Die Hauptsätze der Quaternionentheorie,

dargestellt von E. Study.

Die folgende Darlegung bringt in etwas erweiterter Form einen Abschnitt aus einer vom Verfasser abgehaltenen Vorlesung über analytische Geometrie. In den Rahmen einer grösseren Vorlesung dieser Art lassen sich die Quaternionen auf eine, wie dem Verfasser scheint, natürliche Weise einfügen. Sie bieten dem academischen Lehrer Gelegenheit, Anfänger, die nur über ein sehr geringes Maass von Kenntnissen verfügen, durch concrete Beispiele mit einer Reihe von Begriffen bekannt zu machen, die in der neueren Mathematik von Bedeutung sind, und ihnen frühzeitig das Ineinandergreifen verschiedener mathematischer Disciplinen zum Bewusstsein zu bringen.

Freilich muss man dazu wohl andere Wege einschlagen als die Lehrbücher der Quaternionentheorie: Die geometrische Begründungsweise, die dem Anfänger Schwierigkeiten macht, und leicht unzutreffende Vorstellungen vom Wesen der Quaternionen hervorrufen kann, dürfte durch eine analytische Begründung zu ersetzen sein. Grosse Beschränkungen müssen eintreten namentlich in den Anwendungen der Quaternionen, die in den Lehrbüchern einen breiten Raum einnehmen, aber nach Ansicht der Mehrzahl wenigstens der continentalen Mathematiker zumeist besser mit anderen Methoden behandelt werden. Dafür werden eine Reihe von Sätzen anzuführen sein, die in den Lehrbüchern zu fehlen pflegen, deren Kenntniss aber zu einer klaren Einsicht in die systematische Stellung der Quaternionen unentbehrlich ist.

Wir setzen im Folgenden nur das Elementarste aus der analytischen Geometrie voraus, sowie einige Bekanntschaft des Lesers mit dem Determinantenbegriff, wovon übrigens auch noch leicht abgesehen werden könnte. Figuren haben wir nicht beigegeben, da solche sich der Leser leicht selbst wird zeichnen können. Sorgfalt aber haben wir auf die Besprechung solcher Punkte verwendet, die Missverständnisse verursachen können, und auch wirklich schon verursacht haben.

§ 1. Die Drehungen.

Wir bezeichnen die rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten eines Raumpunktes mit x_1, x_2, x_3; x'_1 x'_2, x'_3 seien zunächst die Coordinaten desselben Punktes in einem anderen, ebenfalls rechtwinkligen Coordinatensystem, das mit dem ersten den Anfangspunkt o (origo) gemein haben soll. Dann bestehen die bekannten Gleichungen

$$
(1)\qquad \begin{aligned}
x'_1 &= c_{11}\,x_1 + c_{12}\,x_2 + c_{13}\,x_3,\\
x'_2 &= c_{21}\,x_1 + c_{22}\,x_2 + c_{23}\,x_3,\\
x'_3 &= c_{31}\,x_1 + c_{32}\,x^2 + c_{33}\,x_3,
\end{aligned}
$$

deren Coefficienten $a_{ik} = \cos(x'_i, x_k)$ die sogenannten neun Richtungscosinus bedeuten. Zwischen ihnen bestehen für i, $k = 1, 2, 3$ die Relationen

$$
(2)\qquad \begin{aligned}
1 &= c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + c_{4i}^2\\
0 &= c_{1i}c_{1k} + c_{2i}c_{2k} + c_{3i}c_{3k} \qquad (i \neq k)
\end{aligned}
$$

und zwar ergeben sich diese Beziehungen schon dann, wenn man nur verlangt, dass vermöge eines Systems von Gleichungen der Form (1) für alle Werthe der Veränderlichen x_1, x_2, x_3

$$x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

werden soll. Es folgt dann weiter in bekannter Weise, dass

$$
(3)\qquad \begin{aligned}
1 &= c_{i1}^2 + c_{i2}^2 + c_{i3}^2\\
0 &= c_{i1}c_{k1} + c_{i2}c_{k2} + c_{i3}c_{k3} \qquad (i \neq k)
\end{aligned}
$$

und

$$
(4)\qquad \Delta = |\, c_{11}c_{22}c_{33} \,| = \pm 1.
$$

Wir bezeichnen, wie üblich, das System der Gleichungen (1) als eine e i g e n t l i c h e o r t h o g o n a l e S u b s t i t u t i o n, wenn neben den Relationen (2) und (3) zwischen den Coefficienten c_{ik} noch die Relation $\Delta = +1$ stattfindet; als eine u n e i g e n t l i c h e o r t h o g o n a l e S u b s t i t u t i o n, wenn $\Delta = -1$ ist. Machen wir, wie im Folgenden geschehen soll, die Annahme, dass $\Delta = +1$ ist, so sind die beiden betrachteten Coordinatensysteme g l e i c h a r t i g o r i e n t i r t, d. h. es ist möglich, durch eine Bewegung die positiven Richtungen der Axen des ersten Systems mit denen des zweiten zur Deckung zu bringen. Es ergeben sich dann ferner die Relationen

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}, \\
c_{23} &= c_{12}c_{31} - c_{11}c_{32}, \\
c_{32} &= c_{21}c_{13} - c_{11}c_{23},
\end{aligned} \tag{5}
$$

aus denen durch cyclische Vertauschung der Indices noch sechs weitere Formeln der Art hervorgehen.

Wir deuten nunmehr die Gleichungen (1), indem wir unter den Grössen c_{ik} nach wie vor die Coefficienten einer e i g e n t l i c h e n orthogonalen Substitution verstehen, auf eine zweite Art: Statt anzunehmen, dass die Grössen x_i und x'_i Coordinaten desselben Punktes in verschiedenen Coordinatensystemen seien, betrachten wir sie jetzt als Coordinaten verschiedener Punkte in demselben Coordinatensystem. Die Formeln (1) stellen dann eine sogenannte T r a n s f o r m a t i o n des Raumes dar, eine Zuordnung $\boldsymbol{S}$, die aus jedem Punkt $x\,(x_1, x_2, x_3)$ einen bestimmten anderen Punkt $x'\,(x'_1,\ x'_2,\ x'_3)$ hervorgehen lässt. Wir wollen diese Beziehung durch die Bezeichnung

$$x\,\{\boldsymbol{S}\}\,x'$$

andeuten. Diese Zuordnung ist nun offenbar nichts Anderes als eine B e w e g u n g, wie sie durch einen starren Körper vermittelt wird, der unter Festhaltung des Anfangspunktes o der Coordinaten aus einer ersten Lage in eine zweite gebracht wird: x_i und x'_i sind jetzt die Coordinaten eines und desselben Punktes im Körper vor und nach Ausführung der Bewegung. Jede eigentliche orthogonale Substitution, oder, wie wir nun lieber sagen werden, jede eigentliche o r t h o g o n a l e T r a n s f o r m a t i o n, stellt also eine solche Bewegung dar, und umgekehrt kann man, wenn das Coordinatensystem im Raume fest gegeben ist, jede Bewegung, die den Punkt o in Ruhe lässt, durch eine solche orthogonale Transformation analytisch ausdrücken.

Satz 1. Jede Bewegung eines starren Körpers, bei der ein Punkt o des Raumes in Ruhe bleibt, ist eine Drehung um eine durch diesen Punkt gehende Axe.

In der That, soll ausser dem Anfangspunkte o noch ein zweiter Punkt x_1, x_2, x_3 bei der Transformation (1) in Ruhe bleiben, so müssen dessen Coordinaten den Gleichungen genügen

$$\begin{aligned} (c_{11}-1)x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3 &= 0 \\ c_{21}x_1+(c_{22}-1)x_2+c_{23}x_3 &= 0 \\ c_{31}x_1+c_{32}x_2+(c_{33}-1)x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind aber zufolge der Relationen (5) wirklich mit einander verträglich; denn entwickelt man ihre Determinante, so findet sich, nach (5)

$$-1+(c_{11}+c_{22}+c_{33})-(c_{11}+c_{22}+c_{33})+1=0.$$

Für die Richtungscosinus der Drehungsaxe, die sich verhalten wie $x_1:x_2:x_3$, ergeben sich daraus die Gleichungen

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\cos\lambda_1:\cos\lambda_2:\cos\lambda_3 = \\ &= 1+c_{11}-c_{22}-c_{33}:c_{12}+c_{21}:c_{31}+c_{13} = \\ &= c_{12}+c_{21}:1+c_{22}-c_{33}-c_{11}:c_{23}+c_{32} = \\ &= c_{31}+c_{13}:c_{23}+c_{32}:1+c_{33}-c_{11}-c_{22}: \end{aligned}$$

Jeder Punkt, dessen Coordinaten sich verhalten, wie diese Grössen, wird bei der angenommenen Bewegung in Ruhe bleiben. Eine unbestimmte Drehungsaxe kann sich offenbar nur dann einstellen, wenn die betrachtete orthogonale Transformation sich auf die sogenannte identische Transformation

$$x'_1=x_1,\qquad x'_2=x_2,\qquad x'_3=x_3$$

reducirt, die alle Punkte des Raumes in Ruhe lässt.

Die Frage nach der Bestimmung des Drehungswinkels, der zu der orthogonalen Transformation oder Drehung (1) gehört, lassen wir vorläufig auf sich beruhen, und ebenso die andere nach den Werthen der Coefficienten c_{ik}, die zu gegebener Drehungsaxe und gegebenem Drehungswinkel gehören. Doch wollen wir hier schon eine Art von Drehungen betrachten, die für die allgemeine Theorie von besonderer Bedeutung sind.

Wir bezeichnen als Umwendung eine sogenannte involutorische Drehung, d. h. eine Drehung von der Periode zwei, oder eine Drehung um den Winkel π. Eine solche besondere Drehung ist durch ihre Axe allein schon bestimmt. Seien nun

$\cos\lambda_1$, $\cos\lambda_2$, $\cos\lambda_3$ die Richtungscosinus der Axe, und seien x und x' einander entsprechende Punkte, sei ferner $\xi\,(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ der auf der Axe gelegene Punkt, der die Sehne xx' halbirt, sei endlich d der Abstand dieses Punktes vom Anfangspunkt der Coordinaten, gemessen in dem durch die Werthe $\cos\lambda_i$ bestimmten positiven Sinn der Axe, so ist

$$x_i + x'_i = 2\xi_i = 2d.\cos\lambda_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

und
$$d = x_1\cos\lambda_1 + x_2\cos\lambda_2 + x_3\cos\lambda_3,$$

also, da
$$\cos^2\lambda_1 + \cos^2\lambda_2 + \cos^2\lambda_3 = 1,$$

(7)
$$x'_1 = (\cos^2\lambda_1 - \cos^2\lambda_2 - \cos^2\lambda_3)\,x_1 + \\ + 2\cos\lambda_1\cos\lambda_2\,.\,x_2 + 2\cos\lambda_1\cos\lambda_3\,.\,x_3,$$

u. s. w.

Es wird also jede Umwendung durch eine sogenannte symmetrische orthogonale Transformation ausgedrückt, eine solche, deren Coefficienten den Gleichungen $c_{ik} = c_{ki}$ genügen. Der umgekehrte Satz gilt aber nicht; denn es genügt auch die identische Transformation (übrigens aber sonst keine andere) diesen Gleichungen.

Die eben betrachteten Umwendungen sind von Bedeutung wegen des folgenden Satzes:

Satz 2. Jede Drehung (eines starren Körpers) um einen festen Punkt kann durch die Aufeinanderfolge zweier Umwendungen ersetzt werden. Die Axen dieser Umwendungen sind senkrecht zur Drehungsaxe, und schliessen den halben Drehungswinkel ϑ ein.

Wir bezeichnen mit $\{g\}$ die Umwendung um eine durch den Anfangspunkt der Coordinaten o gelegte Gerade g, und setzen

$$S = \{g\}\,\{h\},$$

um die Transformation S zu bezeichnen, die durch die Aufeinanderfolge der Umwendungen $\{g\}$, $\{h\}$ entsteht. Seien nun zuerst die Geraden g, h willkürlich gegeben, so ist S sicher eine Drehung, und zwar eine solche, die die Ebene ω durch g und h in Ruhe lässt. Die Normale dieser Ebene im Punkt o bleibt dabei offenbar Punkt für Punkt in Ruhe; sie ist also die Drehungsaxe. g bleibt bei der Umwendung $\{g\}$ in Ruhe, durch $\{h\}$ aber wird g übergeführt in das Spiegelbild g' von g in Bezug auf h; der Drehungswinkel (g, g') ist also das Doppelte des Winkels ϑ, den g und h einschliessen. Ist, wie im Satze verlangt, umgekehrt die Drehung S gegeben, so kann man g in der zur Drehungsaxe senkrechten Ebene ω des Punktes o beliebig annehmen. Man kann dann leicht die zugehörige Gerade h bestimmen: Ist S keine Umwendung, so nehme man auf g einen Punkt x an, und suche den durch $x\{S\}x'$ bestimmten Punkt x': die Gerade h halbirt dann, in einem Punkte ζ, die Sehne xx'. Ist S aber selbst eine Umwendung, so steht h in o senkrecht auf g. Ist S die identische Transformation, so wird die Ebene ω unbestimmt, und g und h sind irgend zwei zusammenfallende Gerade des Strahlenbündels o.

Hierzu müssen wir, um keine Unklarheit aufkommen zu lassen, noch eine Erläuterung fügen. Die Winkel in der Ebene ω sind, wie bekannt, ihrem Vorzeichen nach erst dann bestimmt, wenn über die Richtung der Normale von ω, also über die Richtung der Drehungsaxe entschieden ist. Ist dies geschehen, so sind die Winkel zwischen mit bestimmten Richtungen versehenen, sogenannten orientirten Geraden bis auf Vielfache von 2π bestimmt. Als Richtung von g bestimmen wir nun etwa die Richtung vom Anfangspunkt nach dem angenommenen Punkt x hin: dann hat auch die Gerade g' eine bestimmte Richtung, nämlich die nach x' hin. Der Drehungswinkel 2ϑ ist nun der Winkel, um den man g im positiven Sinne drehen muss, bis x mit x' zusammenfällt, vermehrt oder vermindert um ein beliebiges Vielfaches von 2π. Der halbe Drehungswinkel ist also ϑ, vermehrt oder vermindert um irgend ein Vielfaches von π, nicht 2π: Ist, wie angegeben, über die positiven Richtungen von g und g' verfügt, so ist die positive Richtung von h noch beliebig.

In der That erfolgt die Bezeichnung bestimmter Richtungen auf g und g' durch eine und dieselbe Quadratwurzel

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3},$$

während man zur Auszeichnung einer Richtung auf der Geraden h, oder zur Auffindung der Richtungscosinus dieser Geraden eine andere Wurzel, nämlich etwa

$$\sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2}$$

$(2\zeta_i = x_i + x'_i)$ ausziehen muss.

Wir werden erst später dazu übergehen, die im Satze 2 angegebene Zerlegung einer Drehung $\boldsymbol{S}$ auch analytisch auszudrücken. Hier wollen wir noch zeigen, wie man diesen Satz dazu verwenden kann, zwei oder mehrere Drehungen geometrisch zusammenzusetzen. Seien also $\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{S}'$ zwei gegebene Drehungen, und soll nach der Drehung $\boldsymbol{S}$ die Drehung $\boldsymbol{S}'$ ausgeführt werden, so zerlege man $\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{S}'$ so, dass

$$\boldsymbol{S} = \{g\}\{h\}, \qquad \boldsymbol{S}' = \{h\}\{k\}$$

wird, so also, dass die mit h bezeichnete Gerade in die Schnittlinie der zu $\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{S}'$ gehörigen Ebenen ω und ω' fällt. (S. oben.)

Es ist üblich, die aus $\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{S}'$ zusammengesetzte Drehung $\boldsymbol{S}''$ nach Art eines Products durch Nebeneinanderschreiben der Symbole $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}'$ zu bezeichnen, wie wir es im Falle von Umwendungen $\{g\}$ und $\{h\}$ schon gethan haben. Wir haben also

$$\boldsymbol{S}'' = \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}' = \{g\}\{h\}\{h\}\{k\} = \{g\}\{k\}:$$

denn die mit $\{h\}$ bezeichnete Umwendung führt, zweimal hinter einander angewendet, zur identischen Transformation.

Ob man, wie hier, erst $\boldsymbol{S}$ und dann $\boldsymbol{S}'$ ausführt, oder erst $\boldsymbol{S}'$ und dann $\boldsymbol{S}$, das wird für das Resultat nicht gleichgültig sein. Wir drücken diese auf der Hand liegende Thatsache aus in dem ersten Theil des Satzes:

Satz 3. Zwei Drehungen S und S' sind im Allgemeinen nicht vertauschbar. Aber Drehungen um dieselbe Axe sind vertauschbar, und ebenso zwei Umwendungen um Axen, die einander senkrecht schneiden.

Im ersten der genannten beiden Fälle ist die Reihenfolge der beiden Operationen ganz offenbar gleichgültig, sie ist es aber auch im zweiten: Das Resultat ist dann die Umwendung, deren Axe auf den Axen der gegebenen Umwendungen senkrecht steht. Es ist, beiläufig bemerkt, nicht schwer zu zeigen, dass die genannten Fälle die einzigen sind, in denen „Vertauschbarkeit“ zweier Bewegungen eintritt; wir werden aber von diesem Satze keinen Gebrauch zu machen haben. So übergehen wir auch verschiedene geometrische Folgerungen, die sich an den Satz 2 knüpfen, und fügen nur noch einige allgemeine Bemerkungen hinzu.

Satz 4. Die Drehungen um einen festen Punkt bilden eine Gruppe, das heisst, zwei oder mehrere solcher Drehungen hinter einander ausgeführt ergeben immer wieder eine Transformation gleicher Eigenschaft, eine Drehung. Diese Gruppe ist dreigliedrig, d. h. ihre allgemeine Transformation hängt von drei willkürlichen Grössen, sogenannten Parametern, ab. Sie ist ferner continuirlich, d. h. man kann von jeder ihrer Transformationen continuirlich zu jeder anderen übergehen. Ihre Transformationen lassen sich paarweise als „Entgegengesetzte" $\{g\}\{h\}$ und $\{h\}\{g\}$ einander zuordnen, derart, dass je zwei zusammengehörige hinter einander ausgeführt die identische Transformation ergeben.

Der Inhalt dieses Satzes ist trivial; der Satz verdient aber gleichwohl hervorgehoben zu werden, weil eben auf diesen Thatsachen ein Theil unserer Folgerungen beruht. Als die drei Parameter, von denen im Satze die Rede ist, kann man etwa zwei Bestimmungsstücke der Drehungsaxe und den Drehungswinkel wählen. Dass die Gruppe continuirlich ist, sagt aus, dass man einen starren Körper (von dem ein Punkt festgehalten wird) durch eine continuirliche Reihe von Zwischenlagen aus jeder Anfangslage in jede Endlage überführen kann; der letzte Theil des Satzes aber besagt nur, dass man diesen Körper auch wieder — durch eine Drehung — in seine Anfangslage zurückbringen kann.

Um zwei Drehungen $\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{S}'$ analytisch zusammenzusetzen, drücken wir die erste, mit den Coefficienten c_{ik}, durch die Gleichungen (1) aus, die zweite schreiben wir entsprechend, bezeichnen aber die unabhängigen Veränderlichen mit x'_1, x'_2, x'_3:

$$x_i'' = c'_{i1}x'_1 + c'_{i2}x'_2 + c'_{i3}x'_3 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Die zusammengesetzte Transformation $\boldsymbol{S}'' = \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}'$ entsteht dann durch Substitution der Werthe der Grössen x'_i aus (1):

$$x_i'' = c_{i1}''x_1 + c_{i2}''x_2 + c_{i3}''x_3 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

wo

(8) $$c_{ik}'' = c'_{i1}c_{1k} + c'_{i2}c_{2k} + c'_{i3}c_{3k} \qquad (i, k = 1,\ 2,\ 3).$$

Natürlich kann man es auch durch Rechnung verificiren, dass diese neun Grössen wieder Coefficienten einer eigentlichen orthogonalen Transformation sind. Ist $c'_{ik} = c_{ki}$ für $i, k = 1, 2, 3$, so reducirt sich die zusammengesetzte Transformation auf die identische. Die Entgegengesetzte der

Transformation, deren Coefficienten die Grössen c_{ik} sind, hat also die Coefficienten c_{ki}, oder, wie man sich ausdrückt, sie geht aus der gegebenen durch Transposition hervor.

Wir beschliessen diese Darlegungen mit einer Weiterbildung der oben an dem Beispiele der Drehungen angeführten symbolischen Bezeichnung für die Aufeinanderfolge mehrerer Transformationen. Diese Bezeichnungsweise führt dahin, die durch Wiederholung einer und derselben Transformation S entstehenden Transformationen in der Form von Potenzen zu schreiben: $S^2 = SS$, $S^3 = SSS$, u. s. w. Diese Reihe kann man nun auch nach rückwärts fortsetzen; man kann demnach die identische Transformation durch das Zeichen S^0, oder sogar — symbolisch — durch das Zeichen 1 darstellen: Die identische ist eben die Transformation, die nach Art eines Factors anderen hinzugefügt, diese gar nicht ändert. Ferner ergiebt sich für die Entgegengesetzte der Transformation S das Zeichen S^{-1}: Die symbolischen Gleichungen

$$SS^{-1} = S^0 = S^{-1}S \quad \text{oder} \quad SS^{-1} = 1 = S^{-1}S$$

sagen dann aus, dass diese beiden Transformationen einander aufheben.

Haben wir mehrere Transformationen S_α, S_β, S_γ, ... hinter einander auszuführen, so können wir in dem „symbolischen Product" $S_\alpha S_\beta S_\gamma \ldots$ auf einander folgende Factoren beliebig zusammenfassen. Es gilt allgemein die Regel

$$(9) \qquad (S_\alpha S_\beta) S_\gamma = S_\alpha (S_\beta S_\gamma),$$

die man als associatives Gesetz der Transformationen bezeichnet. Folgen zwei Factoren wie S_δ und S_δ^{-1} unmittelbar auf einander, so können sie unterdrückt werden: Jede Umwendung z. B., die zweimal hinter einander vorkommt, kann unterdrückt werden; denn eine Umwendung ist identisch mit der ihr entgegengesetzten Transformation. Vertauschen kann man dagegen die Factoren eines symbolischen Productes $S_\alpha S_\beta S_\gamma \ldots$ im Allgemeinen nicht, ohne das Product selbst zu ändern.

Die Entgegengesetzte einer als symbolisches Product geschriebenen Transformation kann leicht bestimmt werden: Es ist:

$$(10) \qquad (S_\alpha S_\beta \ldots S_\mu S_\nu)^{-1} = S_\nu^{-1} S_\mu^{-1} \ldots S_\beta^{-1} S_\alpha^{-1}.$$

§ 2. Die Euler'schen Parameter.

Nachdem wir in § 1 gesehen haben, dass die neun Richtungscosinus c_{ik} sich — natürlich auf mannigfache Weise — durch drei von einander unabhängige Grössen müssen ausdrücken lassen, versuchen wir jetzt, eine solche Darstellung zu finden. Es ist nun nicht schwer, alle Grössen c_{ik} durch geeignete drei unter ihnen selbst, etwa durch die drei Grössen c_{11}, c_{22}, c_{33} auszudrücken, wie von Monge, wahrscheinlich aber vorher schon von Euler bemerkt worden ist. In der That haben wir, nach (2) und (3),

$$
\begin{aligned}
-1 &= -c_{11}^2 - c_{12}^2 - c_{13}^2,\\
1 &= c_{12}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2,\\
1 &= c_{13}^2 + c_{23}^2 + c_{33}^2,
\end{aligned}
$$

also
$$c_{23}^2 + c_{32}^2 = 1 + c_{11}^2 - c_{22}^2 - c_{33}^2;$$

ferner nach (5)

$$2\,c_{23}c_{32} = -2\,c_{11} + 2\,c_{22}c_{33},$$

daher
$$
\begin{aligned}
(c_{23} + c_{32})^2 &= (1 - c_{11})^2 - (c_{22} - c_{33})^2,\\
(c_{23} - c_{32})^2 &= (1 + c_{11})^2 - (c_{22} + c_{33})^2;
\end{aligned}
$$

setzen wir also zur Abkürzung

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
4m_0 &= 1 + c_{11} + c_{22} + c_{33},\\
4m_1 &= 1 + c_{11} - c_{22} - c_{33},\\
4m_2 &= 1 - c_{11} + c_{22} - c_{33},\\
4m_3 &= 1 - c_{11} - c_{22} + c_{33},
\end{aligned}
$$

so folgt

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
c_{23} &= 2(\sqrt{m_2}\,\sqrt{m_3} + \sqrt{m_0}\,\sqrt{m_1})\\
c_{32} &= 2(\sqrt{m_2}\,\sqrt{m_3} - \sqrt{m_0}\,\sqrt{m_1}).
\end{aligned}
$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergeben sich dann die Werthe der übrigen Coefficienten c_{ik} durch cyclische Vertauschung der Indices 1, 2, 3. Allerdings kann dieser Schluss nicht ganz ohne Weiteres gemacht werden. Denn es wäre denkbar, dass in dem Ausdruck von c_{31} z. B. die Wurzeln mit anderen Vorzeichen zu nehmen wären. Das ist indessen nicht der Fall, wie man sich durch Substitution der berechneten Werthe in die Formeln (2), (3), (5) überzeugen kann.

Aus den Formeln (11) und (12) kann man nun eine Darstellung der Coefficienten c_{ik} durch drei von einander unabhängige Grössen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch vier von einander unabhängige Verhältnissgrössen herleiten, die der in den Formeln (11) und (12) selbst enthaltenen, auf dem Gebrauche irrationaler Grössen beruhenden Darstellung vorzuziehen ist. Wir setzen zunächst $\sqrt{m_i} = \alpha_i$ ($i = 0$, 1, 2, 3) und erhalten dann die Gleichungen

$$1 = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2,$$
$$c_{11} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2,$$
$$c_{23} = 2(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_0\alpha_1), \qquad c_{32} = 2(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_0\alpha_1),$$

u. s. w. Jetzt sind also die Grössen c_{ik} rational durch vier Grössen α_i ausgedrückt. Diese sind nun allerdings nicht von einander unabhängig; wir mögen aber bemerken, dass wir die in der ersten unserer Gleichungen liegende Beschränkung beseitigen können, wenn wir allen Ausdrücken c_{ik} einen Nenner $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ hinzusetzen, der ja den Werth Eins hat, und dessen Zufügung daher die Werthe dieser Ausdrücke nicht ändert. Jetzt aber erscheinen die Grössen c_{ik} als sogenannte homogene Functionen vom Grade Null: In den neuen Ausdrücken kann man, ohne eine Aenderung ihrer Werthe herbeizuführen, die Grössen α_i mit einem beliebigen Factor ϱ multipliciren. Die obige Beschränkung ist also nunmehr aufgehoben.

Um in den Rechnungen die unbequemen Brüche der Form nach zu vermeiden, schreiben wir die Grössen c_{ik} selbst schon in Gestalt von Brüchen mit gemeinsamem Nenner, d. h. wir setzen

$$c_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{00}} \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{13}$$

wodurch die Relationen (2) . . . (5) in die folgenden übergehen:

$$\begin{aligned}
&a_{00}^2 = a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + a_{3i}^2 = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2,\\
&0 = a_{1i}a_{1k} + a_{2i}a_{2k} + a_{3i}a_{3k} = a_{i1}a_{k1} + a_{i2}a_{k2} + a_{i3}a_{3k},\\
&\Delta = | a_{11}a_{22}a_{33} | = a_{00}^3,\\
&a_{00}a_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},\\
&a_{00}a_{23} = a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32},\\
&a_{00}a_{32} = a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}, \quad \text{u. s. f.}
\end{aligned} \tag{14}$$

Die diesen Gleichungen (14) genügenden zehn Grössen

a_{00}, a^{ik} lassen sich dann durch die Grössen α_i wie folgt ausdrücken:

(15)

$$a_{00} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2,$$
$$a_{11} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2,$$
$$a_{22} = \alpha_0^2 - \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2,$$
$$a_{33} = \alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2,$$
$$a_{23} = 2(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_0\alpha_1), \qquad a_{32} = 2(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_0\alpha_1),$$
$$a_{31} = 2(\alpha_3\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2), \qquad a_{13} = 2(\alpha_3\alpha_1 - \alpha_0\alpha_2),$$
$$a_{12} = 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_0\alpha_3), \qquad a_{21} = 2(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_0\alpha_3).$$

Die Grössen a_{ik}, a_{00} und ebenso die Grössen α_i sind hier nur als Verhältnissgrössen anzusehen: Eine Aenderung der Grössen α_i um einen allen gemeinsamen Factor ändert die Werte der durch die Gleichungen (13) gegebenen Transformationscoefficienten c_{ik} nicht.

Vorhin haben wir die drei Grössen c_{11}, c_{22}, c_{33} als gegeben angesehen, und wir haben die Verhältnissgrössen α_i durch irrationale Ausdrücke dargestellt erhalten. Daraus aber folgt nicht, dass diese Grössen α_i auch dann noch irrational sein müssten, wenn wir die sämmtlichen Coefficienten c_{ik} als gegeben betrachten. In der That lassen sich zwar nicht die Grössen α_i selbst, wohl aber deren Verhältnisse — auf die es allein ankommt — unter dieser neuen Voraussetzung rational darstellen. Wir erhalten nämlich durch Auflösung der Gleichungen (15) nach den Grössen α_i^2, $\alpha_i\alpha_k$ die Gleichungen

$$4\alpha_0^2 = a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{33},$$
$$4\alpha_1^2 = a_{00} + a_{11} - a_{22} - a_{33},$$
$$4\alpha_2\alpha_3 = a_{23} + a_{32}, \qquad 4\alpha_0\alpha_1 = a_{23} - a_{32}$$

u. s. w.; es bestehen also die Proportionen

(16)

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 \\
&= (a_{00}+a_{11}+a_{22}+a_{33}) : (a_{23}-a_{32}) : (a_{31}-a_{13}) : (a_{12}-a_{21}) \\
&= (a_{23}-a_{32}) : (a_{00}+a_{11}-a_{22}-a_{33}) : (a_{12}+a_{21}) : (a_{31}+a_{13}) \\
&= (a_{31}-a_{13}) : (a_{12}+a_{21}) : (a_{00}-a_{11}+a_{22}-a_{33}) : (a_{23}+a_{32}) \\
&= (a_{12}-a_{21}) : (a_{31}+a_{13}) : (a_{23}+a_{32}) : (a_{00}-a_{11}-a_{22}+a_{33})
\end{aligned}$$

Die in diesen Formeln enthaltenen Relationen zwischen den Grössen a_{ik} sind unmittelbare Folgerungen der Relationen (14): Wir können also in der That, wenn die Grössen a_{00}, a_{ik} oder die Grössen c_{ik} gegeben sind, die Verhältnisse der Grössen α_i auf rationale Weise ermitteln. Diese Ermittelung aber ist unter allen Umständen möglich. Denn wenn es auch möglich ist, dass alle die Grössen, die in den Formeln (16) in einer bestimmten Horizontalreihe stehen, gleichzeitig verschwinden, so kann es doch nicht vorkommen, dass dies für alle Horizontalreihen zugleich eintritt: Denn dann müssten alle Grössen a_{ik} zugleich verschwinden, während doch a_{00} jedenfalls von Null verschieden ist.

Wir haben hiermit den wichtigen Satz begründet:

Satz 5. Die Coefficienten $c_{ik} = a_{ik} : a_{00}$ *einer eigentlichen orthogonalen Transformation lassen sich, mit Hülfe der Formeln (15) rational darstellen durch vier unabhängige Verhältnissgrössen* α_j, *und diese wieder rational durch die Grössen* c_{ik} *mit Hülfe der Formeln (16).*

Die hiernach der orthogonalen Transformation oder Drehung eindeutig-umkehrbar zugeordneten Verhältnissgrössen α_j heissen nach ihrem Entdecker die Euler'schen Parameter der Transformation oder Drehung.

Unmittelbar ergeben sich einige Folgerungen. Die Entgegengesetzte der Bewegung mit den Parametern $\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$, also nach § 1, die orthogonale Transformation mit den Coefficienten $c'_{ik} = c_{ki}$ oder $a'_{00} = a_{00}$, $a'_{ik} = a_{ki}$, hat die Parameter $\alpha_0 : -\alpha_1 : -\alpha_2 : -\alpha_3$. Die Umwendungen sind gekennzeichnet durch das Verschwinden des Parameters α_0: Die Ausdrücke (15) reduciren sich auf die Coefficienten der Gleichungen (7), wenn wir

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = \cos\lambda_1, \quad \alpha_2 = \cos\lambda_2, \quad \alpha_3 = \cos\lambda_3$$

setzen. Endlich ist die identische Transformation gegeben durch die Gleichungen $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Der letzte Parameter α_0 ist beliebig und kann z. B. gleich Eins gesetzt werden.

Dass es nicht zweckmässig ist, auch im Allgemeinen diesen Parameter gleich Eins zu setzen, wie es zuweilen geschieht, ergiebt sich aus dem vorher Gesagten: von anderen

Nachtheilen abgesehen würde dann der Satz 5 seine Gültigkeit verlieren, indem die Umwendungen von der Darstellung durch die Euler'schen Parameter ausgeschlossen würden. —

Nachdem wir nunmehr eine einfache Darstellung der Coefficienten c_{ik} durch vier Verhältnissgrössen kennen gelernt haben, erheben sich zwei weitere Fragen: Welches ist die geometrische Bedeutung der Euler'schen Parameter? Und wie kann man aus den Parametern α_i und α'_i zweier gegebener Transformationen S und S' die Parameter α_i'' der zusammengesetzten Transformation $S'' = SS'$ (s. § 1) ableiten? Es ist zweckmässig, die erste dieser Aufgaben erst nach Ableitung weiterer Hülfsmittel in Angriff zu nehmen, und zunächst die zweite zu erledigen.

Wir schreiben zu diesem Zweck die Gleichungen (8), die uns die Coefficienten der Transformation S'' liefern, nunmehr ebenfalls in homogener, d. h. gebrochener Form: Wir setzen, wie vorhin

$$c_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{00}}, \qquad c'_{ik} = \frac{a'_{ik}}{a'_{00}}, \qquad c_{ik}'' = \frac{a_{ik}''}{a_{00}''}.$$

Bestimmen wir dann, was uns frei steht, dass

$$(17) \qquad a_{00}'' = a_{00} \cdot a'_{00}$$

sein soll, so erhalten wir an Stelle der Gleichungen (8) nunmehr die Gleichungen (17) und

$$(18) \qquad a_{ik}'' = a'_{i1} a_{1k} + a'_{i2} a_{2k} + a'_{i3} a_{3k} \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Hier substituiren wir nun für die Grössen a_{ik} und a'_{ik} ihre Ausdrücke durch die Parameter α_i und α'_i aus den Gleichungen (15). Die Grössen a_{ik}'' werden dann ganze homogene Functionen zweiten Grades sowohl der Parameter α_i als auch der Parameter α'_i. Hierauf können wir mit Hülfe der Formeln (16) die Verhältnisse der Parameter α_i'' finden, und zwar erhalten wir nicht weniger als vier verschiedene Ausdrücke für diese Verhältnisse. Diese Vielgestaltigkeit der Ausdrücke α_i'' kann nun nur daher rühren, dass die aus irgend einer bestimmten Horizontalreihe in (16) stammenden Werthe alle mit einem gemeinsamen Factor behaftet sind, der von einer Horizontalreihe zur anderen wechselt: Erst wenn wir diese störenden Factoren unterdrückt haben werden, dürfen wir einfache Ausdrücke für die Grössen α_i'' erwarten. Die Abscheidung der genannten Factoren erfordert einige Rechnung, bietet aber keinerlei Schwierigkeit. Benutzen wir etwa in (16) die erste Horizontalreihe, und setzen wir demgemäss vorläufig

$$\rho\alpha_0'' = a_{00}'' + a_{11}'' + a_{22}'' + a_{33}'',$$
$$\rho\alpha_1'' = a_{23}'' - a_{32}'', \quad \rho\alpha_2'' = a_{31}'' - a_{13}'' \quad \rho\alpha_3'' = a_{12}'' - a_{21}'',$$

so findet sich, nach Substitution der Werthe von a_{ii}'' aus (17), (18) und (15), dass $\rho\alpha_0''$ ein Quadrat ist:

$$\rho\alpha_0'' = 4(\alpha_0\alpha_0' - \alpha_1\alpha_1' - \alpha_2\alpha_2' - \alpha_3\alpha_3')^2.$$

Der den Ausdrücken $\rho\alpha_i''$ gemeinsame Factor muss also ein Vielfaches des bilinearen Ausdrucks $\alpha_0\alpha'_0 - \alpha_1\alpha'_1 - \alpha_2\alpha'_2 - \alpha_3\alpha'_3$ sein; und in der That findet man, wenn man z. B. im Ausdruck von $\rho\alpha_1''$ die Glieder zusammenfasst, die in die Grössen $\alpha_0\alpha'_0$, $-\alpha_1\alpha'_1$ u. s. f. multiplicirt sind, dass alle diese Grössen denselben Factor haben und dass die übrigen Glieder einander gegenseitig zerstören: Es ergiebt sich

$$\rho\alpha_1'' = 4(\alpha_0\alpha'_0 - \alpha_1\alpha'_1 - \alpha_2\alpha'_2 - \alpha_3\alpha'_3)\,.$$
$$.\,(\alpha_0\alpha'_1 + \alpha_1\alpha'_0 + \alpha_2\alpha'_3 - \alpha_3\alpha'_2)$$

Setzen wir also $\rho = 4(\alpha_0\alpha'_0 - \alpha_1\alpha'_1 - \alpha_2\alpha'_2 - \alpha_3\alpha'_3)$, so erhalten wir die Gleichungen

$$(19)\qquad \begin{aligned} \alpha_0'' &= \alpha_0\alpha'_0 - \alpha_1\alpha'_1 - \alpha_2\alpha'_2 - \alpha_3\alpha'_3, \\ \alpha_1'' &= \alpha_0\alpha'_1 + \alpha_1\alpha'_0 + \alpha_2\alpha'_3 - \alpha_3\alpha'_2, \\ \alpha_2'' &= \alpha_0\alpha'_2 + \alpha_2\alpha'_0 + \alpha_3\alpha'_1 - \alpha_1\alpha'_3, \\ \alpha_3'' &= \alpha_0\alpha'_3 + \alpha_3\alpha'_0 + \alpha_1\alpha'_2 - \alpha_2\alpha'_1. \end{aligned}$$

Hiermit haben wir die Lösung unseres Problems.

Die Gleichungen (19) leisten nun aber noch etwas mehr, als was wir von ihnen erwarten durften. Bilden wir nämlich jetzt, mit Hülfe der Formeln (15), unmittelbar die Coefficienten a_{00}'', a_{ik}'' der orthogonalen Transformation, deren Parameter die Grössen α_i'' sind, so erweisen sich diese nicht nur, wie vorauszusehen, als proportional zu den Grössen a_{00}'', a_{ik}'', die durch die Formeln (18) erklärt sind, sondern sie stimmen mit ihnen genau überein. Wir können also nunmehr den Satz formuliren:

Satz 6. Die Euler'schen Parameter α_i'' der aus zwei Drehungen S und S' zusammengesetzten Drehung $S'' = SS'$ lassen *sich, mit Hülfe der Formeln (19), darstellen als bilineare homogene Functionen der Parameter α_i und α'_i von S und S'.*

Man bestätigt mit Hülfe dieses Satzes ohne Weiteres die vorhin schon abgeleiteten Sätze über die Parameter der Drehung S^{-1}, und über die Parameter der Umwendungen und der identischen Transformation.

Die Formeln (19) sind, wie es scheint, zuerst im Jahre 1843 von dem französischen Mathematiker O. Rodrigues veröffentlicht worden. Später (1845) hat sie Cayley aus der von Hamilton begründeten Quaternionentheorie hergeleitet; der Satz 6. war aber schon im Jahre 1820 im Besitze von Gauss, wie aus Aufzeichnungen hervorgeht, die sich neuerdings in dessen Nachlass gefunden haben. Für uns dienen die Gleichungen (19), entgegen dem Gedankengang von Cayley, als Ausgangspunkt für die Quaternionenrechnung.

§ 3. Die Hamilton'schen Quaternionen.

In unseren bisherigen Betrachtungen haben die Parameter α_i zuerst nur die Bedeutung von Verhältnissgrössen gehabt. In den Formeln (19) aber haben wir eine Regel vor uns, nach der aus zwei Systemen solcher Parameter ein völlig bestimmtes drittes hergeleitet werden kann, denn in diesen Formeln treten nicht mehr nur die Verhältnisse, sondern die Werthe dieser Grössen selbst auf. Wir wollen nunmehr diese Formeln einem genaueren Studium unterwerfen, wobei wir vorläufig ganz absehen von ihrer Beziehung zu den Formeln Eulers.

Wir nennen eine Quaternion den Inbegriff von vier Grössen (rationalen oder irrationalen, positiven oder negativen Zahlen) $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, die bestimmt geordnet sind, und wir bezeichnen diesen Complex durch das schon von Gauss verwendete Symbol

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Die Grössen α_i nennen wir die Coefficienten der Quaternion. Diese selbst aber mögen wir da, wo kein Missverständniss entstehen kann, kürzer auch durch einen einzigen Buchstaben bezeichnen:

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Zwei solche Quaternionen α, β betrachten wir dann und nur dann als einander gleich, wenn ihre entsprechenden Coefficienten einander gleich sind; wir schreiben zur Abkürzung

$$\alpha = \beta, \text{ wenn } \alpha_0 = \beta_0, \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \alpha_3 = \beta_3.$$

Unter der Summe $\alpha + \beta$ zweier Quaternionen α, β verstehen wir sodann die Quaternion

$$\alpha + \beta = (\alpha_0 + \beta_0, \ \alpha_1 + \beta_1, \ \alpha_2 + \beta_2, \ \alpha_3 + \beta_3), \tag{20}$$

und wir bezeichnen demgemäss als „Quaternion Null" die Quaternion (0, 0, 0, 0): Sie werde durch dasselbe Zeichen dargestellt wie die Null im Rechnen mit einzelnen Zahlen:

$$0 = (0, 0, 0, 0). \tag{21}$$

Es ist danach $\alpha + 0 = \alpha$, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$,

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma.$$

Addiren wir eine Quaternion $\alpha \, (m - 1)$ mal zu sich selbst, so entsteht die Quaternion $(m\alpha_0, m\alpha_1, m\alpha_2, m\alpha_3)$, die wir mit $m\alpha$ bezeichnen werden; und indem wir diese Definition des „m-fachen" einer Quaternion auch auf den Fall ausdehnen, wo m eine gebrochene oder irrationale positive oder auch negative Zahl ist, ergiebt sich die weitere Definitionsgleichung

$$m\alpha = (m\alpha_0, m\alpha_1, m\alpha_2, m\alpha_3). \tag{22}$$

Aus diesen naheliegenden Begriffsbestimmungen folgt nun sofort:

Satz 7. Jede Quaternion kann, auf eine einzige Weise, dargestellt werden als eine Summe von Vielfachen der vier speciellen Quaternionen

$$\begin{aligned} e_0 &= (1, 0, 0, 0), \\ e_1 &= (0, 1, 0, 0), \\ e_2 &= (0, 0, 1, 0), \\ e_3 &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned} \tag{23}$$

In der That ist offenbar

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3. \tag{24}$$

Wir nennen diese Vielfachen, also die Quaternionen $(\alpha_0, 0, 0, 0)$, $(0, \alpha_1, 0, 0)$ u. s. w. zum Unterschiede von den Coefficienten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$, die nicht selbst Quaternionen, sondern einzelne Zahlen sind, die Componenten der Quaternion α. Die speciellen Quaternionen e_i heissen Quaternionen-Einheiten oder kürzer Einheiten; die Einheit e_0 insbesondere, der im Folgenden eine ausgezeichnete Rolle zugetheilt wird, werde Haupteinheit der Quaternionen genannt.

Wir wenden uns nun zurück zu den Formeln (19). Diese enthalten eine Anweisung, aus zwei Quaternionen α und α' eine dritte α'' herzuleiten. Wir drücken diese Regel nach Analogie der uns bereits geläufigen Bezeichnungsweise $\boldsymbol{SS'} = \boldsymbol{S''}$ für die Zusammensetzung zweier Transformationen durch die symbolische Gleichung

$$(25) \qquad (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \, . \, (\alpha_0', \alpha_1', \alpha_2', \alpha_3') = (\alpha_0'', \alpha_1'', \alpha_2'', \alpha_3'')$$

oder kürzer durch die symbolische Gleichung

$$(26) \qquad \alpha\alpha' = \alpha''$$

aus, die also Nichts weiter sein soll, als eine für die Zwecke der Rechnung abgekürzte Schreibart der Gleichungen (19), ohne deren Beifügung sie sinnlos wäre und wirklichen Inhalts entbehren würde. Diese Verknüpfung zweier Quaternionen α, α' zu einer dritten α'', die sich, fast in derselben Bezeichnungsweise (25) schon bei Gauss findet, ist nun, wie sich sogleich zeigen wird, in manchen Beziehungen, wiewohl nicht in allen, analog der Multiplication zweier einzelner Zahlen a, a'. Man bezeichnet daher nach dem Vorgange Hamiltons, die genannte Verknüpfung ebenfalls als Multiplication. Die Quaternion α'' heisst also das Product der Quaternionen α und α', mit α als erstem und α' als zweitem Factor. Auch wir wollen uns dieser einmal eingebürgerten Kunstausdrücke bedienen; wir wollen aber im Auge behalten, dass eine Nöthigung zu solcher Bezeichnung nicht vorliegt, und dass irgend ein anderes Wort, z. B. Composition, dieselben Dienste leisten würde. Nun ergiebt sich sofort:

Satz 8. Die Multiplication der Quaternionen ist mit der Addition durch das sogenannte distributive Gesetz verknüpft, d. h. es ist

$$(27) \qquad \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma, \qquad (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

Hieraus folgt, dass man, um das sogenannte Product zweier Quaternionen α, α' zu bilden, so verfahren kann, dass man zunächst die Producte der speciellen als „Einheiten" bezeichneten Quaternionen aufsucht: Es ist ja

$$\alpha\alpha' = \sum_0^3 \alpha_i e_i \,.\, \sum_0^3 \alpha'_k e_k = \sum_0^3{}_i \sum_0^3{}_k \alpha_i \alpha'_k \,.\, (e_i e_k)$$

Die Producte der Einheiten aber ergeben sich aus den Formeln (19), wenn man darin für die Grössen α_i und α'_k aus den Definitionsgleichungen (23) auf alle möglichen Weisen die Coefficienten von Einheiten substituirt. So entsteht die folgende Tafel, worin im Durchschnitt der dem Index i entsprechenden Horizontalreihe und der dem Index k entsprechenden Verticalreihe der Werth des Productes $e_i e_k$, d. h. die durch dieses Product dargestellte Quaternion eingetragen ist.

(28)

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	e_0

Offenbar kann diese Tafel in Verbindung mit den Gleichungen (24), (26), (27) die Gleichungen (19) vollständig ersetzen. Wir können daher unsere weiteren Bemerkungen an sie anknüpfen.

Zunächst tritt jetzt die eben auf dieser unserer Definition der „Multiplication" beruhende ausgezeichnete Stellung der Haupteinheit e_0 hervor: Diese ändert, einer beliebigen Quaternion α als Factor hinzugefügt, diese Quaternion gar nicht:

(29) $$e_0 \alpha = \alpha e_0 = \alpha.$$

Die Haupteinheit nimmt also bei dem Rechnen mit Quaternionen eine ähnliche Stellung ein, wie die Zahl Eins beim Rechnen mit einzelnen Zahlen. — Setzen wir in (29) links an Stelle von e_0 eine Quaternion der Form

$$m e_0 = (m, \; 0, \; 0, \; 0)$$

so ergiebt sich

(30) $$(m e_0)\alpha = \alpha(m e_0) = m\alpha,$$

d. h. wir erhalten dasselbe Product, wie wenn wir die Quaternion mit der Zahl m multiplicirt hätten (s. oben Nr. 22).

Quaternionen der Form me_0 heissen in der Quaternionentheorie scalare Quaternionen, von scala, da sie sich in vieler Hinsicht verhalten wie einzelne (unbenannte) Zahlen m, die man den Stellen eines Maasstabs zuordnen kann; die Componente $\alpha_0 e_0$ einer beliebigen Quaternion α heisst demnach der Scalartheil dieser Quaternion und wird mit $S(\alpha)$ oder noch einfacher mit $S\alpha$ bezeichnet:

$$S\alpha = \alpha_0 e_0. \tag{31}$$

Im Gegensatz dazu heisst die Summe der drei übrigen Componenten der Vectortheil der Quaternion, und die Quaternion selbst heisst eine vectorielle Quaternion oder kürzer ein Vector, wenn ihr Scalartheil verschwindet. Der Vectortheil von α wird mit $V\alpha$ bezeichnet, so dass also

$$V\alpha = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \tag{32}$$

und

$$\alpha = S\alpha + V\alpha. \tag{33}$$

Das Quadrat eines Vectors ist immer eine scalare Quaternion mit negativem Coefficienten:

$$(n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3)^2 = -(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) . e_0. \tag{34}$$

Sagen wir, zwei Quaternionen α, β seien eigentlich-vertauschbar, wenn $\alpha\beta = \beta\alpha$ ist, und uneigentlich-vertauschbar, wenn $\alpha\beta = -\beta\alpha$ ist, so gilt weiter der

Satz 9. Zwei Quaternionen α, β sind im Allgemeinen in keinem Sinne vertauschbar. Sie sind aber eigentlich-vertauschbar, wenn eine Relation der Form

$$m_0 . e_0 + m_\alpha . \alpha + m_\beta . \beta = 0$$

besteht, worin m_0, m_α, m_β Zahlen bedeuten, und sie sind uneigentlich-vertauschbar, wenn sie beide Vectoren sind, die in der Beziehung $S(\alpha\beta) = 0$ stehen, Vectoren also, deren Coefficienten durch die Relation

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = 0$$

verbunden sind.

Dass hiermit alle Fälle aufgezählt sind, in denen das

Product $\beta\alpha$ ein numerisches Vielfaches des Productes $\alpha\beta$ ist, erwähnen wir nur beiläufig. (Vgl. Satz 3 in § 1.)

Nachdem wir nunmehr den Begriff der „Multiplication" zweier Quaternionen entwickelt haben, können wir jetzt den wesentlichen Inhalt der Sätze 5. und 6. in folgender Form aussprechen:

Satz 10. Zu jeder von Null verschiedenen Quaternion gehört eine bestimmte Drehung, umgekehrt aber gehören zu jeder Drehung ∞^1 Quaternionen, die sich um numerische Factoren von einander unterscheiden.

Drehungen werden dadurch zusammengesetzt, dass man zwei der entsprechenden Quaternionen, in der gehörigen Reihenfolge, mit einander multiplicirt.

Zu der identischen Transformation gehören in diesem Sinne offenbar die scalaren Quaternionen, und ebenso gehören zu den Umwendungen die Vectoren, und insbesondere zu den Umwendungen um die Coordinatenaxen die Einheiten e_1, e_2, e_3 und ihre numerischen Vielfachen.

Wir hatten nun gesehen, dass die Zusammensetzung der Drehungen das in der Formel $(\boldsymbol{S}_\alpha \boldsymbol{S}_\beta)\boldsymbol{S}_\gamma = \boldsymbol{S}_\alpha(\boldsymbol{S}_\beta \boldsymbol{S}_\gamma)$ ausgedrückte associative Gesetz befolgt. Ein entsprechender Satz gilt für die Multiplication der Quaternionen:

Satz 11. Die „Multiplication der Quaternionen" genannte Operation befolgt das sogenannte associative Gesetz:

(35) $$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) = \alpha\beta\gamma.$$

Auf Grund des Satzes 8. genügt es, den Satz 11. für den Fall zu beweisen, dass α, β, γ irgend drei Einheiten sind; was natürlich mit Hülfe der Tafel (28) ohne Weiteres ausgeführt werden kann.

Die nunmehr entwickelten Grundbegriffe der Quaternionentheorie setzen uns in den Stand, auch die übrigen in § 1 dargelegten auf das Rechnen mit Symbolen $\boldsymbol{S}$ bezüglichen Regeln auf die Quaternionenrechnung zu übertragen; es ergeben sich aber dabei einige Abweichungen, die darin ihren Grund haben, dass die Zuordnung zwischen Drehungen und Quaternionen nicht eindeutig-umkehrbar ist.

Wir nennen, mit Hamilton, Norm einer Quaternion α den Ausdruck

(36) $$N(\alpha) = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2,$$

also die früher (s. Nr. 15) mit a_{00} bezeichnete Grösse. Dann kann der Inhalt der Formel (17) in dem folgenden in etwas anderer Ausdrucksweise bereits bei Euler vorkommenden Satz ausgedrückt werden:

Satz 12. Die Norm eines Products von Quaternionen ist gleich dem Product der Normen der Factoren:

$$N(\alpha\alpha') = N(\alpha'\alpha) = N(\alpha).N(\alpha'). \tag{37}$$

Da die Norm einer Quaternion die Summe der Quadrate der Coefficienten ist, so kann sie nicht verschwinden, ohne dass die Quaternion selbst verschwindet. Daraus ergiebt sich ein Satz, der übrigens implicite schon in dem Satze 10 enthalten ist:

Satz 13. Das Product $\alpha\alpha'$ zweier Quaternionen kann nicht verschwinden, ohne dass einer der Factoren verschwindet.

Wir nennen ferner Conjugirte einer Quaternion

$$\alpha = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

die Quaternion

$$\bar{\alpha} = \alpha_0 e_0 - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3, \tag{38}$$

oder, in der Bezeichnungsweise Hamilton's, die Quaternion

$$K\alpha = S\alpha - V\alpha. \tag{39}$$

Dann ist die Conjugirte der Conjugirten einer Quaternion diese Quaternion selbst, $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$ oder $KK\alpha = \alpha$. Zu conjugirten Quaternionen gehören entgegengesetzte Bewegungen im Sinne des Satzes 10 (vgl. S. 8,9). Eine scalare (vectorielle) Quaternion ist eine solche, die ihrer conjugirten gleich (entgegengesetzt gleich) ist. Das Product einer Quaternion und ihrer Conjugirten ist eine scalare Quaternion, deren Coefficient die Norm ist:

$$\alpha\bar{\alpha} = \bar{\alpha}\alpha = N(\alpha).e_0 = N(\bar{\alpha}).e_0 \tag{40}$$

In der Conjugirten einer Quaternion haben wir also ein Aequivalent für das in § 1 eingeführte Symbol S^{-1}. Da aber die Beziehung zwischen Drehungen und Quaternionen unendlich-vieldeutig ist, so kann eine zweite Zuordnung zwischen Quaternionen gefunden werden, die der Beziehung zwischen den Symbolen S und S^{-1} noch genauer entspricht:

Satz 14. Die Quaternionen lassen sich zu Paaren anordnen, derart, dass immer das Product zweier zusammengehöriger die Haupteinheit ist. (Vgl. Satz 4.)

In der That, sehen wir in der mit vier Gleichungen (s. Nr. 19) äquivalenten symbolischen Gleichung $\alpha\xi = e_0$ oder auch in der Gleichung $\eta\alpha = e_0$ die Coefficienten ξ_i oder η_i von ξ und η als Unbekannte an, so ergiebt sich ein völlig bestimmtes Lösungssystem, und zwar in beiden Fällen ein und dasselbe. Wir werden daher die Quaternion $\xi = \eta$ die Reciproke der Quaternion α nennen und werden sie mit $\frac{e_0}{\alpha}$ oder mit α^{-1} bezeichnen. Es folgt dann, wenn wir das vorhin eingeführte Symbol für die Conjugirte einer Quaternion benutzen,

$$\frac{e_0}{\alpha} = \alpha^{-1} = \frac{\bar{\alpha}}{N(\alpha)}, \qquad \alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = e_0. \tag{41}$$

Folgen also in einem Product von Quaternionen zwei Factoren α, α^{-1} unmittelbar auf einander, so kann man diese Factoren wegstreichen; folgen zwei Factoren $\alpha, \bar{\alpha}$ auf einander, so kann man diese ebenfalls unterdrücken, wenn man zugleich dem Product den Factor $N(\alpha)$ beifügt. Man muss aber wohl im Sinne behalten, dass i. A. $\alpha^{-1}\beta$ von $\beta\alpha^{-1}$ verschieden ist. Man wird daher ein solches Product besser nicht in Gestalt eines Bruches $\frac{\beta}{\alpha}$ schreiben, dessen Form es zweifelhaft lässt, ob der Factor $\frac{e_0}{\alpha}$ oder α^{-1} der Quaternion β links oder rechts angefügt werden soll.*)

Satz 15. Die zu einem Product von Quaternionen conjugirte oder reciproke Quaternion wird gebildet, indem man die zu den Factoren conjugirten oder reciproken Quaternionen in der umgekehrten Reihenfolge multiplicirt.

Also

$$\overline{(\alpha\beta \ldots \mu\nu)} = \bar{\nu}\bar{\mu} \ldots \bar{\beta}\bar{\alpha} \tag{42}$$

$$(\alpha\beta \ldots \mu\nu)^{-1} = \nu^{-1}\mu^{-1} \ldots \beta^{-1}\alpha^{-1} \tag{43}$$

(Vgl. Formel 10).

---

*) Bei Hamilton hat $\frac{\beta}{\alpha}$ die Bedeutung von $\beta\alpha^{-1}$.

Dass wir in die Reihe der positiven und negativen „Potenzen“ einer beliebigen Quaternion α, also in die Reihe

$$\ldots \alpha^{-2} = \alpha^{-1}\alpha^{-1},\ \alpha^{-1},\quad * \quad,\ \alpha,\ \alpha^2 = \alpha\alpha,\ \ldots$$

als „nullte“ Potenz die Haupteinheit einzuschalten haben,

(44) $$\alpha^0 = e_0$$

versteht sich nach dem Vorhergehenden wohl von selbst. Aber es verdient bemerkt zu werden, dass alle diese Potenzen sich durch zwei unter ihnen linear mit numerischen Coefficienten ausdrücken lassen: Man entnimmt den Gleichungen (38) und (40) die Relation

(45) $$\alpha^2 - 2S\alpha\,.\,\alpha^1 + N(\alpha)\,.\,\alpha^0 = 0,$$

mit deren Hülfe man leicht alle positiven und negativen Potenzen von α durch α^0 und α^1 darstellen kann. Die identische, d. h. für jede beliebige Quaternion α richtige Gleichung (45) hat die im Satze 9 angegebene Form, da man an Stelle von $S\alpha$ auch α_0 schreiben darf: Selbstverständlich sind die Potenzen einer Quaternion alle eigentlich-vertauschbar.

Ausser den bereits eingeführten Begriffen und Zeichen sind in der Quaternionentheorie noch zwei weitere in Gebrauch, die wir ebenfalls vorführen wollen.

Man nennt, nach Hamilton, Tensor einer Quaternion α den positiven Werth der Quadratwurzel aus der Norm, und man stellt auch diese Grösse durch ein besonderes Zeichen dar:

(46) $$T\alpha = \sqrt{N(\alpha)}, \quad \text{wenn } \sqrt{N(\alpha)} > 0.$$

Der Quotient $\frac{\alpha}{T\alpha}$ wird dann „Versor der Quaternion“ genannt und mit $U\alpha$ bezeichnet:

(47) $$U\alpha = \frac{\alpha}{T\alpha},$$

so dass

(48) $$\alpha = T\alpha\,.\,U(\alpha).$$

Eine Quaternion, die mit ihrem Versor zusammenfällt, also eine Quaternion von der Norm Eins, wird als Versor schlechtweg bezeichnet. Die Zeichen $T\alpha$ und $U\alpha$ werden wir übrigens in der Folge nicht benutzen, da es uns nicht zweckmässig scheint, über den Werth von $\sqrt{N(\alpha)}$ eine Bestimmung zu treffen, die auf imaginäre Werthe der Coefficienten α_i nicht ausgedehnt werden kann; wir werden also, abweichend von Hamilton und Anderen, das Vorzeichen von $\sqrt{N(\alpha)}$ in der Folge unbestimmt lassen.

Offenbar genügen zur Darstellung und Zusammensetzung der Drehungen um einen festen Punkt im Sinne des Satzes 10. schon die Versoren. Man muss aber beachten, dass man einer gegebenen Drehung immer zwei verschiedene Versoren

$$\frac{\alpha}{\sqrt{N(\alpha)}} \quad \text{und} \quad -\frac{\alpha}{\sqrt{N(\alpha)}}$$

zuordnen kann, die im Allgemeinen nicht durch blos rationale Operationen ermittelt werden können, während die Auffindung irgend einer zu einer gegebenen Drehung gehörigen Quaternion, wie wir gesehen haben, nur die Anwendung der vier Species erfordert. — Das Product zweier Versoren ist, nach dem Satze 12, immer wieder ein Versor.

Ist α eine beliebige Quaternion, so kann man setzen:

$$(49) \qquad \cos\varphi = \frac{\alpha_0}{\sqrt{N(\alpha)}}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}{\sqrt{N(\alpha)}}.$$

Schreibt man überdies

$$(50) \qquad \varepsilon_\alpha = \frac{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}},$$

so ist ε_α ein Vector, der der Gleichung

$$(51) \qquad \varepsilon_\alpha^2 = -e_0$$

genügt; die Quaternion α erscheint dann in der Form

$$(52) \qquad \alpha = \sqrt{N(\alpha)}.\{\cos\varphi . e_0 + \sin\varphi . \varepsilon_\alpha\}$$

Die hier ausgeführte Zerlegung ist analog der bekannten Darstellung der gewöhnlichen complexen Grössen durch absoluten Betrag und Amplitude, und sie führt auch zu einer ähnlichen Folgerung:

$$(53) \qquad \alpha^n = \{\sqrt{N(\alpha)}\}^n\{\cos n\varphi . e_0 + \sin n\varphi . \varepsilon_\alpha\}.$$

Man beachte jedoch, dass der mit ε_α bezeichnete Vector von der Quaternion α selbst abhängig ist: Dieser Umstand hat zur Folge, dass das Product zweier beliebiger Quaternionen nicht nach einer der Moivre'schen Formel ähnlichen Regel gebildet werden kann.

§ 4.

Eine geometrische Deutung der Quaternionenrechnung.

Die im vorigen § entwickelte Theorie ist rein analytisch: Sie beruht ausschliesslich auf Eigenschaften der unter (19) aufgeführten Formelgruppe. Man kann nun aber fragen, ob sich nicht in geeigneten geometrischen Constructionen ein anschauliches Aequivalent für die entwickelten Formen finden lässt. Das kann geschehen, und zwar auf verschiedene Arten. Von diesen Deutungen wollen wir eine, genauer zwei nahe unter einander zusammenhängende, hier besprechen, die von Hamilton selbst herrühren, und die daher in den Lehrbüchern der Quaternionentheorie allein vorgetragen zu werden pflegen.

Diese Deutungen ergeben sich aus der Thatsache, dass man jedem, wie wir nun behufs grösserer Deutlichkeit sagen wollen, arithmetischen Vector

$$(0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

also jedem System von drei Zahlen α_1, α_2, α_3 einen geometrischen Vector, eine Strecke von bestimmter Länge und Richtung im Raume eindeutig-umkehrbar zuordnen kann. Das genannte Zahlentripel wird versinnlicht durch die geradlinige Strecke (radius-vector), die den Anfangspunkt o der rechtwinkligen Coordinaten mit dem Punkt $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, $x_3 = \alpha_3$ verbindet. Eine solche Strecke hat, was wohl zu beachten ist, an sich weder eine völlig bestimmte Länge, noch auch hat ihr geradliniger Träger eine bestimmte Richtung, wiewohl die beiden begrenzenden Punkte eine ganz bestimmte Reihenfolge 0, 0, 0; α_1, α_2, α_3 haben: Die Länge der Strecke ist gegeben durch die Quadratwurzel $\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$, sie ist also zweiwerthig, und eben diese Wurzel entscheidet auch über die dem Träger der Strecke beizulegende positive Richtung.

Hiemit kann man nun allerdings zunächst nur vectorielle

Quaternionen, oder die Vectorbestandtheile von Quaternionen geometrisch auffassen. Es gilt aber der folgende, ebenfalls noch rein algebraische Satz:

Satz 16. *Jede beliebige Quaternion kann als Product zweier Vectoren dargestellt werden, und zwar eine scalare Quaternion auf ∞^3, jede andere Quaternion aber auf ∞^2 verschiedene Arten.*

In der That verstehen wir unter β, γ zwei vectorielle Quaternionen, und setzen wir versuchsweise $\alpha = \beta\gamma$, d. h. nach Nr. 19:

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= -\beta_1\gamma_1 - \beta_2\gamma_2 - \beta_3\gamma_3,\\
\alpha_1 &= \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2,\\
\alpha_2 &= \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3,\\
\alpha_3 &= \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1.
\end{aligned}
\tag{54}
$$

Dann folgt

$$
\begin{aligned}
\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 &= 0\\
\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 &= 0.
\end{aligned}
\tag{55}
$$

Die erste der Gleichungen (55) enthält keine Beschränkung für den von drei Constanten $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ abhängigen Vector β, wenn $\alpha_0 = (\alpha_0, 0, 0, 0) = \alpha_0 . e_0$ ist, und sie enthält eine Bedingung in jedem anderen Falle. Ist aber diese Gleichung erfüllt, so kann man die Gleichungen (54) nach den Grössen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ auflösen:

$$\gamma = \beta^{-1}\alpha = \frac{\bar{\beta}\alpha}{N(\beta)} = -\frac{\beta\alpha}{N(\beta)}.$$

Die Gleichungen (54) und (55) lassen sich nun leicht geometrisch deuten. Die Gleichungen (55) zunächst sagen aus, dass beide Vectoren β und γ in der „Ebene der Quaternion α“ liegen, d. h. in der Ebene ω, die im Anfangspunkt o der Coordinaten senkrecht zum Vector $V\alpha$ errichtet ist. Dabei ist natürlich als „Ebene“ einer scalaren Quaternion $\alpha_0 e_0$ eine unbestimmte Ebene, nämlich jede beliebige Ebene durch den Anfangspunkt anzusehen. Die drei letzten Gleichungen unter (54) zeigen sodann, dass der Vectorbestandtheil $V\alpha$ der gegebenen Quaternion, getheilt durch zwei, eben der Vector ist, durch den man in der analytischen Geometrie das durch die beiden Vectoren β und γ begrenzte Dreieck, nämlich das Dreieck mit den in der Reihe

$$0, 0, 0; \quad \beta_1, \beta_2, \beta_3; \quad \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$$

auf einander folgenden Ecken nach Grösse und Lage darzustellen pflegt:

Satz 17. Ist die Quaternion α als Product der Vectoren β und γ dargestellt, $\alpha = \beta\gamma$, so giebt der Vectortheil $V\alpha$ von α durch seine Länge $\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$ und seine Lage die doppelte Fläche des durch die Vectoren β und γ begrenzten Dreiecks nach Lage und Vorzeichen genau an. Ferner bedeutet der negativ genommene scalare Coefficient der Quaternion das Product aus den Längen der beiden Vectoren β, γ in den Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels ϑ.

Bei der Formulirung dieses Satzes ist die übliche Annahme zu Grunde gelegt, dass die — beliebig zu wählende — positive Richtung der Geraden eines Vectors gegen den positiven Drehungssinn in einer Normalebene dieses Vectors ebenso gelegen ist, wie die positive Richtung der z_1-Axe gegen den positiven Drehungssinn in der Ebene $z_1 = 0$, nämlich gegen den Drehungssinn von der positiven z_2-Axe nach der positiven z_3-Axe hin; und es ist ferner angenommen, dass auf Grund des Satzes 12. eine Abhängigkeit zwischen den drei Quadratwurzeln $\sqrt{N(\alpha)}$, $\sqrt{N(\beta)}$, $\sqrt{N(\gamma)}$ durch die Gleichung

$$\sqrt{N(\alpha)} = \sqrt{N(\beta)}\,\sqrt{N(\gamma)} \tag{56}$$

erklärt ist. Offenbar hat man unter diesen Voraussetzungen, wie im Satze behauptet,

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} &= \sqrt{N(\beta)}\,\sqrt{N(\gamma)} \,.\, \sin\vartheta \\ -\alpha_0 &= \sqrt{N(\beta)}\,\sqrt{N(\gamma)} \,.\, \cos\vartheta \end{aligned} \tag{57}$$

oder

$$\cos\vartheta = -\frac{\alpha_0}{\sqrt{N(\alpha)}}, \quad \sin\vartheta = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}{\sqrt{N(\alpha)}}. \tag{58}$$

Nun ergiebt sich, wie wir die Vectoren β, γ ändern können, ohne ihr Product α zu ändern: Offenbar ist es erlaubt, sie beide zugleich einer beliebigen Drehung in ihrer Ebene, also einer Drehung um die Gerade des Vectors $V\alpha$ zu unterwerfen. Ferner kann man die Vectoren β, γ so ändern, dass ihre Geraden in Ruhe bleiben, und dass zugleich der Inhalt des eingeschlossenen Dreiecks unverändert bleibt; d. h. man kann die Länge des einen dieser Vectoren in irgend einem Verhältniss $m:1$ ändern, wenn man nur gleichzeitig den anderen in dem reciproken Verhältniss $1:m$ ändert.

Hiermit haben wir bereits in der Gesammtheit aller zu derselben Quaternion α gehörigen Dreiecke

$$0,\ 0,\ 0;\quad \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3;\quad \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$$

eine geometrische Versinnlichung der Quaternionen, die es ermöglicht, alle von uns ausgeführten Rechnungen durch Constructionen im Raume zu ersetzen. Wir wollen aber diesen Gedanken in einer etwas anderen Form ausführen, die eine noch anschaulichere Darstellung der Quaternionen durch Figuren ermöglicht.

Wir gelangen dahin, wenn wir neben den Vectoren β und γ die zu ihnen reciproken Vectoren betrachten, also die Vectoren

$$\beta^{-1} = -\frac{\beta}{N(\beta)},\quad \gamma^{-1} = -\frac{\gamma}{N(\gamma)},$$

die, als Strecken im Raume gedeutet, den Vectoren β und γ entgegengerichtet sind und die reciproken Längen dieser haben. Wir können jetzt die Formeln (54) auch so schreiben:

$$\alpha = (\beta^{-1})^{-1}\gamma = \beta(\gamma^{-1})^{-1}.$$

Betrachten wir nun zum Beispiel das Vectorenpaar β^{-1}, γ, so wird, wenn wir die Vectoren β und γ den oben besprochenen Aenderungen unterwerfen, das Dreieck

$$0,\ 0,\ 0;\quad \frac{-\beta_1}{N(\beta)},\ \frac{-\beta_2}{N(\beta)},\ \frac{-\beta_3}{N(\beta)};\quad \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$$

in seiner Ebene und zu sich selbst ähnlich bleiben: Aendern wir die Längen von β und γ in reciproken Verhältnissen, so ändern sich die Längen von β^{-1} und γ in gleichen Verhältnissen. Wir ändern jetzt die Bezeichnung, indem wir den bisher durch β^{-1} dargestellten Vector nunmehr β nennen, und erhalten so den folgenden Satz:

Satz 18. Jede beliebige Quaternion α kann, je nachdem sie skalar ist oder nicht, auf ∞^3 oder auf ∞^2 Arten in der Form

(59) $$\alpha = \beta^{-1}\gamma$$

(oder auch in der Form $\alpha = \beta\gamma^{-1}$) als „Quotient“ zweier arithmetischer Vectoren dargestellt werden.

Das durch die zugehörigen geometrischen Vectoren β, γ begrenzte Dreieck ist ähnlich-veränderlich in der Ebene der Quaternion α.

Die Quadratwurzel aus der Norm $N(\alpha)$ ist der Quotient aus den Längen der Vectoren γ, β:

$$\sqrt{N(\alpha)} = \frac{\sqrt{N(\gamma)}}{\sqrt{N(\beta)}}. \tag{60}$$

Ist ferner ψ der von den Vectoren β und γ eingeschlossene Winkel, so wird die Länge des Vectors $V\alpha$ gegeben durch den Ausdruck

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} = -\frac{\sqrt{N(\gamma)}}{\sqrt{N(\beta)}} \cdot \sin\psi. \tag{61}$$

Endlich wird der scalare Coefficient der Quaternion dargestellt durch den Ausdruck

$$\alpha_0 = \frac{\sqrt{N(\gamma)}}{\sqrt{N(\beta)}} \cdot \cos\psi. \tag{62}$$

Die Formeln (60), (61), (62) gehen aus den Formeln (56), (57) durch den angegebenen Wechsel der Bezeichnung hervor, wenn man $\frac{1}{\sqrt{N(\beta)}}$ an Stelle von $\sqrt{N(\beta)}$ und gleichzeitig an Stelle des Winkels ϑ den Winkel $\psi = \vartheta \pm \pi$ setzt. Bei der Auffassung der Formeln sind die Vorzeichen der verschiedenen Wurzelgrössen zu beachten. Eine Aenderung im Vorzeichen der Länge $\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$ des Vectors $V\alpha$ bewirkt eine Aenderung des positiven Drehungssinnes in der Ebene der Quaternion α und also einen Zeichenwechsel des Winkels ψ; eine Aenderung im Vorzeichen von $\sqrt{N(\beta)}$ oder $\sqrt{N(\gamma)}$ bewirkt eine Aenderung von ψ um ein ungerades Vielfaches von π, und zugleich einen Zeichenwechsel von $\sqrt{N(\alpha)}$. — Wählt man, wie üblich, für alle Wurzelgrössen deren positive Werthe, schreibt man also für

$$\sqrt{N(\alpha)},\quad \sqrt{N(\beta)},\quad \sqrt{N(\gamma)},\quad \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$$

der Reihe nach

$$T\alpha, \qquad T\beta, \qquad T\gamma, \qquad TV\alpha,$$

so sind die positiven Richtungen der Vectoren β, γ, $V\alpha$ die vom Anfangspunkte o der Coordinaten nach den Endpunkten dieser Vectoren hin; der Winkel ψ ist dann völlig bestimmt bis auf Vielfache von 2π.

Durch den Satz 18 ist nun implicite schon ein Aequivalenzbegriff zwischen Dreiecken festgesetzt, die ihre eine Ecke im Punkte o haben: Wir werden zwei solche Dreiecke β, γ als äquivalent, oder wenn wir wollen, als „gleich" ansehen, wenn sie in derselben Ebene ω liegen, und wenn sie eigentlich-ähnlich sind, d. h. wenn das eine aus dem anderen durch eine Drehung um die Normale von ω, verbunden mit einer im gleichen Verhältniss erfolgenden Streckung der beiden Seiten β, γ hervorgeht. Danach wird jede von Null verschiedene Quaternion geometrisch versinnlicht durch „ein" Dreieck; jeder Vector insbesondere durch ein rechtwinkliges Dreieck; jede scalare Quaternion durch „ein" gestrecktes Dreieck, dessen Ecken auf irgend einer Geraden durch den Punkt o liegen können; und insbesondere wird die Haupteinheit dargestellt durch „ein" Dreieck, dessen zweite Ecke mit der dritten in irgend einem vom Punkte o verschiedenen Punkte zusammenfällt.

Betrachten wir nunmehr zwei beliebige Quaternionen α und α', so ist klar, dass wir die zugehörigen ähnlich-veränderlichen Dreiecke immer so legen können, dass eine beliebige (o enthaltende) Seite des ersten Dreiecks zusammenfällt mit einer beliebigen Seite des zweiten Dreiecks. Aus dieser Bemerkung aber ergeben sich sofort geometrische Constructionen für Summe und Product zweier Quaternionen, und damit geometrische Aequivalente für die sämmtlichen Formeln der algebraischen Quaternionentheorie:

Satz 19. Um zwei Quaternionen α und α' geometrisch zu addiren, ertheile man den zugehörigen ähnlich-veränderlichen Dreiecken eine solche Lage, dass die erste Seite β des ersten Dreiecks zusammenfällt mit der ersten Seite des zweiten Dreiecks:

(63) $$\alpha = \beta^{-1}\gamma, \qquad \alpha' = \beta^{-1}\delta.$$

Die Summe wird dann dargestellt durch ein neues Dreieck, dessen erste Seite wiederum β ist, und dessen zweite Seite $\gamma + \delta$ aus *den Seiten γ, δ der gegebenen Dreiecke durch die Construction des Vectorenparallelogramms gefunden wird:*

$$\alpha + \alpha' = \beta^{-1}(\gamma + \delta). \tag{64}$$

Satz 20. Um zwei Quaternionen α und α' geometrisch zu multipliciren, ertheile man den zugehörigen Dreiecken eine solche Lage, dass die zweite Seite des ersten Dreiecks zusammenfällt mit der ersten Seite des zweiten Dreiecks:

$$\alpha = \beta^{-1}\gamma, \qquad \alpha' = \gamma^{-1}\delta. \tag{65}$$

Die erste Seite β des ersten Dreiecks verbunden mit der zweiten Seite δ des zweiten Dreiecks bestimmt dann das Dreieck, das zu dem Product $\alpha\alpha'$ gehört:

$$\alpha\alpha' = \beta^{-1}\delta. \tag{66}$$

Wir fügen zu weiterer Verdeutlichung noch einige specielle Folgerungen hinzu:

Satz 21. Die Reciproke einer Quaternion wird gefunden, indem man die erste Seite des zugehörigen Dreiecks mit der zweiten vertauscht.

Um die Conjugirte einer Quaternion zu finden, vertausche man die erste Seite des zugehörigen Dreiecks mit der zweiten, und ersetze dann diese Seiten durch je einen Vector von derselben Richtung, aber reciproker Länge.

In der That, ist $\alpha = \beta^{-1}\gamma$, so ist $\alpha^{-1} = \gamma^{-1}\beta$ und

$$\bar{\alpha} = \left(\frac{\gamma}{N(\gamma)}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\beta}{N(\beta)}\right).$$

§ 5. Weitere Erläuterungen.

An der geometrischen Deutung des Quaternionenrechnens, zu der wir nunmehr gelangt sind, ist besonders bemerkenswerth der Umstand, dass in ihr von den Einheiten e_1, e_2, e_3 gar nicht mehr die Rede ist: Die Sätze 19 und 20 enthalten keine Beziehung mehr zu irgend einem Coordinatensystem. Sie definiren lediglich eine Gruppe elementargeometrischer Constructionen, vermöge deren man aus gegebenen Dreiecken andere ableiten kann.

Offenbar ist es nun möglich, bei Begründung der Quaternionentheorie einen Weg zu gehen, der dem von uns eingeschlagenen gerade entgegengesetzt gerichtet ist: Man kann auch diese geometrischen Constructionen an die Spitze stellen, und erst nachträglich Coordinaten und die zugehörigen Einheiten einführen.

Man muss dann damit beginnen, dass man zuerst den im vorigen § erklärten Aequivalenzbegriff zwischen eigentlich-ähnlichen, einer und derselben Ebene ω angehörigen Dreiecken aufstellt. Hierauf werden die als „geometrische Addition“ und „Multiplication“ solcher Dreiecke zu bezeichnenden Verknüpfungen, auf Grund der in den Sätzen 19. und 20. angegebenen Constructionen zu erklären sein. Es muss dann gezeigt werden, dass die „Addition“ dieser mit α, β, γ bezeichneten Dreiecke das in der Formel

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)=\alpha+\beta+\gamma$$

ausgedrückte sogenannte associative Gesetz befolgt (das commutative Gesetz $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ ist selbstverständlich); hierauf ist zu zeigen, dass die „Multiplication“ das associative Gesetz (Nr. 35) ebenfalls befolgt, und dass sie mit der Addition durch das distributive Gesetz (Nr. 27) verbunden ist. Es findet sich dann, dass man einem jeden bei o rechtwinkligen Dreieck einen zu seiner Ebene senkrechten Vector derart zuordnen kann, dass die Addition solcher Dreiecke durch Addition der zugehörigen Vectoren nach der Parallelogramm-construction erfolgt; ferner dass man jedem beliebigen Dreieck eine Zahl α_0 und einen Vector zuordnen kann, wiederum so, dass bei Addition der Dreiecke die entsprechenden Zahlen (arithmetisch) und die zugehörigen Vectoren (geometrisch) addirt werden. Schliesslich kommt man zu dem Begriffe der Quaternion, als eines Systems von vier Zahlen, indem man den Vector nach drei zu einander senkrechten Axen zerlegt.

Dies war im Wesentlichen der Gedankengang Hamilton's. Der Zusammenhang der Quaternionen mit den Drehungen eines starren Körpers ergiebt sich auf diesem Wege erst nachträglich, durch eine Ueberlegung, die wir in § 6 wiedergeben werden; und in der That scheint auch dieser Zusammenhang Hamilton selbst entgangen zu sein.

Unsere Darstellung der Quaternionentheorie unterscheidet sich von der Hamilton's ausser durch die Art der Herleitung noch durch den Gebrauch eines besonderen Zeichens für die Haupteinheit e_0. Dass sich dieses Zeichen in der That entbehren lässt, kann man sofort einsehen. Es fallen nämlich die Regeln, nach denen scalare Quaternionen, also Quaternionen von der Form me_0, ne_0, . . . addirt und multiplicirt werden, völlig zusammen mit den Regeln für die Addition und Multiplication einzelner Zahlen m, n, . . .; ausserdem hat die Multiplication einer beliebigen Quaternion α mit einer scalaren Quaternion me_0 dieselbe Wirkung wie die Multiplication von α mit der Zahl m. Es steht uns also Nichts im Wege, durch eine besondere Definition zu bestimmen, dass scalare Quaternionen und einzelne Zahlen nicht unterschieden werden sollen, dass also

$$1 = e_0 = (1, 0, 0, 0)$$

sein soll; damit aber kommt das Zeichen e_0 in Wegfall. Zu eben dieser Einsicht führen die geometrischen Ueberlegungen: Schreiben wir die Quaternion in der Form $\alpha^{-1}\beta$, wo α und β Vectoren bedeuten, so liegt es nahe genug, in dem Falle wo die Vectoren α und β derselben Geraden angehören, den sogenannten Quotienten $\alpha^{-1}\beta$ der Vectoren α und β, der in diesem Falle von $\beta\alpha^{-1}$ nicht verschieden ist, mit dem Quotienten der Maasszahlen zu identificiren, durch die man die Längen der Vectoren α und β ausdrücken kann.

Ist hiernach die Gleichsetzung der einzelnen Zahl m und der Quaternion $(m, 0, 0, 0)$ allerdings zulässig, so ist es andrerseits doch auch vielleicht nützlich, zu betonen, dass diese Gleichsetzung keineswegs nothwendig ist, wie das eben unsere Darstellung zeigt, in der wir eine solche Gleichsetzung nicht vorgenommen hatten. Es kann nämlich, wie wir hier allerdings nicht näher ausführen können, die Quaternionentheorie als ein einzelnes Glied aus einer ganzen Kette ähnlicher Theorieen angesehen werden; und in diesen, die zum Theil einen viel allgemeineren Charakter haben, ist es nicht immer zulässig, das an Stelle unserer Haupteinheit tretende Gebilde mit der Zahl Eins zu identificiren, ja es ist ein solches Gebilde gar nicht immer vorhanden.

Nehmen wir indessen die besprochene Gleichsetzung einmal vor, so zeigt sich ein bemerkenswerther Umstand. Die Rechnung mit Quaternionen erweist sich jetzt als eine Erweiterung des Rechnens mit einzelnen Zahlen: Die Begriffe Summe und Product von Quaternionen reduciren sich, für den Fall scalarer Quaternionen, auf die ebenso benannten Begriffe der elementaren Arithmetik. In demselben Sinne aber umfasst die Quaternionenrechnung auch noch die Rechnung mit den (gemeinen) complexen Grössen der Form $m+ni$ oder $m+n\sqrt{-1}$: In der That, betrachten wir etwa nur Quaternionen von der besonderen Form me_0+ne_1, so fallen, da $e_1^2=-e_0$, und also nunmehr $e_1^2=-1$ ist, auch die Regeln, nach denen Summe und Product zweier solcher Quaternionen gebildet werden, zusammen mit den entsprechenden Regeln für die genannten complexen Grössen.*)

Man hat, aus diesem Gesichtspunkt, die Quaternionen selbst als „höhere complexe Grössen" bezeichnet; und sie bieten in der That ein instructives Beispiel dafür, dass die Betrachtung von derartigen „complexen Grössen", d. h., von von Systemen von mehr als zwei Zahlen m, n, ..., die gewissen im Voraus bestimmten Verknüpfungsgesetzen (analog der Addition und Multiplication der Quaternionen) unterliegen, unter Umständen von Nutzen sein kann.

Auf den hier besprochenen Umstand, dass nämlich die Quaternionenrechnung das Rechnen mit einzelnen Zahlen und sogenannten gewöhnlichen complexen Grössen umfasst, haben einzelne Mathematiker ein ganz übertriebenes Gewicht gelegt. Man hat geradezu geglaubt, in dieser Quaternionenrechnung eine principiell neue Rechnungsart, eine andere und zwar allgemeinere Art von „Algebra" (algebra upon algebra), einen ausserhalb der „gewöhnlichen" Algebra verlaufenden Kreis von Operationen vor sich zu haben; und diese Auffassung hat dann weiter zu einer ganz unberechtigten Ueberschätzung des Quaternionencalculs**), und in ihrer Rück-

*) Hamilton bezeichnet geradezu die Einheit e_1 mit i (und die beiden anderen Einheiten e_2 und e_3 mit j und k). Das empfiehlt sich schon deshalb nicht, weil man auch Quaternionen mit complexen Coefficienten (von der Form $m+n\sqrt{-1}$) betrachtet, und weil das Zeichen i seit Gauss allgemein für $\sqrt{-1}$ gebraucht wird.

** Es mag gestattet sein, hier ein in seiner Art wohl einzig dastehendes Curiosum zu erwähnen: Unlängst ist die Gründung eines Vereins zur Förderung der Quaternionentheorie erfolgt.

wirkung zu einer nicht minder ungerechtfertigten Unterschätzung geführt. Dahin ist man dadurch gekommen, dass man in den Quaternioneneinheiten nicht Zahlenquadrupel, sondern blosse „Symbole" erblickt hat, deren „Multiplication" dann allerdings nach Regeln erfolgt, die wie z. B. $e_2e_3 = - e_3e_2$ im Rechnen mit gewöhnlichen reellen oder complexen Zahlen kein Analogon haben. Dass derartige von einer gewissen Mystik nicht freie Vorstellungen nicht sachgemäss sind, brauchen wir kaum noch besonders hervorzuheben: Die Quaternionen, und verwandte Rechnungsweisen, wie die sogenannte Ausdehnungslehre und die „Universal Algebra" englischer Mathematiker, haben, wie die gemeinen complexen Grössen, ihren bestimmten Platz in der „gewöhnlichen" Algebra, der man keine „andere" Art von Algebra an die Seite stellen oder gar überordnen kann; die Quaternionen und die anderen genannten speciellen algebraischen Disciplinen unterscheiden sich aber von den gemeinen complexen Grössen durch das sehr viel beschränktere Feld ihrer Anwendung.

Ebenfalls irreleitend ist die Bezeichnung „Algebra of Space". Die „Algebra der Quaternionen", wenn wir diesen Ausdruck einmal brauchen wollen, hat an sich mit dem Raume Nichts zu thun. Dass sie auf Constructionen im Raume, von bestimmter sehr specieller Art, mit einigem Erfolg angewendet werden kann, ist eine Eigenschaft, die sie mit vielen anderen Arten algebraischer Operationen theilt. Die Quaternionenrechnung kann aber ebensogut, wie wir bei einer anderen Gelegenheit zu zeigen gedenken, z. B. auch durch Constructionen gedeutet werden, die auf einer Kugelfläche verlaufen.

Schliesslich wollen wir hier noch einen Umstand besprechen, der, wenn er unerörtert bliebe, ebenfalls leicht ein Missverständniss hervorrufen könnte.

Wir haben in § 3 die Quaternionen als Zahlenquadrupel eingeführt. Daraus ergab sich von selbst der Begriff der „Addition" zweier Quaternionen, und der Begriff der Einheiten. Der Begriff der „Multiplication" wurde dagegen auf die aus der Theorie der orthogonalen Transformationen entnommenen Gleichungen (19) gegründet. Es wird nun wohl auch ohne Anführung von Beispielen deutlich sein, dass man, mit ganz ähnlichem Erfolg, statt von diesen Gleichungen (19) auch von anderen Gleichungen verwandter Structur wird ausgehen können: Man würde dann zu anderen Arten von „Quaternionenrechnung" kommen. Dieser Gedanke ist in der That ausgeführt worden; es ist aber für Grössenquadrupel, die solchen anderen Verknüpfungen unterliegen, nicht mehr das Wort „Quaternionen" in Gebrauch: Dieses wird, bis jetzt, ausschliesslich für die hier besprochenen Verknüpfungen benutzt; derart also, dass der Begriff eines Zahlenquadrupels erst in Verbindung mit den Gleichungen (19) oder mit der Multiplicationstafel (28) die „Quaternionen" vollständig definirt.

Wir schreiten nun, nach diesen wohl nicht ganz überflüssigen Abschweifungen, in unserer eigentlichen Darlegung fort.

Auch wenn man an den Gleichungen (19) festhält, lässt sich die Gestalt der von uns entwickelten Theorie noch in mannigfacher Weise abändern. Versteht man nämlich unter e'_0, e'_1, e'_2, e'_3 irgend vier Quaternionen

$$e'_i = \lambda_{i0} e_0 + \lambda_{i1} e_1 + \lambda_{i2} e_2 + \lambda_{i3} e_3,$$

durch die sich die Einheiten $e_0 \ldots e_3$ selbst linear mit numerischen Coefficienten ausdrücken lassen, so dass etwa, durch Auflösung der angeschriebenen Gleichungen

$$e_i = \mu_{i0} e'_0 + \mu_{i1} e'_1 + \mu_{i2} e'_2 + \mu_{i3} e'_3$$

gefunden wird, so wird offenbar jede beliebige Quaternion α auch durch diese Quaternionen e'_i darstellbar sein:

$$\alpha = \alpha'_0 e'_0 + \alpha'_1 e'_1 + \alpha'_2 e'_2 + \alpha'_3 e'_3.$$

Man kann also diese Quaternionen e'_i als neue „Einheiten" in die Theorie einführen, an Stelle der von uns benutzten Einheiten e_i. Da sich die Producte $e'_i e'_k$ durch die Producte $e_i e_k$, diese durch die ursprünglichen Einheiten e_i, und diese wiederum durch die Einheiten e'_i ausdrücken lassen, so wird dann an Stelle der Tafel (28) eine andere „Multiplicationstafel" treten, die freilich im Allgemeinen einen viel verwickelteren Bau darbieten wird. Man kann aber die grosse Willkür, die man in der Wahl der sechzehn Coefficienten λ_{ik} hat, dazu benutzen, diese neue Multiplicationstafel wiederum zu vereinfachen. Zwei der wichtigsten unter den so entstehenden besonderen Multiplicationstafeln wollen wir noch kurz besprechen.

Man kann sich zunächst die Frage vorlegen nach allen Systemen von vier Einheiten, e'_0, e'_1, e'_2, e'_3, deren Multiplicationsregeln der Form nach identisch sind mit denen der von uns benutzten Einheiten e_0, e_1, e_2, e_3, und also durch die Gleichungen

$$(67)\qquad \begin{aligned} e'_0 e'_i = e'_i e'_0 = e'_i, \quad e'^2_i = -e'_0, \\ e'_2 e'_3 = e'_1, \quad e'_3 e'_2 = -e'_1 \quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

ausgedrückt werden. Die Antwort ist nicht schwer: Man findet alle die verlangten Systeme von Einheiten, wenn man setzt

$$(68)\qquad e'_0 = e_0, \quad e'_i = c_{i1} e_1 + c_{i2} e_2 + c_{i3} e_3 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

und unter den Grössen c_{ik}, wie in § 1, die Coefficienten einer eigentlichen orthogonalen Substitution versteht. Die hier vorgenommene Aenderung läuft offenbar, geometrisch betrachtet, auf Einführung eines anderen Systems rechtwinkliger Coordinaten hinaus; und es ist auch wohl von vorn herein deutlich, dass der Uebergang zu einem anderen, gleichartig-orientirten Coordinatensystem (s. § 1) eine Aenderung in der Form der von uns entwickelten Theorie nicht bewirken kann.

Um zu dem weiter von uns zu besprechenden System von Einheiten zu gelangen, bemerken wir zunächst, dass nichts im Wege steht, die in § 3 entwickelte algebraische Quaternionentheorie derart zu erweitern, dass man neben reellen auch complexe Werthe der mit α_k bezeichneten Coefficienten einer Quaternion in Betracht zieht, dass man also neben den von uns bisher allein untersuchten reellen Quaternionen Quadrupel von vier Grössen $m_k + in_k$ den betrachteten Verknüpfungsgesetzen unterwirft. Dabei verlieren freilich einige der von uns aufgestellten Sätze ihre Gültigkeit, namentlich der Satz 13, oder es müssen Ausnahmefälle angegeben werden, die bei rellen Werthen der Grössen α_i nicht auftreten konnten; aber die Gleichungen (19) und die Hauptsätze 7, 8, 11, 12 erfahren keine Aenderung. Nunmehr werden wir auch für die oben mit λ_{ik} bezeichneten Grössen complexe Werthe setzen dürfen; insbesondere werden wir u. A. die folgenden Quaternionen als neue „Einheiten" einführen können:

$$
(69)\qquad \begin{aligned} e_{11} &= \tfrac{1}{2}(e_0 - ie_2), & e_{12} &= \tfrac{1}{2}(e_3 - ie_1),\\ e_{22} &= \tfrac{1}{2}(e_0 + ie_2), & e_{21} &= \tfrac{1}{2}(-e_3 - ie_1), \end{aligned}
$$

so dass umgekehrt

$$
(70)\qquad \begin{aligned} e_0 &= e_{11} + e_{22}, & e_1 &= i(e_{12} + e_{21}),\\ e_2 &= i(e_{11} - e_{22}), & e_3 &= e_{12} - e_{21} \end{aligned}
$$

wird. Berechnen wir nun, mit Hülfe der Tafel (28), die Multiplicationstafel für diese neuen Einheiten, so findet sich die einfache Regel, dass für $i, j, k, l = 1, 2$

$$
(71)\qquad e_{ij}e_{jk} = e_{ik}; \quad e_{ij}e_{kl} = 0 \qquad (j \neq k)
$$

Drücken wir also die Quaternion α nunmehr durch die vier Einheiten e_{ik} aus,

$$
(72)\qquad \alpha = \alpha_{11}e_{11} + \alpha_{12}e_{12} + \alpha_{21}e_{21} + \alpha_{22}e_{22},
$$

so werden die Coefficienten α''_{ik} des Products $\alpha\alpha'$ nunmehr durch die Formeln gegeben:

$$
(73)\qquad \begin{aligned} \alpha''_{11} &= \alpha_{11}\alpha'_{11} + \alpha_{12}\alpha'_{21}, & \alpha''_{12} &= \alpha_{11}\alpha'_{12} + \alpha_{12}\alpha'_{22}\\ \alpha''_{21} &= \alpha_{21}\alpha'_{11} + \alpha_{22}\alpha'_{21}, & \alpha''_{22} &= \alpha_{21}\alpha'_{12} + \alpha_{22}\alpha'_{22}. \end{aligned}
$$

Dieselben Formeln würden wir natürlich auch unmittelbar aus den Gleichungen (19) haben ableiten können, wenn wir in diese an Stelle der Parameter α_i, α'_i, α''_i die neuen Parameter α_{ik}, α'_{ik}, α''_{ik} durch die Gleichungen

$$
(74)\qquad \begin{aligned} 2\alpha_0 &= \alpha_{11} + \alpha_{22}, & 2\alpha_1 &= -i(\alpha_{12} + \alpha_{21}),\\ 2\alpha_2 &= -i(\alpha_{11} - \alpha_{22}), & 2\alpha_3 &= \alpha_{12} - \alpha_{22}, \end{aligned}
$$

$2\alpha'_0 = \alpha'_{11} + \alpha'_{22}$ u. s. w. eingeführt hätten.

Die neue Gestalt (73) des „Multiplicationstheorems“ der Quaternionen, zu der wir nunmehr gelangt sind, ist nun besonders bemerkenswerth nicht allein darum, weil sie formal noch etwas einfacher ist als die ursprüngliche (19), sondern namentlich deshalb, weil eben diese Formeln (73) noch bei anderen Untersuchungen auftreten.

Man betrachtet vielfach, besonders in der neueren Functionentheorie, sogenannte gebrochene lineare Substitutionen einer (reellen oder complexen) Veränderlichen ζ, indem man dem Werthe ζ einen neuen Werth ζ' zuordnet durch eine Gleichung der Form

$$(75) \qquad \zeta' = \frac{\alpha_{11}\zeta + \alpha_{21}}{\alpha_{12}\zeta + \alpha_{22}},$$

wobei, damit die Gleichung (75) nach ζ auflösbar sei, angenommen werden muss, dass die Determinante $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}$ von Null verschieden ist. Diese Substitutionen oder Transformationen bilden nun eine Gruppe; d. h. führt man nach der Substitution (75) eine andere aus, mit neuen vier Verhältnissgrössen α'_{ik} als Parametern:

$$\zeta'' = \frac{\alpha'_{11}\zeta' + \alpha'_{21}}{\alpha'_{12}\zeta' + \alpha'_{22}},$$

so erhält man durch Substitution des Werthes (75) von ζ' eine dritte Gleichung derselben Form:

$$\zeta'' = \frac{\alpha''_{11}\zeta_1 + \alpha''_{21}}{\alpha''_{12}\zeta + \alpha''_{22}}.$$

Die Parameter α''_{ik}, bei denen es auch nur auf die Verhältnisse ankommt, lassen sich dann durch die Parameter α_{ik} und α'_{ik} ausdrücken; und zwar werden diese Ausdrücke gerade dargestellt durch die Formeln (73).

Es würde uns hier zu weit führen, wollten wir tiefer auf die Bedeutung dieses von Cayley entdeckten Zusammenhangs zwischen Quaternionen und linearen Transformationen eingehen; wir mögen aber das zuletzt gewonnene Ergebniss in einem Lehrsatze festhalten:

Satz 22. Aus dem sogenannten Multiplicationstheorem (19) der Quaternionen gehen durch eine lineare Substitution mit complexen Coefficienten (Nr. 74) hervor die Formeln, die zur Zusammensetzung mehrerer linearer Transformationen einer Veränderlichen dienen. (Nr. 75 und Nr. 73).

Natürlich sind hiermit auch die Drehungen eines starren Körpers um einen festen Punkt o mit den linearen Transformationen der Form (75) in Verbindung gebracht: Statt durch die Euler'schen Parameter α_i können wir nun die Coefficienten c_{ik} einer orthogonalen Transformation auch ausdrücken durch die Parameter α_{ik}. Es ist aber zu bemerken, dass wegen des Auftretens imaginärer Coefficienten in den Formeln (74) reellen Werthen der Grössen c_{ik} nunmehr imaginäre Parameter zugeordnet werden, und umgekehrt.

§ 6. Quaternionen und orthogonale Transformationen.

Wir waren zu den Formeln (19), dem Multiplicationstheorem der Quaternionen, gekommen durch Zusammensetzung zweier durch ihre Euler'schen Parameter dargestellter orthogonaler Transformationen. Man kann aber auch umgekehrt, wie zuerst Cayley bemerkt hat, aus der „Multiplication" der Quaternionen wieder die Euler'schen Formeln herleiten. Wir wollen auch noch diese Formeln Cayley's hier entwickeln; dabei wollen wir aber den uns ja schon bekannten Zusammenhang zwischen den Formeln (15) und (19) als ein heuristisches Princip benutzen. Wir gehen dabei aus von einer auch sonst vielfach verwendeten Ueberlegung.

Es sei eine Transformation T der Punkte des Raumes gegeben, die irgend einen veränderlich gedachten Punkt x in einen neuen Punkt x' überführt:

$$x \{ T \} x'$$

Es sei ferner $\boldsymbol{S}$ eine zweite Transformation, die den Punkten x und x' die Punkte y und y' zuordnet:

$$x \{ \boldsymbol{S} \} y, \qquad x' \{ \boldsymbol{S} \} y'.$$

Dann wird dem Punkte y der Punkt y' in einer dritten Transformation entsprechen, die wir mit T' bezeichnen wollen:

$$y \{ T' \} y'.$$

Unsere Formeln zeigen nun, wie diese Transformation gefunden werden kann: Es ist

$$y \{ \boldsymbol{S}^{-1} \} x \{ T \} x' \{ \boldsymbol{S} \} y',$$

also

(76) $$T' = \boldsymbol{S}^{-1} T \boldsymbol{S}.$$

Man bezeichnet diese Transformation T' als die „Transformirte von T vermöge $\boldsymbol{S}$". Damit will man sagen, dass die Transformation T selbst als Object der Transformation $\boldsymbol{S}$ betrachtet und dieser Transformation unterworfen wird.

Wir identificiren nun $\boldsymbol{S}$ mit irgend einer unserer Drehungen (um den Anfangspunkt o der Coordinaten), T aber mit einer Umwendung um eine Gerade durch denselben Punkt. Dann ist T' offenbar wieder eine Umwendung, nämlich die Umwendung um die Axe, die aus der Axe von T durch die

Drehung S hervorgeht. Wir verwenden nun den uns bekannten Zusammenhang zwischen Drehungen und Quaternionen:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

sei einer der ∞^1 Vectoren, die der Umwendung T zugeordnet sind, α aber eine der Quaternionen, die der Drehung S entsprechen: Dann ist, nach Satz 10, die Quaternion

$$x' = \alpha^{-1} x \alpha \tag{77}$$

sicher wieder ein Vector, dessen Coefficienten x'_1, x'_2, x'_3 ganze lineare Functionen der Grössen x_1, x_2, x_3 sind, und zwar gehört dieser Vector zu der Umwendung T' (Nr. 76). Aber nach Satz 12. ist

$$N(x') = N(\alpha^{-1}) N(x) N(\alpha) = N(x),$$

d. h. es ist

$$x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Fassen wir also die Grössen x_i, x'_i nicht mehr nur als Verhältnissgrössen, als Coordinaten der Umwendungsaxen, sondern deren Werthe selbst als Coordinaten zweier Punkte auf, die auf diesen Axen liegen, so stellt die Formel (77) eine orthogonale Transformation dieser Coordinaten, nämlich eben die mit S bezeichnete Drehung vor. Und in der That kann man, durch eine ganz mechanisch auszuführende Rechnung, mit Hülfe der Tafel (28), also mit Hülfe der Formeln

$$\begin{array}{llll} & e_0 e_i = e_i e_0 = e_i, & e_i^2 = -e_0 & (i = 1, 2, 3) \\ (78) & e_2 e_3 = e_1, & e_3 e_1 = e_2, & e_1 e_2 = e_3 \\ & e_3 e_1 = -e_1, & e_1 e_3 = -e_2, & e_2 e_1 = -e_3 \end{array}$$

sich davon überzeugen, dass die Quaternionengleichung (77) völlig Dasselbe aussagt, wie die vier Gleichungen (15).

Satz 23. Mit Hülfe der Quaternionen kann man die orthogonalen Transformationen (1) der Form nach durch die einzige Gleichung (77), oder durch die mit dieser äquivalente Gleichung

$$N(\alpha) x' = \bar{\alpha} x \alpha, \tag{79}$$

oder endlich, in unentwickelter Gestalt, durch die Gleichung

$$\alpha x' = x \alpha \tag{80}$$

ausdrücken.

Der Zusammenhang zwischen den Gleichungen (15) und den Gleichungen (19), zu dessen Ableitung wir zuvor einiger

Rechnung bedurften, wird nunmehr völlig evident: Führen wir nach der Transformation S (Nr. 77) die Transformation S' aus:

$$x'' = \alpha'^{-1} x' \alpha',$$

so erscheint die zusammengesetzte Transformation $S'' = SS'$ ohne Weiteres in der Gestalt

$$x'' = \alpha''^{-1} x \alpha'',$$

wo $\alpha'' = \alpha\alpha'$.

Wir schliessen hieran nunmehr die schon in § 2 in Aussicht gestellte geometrische Deutung der Parameter α_i, die natürlich eine Beziehung zu dem benutzten Coordinatensystem enthalten muss. Wir stellen zu diesem Zweck die Quaternion α als Product zweier Vectoren dar, $\alpha = \beta\gamma$; dann können wir, nach den Darlegungen des § 4, ohne Weiteres die zu den Vectoren β und γ senkrechte Drehungsaxe und ebenso den Drehungswinkel bestimmen. (Vgl. auch die Formeln Nr. 6 und Nr. 16):

Satz 24. Sind $\cos\lambda_1$, $\cos\lambda_2$, $\cos\lambda_3$ *die Richtungscosinus der Drehungsaxe, ist ferner* ϑ *der halbe Drehungswinkel, und sind* α_i *die Euler'schen Parameter einer Drehung, so besteht zwischen diesen Grössen die Beziehung:*

$$(81) \qquad \begin{aligned} &\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 \\ &= -\operatorname{ctg}\vartheta : \cos\lambda_1 : \cos\lambda_2 : \cos\lambda_3. \end{aligned}$$

Man kann hiernach, wenn die Drehungsaxe und der nach Festsetzung einer positiven Richtung dieser Axe bis auf Vielfache von π bestimmte halbe Drehungswinkel gegeben sind, ohne Weiteres die Euler'schen Parameter bestimmen, und umgekehrt aus diesen Parametern Drehungsaxe und Winkel ϑ:

$$(82) \qquad \operatorname{ctg}\vartheta = \frac{-\alpha_0}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}}, \qquad \cos\lambda_i = \frac{\alpha_i}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}}$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3).$$

Man kann ferner auch die beiden Versoren finden, die zu einer gegebenen Drehung gehören, wenn man bestimmter setzt

$$(83) \qquad \alpha_0 = -\cos\vartheta, \qquad \alpha_i = \cos\lambda_i \sin\vartheta \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Eine Aenderung von ϑ um ein ungerades Vielfaches von π führt hier den noch möglichen Zeichenwechsel der Grössen α_i herbei. —

Wir betrachten nun noch kurz eine etwas allgemeinere Classe von Transformationen. Man bezeichnet als Streckung vom Punkte o aus die in rechtwinkligen Coordinaten durch die Gleichungen

$$x'_i = \rho . x_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

dargestellte Transformation der Punkte des Raumes, die jede Figur in eine zu ihr ähnliche und ähnlich liegende überführt, und die insbesondere jeden Radius vector vom Anfangspunkte o aus in dem constanten Verhältniss $\rho : 1$ vergrössert. Führen wir eine solche Transformation vor oder nach einer Drehung um den Punkt o aus, so entsteht, bei veränderlichem ρ, eine Schaar von Transformationen, die in demselben Sinne wie die Bewegungen eine Gruppe bilden, deren einzelne Transformation aber nun von vier Parametern abhängt. Diese demnach „viergliedrige" Gruppe ist, nach der Ausdrucksweise der modernen Gruppentheorie, die auch Transformationen mit imaginären Coefficienten in den Gleichungen untersucht (also in unserem Falle auch imaginäre Werthe des Parameters ρ zulässt), ebenfalls continuirlich; beschränken wir uns aber, wie wir hier thun wollen, auf die Betrachtung von reellen Figuren und Transformationen, so zerfällt diese Gruppe in zwei getrennte Schaaren von Transformationen, die den positiven und negativen Werthen des Vergrösserungsverhältnisses ρ zugeordnet sind. Wir wollen diese beiden Schaaren, zwischen denen ein Uebergang nur durch die natürlich auszuschliessenden Werthe $\rho = 0$ und $\rho = \infty$ hindurch erfolgen könnte, unterscheiden als eigentliche und uneigentliche Aehnlichkeitstransformationen mit dem festen Punkte o. Wir bemerken noch, dass die eigentlichen Aehnlichkeitstransformationen dieser Art für sich genommen eine Gruppe bilden, und dass man die uneigentlichen erhält, wenn man alle eigentlichen mit der einen Transformation $x'_i = -x_i$ zusammensetzt, der „Spiegelung" am Anfangspunkte der Coordinaten, die jeder Figur eine symmetrisch gleiche und zu ihr ähnlich-gelegene zuordnet. Es wird also genügen, eigentliche Aehnlichkeitstransformationen zu betrachten.

Es wird nun ohne Weiteres die Richtigkeit des folgenden Satzes einleuchten:

Satz 25. Die viergliedrige Gruppe der eigentlichen Aehnlichkeitstransformationen mit dem festen Punkte o wird dargestellt durch die Quaternionengleichung

$$x' = \bar{\alpha} x \alpha, \tag{84}$$

und zwar gehören zu jeder dieser Transformationen zwei verschiedene Quaternionen α und $-\alpha$.

Die Norm (nicht der Tensor) der Quaternion α giebt das zugehörige Vergrösserungsverhältniss an.

An Stelle der Gleichungen (83) treten nun natürlich Gleichungen der Form

$$\alpha_0 = -\sqrt{\rho}.\cos\vartheta, \quad \alpha_i = \sqrt{\rho}.\cos\lambda_i.\sin\vartheta: \tag{85}$$

Der Zerlegung einer der betrachteten Transformationen in Streckung und Drehung entspricht die Zerlegung der Quaternion α in Tensor und Versor. Die Zusammensetzung der Parameter α_i, die nun nicht mehr nur Verhältnissgrössen sind, wird nach wie vor bewirkt durch Multiplication der entsprechenden Quaternionen:

$$\alpha'' = \alpha\alpha'. \tag{86}$$

Die hier betrachtete Darstellung und Zusammensetzung der Aehnlichkeitstransformationen mit festem Punkt ist schon Gauss bekannt gewesen; Gauss nennt diese Transformationen, in seinen hinterlassenen Papieren, Mutationen des Raumes.

Nach einer anderen Richtung hin lassen sich die angestellten Ueberlegungen wie folgt verallgemeinern. Wir betrachten statt der Drehungen eines starren Körpers um den Anfangspunkt o der Coordinaten nunmehr eine beliebige Bewegung eines solchen Körpers, dargestellt durch Gleichungen der Form

$$a_{00} x'_i = a_{i0} + a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 \quad (i = 1, 2, 3), \tag{87}$$

also durch Gleichungen, die sich von den Gleichungen (1) durch das Auftreten der eine Schiebung $\xi_1 = x_1 + c_{10}$, $\eta_1 = y_1 + c_{20}$, $\zeta_1 = z_1 + c_{30}$ darstellenden Zusatzglieder $\frac{a_{i0}}{a_{00}} = c_{i0}$ unterscheiden. Stellt man auch in diesen Gleichungen die Coefficienten $a_{00}, a_{11}, a_{12} \ldots a_{33}$ durch die Eulerschen Parameter dar, so hat man in deren Verhältnissen und in den drei Grössen c_{10}, c_{20}, c_{30} ein System von sechs unabhängigen Parametern, durch das sich jede Bewegung eines starren Körpers ausdrücken lässt. Setzt man aber zwei solche Bewegungen $\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{S}'$ zu einer neuen $\boldsymbol{S}'' = \boldsymbol{SS}'$ zusammen, so erhält man nur ganz unübersichtliche Ausdrücke für die Parameter α''_i, c''_{i0} der zusammengesetzten Transformation. Man kann daher fragen, ob sich nicht andere Ausdrücke der Coefficienten in den Gleichungen (87) durch Parameter finden lassen, mit deren Hülfe man, nach Analogie der Formeln (19), auch die Zusammensetzung zweier beliebiger Bewegungen zu einer dritten auf eine einfache Weise ausführen kann. Solche Formeln lassen sich nun aus der Quaternionentheorie ableiten.

Wir verstehen unter α und β zwei Quaternionen, deren Coefficienten in der Beziehung

$$(88)\qquad 0 = \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

stehen; anders ausgedrückt, wir nehmen an, dass $\boldsymbol{S}(\alpha\bar{\beta}) = \boldsymbol{S}(\bar{\alpha}\beta)$ verschwindet, oder dass

$$(89)\qquad \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} = 0 = \bar{\alpha}\beta + \bar{\beta}\alpha$$

sein soll; und wir setzen ausserdem voraus, dass die Norm der Quaternion α von Null verschieden ist. Bedeutet dann x einen Vector, so definirt die Gleichung

$$(90)\qquad N(\alpha).x' = \bar{\alpha}x\alpha - 2\bar{\alpha}\beta$$

einen neuen Vector x', da der Scalartheil von $-2\bar{\alpha}\beta$ verschwindet; und wenn wir, wie früher, $a_{00} = N(\alpha)$ setzen, so wird die Abhängigkeit der Coefficienten x'_1, x'_2, x'_3 von x' von den Coefficienten x_1, x_2, x_3 des Vectors x durch ein Gleichungssystem der Form (87) dargestellt. Die Werthe der Coefficienten a_{00}, a_{11}, a_{12}, . . . a_{33} sind wiederum gegeben durch die Formeln (15); ausserdem aber findet sich

$$(91)\qquad \begin{aligned} a_{10} &= 2(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 - \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0),\\ a_{20} &= 2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 - \alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0),\\ a_{30} &= 2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 - \alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0).\end{aligned}$$

Umgekehrt kann man aber auch, wenn die sämmtlichen Coefficienten a_{00}, a_{ik} in den Gleichungen (87) gegeben sind — unter Voraussetzung des Bestehens der Relationen (14) — die Verhältnisse der acht Parameter α_i, β_i durch rationale

Operationen berechnen: Man bestimmt zuerst die Verhältnisse der vier Parameter α_i aus den Gleichungen (16), was, wie wir gesehen haben, immer möglich ist. Ertheilt man dann den Grössen α_i irgend welche bestimmte Werthe, die die gefundenen Verhältnisse haben, so folgt, wenn ρ einen Proportionalitätsfactor bedeutet,

$$\rho \,.\, a_{00} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2,$$
$$\rho \,.\, a_{11} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 \quad \text{u. s. w.}$$

Denselben Factor ρ muss man dann natürlich auch den linken Seiten der Gleichungen (91) hinzufügen:

$$\rho a_{10} = 2(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 - \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0) \quad \text{u. s. f.} \tag{92}$$

Löst man nun die Gleichungen (88) und (92) nach den Grössen β_i auf, so findet man, wenn man schliesslich für ρ wieder den Werth $\rho = \frac{N(\alpha)}{a_{00}}$ substituirt,

$$\begin{aligned} 2a_{00}\,.\,\beta_0 &= \alpha_1 a_{10} + \alpha_2 a_{20} + \alpha_3 a_{30}, \\ 2a_{00}\,.\,\beta_1 &= -\alpha_0 a_{10} + \alpha_3 a_{20} - \alpha_2 a_{30}, \\ 2a_{00}\,.\,\beta_2 &= -\alpha_3 a_{10} - \alpha_0 a_{20} + \alpha_1 a_{30}, \\ 2a_{00}\,.\,\beta_3 &= +\alpha_2 a_{10} - \alpha_1 a_{20} - \alpha_0 a_{30}. \end{aligned} \tag{93}$$

Hiermit ist der erste Theil des Satzes begründet:

Satz 26. Die sechsgliedrige Gruppe aller Bewegungen eines starren Körpers wird dargestellt durch die Quaternionengleichung

$$N(\alpha)\,.\,x' = \alpha x \bar{\alpha} - 2\bar{\alpha}\beta, \tag{94}$$

worin α und β Quaternionen bedeuten, die in der durch die Gleichung (88) oder (89) ausgedrückten Beziehung stehen.

Die Zusammensetzung zweier nach einander auszuführender Bewegungen $S(\alpha, \beta)$ und $S'(\alpha', \beta')$ zu einer neuen Bewegung $SS' = S''(\alpha'', \beta'')$ erfolgt nach der Regel

$$\alpha'' = \alpha\alpha', \qquad \beta'' = \alpha\beta' + \beta\alpha'; \tag{95}$$

d. h. die Parameter α_i'', β_i'' der zusammengesetzten Bewegung sind gegeben durch die Gleichungen (19) und die Gleichungen

$$\begin{aligned} \beta_0'' &= \alpha_0\beta_0' - \alpha_1\beta_1' - \alpha_2\beta_2' - \alpha_3\beta_3' + \\ &\quad + \beta_0\alpha_0' - \beta_1\alpha_1' - \beta_2\alpha_2' - \beta_3\alpha_3', \\ \beta_1'' &= \alpha_0\beta_1' + \alpha_1\beta_0' + \alpha_2\beta_3' - \alpha_3\beta_2' + \\ &\quad + \beta_0\alpha_1' + \beta_1\alpha_0' + \beta_2\alpha_3' - \beta_3\alpha_2', \qquad \textit{u. s. w.} \end{aligned} \tag{96}$$

Dass auch der zweite Theil dieses Satzes richtig ist, davon kann man sich durch eine ganz einfache Rechnung überzeugen, die analog ist der an die Gleichung (79) geknüpften Rechnung.

Wir verzichten auf eine eingehendere Erörterung dieser Formeln und führen auch eine weitere Anwendung der Quaternionen nur noch ohne Beweis an.

Man versteht unter einer orthogonalen Transformation von n Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ ein System von Gleichungen

(97) $$x'_i = c_{i1} x_1 + c_{i2} x_2 + \dots + c_{in} x_n, \qquad (i = 1 \dots n)$$

das nach Analogie der Gleichungen (1) aus jedem Werthsystem $(x_1 \dots x_n)$ ein anderes $(x'_1 \dots x'_n)$ hervorgehen lässt, derart, dass

(98) $$x'^2_1 + \dots + x'^2_n = x_1^2 + \dots + x_n^2,$$

für alle Werthsysteme von $x_1 \dots x_n$. Diese Transformationen zerfallen nun, wie in dem von uns behandelten Falle $n = 3$, so auch bei beliebigem n in zwei verschiedene continuirliche Schaaren, die man als eigentliche und uneigentliche orthogonale Transformationen unterscheidet. Die eigentlichen, deren Determinante $| c_{11} c_{22} \dots c_{nn} |$ den Werth $+1$ hat, bilden, wie sich zeigen lässt, für sich eine continuirliche Gruppe, in dem uns geläufigen Sinn, und sie bilden zusammen mit den uneigentlichen, deren Determinante den Werth -1 hat, ebenfalls eine Gruppe. Die Transformationen dieser Gruppe nun werden im Falle $n = 4$ ebenfalls noch von der Quaternionentheorie geliefert.

Satz 27. Es mögen λ und μ zwei Quaternionen bedeuten, die in der Beziehung

$$\lambda \bar{\mu} + \mu \bar{\lambda} = 0 = \bar{\lambda} \mu + \bar{\mu} \lambda$$

stehen (vgl. Nr. 88, 89), *und es sei*

$$\alpha = \lambda + \mu, \qquad \beta = \lambda - \mu,$$

so dass $N = N(\alpha) = N(\beta)$.

Dann können die eine sechsgliedrige continuirliche Gruppe bildenden eigentlichen orthogonalen Transformationen der vier Veränderlichen x_i sämmtlich dargestellt werden durch die Quaternionengleichung

(99) $$N.x' = \bar{\alpha} x \beta$$

und ebenso die uneigentlichen sämmtlich durch die Gleichung

(100) $$N.\bar{x}' = \bar{\alpha} x \beta.$$

Wir überlassen dem Leser die Aufstellung der Formeln für die Zusammensetzung der Parameter α_i, β_i und α_i', β_i' zweier solcher hinter einander ausgeführter Transformationen, und bemerken nur noch, dass ein Theil vom Inhalte des Satzes 27. unmittelbar aus dem Satze 12. sich ergiebt: Nur dass man alle ∞^6 orthogonalen Transformationen von vier Veränderlichen durch die Formeln (99) und (100) darstellen kann, bedarf eines besonderen Beweises, der übrigens nicht schwierig ist. — Der in der Hauptsache von Cayley angegebene Satz 27. hat sein Anwendungsgebiet in der sogenannten Nicht-Euclidischen Geometrie, die man nicht mehr zu den elementaren Gegenständen wird rechnen können, auf deren Behandlung wir uns hier beschränkt haben; wir haben den Satz aber der Vollständigkeit zu Liebe wenigstens anführen wollen

Schliesslich wollen wir fortgeschrittenere Leser noch auf eine merkwürdige Verallgemeinerung mehrerer der abgeleiteten Sätze hinweisen: R. Lipschitz hat gezeigt, dass man auch die orthogonalen Transformationen von n Veränderlichen durch Formeln darstellen und zusammensetzen kann, die denen der Quaternionentheorie ganz ähnlich sind. (Untersuchungen über die Summen von Quadraten, Bonn 1886). Die Quaternionen erscheinen hier als ein einzelnes Glied in einer unendlichen Reihe ähnlicher Rechnungsmethoden, denen eine grosse Tragweite innewohnt.

Wegen der Litteratur unseres Gegenstandes verweisen wir auf die Artikel I, A, 4 und III, B, 3 der im Erscheinen begriffenen mathematischen Encyclopädie.

Inhalt.