Bericht über verschiedene, für das physikalische Institut in Greifswald construirte Apparate und über einige Versuche mit denselben.

Von

A. Oberbeck.

I. Ein einfacher Apparat zur Messung der Vergrösserungszahl optischer Instrumente.

(Vorgetragen in der Sitzung am 11. Mai 1887.)

Bekanntlich beurtheilt man die Grösse eines Objects nach der scheinbaren Grösse desselben, d. h. nach der Grösse des Winkels, welcher entsteht, wenn man von dem Auge nach zwei entgegengesetzten Punkten der Grenze des Gegenstandes Linien gezogen denkt. Sinkt dieser Winkel, der Gesichtswinkel, unter eine gewise Grenze, so hört der Gegenstand auf sichtbar zu sein.

Dieser Grenzwinkel wird gewöhnlich zu 30'' angegeben, so dass ein 1 mm breiter Spalt in einer Entfernung von 6,6 m aufhören würde sichtbar zu sein.

Um Gegenstände noch deutlich zu sehen, deren scheinbare Grösse eine sehr kleine ist, entweder weil sie überhaupt sehr klein sind, oder weil sie uns sehr fern liegen, benutzt man optische Instrumente: das Mikroskop und das Teleskop.

Beide Classen von Apparaten haben das gemeinsam, dass sie uns durch Linsensysteme ein Bild des zu beobachtenden Objects in die kleinste, deutliche Sehweite (25 cm für ein normales Auge) rücken. Das Verhältniss der scheinbaren Grösse dieses Bildes zu der scheinbaren Grösse des Gegenstandes wird als Vergrösserungszahl des optischen Instrumentes bezeichnet. Jedoch muss man sich bei dem Mikroskop den Gegenstand selbst ebenfalls in die deutliche Schweite gebracht denken, während derselbe bei dem Fernrohr mit dem beobachteten — entfernten — Object zusammenfällt.

Die Vergrösserungszahl der optischen Instrumente kann aus ihrer Construction berechnet werden. Eine genauere Berechnung ist aber ziemlich umständlich, so dass es sehr wünschenswerth ist, durch einfache Versuche die Vergrösserungszahl feststellen zu können.

Die gebräuchlichste Methode[1]), dieselbe zu messen, besteht darin, dass man das Bild in der deutlichen Sehweite, herrührend von einem Object von bekannten Dimensionen, direct mit einem anderen, gleichzeitig gesehenen Object vergleicht. Man kann dies bewirken, indem man mit dem einen Auge das Bild, mit dem anderen den Vergleichsgegenstand betrachtet. Man kann es aber auch durch optische Vorrichtungen dahin bringen, dass man Beides mit demselben Auge sieht.

Letztere Methode scheint mir vorzuziehen, da ich die Erfahrung gemacht habe, dass es Vielen schwer wird, die mit den beiden Augen beobachteten Bilder zur Deckung zu bringen.

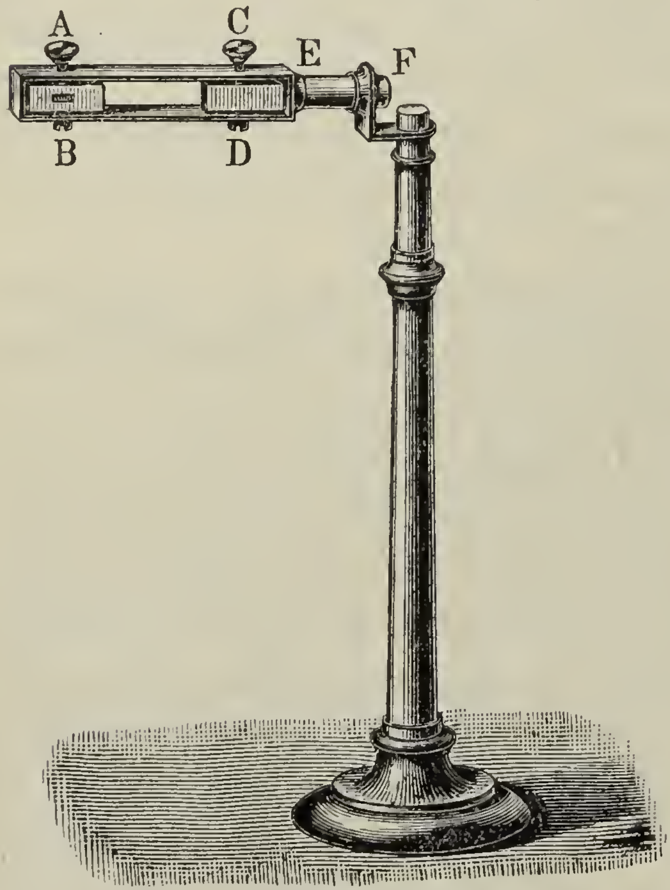


Fig. 1.

Im Anschluss an eine Versuchsanordnung von F. Kohlrausch[2]) habe ich einen Apparat construirt[3]), welcher die Vergrösserungszahl in einfachster Weise bei dem Mikroskop und bei dem Fernrohr zu messen gestattet.

In einem rechteckigen Rahmen sind, wie die beistehende Figur 1 zeigt, zwei rechteckige

1) Vergl. F. Kohlrausch. Leitfaden der practischen Physik 1884; p. 139—142. — L. Dippel. Handbuch der allgemeinen Mikroskopie. 1882; p. 355—366. — A. Mousson. Die Physik auf Grundlage der Erfahrung. 1881. Band II. p. 450—452.

2) l. c. p. 142.

3) Der Apparat ist von der Firma: Schmidt und Haensch in Berlin nach meinen Angaben ausgeführt worden.

Spiegel von 25 mm Länge und 15 mm Breite in einer Entfernung von 6 cm angebracht. Dieselben sind um die Axen *AB* und *CD* drehbar und mit Hilfe der kleinen Schrauben *A* und *C* in beliebiger Lage festzustellen. Der Rahmen ist vermittelst eines Zwischenstücks *EF* an einem zu verstellenden Stativ befestigt und kann um die Axe *EF* gedreht werden. Der Spiegel *AB* hat in der Mitte eine unbelegte Stelle.

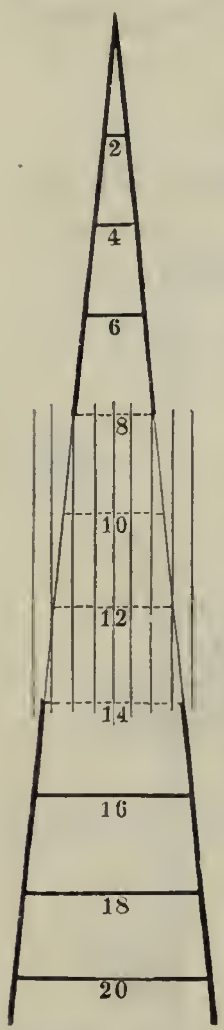


Fig. 2.

Soll der Apparat dazu dienen, die Vergrösnes Mikreiserung oskops zu messen, so wird der Rahmen horizontal gestellt. Die Spiegel sind um 45^0 gegen die Horizontalebene geneigt. Der Spiegel *AB* befindet sich unmittelbar über dem Ocular. Neben dem Mikroskop liegt unter dem Spiegel *CD* das Vergleichsobject, dessen Bild durch doppelte Spiegelung zugleich mit dem Bild des unter dem Mikroskop liegenden Gegenstandes in das Auge gelangt. Als mikroskopisches Object benutze ich eine Mikrometerskala mit Linien in $^1/_{10}$ und $^1/_{100}$ mm Abstand.

Als Vergleichsobject dient ein auf graues Papier gezeichnetes, gleichschenkliges Dreieck von 20 mm Basis und 100 mm Höhe. Ohne Mühe kann man sofort erkennen, wie viel Mikrometerstriche auf einen der Theilstriche des Dreiecks fallen. So würden in beistehender Zeichnung (Fig. 2.) vier Millimeterstriche auf den 8. Strich fallen. Sind die Mikrometerstriche Zehntel, so wäre in diesem Fall die Vergrösserung eine zwanzigfache. Um die eigentliche Vergrösserungszahl zu finden, hat man noch mit dem Verhältniss der Entfernung der Zeichnung vom Auge: $a+b$ (vergl. Fig. 3.) zu 25 cm die oben gefundene Zahl zu multipliciren.

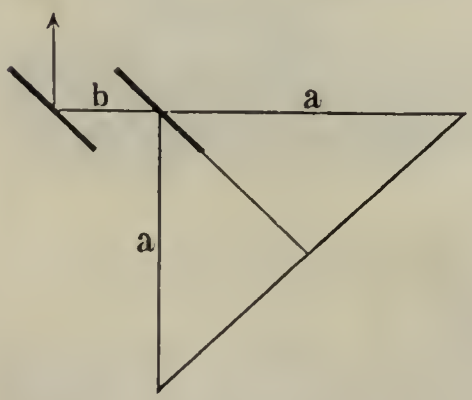


Fig. 3.

Um die Vergrösserung eines Fernrohrs zu bestimmen wird der Rahmen vertical gestellt. Die beiden Spiegel sind wiederum um 45^0 geneigt und einander parallel. Durch die Oeffnung in AB sieht man durch das Fernrohr, während durch die doppelte Spiegelung das Bild eines zweiten Objects gleichzeitig in das Auge gelangt. Ich benutze hierbei eine Millimeterskala, welche auf eine andere Skala mit grossen und dicken Strichen, in Abständen von je 5 cm, aufgeklebt ist. Man hat dann nur abzuzählen, wieviel Millimeter, durch das Fernrohr gesehen, auf den Abstand zweier durch die Spiegel gesehener Striche kommen. Ist diese Anzahl n, so ist die Vergrösserungszahl des Fernrohrs: $\frac{50}{n}$.

Für die in physikalischen Laboratorien gebräuchlichen Fernröhre hat sich diese Methode stets gut bewährt. Besonders ist es von Interesse hiernach festzustellen, wie die Vergrösserungszahl zunimmt, wenn das Object dem Fernrohr genähert wird.

---

2. Das Kreuzpendel.
Ein Vorlesungsapparat zur Demonstration der Schwingungsgesetze des physischen Pendels.

Vorgetragen in der Sitzung am 2. November 1887.

Die Formel für die Schwingungsdauer des einfachen (mathematischen) Pendels:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

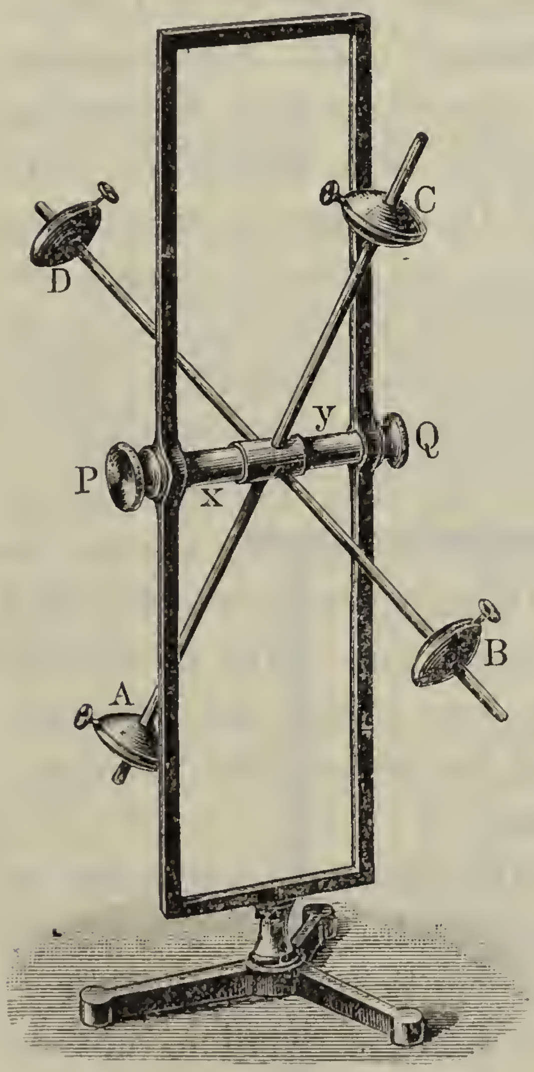
lässt sich leicht mit Hilfe einer kleinen, an einem langen Faden hängenden Kugel durch Schwingungsversuche mit veränderter Fadenlänge nachweisen.

Viel complicirter und daher dem Verständniss des Anfängers schwerer zugänglich ist der Ausdruck für die Schwingungsdauer des physischen Pendels:

$$T = \pi \sqrt{\frac{\Sigma\, mr^2}{G\,.\,M\,.\,e}},$$

wo e die Entfernung des Schwerpunkts von der Drehungsaxe, unter M die Gesammtmasse zu verstehen ist. Das richtige Verständniss des physischen Pendels ist aber von so fundamentaler Bedeutung für den Unterricht in allen Theilen der Physik, dass man kein Bedenken tragen darf, einige Zeit bei demselben zu verweilen. Abgesehen von seiner Wichtigkeit für die Messung der Constanten G ist dasselbe das Vorbild vieler anderer pendelartiger Apparate. Die Schwingungen eines Magnetstabes, der Bifilarwage, der Torsionswage etc. folgen sämmtlich denselben Fundamentalgesetzen.

Ferner sind die Begriffe des Trägheitsmomentes und des statistischen Moments oder Drehungsmomentes[1]), deren Werthe die Schwingungsdauer des physischen Pendels bedingen, so wichtig, dass man gern die Gelegenheit benutzen wird, ihre Bedeutung für Schwingungsbewegungen an diesem Beispiel darzuthun.



Um den Einfluss dieser Grössen auf die Schwingungsdauer einzeln darzustellen, habe ich einen einfachen Apparat construiren lassen, den ich als „Kreuzpendel“ bezeichnen will.

Dasselbe besteht, wie die beistehende Figur zeigt, aus einem Messingcylinder xy, in welchen vier Messingdrähte von etwa 20 cm Länge kreuzförmig eingesetzt sind. Auf denselben sind vier gleich grosse Gewichte A, B, C, D von 140 gr. verschiebbar und durch kleine Schrauben an den Drähten festzuklemmen.

Der mittlere Cylinder ist an seinen Enden den Spitzen angepasst, welche mit Hilfe der Schrauben PQ verstellt werden können.[2])

Man kann zunächst mit diesem Apparat die verschiede-

1) Nach meiner Ansicht könnte man die Bezeichnung „statisches Moment“ durch den Ausdruck: Drehungsmoment ersetzen.

2) Ich benutze das Gestell eines Pendelapparats nach Mach (Müller, Lehrbuch der Physik. 9. Aufl. 1886. p. 191—192), welchem das bewegliche System angepasst worden ist.

nen Arten des Gleichgewichts zeigen. Bei gleichem Abstand der Gewichte von der Drehungsaxe ist das Gleichgewicht indifferent. Ein leichter Anstoss genügt, um das System in gleichmässige langandauernde Rotation zu versetzen.

Eine kleine Senkung des Gewichtes A versetzt das bewegliche System in stabiles Gleichgewicht. Dreht man das Kreuz um 180^0, so dass A nach oben kommt, so genügt, bei vorsichtiger Einstellung, die Zapfenreibung, das bewegliche System in labilem Gleichgewicht zu erhalten. Bei mässiger Erschütterung des Tisches, auf welchem der Apparat steht, fällt dasselbe in die stabile Gleichgewichtslage zurück.

Was nun die Anwendung des Apparats als physisches Pendel betrifft, so wird man zunächst nur ein Gewicht (etwa A) an dem Drahtkreuz anbringen. Die Schwingungsdauer ist klein und erreicht bei einer gewissen Entfernung des Gewichtes von der Drehungsaxe ein Minimum. Die Hinzufügung der Gewichte B und D, die immer in gleicher Entfernung von der Axe sich befinden, vergrössert die Schwingungsdauer. Durch Veränderung ihrer Entfernung von der Axe wird das Trägheitsmoment allein verändert, ohne dass das Drehungsmoment eine Veränderung erleidet.

Befestigt man das Gewicht C auf dem oberen Arm in einer Entfernung von der Drehungsaxe, welche kleiner als diejenige von A ist, so wird das Drehungsmoment sehr klein. Versetzt man C an die untere Stange und zwar in dieselbe Entfernung, welche es zuvor hatte, so bleibt das Trägheitsmoment des Systems unverändert, während das Drehungsmoment erheblich grösser geworden ist.

Die Versuche lassen noch mannigfaltige Variationen zu, auf welche ich nicht weiter eingehen will.

Selbstverständlich kann man die Schwingungsdauer in allen Fällen, wo die vier Gewichte benutzt werden, aus der Formel für dieselbe:

$$T = \pi \sqrt{\frac{\vartheta + ma^2 + mc^2 + 2mb^2}{G \, . \, m\,(a \pm c)}}$$

berechnen. In derselben ist m das Gewicht eines der verschiebbaren Messingcylinder. Ferner sind a und c die Abstände der Schwerpunkte von A und C von der Axe, wobei das positive Zeichen gilt, wenn beide an dem untern Arm sich befinden. Der Abstand von B und D ist: b. Endlich bedeutet ϑ das Trägheitsmoment des Drahtkreuzes ohne Gewicht, vermehrt um die Trägheitsmomente der vier Gewichte in Bezug auf Axen, welche durch ihre Schwerpunkte gehen. Bei grösseren Abständen a, b, c ist ϑ klein im Vergleich zu ma^2 etc.

Da man aber beim Unterricht nicht immer die obige Formel durch Rechnung ableiten kann, so soll das Kreuzpendel dazu dienen, die wichtigsten Folgerungen aus derselben experimentell darzuthun. Dass sich an diese Versuche, speciell an die letzte Formel, mancherlei hübsche Rechenaufgaben anknüpfen lassen, sei noch zum Schluss bemerkt.

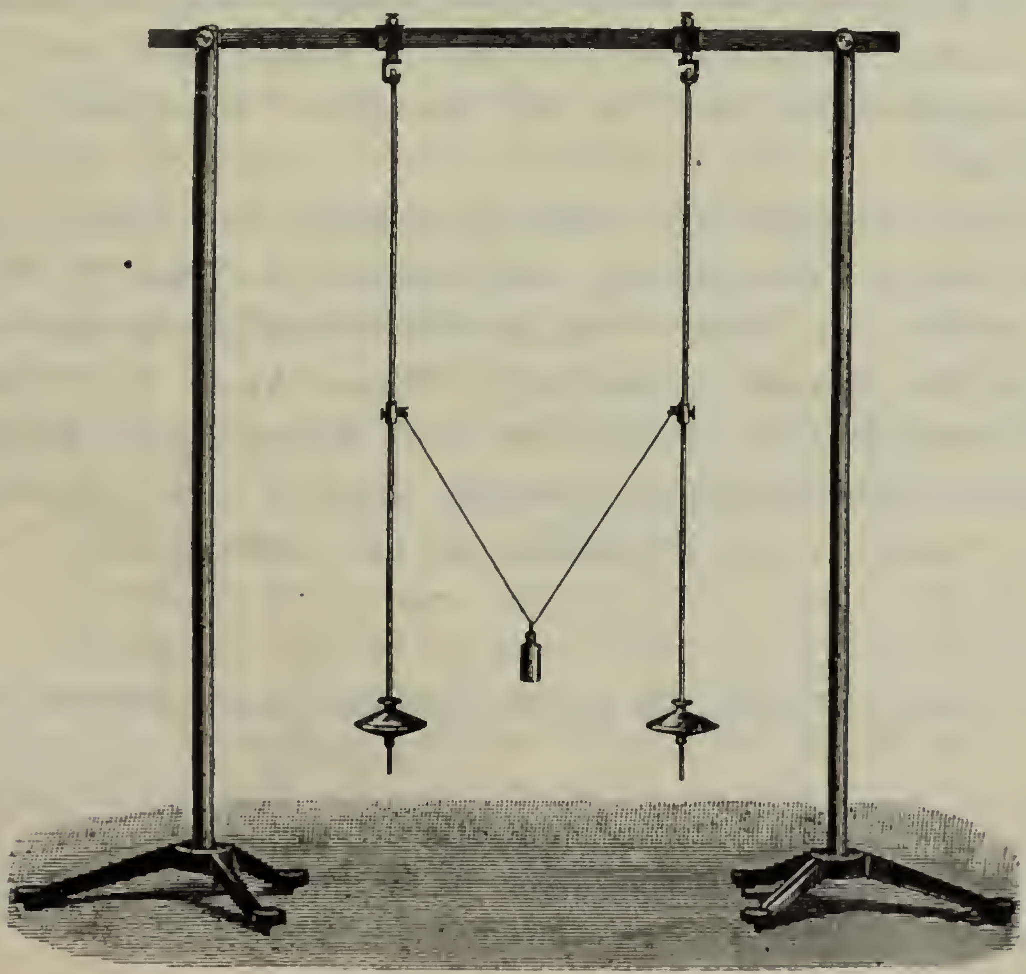
---

3. Versuche über das Mitschwingen zweier Pendel.

Vorgetragen in der Sitzung am 2. November 1887.

1. Um die Grundgesetze des Mitschwingens oder der Resonanz aus einfachen Vorlesungsversuchen entwickeln zu können, habe ich die folgende Anordnung getroffen.

An einer rechteckigen eisernen Stange (s. die beistehende



Figur), welche von 2 Eisenstäben getragen wird, sind zwei verschiebbare Messinghülsen angebracht, welche Lager für die Schneiden der beiden Pendel tragen. Dieselben bestehen aus Stahlstangen, an denen zwei linsenförmige Messinggewichte festgeschraubt werden können.

Die Gewichte können verstellt und dadurch die Schwingungszeiten der Pendel verändert werden.

Um nun das eine Pendel durch die Schwingungen des anderen ebenfalls in periodische Bewegung zu versetzen, muss zwischen denselben eine mechanische Verbindung hergestellt werden. Man kann hierzu sehr verschiedenartige Mittel benutzen. Es genügt schon, einen halbkreisförmig gebogenen Draht an den beiden Pendelstangen zu befestigen. Die Biegung desselben wird während der Schwingungen der Pendel grösser und kleiner und bewirkt eine veränderte Spannung zwischen den beiden Punkten. Ebenso kann man Drahtspiralen zwischen denselben anbringen. Noch zweckmässiger ist es, einen Faden an den Pendeln zu befestigen, der, wie die Figur zeigt, durch ein kleines Gewicht gespannt wird. Endlich kann dafür eine leichte Metallkette angehängt werden.

Um irgend eine dieser Vorrichtungen bequem anbringen zu können, befinden sich an den Pendelstangen zwei kleine Klemmschrauben, welche auf denselben verschoben werden können [1]).

Die Intensität der Wechselwirkung der beiden Pendel kann durch Verschiebung der Schrauben verändert werden, da das hier in Betracht kommende Drehungsmoment von der Länge der Hebelarme abhängt. Ferner kann man dasselbe bei Benutzung des Fadens durch Veränderung des Gewichtes variiren. Die Versuche verlaufen nun so, wie man es nach den Principien des Mitschwingens zu erwarten hat.

---

1) Nach der Mittheilung der hier beschriebenen Versuche machte mich Herr Professor W. Holtz auf eine Publikation von Isenkrahe (Carl's Repertorium der Physik 16, 99—118. 1880) aufmerksam. Dieselbe enthält ebenfalls Versuche über das Mitschwingen isochroner Pendel, bei welchen die Uebertragung durch die Erschütterungen des Holzgestells erfolgt, an welchem die Pendel hängen.

2. Beide Pendel mögen zunächst gleiche Schwingungsdauer haben. Wird das eine Pendel in Schwingungen versetzt, während das andere in der Ruhelage bleibt, und dann das System sich selbst überlassen, so geräth das zweite Pendel ebenfalls in Schwingungen, deren Amplituden fortdauernd zunehmen, während dieselben bei dem ersten Pendel kleiner werden. Nach einiger Zeit ist die ganze Schwingungsenergie auf das zweite Pendel übergegangen. Hierauf kehrt sich der Vorgang um u. s. w. Man kann leicht eine grössere Anzahl (jedenfalls über 20) solcher Uebertragungen beobachten. Die Zeit, welche von dem Stillstand des einen bis zum Stillstand des anderen Pendels vergeht, will ich als Uebertragungsdauer bezeichnen. Dieselbe hängt von der Intensität des Uebertragungsmechanismus ab. Als z. B. die Schwingungsdauer der beiden Pendel 1 sec. betrug und ein Faden mit spannendem Gewicht benutzt wurde, betrug die Uebertragungszeit:

bei	20 gr.	:	110	sec.
„	40 „	:	60	„
„	60 „	:	40	„

Es scheint mir nicht unwahrscheinlich, dass man die Beobachtung der Uebertragungszeit zur Messung schwacher, elastischer Spannungen wird benutzen können.

3. Bisher waren zwei ganz gleiche Pendel benutzt worden: Die Messinggewichte derselben betrugen 800 gr. Ein drittes ähnliches Pendel hatte eine dünnere Stahlstange und trug ein Gewicht von 350 gr. Lässt man dasselbe isochron mit einem der schweren Pendel zusammenschwingen, so erfolgt die Uebertragung in ganz derselben Weise. Die Amplituden des leichteren Pendels sind aber jetzt grösser, wie diejenigen des schweren. Der Vorgang ist analog dem elastischen Stoss zweier Kugeln von ungleicher Masse.

4. Es seien ferner die Schwingungszeiten der beiden Pendel ungleich. Hierzu wurden wieder die beiden schweren Pendel benutzt; das Messinggewicht des einen lag aber höher, als dasjenige des anderen.

Wird Pendel I in Schwingungen versetzt, während Pendel II ruht, so geräth zwar letzteres auch in Schwingungen. Die Schwingungsamplituden nehmen aber nach kurzer Zeit wieder ab. Pendel II kommt wieder zur Ruhe. Die Schwingungsbewegung beginnt auf's Neue u. s. w. Währenddessen haben die Schwingungsamplituden von Pendel I nur kleine Grössenschwankungen erfahren. Es geht daher nur ein geringer Theil der Schwingungsenergie an das zweite Pendel über. Als z. B. die Schwingungsdauer des einen Pendels 1 sec., diejenige des anderen 0,87 sec. betrug und das erste Pendel in Bewegung gesetzt wurde, nahm das zweite Pendel zwar etwas an den Schwingungen Theil, aber es kam stets in Zeiträumen von 13 bis 16 sec. wieder zur Ruhe.

5. Die beschriebenen Versuche unterscheiden sich von den akustischen Resonanzerscheinungen dadurch, dass sie sehr langsam verlaufen und auf diese Weise alle Einzelheiten des Vorgangs erkennen lassen, ferner dadurch, dass die Dämpfung der Schwingungen sehr gering ist. Deutlich treten die folgenden Hauptgesetze der beschriebenen Erscheinungen hervor:

a) Eine Uebertragung von Schwingungsenergie bei zwei mechanisch verbundenen Systemen findet stets statt.

b) Dieselbe ist aber nur dann eine vollständige (Austausch der Energieen in bestimmten Intervallen), wenn die Schwingungszeiten der beiden Pendel übereinstimmen.

c) Je mehr die Zeiten der beiden Einzelschwingungen von einander verschieden sind, um so geringer ist die übertragene Energie.

Bei den akustischen Resonanzerscheinungen entziehen sich die Bewegungen in dem letzten Fall meist wegen der starken Dämpfung der Beobachtung. Eine Reihe bemerkenswerther Beispiele und die allgemeinen Gesetze solcher Bewegungen hat E. Warburg in einer Abhandlung „Ueber tönende Systeme"[1]) gegeben.

Die hier beschriebenen Versuche lassen sich mathematish verfolgen. Man kann dabei sehr einfache Annahmen zu Grunde legen, sodass man im wesentlichen das folgende Problem zu behandeln hat.

---

1) Poggendorfs Annalen 136, 89—102.

Zwei Punkte A und B seien fähig, Schwingungen um zwei bestimmte Gleichgewichtslagen (A_0 und B_0) in der Richtung ihrer Verbindungslinie auszuführen. Von A_0 und B_0 aus wirken demnach anziehende Kräfte, proportional der Entfernung, auf A und B.

Ferner mögen sich die beiden Punkte A und B anziehen oder abstossen, je nachdem ihre Entfernung grösser oder kleiner als eine gewisse mittlere Entfernung $A_0 B_0$ ist. Diese Kraftwirkung sei der Differenz der Entfernungen $AB - A_0 B_0$ proportional. Hiernach sind die Beziehungen der Punkte zu einander ungefähr so gewählt, wie man sie sich zwischen den Molekülen denken kann, um das langsame Fortschreiten einer Schwingungsbewegung durch eine Punktreihe (wie z. B. bei der Wärmeleitung) zu erklären.

Nach den gemachten Annahmen sind die Bewegungsgleichungen für die beiden Punkte:

$$m_1 \frac{d^2x}{dt^2} = - a_1{}^2 x + b^2 (y - x)$$

$$m_2 \frac{d^2y}{dt^2} = - a_2{}^2 x + b^2 (x - y).$$

Setzt man:

$$\frac{a_1{}^2 + b^2}{m_1} = \alpha^2, \qquad \frac{a_2{}^2 + b^2}{m_2} = \beta^2,$$

$$\frac{b^2}{m_1} = \varkappa^2, \qquad \frac{b^2}{m_2} = \lambda^2, \quad \text{also:} \quad \frac{\lambda}{\varkappa} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}},$$

so erhält man:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha^2 x - \varkappa^2 y = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \beta^2 y - \lambda^2 x = 0.$$

Die allgemeinen Lösungen dieser Gleichungen sind:

$$x = A \cos(\sigma_1 t) + B \sin(\sigma_1 t) + C \cos(\sigma_2 t) + D \sin(\sigma_2 t).$$

$$y = \gamma_1 \{A \cos(\sigma_1 t) + B \sin(\sigma_1 t)\} + \gamma_2 \{C \cos(\sigma_2 t) + D \sin(\sigma_2 t)\}.$$

In denselben ist:

$$\sigma^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \mp \tfrac{1}{2} \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\varkappa^2 \lambda^2}$$

$$\gamma = \frac{\alpha^2 - \beta^2 \pm \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\varkappa^2 \lambda^2}}{2\varkappa^2}.$$

Der Index 1 bei σ und γ entspricht dem oberen, der Index 2 dem unteren Vorzeichen. Um die allgemeinen Lösungen den angestellten Versuchen anzupassen, kann man annehmen, dass für:

$$t = 0$$

$$x = a, \quad \frac{dx}{dt} = 0$$

$$y = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0.$$

Dann ist:

$$x = \frac{a}{\gamma_2 - \gamma_1} \left\{ \gamma_2 \cos(\sigma_1 t) - \gamma_1 \cos(\sigma_2 t) \right\}$$

$$y = \frac{a \gamma_1 \gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1} \left\{ \cos(\sigma_1 t) - \cos(\sigma_2 t) \right\}$$

Die Bewegungen der beiden Punkte bestehen daher aus zwei Schwingungsbewegungen. Die Schwingungszeiten derselben hängen von den Einzelschwingungen und von der Wirkung des Mechanismus ab.

Von besonderem Interesse sind nun die folgenden beiden, speciellen Fälle:

I. Die Schwingungen der beiden Punkte ohne gegenseitige Beeinflussung mögen gleiche Zeitdauer haben. Ferner sei diejenige Kraft, welche von der ursprünglichen Gleichgewichtslage ausgeht, erheblich grösser als die von der Wechselwirkung der Punkte herrührende Kraft. Es sei also:

$\alpha = \beta$, ferner α gross im Vergleich zu $\varkappa$ und λ.

Dann ist:

$$\gamma_1 = \frac{\lambda}{\varkappa}, \quad \gamma_2 = -\frac{\lambda}{\varkappa};$$

und angenähert:

$$\sigma_1 = \alpha - \frac{\varkappa\lambda}{2\alpha}, \quad \sigma_2 = \alpha + \frac{\varkappa\lambda}{2\alpha}$$

Also:

$$x = \frac{a}{2} \left\{ \cos(\sigma_1 t) + \cos(\sigma_2 t) \right\}$$

$$y = \frac{a}{2} \frac{\lambda}{\varkappa} \left\{ \cos(\sigma_1 t) - \cos(\sigma_2 t) \right\}$$

Die Schwingungen der beiden Punkte setzen sich also aus zwei Einzelschwingungen zusammen, deren Dauer bei der einen grösser, bei der anderen kleiner ist, als die den nicht mit einander verbundenen Punkten zukommende Schwingungszeit. Man kann auch schreiben:

$$x = a \cos\left(\frac{\varkappa\lambda}{2\alpha} t\right) \cos(\alpha t),$$

$$y = a \frac{\lambda}{\varkappa} \sin\left(\frac{\varkappa\lambda}{2\alpha} t\right) \sin(\alpha t).$$

Setzt man noch:

$$\alpha = \frac{\pi}{T}, \qquad \frac{\varkappa\lambda}{\alpha} = \frac{\pi}{\vartheta},$$

so ist ϑ die zuvor als Uebertragungsdauer bezeichnete Zeit. Fasst man als Amplituden der Einzelschwingungen der beiden Pendel die Ausdrücke

$$a \cos\frac{\pi t}{2\vartheta} \quad \text{und} \quad a \frac{\lambda}{\varkappa} \sin\frac{\pi t}{2\vartheta}$$

auf, so sieht man, dass dieselben in Intervallen von ϑ ihre grössten und kleinsten Werthe annehmen. Bei dieser Auffassung des Vorgangs kann man sagen: die Punkte vollführen demnach ihre Schwingungen in der ihnen eigenthümlichen Schwingungszeit T, die durchschnittliche lebendige Kraft ihrer Bewegungen verändert sich wie die Ausdrücke

$$\sin^2\frac{\pi t}{2\vartheta} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)^2 \cos^2\frac{\pi t}{2\vartheta}.$$

Wie oben bemerkt ist $\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right) = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$. Die Amplituden des leichteren Pendels sind demnach grösser als diejenigen des schwereren und verhalten sich wie die Quadratwurzeln der Massen. Sind die beiden Massen gleich, so ist $\lambda = \varkappa$.

II. Die Eigenschwingungen der beiden Massenpunkte seien so sehr von einander verschieden, dass:

$$(\alpha^2 - \beta^2)^2 \text{ gross ist im Vergleich zu } 4\varkappa^2\lambda^2.$$

Dann ist in erster Annäherung:

$$\sigma_1 = \beta, \qquad \sigma_2 = \alpha.$$

Die Schwingungsbewegung des zum Mitschwingen erregten Punktes ist:

$$y = \frac{a\lambda^2}{\alpha^2 - \beta^2} \left\{ \cos\beta t - \cos\alpha t \right\}.$$

Dieselbe besteht also aus zwei übereinander gelagerten Bewegungen mit den Schwingungszeiten der beiden Einzelschwingungen. Die Amplitude derselben bleibt aber stets erheblich kleiner als die erste Amplitude a des erregenden Punktes. Ferner stören sich dieselben gegenseitig, so dass der erregte Punkt in kurzen Intervallen immer wieder zur Ruhe kommt.

Hiernach werden die beobachteten Erscheinungen in ihren Hauptzügen durch die mitgetheilte Rechnung wiedergegeben.

---

4. Eine Bifilarsuspension für Vorlesungszwecke.

Vorgetragen in der Sitzung am 7. Dezember 1887.

Während früher die Bifilarsuspension fast nur bei dem Gauss'schen Bifilarmagnetometer Anwendung fand, hat F. Kohlrausch [1]) dieselbe neuerdings mit Erfolg zu „absoluten Messungen, insbesondere zur Bestimmung der erdmagnetischen Horizontalintensität" benutzt.

Hiernach dürfte wohl die Besprechung der Bifilarsuspension in der Vorlesung über Experimental-Physik nothwendig, im Schulunterricht jedenfalls recht wünschenswerth sein. Dieselbe liefert ausserdem ein gutes Beispiel eines pendelartigen Apparats, bei welchem die Begriffe des Drehungsmomentes und des Trägheitsmomentes und die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von denselben erörtert werden können.

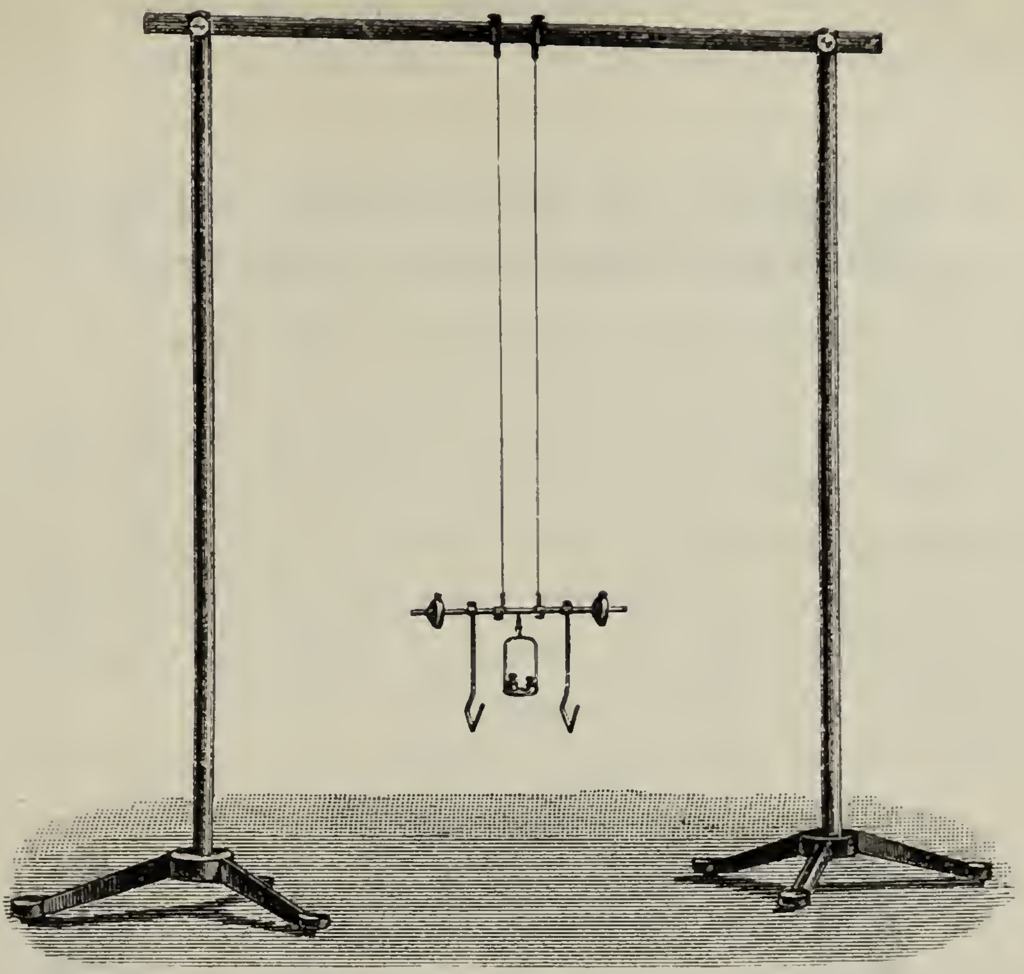
Für Vorlesungszwecke recht geeignet scheint mir die folgende Form der Bifilarsuspension.

An dem in No. 3. beschriebenen Stativ sind zwei Messinghülsen angebracht, welche gegen einander verschoben und durch Schrauben festgeklemmt werden können. An zwei Oesen können die Fäden oder Drähte befestigt werden, an denen das bewegliche System hängt.

Dasselbe besteht zunächst aus einem etwa 30 cm. langen, cylindrischen Messingstab, auf welchem zwei kleine Hülsen zur Aufnahme der Fäden angebracht sind. Auch diese sind

---

Wiedemanns Annalen 17. p. 737—772. Man findet dort historische Notizen über die Bifilarsuspension und eine ausführliche Theorie perselben.



verschiebbar, so dass man die Abhängigkeit des Drehungsmomentes von dem oberen und unteren Fadenabstand demonstriren kann. Die Stange kann mit den in No. 2 beschriebenen Messinggewichten versehen werden, durch deren Verschiebung das Trägheitsmoment verändert wird. An einem Haken in der Mitte der Stange kann eine Schale zur Aufnahme von Gewichten angehängt werden. Die Veränderungen der Schwingungsdauer des beweglichen Systems zeigen dann den Einfluss der beschriebenen Veränderungen an dem Apparat auf das Drehungsmoment, wobei die Formeln:

$$T = \pi \sqrt{\frac{\vartheta}{D}},$$

$$D = \frac{P \,.\, e_1 e_2}{4h},$$

in Betracht kommen. Hierin ist D das Drehungsmoment, P das Gewicht des Systems, e_1 und e_2 die oberen und unteren Fadenabstände, h die Länge derselben.

Schliesslich können an der Stange zwei Messingstäbe mit umgebogenen Enden angebracht werden, in welche man Magnetstäbe oder durch Reibung electrisch gemachte Stäbe legen kann, um die anziehenden oder abstossenden Wirkungen angenäherter Körper auf dieselben zu zeigen.[1])

---

5. Ein Apparat zur Demonstration und Messung elastischer Deformationen eines Drahtes.

Vorgetragen in der Sitzung am 7. Dezember 1887.

Der hier zu beschreibende Apparat hat zunächst den Zweck, die elastischen Formveränderungen eines Drahtes, hauptsächlich Dehnung und Torsion, einem grösseren Auditorium zu zeigen. Derselbe kann aber auch zu Messungen des Elasticitätscoëfficienten (nach der Methode von S'Gravesand), sowie des Torsionscoëfficienten dienen.

Zwei starke gusseiserne Träger (Fig. 1) sind durch zwei

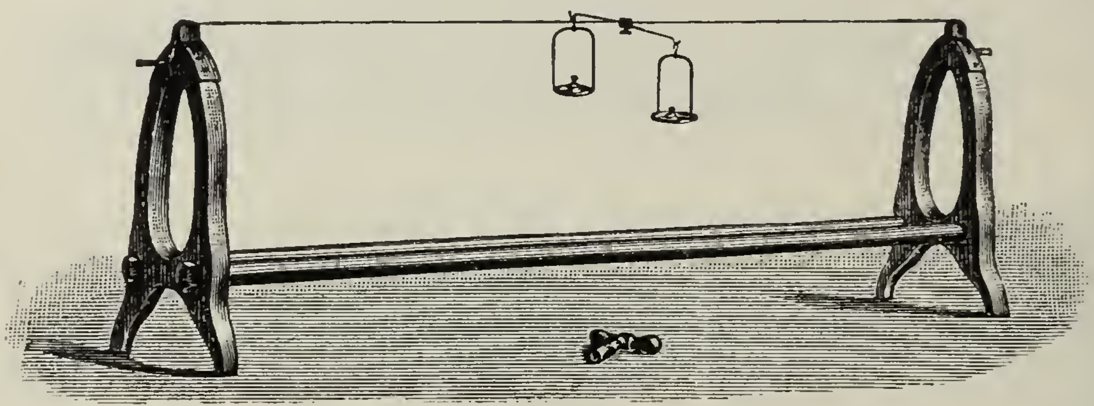


Fig. 1.

Eisenstangen von 120 cm. Länge fest mit einander verbunden. Zwischen denselben kann der Draht befestigt und durch Wirbel gespannt werden.

Wird im Mittelpunkte des Drahtes eine Schale mit Gewichten angehängt, so erfolgt eine Senkung des Mittelpunktes, welche durch einen an dem Draht angebrachten Zeiger an einer daneben stehenden Skala sichtbar gemacht wird. Wird anstatt der Schale eine kleine Messingklemme C (Fig. 2.) angebracht, welche einen leich-

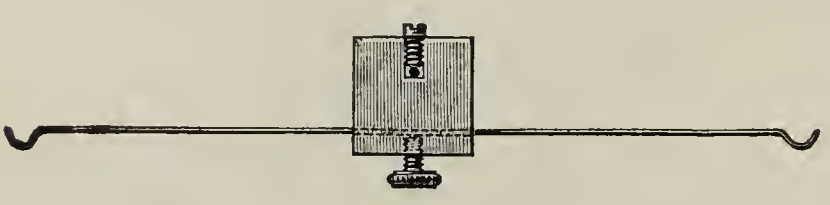


Fig. 2.

ten Wagebalken (etwa eine starke Stricknadel) trägt, an dessen

1) Vergleiche Weinhold, Physikalische Demonstrationen 1881. p. 492.

Enden zwei Schalen sich befinden, deren eine schwach belastet ist, so erfolgt bei einem dünnen Draht eine bedeutende Torsion. Durch einen Zeiger, welcher auf einer dahintergestellten Kreistheilung von grossen Dimensionen sich bewegt, wird die Erscheinung weithin sichtbar. Der Draht kann leicht durch andere ersetzt werden, so dass man die Abhängigkeit der Torsion vom Drehungsmoment, vom Radius des Drahts und vom Torsionscoëfficienten desselben zeigen kann. Auch die Abhängigkeit der Torsion von der Länge des Drahts lässt sich, wenn auch in nicht ganz directer Weise, nachweisen.

Wird ein am einen Ende fester Draht am anderen Ende durch das Drehungsmoment D tordirt, so ist die Drehung dieses Endes:

$$\varphi = \tau \frac{l.D}{\frac{\pi}{2} R^4},$$

wo l die Länge, τ der Torsionscoëfficient, R der Radius des Drahts ist. Ist dagegen der Draht an beiden Enden fest und wirkt ein Drehungsmoment D auf denselben in den Entfernungen l_1 und l_2 von den festen Enden, so ist die am Orte des Drehungsmomentes erfolgende Torsion nach dem oben angegebenen Gesetz:

$$\varphi = \tau . \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} \cdot \frac{D}{\frac{\pi}{2} R^4}.$$

Bringt man die Klemme C nicht in der Mitte an, so wird hiernach die erfolgende Drehung kleiner und kann leicht aus den Abständen l_1 und l_2 berechnet und mit der Beobachtung verglichen werden.

Was die Bestimmung des Elasticitätscoëffienten nach der oben erwähnten Methode von S'Gravesand betrifft, so habe ich in der mir im Augenblick zugänglichen Litteratur nähere Angaben darüber nicht gefunden.

Für die Berechnung desselben aus der Senkung des Mittelpunktes werden von verschiedenen Autoren wesentlich abweichende Formeln gegeben.

Bezeichnet man mit x die beobachtete Senkung des Mittelpunktes,

mit l die halbe Länge des Drahts,

mit R den Radius desselben,
mit E seinen Elasticitätscoëfficienten,
mit P das angehängte Gewicht,
so soll nach Mousson[1]) die Formel gelten:

$$x^3 = \frac{Pl^3}{E.\pi R^2}, \qquad \text{also:} \quad x = l \sqrt[3]{\frac{P}{E.\pi R^2}}.$$

Dagegen folgt aus der ausführlichen Berechnung von G. Kirchhoff[2]) für einen Draht von kreisförmigem Querschnitt:

$$x = \frac{Pl^3}{6\pi R^4 . E}$$

Selbstverständlich würde man, je nachdem man die eine oder die andere Formel zur Berechnung benutzt, ganz ausserordentlich verschiedene Werthe der Elasticitätscoëffienten erhalten.

Einige Versuche, die in meinem Laboratorium mit einem dünnen Messingdraht angestellt wurden, stimmten weder mit der einen noch mit der anderen Formel überein.

Die Versuche sollen fortgesetzt werden, und behalte ich mir vor, über die Resultate derselben bei einer späteren Gelegenheit zu berichten.

---

1) Die Physik auf Grundlage der Erfahrung. 1879. I p. 205. Ein Rechenfehler bei Mousson, in Folge dessen die Endformel noch den Factor 2 erhalten muss, ist oben bereits verbessert.

2) Vorlesungen über mathematische Physik. 1876. p. 437.