© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;

Das

Magnetfeld des galvanischen Kreisstromes

von

Prof. Dr. Freiherr v. Feilitzsch
in Greifswald.

Hierzu eine Figurentafel.

Die Wirkungen eines galvanischen Stromleiters auf einen Magneten oder auf unmagnetisches Eisen oder Stahl sind bekannt. Sie kommen alle darauf hinaus, 1) dass jedes Element des Leiters bezüglich zur Stromesrichtung den Nordpol nach links, den Südpol nach rechts von der das Element und den Pol enthaltenden Ebene, der Wirkungsebene, ablenkt; 2) dass die Grösse der hier thätigen Kraft der Anzahl von Stromeinheiten im Element, der Anzahl von magnetischen Einheiten im Pol und der Projektion des Elementes auf die Normale zur Verbindungslinie zwischen ihm und dem Pol direkt proportional und 3) dass sie dem Quadrate des Abstandes beider umgekehrt proportional ist. Ein polarer Magnet wird dadurch meist aus seiner Richtung abgelenkt oder erfährt eine Ortsveränderung, wenn er vollkommen frei beweglich ist; in einem magnetisirungsfähigen Körper geschieht aber zuvor eine magnetische Vertheilung und dann erst verhält er sich wie der polare Magnet.

Der Gegenstand der folgenden Abhandlung ist eine Untersuchung des Einflusses, welchen ein kreisförmig gebogener Stromleiter auf einen Magnetpol ausübt. Der Raum, in welchem dieser Einfluss noch wahrnehmbar ist, heisse das Magnetfeld des Kreisstromes.

Der Kreisstrom liege in der XY Ebene eines rechtwinklichen Koordinatensystems XYZ der Nebenfigur auf der Tafel und sein Mittelpunkt im Koordinatenanfangspunkt. Die Koordinaten eines Punktes des Kreisstromes seien xy, die des

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;

Magnetpoles $x_1 y_1 z_1$. Die Verbindungslinie zwischen xy und $x_1 y_1 z_1$ werde mit r, die zwischen dem Kreismittelpunkt und $x_1 y_1 z_1$ mit r_1 und der Kreishalbmesser mit ϱ bezeichnet.

Nach bekannten Grundsätzen ist die Wirkung eines Stromelementes ds gleich der Summe der Wirkungen seiner beiden Komponenten dx und dy. Werden diese als feststehend, der Magnetpol als beweglich betrachtet, so ist nach Obigem der von dx auf letzteren ausgeübte Bewegungsantrieb gegeben durch

$$d\omega_x = \mu\sigma \frac{dx}{r^2} \sin(rx),$$

wo μ die Anzahl der im Pol enthaltenen magnetischen Einheiten, σ die Anzahl der in dx sich bewegenden Stromeinheiten und rx die Gradzahl des Winkels zwischen r und dx bedeutet. Setzt man für $\sin(rx)$ seinen Werth ein, und bezeichnet man der Kürze halber $\mu\sigma$ mit i so ist

$$d\omega_x = i \frac{dx}{r^2} \frac{\sqrt{z_1^2 + (y_1 - y)^2}}{r}$$

Setzen wir voraus, dass der in Rede stehende Pol ein Nordpol sei, so mag die Linie mn der Figur in Grösse und Richtung dem $d\omega_x$ gleich sein. Man überzeugt sich leicht, dass diese Linie der YZ Ebene parallel ist, also keine der X Axe parallele Komponente besitzt. Die parallel zur Z und zur Y Axe gerichteten Komponenten $d\omega_x^z$ und $d\omega_x^y$ erhält man aber wenn man $d\omega_x$ bezüglich mit $\cos nmo = \frac{y_1 - y}{\sqrt{z_1^2 + (y_1 - y)^2}}$ und mit $\sin nmo = \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 + (y_1 - y)^2}}$ multiplicirt. Gleichzeitig ist erstere mit dem negativen Vorzeichen zu versehen, weil durch dieselbe z verkürzt wird. Sonach ist

$$d\omega_x^z = -d\omega_x \cos nmo = -\frac{i dx (y_1 - y)}{r^3} \qquad (1.$$

$$d\omega_x^y = d\omega_x \sin nmo = \frac{i \,.\, dx \,.\, z_1}{r^3}. \qquad (2.$$

Der von dy auf denselben Nordpol ausgeübte Bewegungsantrieb ist in ähnlicher Weise ausgedrückt durch

$$d\omega_y = i \frac{dy}{r^2} \frac{\sqrt{z_1^2 + (x_1 - x)^2}}{r}$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;

indem $\frac{\sqrt{z_1^2 + (x_1 - x)^2}}{r_1}$ gleich dem Sinus desjenigen Winkels ist, welchen dy mit der Linie r macht. Soll die Linie mn^1 in Grösse und Richtung dem Werthe $d\omega_y$ gleich sein, so muss sie der XZ Ebene parallel liegen, darf also keine Komponente parallel zur Y Axe besitzen, während die Komponenten $d\omega_y^z$ und $d\omega_y^x$ parallel zur Z und zur Y Axe die folgenden Werthe erhalten:

$$d\omega_y^z = d\omega_y \cos n^1mo = \frac{idy\,(x_1 - x)}{r^3} \qquad (3.$$

$$d\omega_y^x = d\omega_y \sin n^1mo = -\frac{i\,.\,dy\,.\,z_1}{r^3} \qquad (4.$$

Werden die Summen der Komponenten der von dx und dy herrührenden Bewegungsantriebe nach den Axen der ZYX durch dZ, dY, dX bezeichnet, so ist

$$\left.\begin{aligned} dZ &= d\omega_x^z + d\omega_y^z = i\,\frac{dy\,(x_1 - x) - dx\,(y_1 - y)}{r^3} \\ dY &= d\omega_x^y = i\,\frac{dx\,.\,z_1}{r^3} \\ dX &= d\omega_y^x = -i\,\frac{dy\,.\,z_1}{r^3}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.$$

Die Resultirende von $dX\ dY\ dZ$ ist nun der Bewegungsantrieb, welchen der Magnetpol vom Kreiselement ds erfährt.

Doch ist diese von geringerem Interesse, als eine Untersuchung derjenigen Gesammtwirkung, welche der ganze Kreis auf den Magnetpol parallel zur Z Axe ausübt, d. i. derjenigen Kraft, mit welcher ein irgendwo gelegener und blos in der Richtung senkrecht zur Kreisebene beweglicher magnetischer Nordpol sich dieser Ebene annährt oder von ihr entfernt. Dieser Werth ergiebt sich durch Integration von dZ, ist also gleich

$$Z = i\int\frac{dy\,(x_1 - x) - dx\,(y_1 - y)}{r^3}, \qquad (6.$$

wenn man hierin die für den Kreis sich ergebenden Werthe von x, dx, y, dy und r einsetzt und das Integral auf den ganzen Kreisumfang ausdehnt.

Bezeichnet man zu dem Ende den Winkel zwischen dem zu xy führenden Kreishalbmesser und der Projektion von r_1 auf die XY Ebene mit φ und den zwischen der letzteren

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;

Linie und der X Axe mit ψ, und setzt voraus, dass sich der Strom im Sinne der wachsenden φ bewege, so ist

$$y = \varrho \sin(\varphi + \psi) \quad ; \quad dy = \varrho \cos(\varphi + \psi)\, d\varphi \; ;$$
$$x = \varrho \cos(\varphi + \psi) \quad ; \quad dx = -\varrho \sin(\varphi + \psi)\, d\varphi.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} r^2 &= (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + z_1^2 \\ &= x_1^2 - 2x_1\varrho \left\{\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi\right\} + \varrho^2 \cos(\varphi + \psi)^2 \\ &\quad + y_1^2 - 2y_1\varrho \left\{\sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi\right\} + \varrho^2 \sin(\varphi + \psi)^2 \\ &\quad + z_1^2 \\ &= r_1^2 + \varrho^2 + 2\varrho \sqrt{r_1^2 + z_1^2} \,.\, \cos\varphi \qquad (7. \end{aligned}$$

indem $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r_1^2$, indem ferner $x_1 \cos\psi + y_1 \sin\psi = \sqrt{r_1^2 - z_1^2}$ und indem $y_1 \cos\psi - x_1 \sin\psi = 0$ ist. Hieraus ergiebt sich

$$dr = \frac{\varrho \sqrt{r_1^2 + z_1^2} \,.\, \sin\varphi}{r}\, d\varphi \,,$$

und es wird

$$\begin{aligned} dy\,(x_1 - x) - dx\,(y_1 - y) &= \Big[\varrho \cos(\varphi + \psi) \left\{x_1 - \varrho \cos(\varphi + \psi)\right\} \\ &\qquad + \varrho \sin(\varphi + \psi) \left\{y_1 - \varrho \sin(\varphi + \psi)\right\}\Big] d\varphi \\ &= \left[\varrho \sqrt{r_1^2 - z_1^2} \,.\, \cos\varphi - \varrho^2\right] d\varphi. \qquad (8. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Werthe 7 und 8 in das zwischen den Grenzen 0 und 2π zu nehmende Integral 6 geht dieses über in

$$Z = -i \int_0^{2\pi} \frac{\varrho^2 - \varrho \sqrt{r_1^2 - z_1^2} \,.\, \cos\varphi}{\left\{r_1^2 + \varrho^2 - 2\varrho \sqrt{r_1^2 - z_1^2} \,.\, \cos\varphi\right\}^{3/2}}\, d\varphi \qquad (9.$$

Dieses Integral ist nicht in geschlossener Form darstellbar. Behufs Entwickelung desselben in Reihen möge zunächst

$$\varrho^2 - \varrho \sqrt{r_1^2 - z_1^2} \cos\varphi = \tfrac{1}{2} \left\{\left(r_1^2 + \varrho^2 - 2\varrho \sqrt{r_1^2 - z_1^2} \cos\varphi\right) + \left(\varrho^2 - r_1^2\right)\right\} \qquad (10.$$

gesetzt werden. Führt man dann gleichzeitig die Werthe

$$p^2 = r_1^2 - z_1^2 \,, \qquad (11.$$

wo p die Projektion von r_1 auf die XY Ebene ist, und

$$a = \frac{2\varrho \sqrt{r_1^2 - z_1^2}}{r_1^2 + \varrho^2} = \frac{2\varrho p}{\varrho^2 + p^2 + z_1^2} \qquad (12.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;

ein, so geht 9 über in

$$Z = -\frac{i}{2}\left[\frac{1}{(\varrho^2+p^2+z_1^2)^{\frac{1}{2}}}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(1-a\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}}+\frac{\varrho^2-p^2-z_1^2}{(\varrho^2+p^2+z_1^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(1-a\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Hieraus erhält man durch Entwickelung von $(1-a\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}}$ und $(1-a\cos\varphi)^{-\frac{3}{2}}$

$$Z = -\frac{i}{2}\left[\frac{1}{(\varrho^2+p^2+z_1^2)^{\frac{1}{2}}}\left\{\int_0^{2\pi}d\varphi+\frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\cos\varphi^2\,d\varphi+\frac{35}{128}a^4\int_0^{2\pi}\cos\varphi^4\,d\varphi+\ldots\right\}\right.$$

$$\left.+\frac{\varrho^2-p^2-z_1^2}{(\varrho^2+p^2+z_1^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{\int_0^{2\pi}d\varphi+5\,.\,\frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\cos\varphi^2\,d\varphi+9\,.\,\frac{35}{128}a^4\int_0^{2\pi}\cos\varphi^4\,d\varphi+\ldots\right\}\right]$$

$$= -\frac{i\pi}{2}\left[\frac{1}{(\varrho^2+p^2+z_1^2)^{\frac{1}{2}}}\left\{2+\frac{3}{8}a^2+\frac{35}{128}\cdot\frac{3}{4}a^4+\ldots\right\}\right.$$

$$\left.+\frac{\varrho^2-p^2-z_1^2}{(\varrho^2+p^2+z_1^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{2+5\,.\,\frac{3}{8}a^2+9\,.\,\frac{35}{128}\cdot\frac{3}{4}a^4+\ldots\right\}\right]. \quad (13.$$

Es wurde vorausgesetzt, dass sich in m ein Centrum nordmagnetische Kraft befände und dieses wurde mit positiven Vorzeichen versehen. In Uebereinstimmung mit der Erfahrung wird nun gemäss dem negativen Vorzeichen auf der rechten Seite von 13 der Raum zwischen m und dem Stromkreis im Allgemeinen vermindert, der Nordpol wird also angezogen, wenn er sich in geeigneter Weise vor dem Kreise befindet, in welchem der Strom im Sinne der Bewegung eines Uhrzeigers umläuft. — Wird aber $p^2+z_1^2 > \varrho^2$, so kann unter leicht übersehbaren Umständen das Vorzeichen von Z positiv werden, und es stimmt ebenfalls mit der Erfahrung, dass der Nordpol seitlich vom Stromkreise abgestossen wird. — Zwischen den Orten der Anziehung und denen der Abstossung muss es einen Ort geben, in welchem der Stromkreis gar nicht auf den Pol wirkt, für ihn ist $Z=0$.

Die Reihen der Gleichung 13 werden immer weniger konvergent, einen je näheren Punkt am Stromkreis man in Betracht zieht. Befindet sich der Magnetpol im Stromkreise selbst, wird also $z_1=0$ und $p=\varrho$, dann verlieren die Reihen

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;

ihre Konvergenz vollständig. Unter diesen Umständen verwandelt sich Gleichung 9 in

$$Z = -i\int_0^{2\pi} \frac{\varrho^2 - \varrho^2 \cos\varphi}{\{2\varrho^2 - 2\varrho^2 \cos\varphi\}^{\frac{3}{2}}}\, d\varphi = -\frac{i}{2^{\frac{3}{2}}\varrho}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1-\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{i}{2\varrho}\int_0^{2\pi} \frac{d\,\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} = -\frac{i}{2\varrho}\left[lg\,.\,tg\,\frac{\varphi}{4}\right]_0^{2\pi} = \infty. \qquad (14.$$

Wenn also der Magnetpol im Stromkreise selbst liegt, dann wird die ZKomponente unendlich gross.

Nach der Formel 13 wurde nun die ZKomponente der elektromagnetischen Kraft des Stromkreises für $z_1 = 0, = 0{,}1\varrho$, $= 0{,}2\varrho$, $= 0{,}4\varrho$, $= 0{,}6\varrho$ u. s. w. bis $z_1 = 1{,}8\varrho$ und jedes Mal für $p = 0{,}1\varrho$, $= 0{,}2\varrho$ .... $= 1{,}8\varrho$ berechnet. In der Nähe des Stromkreises und zwar bis zu einem Abstand $= 0{,}3\varrho$ von demselben gab die Rechnung wegen zu geringer Konvergenz der Reihen keine brauchbaren Resultate mehr, obschon sie bis zur hundertsten Potenz von a fortgesetzt wurde. Die brauchbaren Zahlen jedoch stimmten mit grösster Genauigkeit zu den Resultaten von direkten Messungen, welche nach einer bei einer andern Gelegenheit mitzutheilenden Methode angestellt wurden. So war eine gegenseitige Kontrolle zwischen Rechnung und Beobachtung gewonnen, und es konnten die durch die letztere gefundenen Zahlen auch für diejenigen Orte als zuverlässig betrachtet werden, für welche die Rechnung nicht mehr ausreichte.

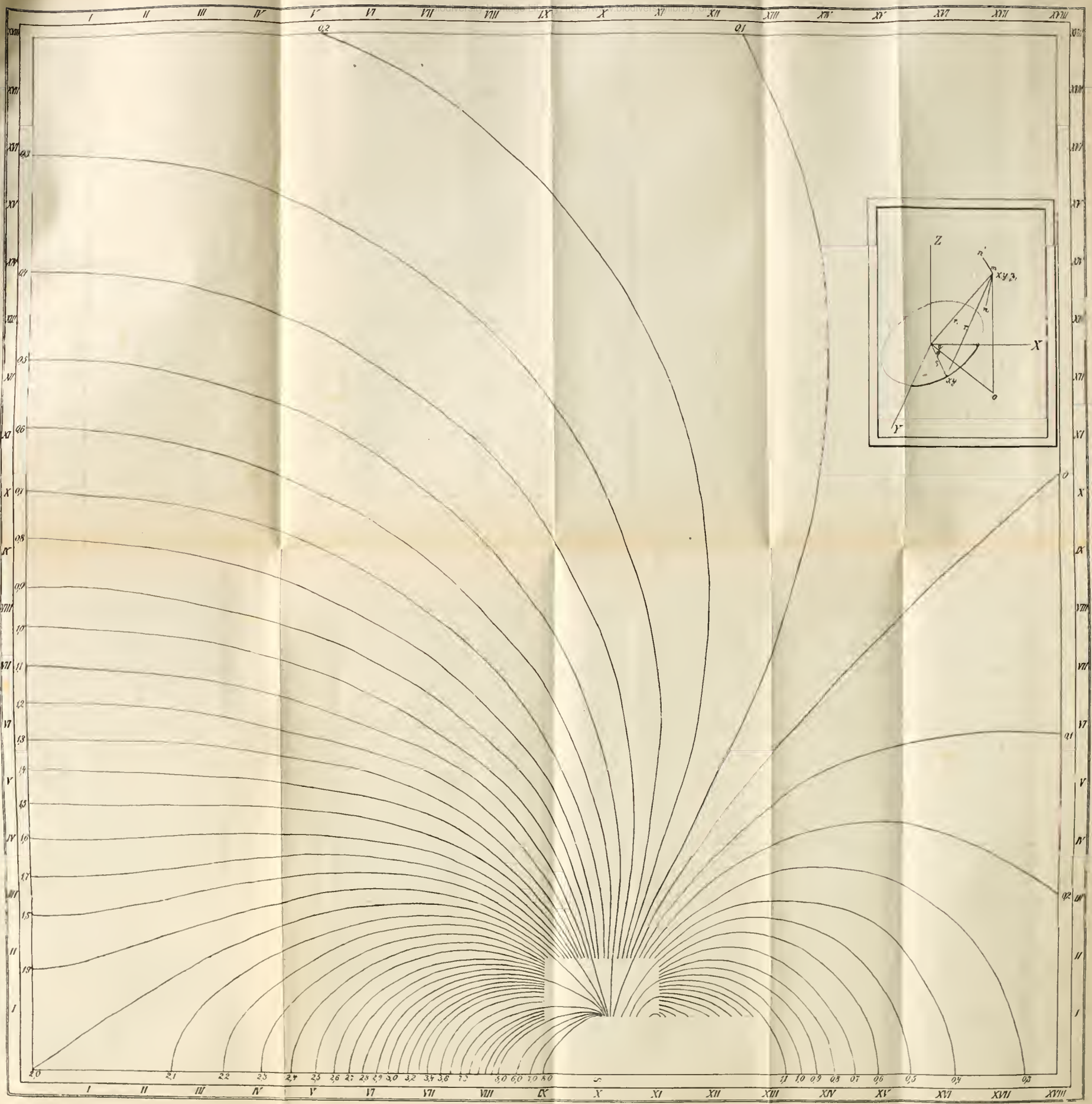
Die Tafel giebt nun eine graphische Darstellung dieser Ergebnisse. Sie ist in horizontaler wie in vertikaler Richtung in 18 gleiche Theile, entsprechend den p und den z_1 eingetheilt. Der Punkt 0 in der linken und unteren Ecke ist der Mittelpunkt des Stromkreises und letzterer durchschneidet aufwärtsgehend beim horizontalen Theilstrich X die Ebene der Tafel, während seine Ebene senkrecht auf dieser steht. In die Durchkreuzungspunkte dieses Koordinatennetzes wurden die durch Rechnung und Beobachtung gewonnenen Zahlen eingetragen. Dann wurden durch ein einfaches Interpolationsverfahren

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/;

für die Abscissen sowohl wie für die Ordinaten die Punkte eines jeden vollen Zehntels der mit den konstanten Koefficienten $-\frac{i\pi}{\varrho}$ zu multiplicirenden Intensität ermittelt, und endlich wurden diese letzteren Stellen gleicher Intensität durch die mit 0, 0,1, 0,2 u. s. w. am Rande bezeichneten Linien verbunden. Die Tafel ist also ein Bild von der elektromagnetischen Vertheilung in einem Quadranten des Magnetfeldes von dem näher bezeichneten Kreisstrom.

Es erübrigt noch, auf einige Folgerungen aufmerksam zu machen. Zunächst fällt ins Auge, dass alle Kurven in ihrer Verlängerung nach dem Kreisstrom sich bewegen. Wenn nun auch in dem Strom selbst die Kraft unendlich gross ist, so sind doch in seiner nächsten Nähe alle Werthe bis zu Null vertreten. Ferner stellt der geometrische Ort ohne Wirkung eine ungeschlossene Kurve dar, während die Orte der positiven wie negativen Wirkung sich unter Zuziehung der übrigen Quadranten als geschlossene Kurven zu erkennen geben. — Ebenso erklären sich unschwer die an der Tangentenbussole beobachteten Anomalien, diejenigen nämlich, dass eine in dem Mittelpunkte des Stromkreises aufgehangene Magnetnadel die Stromstärken zu gering, eine in der Axe und in grossem Abstand vom Mittelpunkt aufgehangene Nadel dieselben aber zu gross angiebt, wenn man sie nach den Tangenten des Ablenkungswinkels berechnet; wohingegen nach den Beobachtungen von Gaugain in Uebereinstimmung mit den Berechnungen von Bravais die Stromstärken mit grösster, wenn auch nicht mit absoluter Genauigkeit den Tangenten der Ablenkungswinkel proportional sind, sobald der Abstand des in der Axe des Kreises liegenden Mittelpunktes der Nadel vom Mittelpunkt des Kreises halb so gross ist als der Radius des Stromkreises.

Druck von Trowitzsch und Sohn in Berlin.


Z
X
Y
o
xyz
xy

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Mittheilungen aus dem naturwissenschaftlichen Vereine von Neu-Vorpommern und Rügen

Jahr/Year: 1869

Band/Volume: 1

Autor(en)/Author(s): Feilitzsch

Artikel/Article: Magnetfeld des galvanischen Kreisstromes 100-101