \%$	
(27) - 40	45	0,536	98,91	9,55	5,13	4,89	+ 0,24
41 - 60	163	0,525	99,53	9,42	4,16	4,12	+ 0,04
61 - 80	164	0,499	100,76	9,77	4,54	4,45	+ 0,09
81 - 120	307	0,476	99,98	11,83	4,26	4,23	+ 0,03
121 - 160	93	0,466	100,45	14,73	5,13	4,94	+ 0,09
161 - (280)	28	0,423	99,11	13,41	4,06	3,37	+ 0,69
Gesamt	800	0,491	100,00	12,34	4,41		

Übersicht über die Statistiken des nach Baumhöhenklassen gegliederten Fichtenprobestammmaterials der 8 Areale für den Funktionstyp (14)

Baumhöhenklassen	Stammanzahl	Standardabweichungen v. arithm. Mittel in %	Standardabweichungen von der Funktion in %	Bestimmtheitsmaß B	Regressionskonstante			Regressionskoeffizienten					
					a	$\epsilon_a\%$	t_a	b_1	$\epsilon_{b1}\%$	t_{b1}	b_2	$\epsilon_{b2}\%$	t_{b2}
bis 10,0 m	41	9,38	5,98	0,594	+ 0,2407	22,4	4,5 xxx	+ 0,3507	21,3	4,7 xxx	+ 0,0426	36,7	2,73 x
10,1 15,0	147	8,91	4,33	0,764	+ 0,1588	11,9	8,4 xxx	+ 0,4350	6,0	16,8 xxx	+ 0,0439	12,2	8,2 xxx
15,1 20,0	216	10,44	4,41	0,821	+ 0,1156	11,9	8,4 xxx	+ 0,5065	4,2	24,0 xxx	+ 0,0371	16,7	6,0 xxx
20,1 25,0	179	9,47	4,00	0,821	+ 0,1066	13,0	7,7 xxx	+ 0,5152	4,2	24,1 xxx	+ 0,0463	21,2	4,7 xxx
25,1 30,0	106	10,30	3,84	0,861	+ 0,1129	13,4	7,5 xxx	+ 0,5027	5,0	19,8 xxx	+ 0,0696	23,1	4,3 xxx
30,1 35,0	76	10,70	3,81	0,873	+ 0,0828	19,7	5,1 xxx	+ 0,5492	5,4	18,4 xxx	+ 0,0691	38,6	2,59 x
über 35,0 m	35	7,87	3,56	0,796	+ 0,0828	32,0	3,13 xx	+ 0,4861	10,3	9,7 xxx	+ 0,3137	20,9	4,8 xxx
Gesamt	800	12,34	4,41	0,872	+ 0,1221	5,3	18,8	+ 0,4964	2,1	48,0	+ 0,0375	7,2	13,9

Beilage 18 a

Vergleich der beobachteten mit den nach der gemeinsamen Funktion errechneten Faktoren, geordnet nach Höhenklassen, und Vergleich der gemeinsamen Funktion (insgesamt 800 Fichten) mit den separaten Funktionen hinsichtlich der Anpassung an das Material

Funktionstyp (1.4): $f = a + b_1 \frac{h}{d^2} + b_2 \frac{h}{d}$

Höhenklassen	Stamm-anzahl	Beobachteter durchschnittlicher Formfaktor (arithm. Mittel) \bar{f}	Beobachteter durchschnittlicher Formfaktor "f(b)" in % d. errechneten durchschnittlichen Formfaktors "f(e)" (gemeinsame Funktion)	Mittlere quadratische Abweichung der beobachteten Formfaktoren vom arithm. Mittel in %	Mittlere quadratische Abweichung der beobachteten von den errechneten Formfaktoren in %		Δs_F $s_{F(g)}\%$ $s_{F(s)}\%$
					gemeins. Funktion (n = 800) $s_{F(g)}\%$	separate Funktion (n = je 100) $s_{F(s)}\%$	
1	41	0,569	100,96	9,38	6,40	5,98	+ 0,42
2	147	0,531	99,15	8,91	4,50	4,33	+ 0,17
3	216	0,503	100,13	10,44	4,41	4,41	0,00
4	179	0,485	100,23	9,47	4,05	4,00	+ 0,05
5	106	0,464	100,81	10,30	4,03	3,84	+ 0,19
6	76	0,427	99,54	10,70	4,07	3,81	+ 0,26
7	35	0,419	99,19	7,87	4,51	2,56	+ 0,95
Ges.	800	0,491	100,00	12,34	4,41		

Übersicht über die Statistiken des nach Stärkeklassen gegliederten Fichtenprobestammmaterials der fünf Stärkeklassen für den Funktionstyp (14)

Stärkeklassen	Stamm- anzahl	Standardabweichungen v. arithm. Mittel in %		Bestimm- heitsmaß B	Regressionskonstante			Regressionskoeffizienten				
		von der Funktion in %	Funktion in %		a	ϵ_a %	t _a	b ₁	ϵ_{b1} %	t _{b1}	b ₂	ϵ_{b2} %
5,0 10,0	53	6,99	4,60	0,566	+ 0,2272	19,0	5,3	+ 0,4038	12,2	8,2	+ 0,0174	64,8 (1,54)
10,1 20,0	299	8,25	4,55	0,696	+ 0,1589	8,9	11,2	+ 0,4514	4,3	23,1	+ 0,0323	18,4 5,4
20,1 35,0	278	8,71	4,16	0,772	+ 0,1126	10,8	9,2	+ 0,4930	3,7	27,3	+ 0,0771	16,7 6,0
35,1 50,0	106	8,97	3,64	0,835	+ 0,0804	19,2	5,2	+ 0,5281	4,7	21,4	+ 0,1704	26,8 3,73
50,1	64	9,58	3,50	0,866	+ 0,0783	21,1	4,7	+ 0,5282	5,2	19,2	+ 0,2143	38,6 2,59
Gesamt	800	12,34	4,41	0,872	+ 0,1221	5,3	18,8	+ 0,4964	2,1	48,0	+ 0,0375	7,1 13,9

Beilage 19 a

Vergleich der beobachteten mit den nach der gemeinsamen Funktion errechneten Faktoren, geordnet nach Stärkeklassen, und Vergleich der gemeinsamen Funktionen (Insgesamt 800 Fichten) mit den separaten Funktionen hinsichtlich der Anpassung an das Material

Funktionstyp (14): $f = a + b_1 \frac{d^2}{d^2} + b_2 \frac{h}{d^2}$

Stärke- klassen	Stamm- anzahl	Beobachteter durch- schnittlicher Form- faktor (arithm. Mittel)	Beobachteter durch- schnittlicher Form- faktor "f(b)" in % d. errechneten durch- schnittlichen Form- faktors "f(e)" (ge- meinsame Funktion)	Mittlere quadratische Abweichung der beob- achteten Formfakto- ren vom arithm. Mit- tel in %	Mittlere quadratische Abweichung der beobachteten von den errechneten Formfaktoren in %		$\Delta s_F =$ $\frac{s_F(g)}{s_F(s)} \%$ $\frac{s_F(s)}{s_F(s)} \%$
					gemeins. Funktion (n = 800) $\frac{s_F(g)}{s_F(s)} \%$	separate Funktion (n = je 100) $\frac{s_F(s)}{s_F(s)} \%$	
1	53	0,582	100,45	6,99	4,93	4,60	+ 0,33
2	299	0,522	99,84	8,25	4,61	4,55	+ 0,06
3	278	0,483	100,44	8,71	4,25	4,16	+ 0,09
4	106	0,485	100,05	8,97	3,86	3,64	+ 0,22
5	64	0,404	98,18	9,58	4,16	3,50	+ 0,66
Ges.	800	0,491	100,00	12,34	4,41		

Übersicht über die Statistiken des nach Stärkeklassen gegliederten
Fichtenprobematerials der fünf Stärkeklassen für den
Funktionstyp $f = a + b_1 \frac{d_0,3h}{d} + b_2 \frac{h}{d^2}$

Stärkeklassen	Stamm- anzahl	Standardabweichungen		Bestimm- heitsmaß B	Regressionskonstante			Regressionskoeffizienten					
		v. arithm. Mittel in %	von der Funktion in %		a	ϵ_a %	t _a	b ₁	ϵ_{b1} %	t _{b1}	b ₂	ϵ_{b2} %	t _{b2}
5,0 10,0	53	6,99	4,57	0,572	0,1167	70,8	(1,41)	+ 0,7461	12,1	8,3	+ 0,0174	64,3	(1,56)
10,1 20,0	299	8,25	4,54	0,697	0,1744	16,2	6,2	+ 0,7766	4,3	23,1	+ 0,0324	18,3	5,5
20,1 35,0	278	8,71	4,12	0,776	- 0,2240	10,6	9,4	+ 0,8165	3,6	27,6	+ 0,0755	16,9	5,9
35,1 50,0	106	8,97	3,65	0,835	0,2342	12,5	8,0	+ 0,8180	4,7	21,3	+ 0,1636	28,0	3,57
50,1	64	9,58	3,48	0,868	- 0,2125	16,8	5,95	+ 0,7860	5,2	19,3	+ 0,2103	39,1	(2,56)
Gesamt	800	12,34	4,35	0,876	- 0,2176	6,1	16,4	+ 0,8229	2,0	48,9	+ 0,0382	6,9	14,5

Beilage 20 a

Vergleich der beobachteten mit den nach der gemeinsamen Funktion errechneten Faktoren, geordnet nach Stärkeklassen, und Vergleich der gemeinsamen Funktion (insgesamt 800 Fichten) mit den separaten Funktionen hinsichtlich der Anpassung an das Material

Funktionstyp: $f = a + b_1 \frac{d_0,3h}{d} + b_2 \frac{h}{d^2}$

Stärkeklassen	Stammanzahl	Beobachteter durchschnittlicher Formfaktor (arithm. Mittel) \bar{f}	Beobachteter durchschnittlicher Formfaktor "f(b)" in % d. errechneten durchschnittlichen Formfaktors "f(e)" (gemeinsame Funktion)	Mittlere quadratische Abweichung der beobachteten Formfaktoren vom arithm. Mittel in %	Mittlere quadratische Abweichung der beobachteten von den errechneten Formfaktoren in %		$\Delta s_F = \frac{s_F(g)}{s_F(s)} \%$
					gemeins. Funktion (n = 800) $s_{F(g)} \%$	separate Funktion (n = je 100) $s_{F(s)} \%$	
1	53	0,582	100,71	6,99	4,83	4,57	+ 0,26
2	299	0,522	99,78	8,25	4,58	4,54	+ 0,04
3	278	0,483	100,31	8,71	4,20	4,12	+ 0,08
4	106	0,435	100,13	8,97	3,79	3,65	+ 0,14
5	64	0,404	98,68	9,58	3,85	3,48	+ 0,37
Ges.	800	0,491	100,00	12,34	4,36		

Zum Nachweis, daß eine Funktion nur innerhalb der Grenzen des Materials, für welches sie berechnet wurde, verwendet werden darf, seien die Abweichungen innerhalb der einzelnen Stärkeklassen bei Verwendung der Funktion der Stärkekategorie 2 festgehalten.
(Nähere Hinweise siehe Abschnitt 4.3)

Stärkekategorie	Funktion der Stärkekategorie 2		Gemeinsame Funktion		Separate Funktionen für jede Stärkekategorie Mittlere quadratische Abweichung d. beobachteten v. d. errechneten Formfaktoren in %
	Beobachteter durchschnittlicher Formfaktor " $f(b)$ " in % des errechneten durchschnittlichen Formfaktors " $f(e)$ "	Mittlere quadratische Abweichung d. beobachteten v. d. errechneten Formfaktoren in %	Beobachteter durchschnittlicher Formfaktor " $f(b)$ " in % des errechneten durchschnittlichen Formfaktors " $f(e)$ "	Mittlere quadratische Abweichung d. beobachteten v. d. errechneten Formfaktoren in %	
1 5,0 10,0	96,32	6,00	100,71	4,83	4,57
2 10,1 20,0	100,00	4,54	99,78	4,58	4,54
3 20,1 35,0	96,83	5,99	100,31	4,20	4,12
4 35,1 50,0	87,58	16,18	100,13	3,79	3,65
5 50,1	83,28	22,27	98,68	3,85	3,48
Gesamt			100,00	4,36	

Gegenüberstellung von Statistiken der Funktionen (14), (22) und (38),
berechnet für Probestammmaterial des "Zillertales"

Nr.	Stärkeklassen	verwendete unabhängige Variable	n	s _y %	s _f %	B	t _a	b ₁	t _{b1}	b ₂	t _{b2}	b ₃	t _{b3}
14	gesamt		312	11,71	4,76	0,834	10,6	0,5232	32,1	+ 0,0175	3,82		
14	St. Kl. 1 (5,0 - 20,0 cm)		56	9,92	5,31	0,713	4,2	0,5073	11,4	- 0,0026	0,3		
14	St. Kl. 2 (20,1 - 35,0 cm)	$\frac{h}{d^2}$	146	9,16	4,56	0,752	9,0	0,4612	18,3	+ 0,0618	2,3		
14	St. Kl. 3 (35,1 +)	$\frac{d^2 \cdot 0,3 \cdot h}{d^2}$	108	9,57	3,54	0,863	7,1	0,4901	21,5	0,2076	4,9		
22	gesamt		312	11,71	4,74	0,836	11,5	0,8601	32,4	+ 0,0186	4,1		
22	St. Kl. 1		56	9,92	5,32	0,712	9,7	0,8769	11,3	- 0,0032	0,4		
22	St. Kl. 2	$\frac{h}{d^2}$	146	9,16	4,54	0,754	5,3	0,7616	18,4	+ 0,0577	2,1		
22	St. Kl. 3	$\frac{d \cdot 0,3 \cdot h}{d}$	108	9,57	3,48	0,868	8,3	0,7792	22,1	+ 0,2045	4,9		
38	gesamt		312	11,71	2,80	0,943	6,0	+ 0,1440	7,9	+ 0,5188	24,3	+ 0,0041	1,45
38	St. Kl. 1		56	9,92	3,52	0,874	2,41	+ 0,1466	2,81	+ 0,5129	8,4	- 0,0096	1,63
38	St. Kl. 2	$\frac{d \cdot 0,1 \cdot h \cdot d \cdot 0,5 \cdot h}{d^2}$	146	9,16	2,62	0,918	5,1	+ 0,1181	4,8	+ 0,5154	17,1	+ 0,0273	1,72
38	St. Kl. 3	$\frac{d^2 \cdot 0,3 \cdot h}{d^2}$	108	9,57	2,01	0,956	5,9	+ 0,1843	7,6	+ 0,4385	15,0	+ 0,0787	3,07

Tabelle 21

10. GRAPHISCHE DARSTELLUNGEN (ABBILDUNGEN)

Zusammenhänge zwischen der prozentualen Standardabweichung v , der Funktion- $s_F\%$ u. den t -Werten d. Regressionskoeffizienten für die Beziehungsgleichung $f = a + b_1 \frac{d^2_{0,x} h}{d^2} + b_2 \frac{h}{d^2}$.

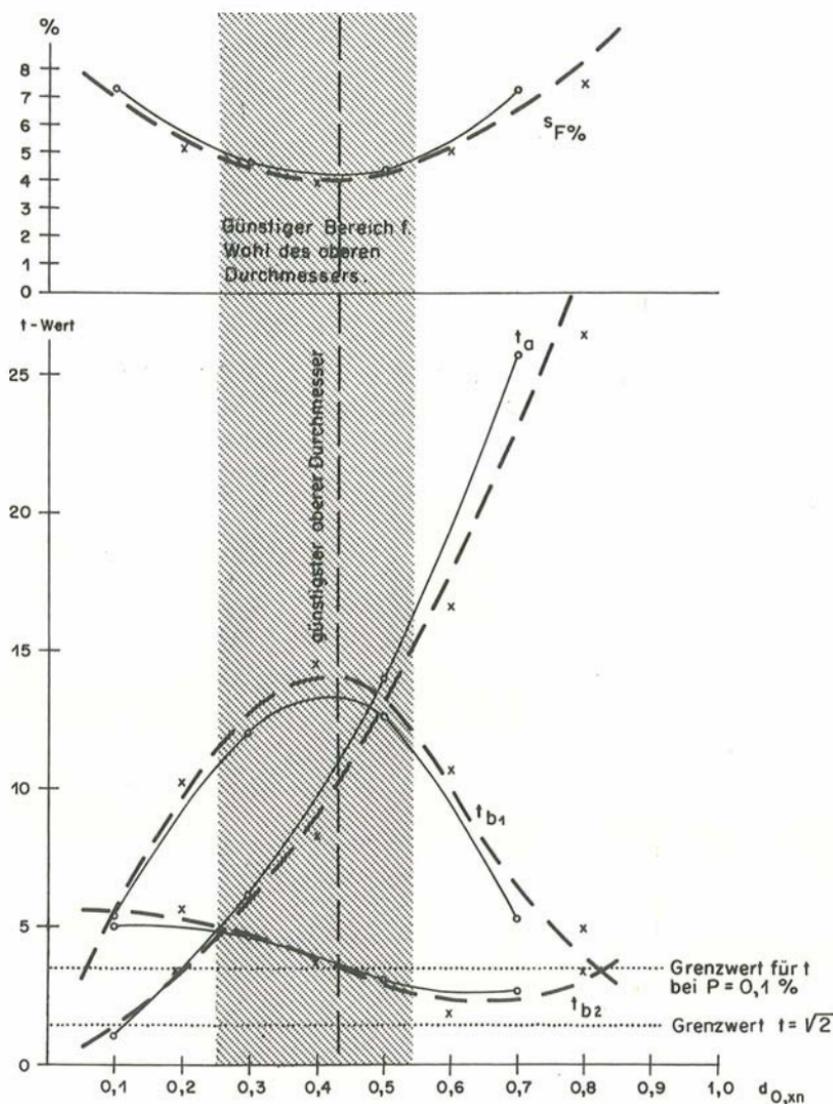


Abb. 1

Beispiel eines Gitternetzes – quadratisches Probeflächennetz

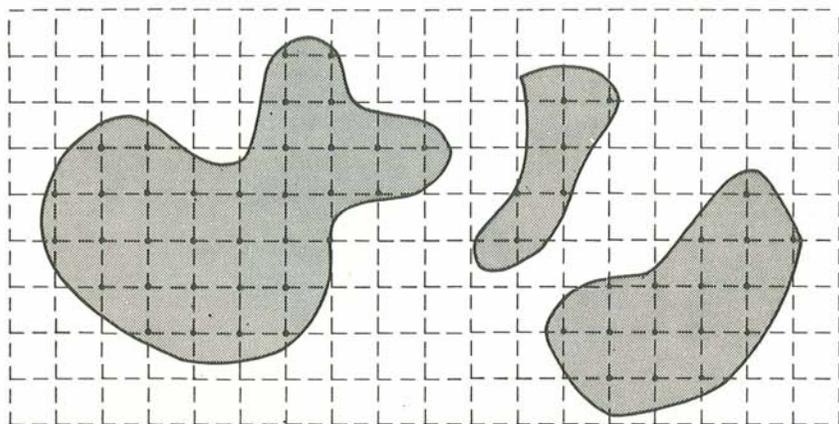


Abb. 2a

Gleichmäßiges, quadratisches Probennetz und beispielsweise Bildung von Berechnungseinheiten im Zuge der Auswertung einer systematischen Stichprobenahme.

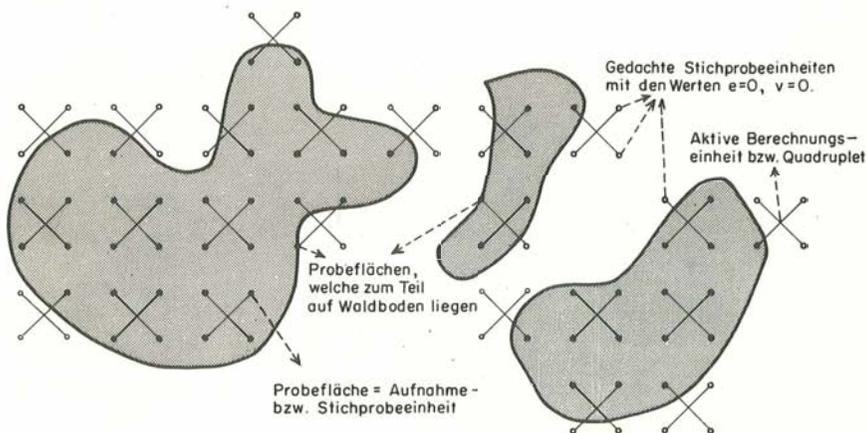
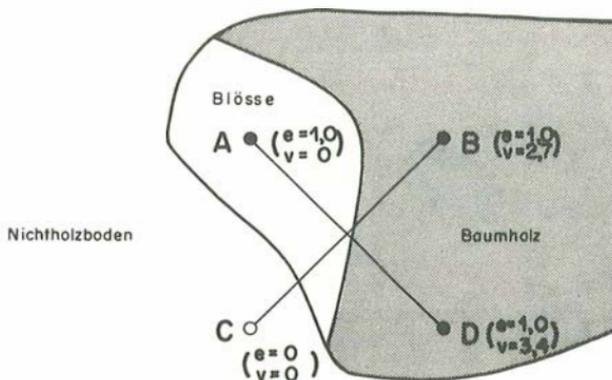


Abb. 2b

Beispiel der Kreuzdifferenzbildung f. ein Quadruplet.



Die Summe der gefragten Merkmalswerte der Stichprobeneinheiten A plus D, minus der Summe der Merkmalswerte der Stichprobeneinheiten B plus C ergibt die sogenannte "Kreuzdifferenz";
 $(A + D) - (B + C) = (A - B - C + D)$.

Abb. 3

Vier Grundvarianten der Quadrupletbildung

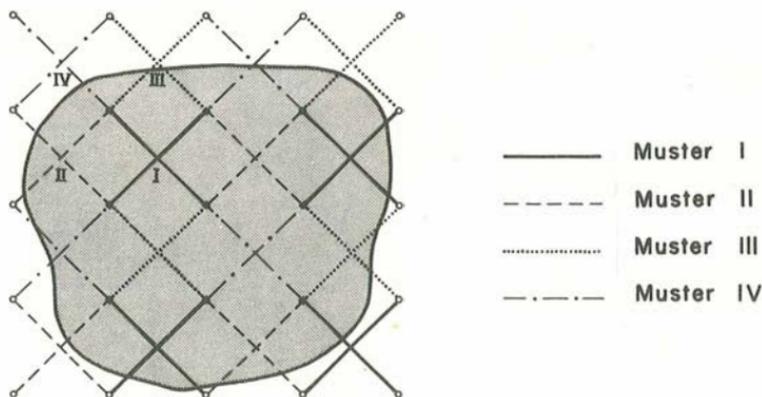


Abb. 4

