Über die Bedeutung der Krystallflächenumrisse und ihre Beziehungen zu den Symmetrie-Verhältnissen der Krystallsysteme

von

Herrn Dr. **G. Werner,**

Assistent und Privatdocent an der kgl. polyt. Schule in Stuttgart.

Man hat in früherer Zeit öfters — und zum Theil geschieht diess noch heute — die verschiedenen Krystallformen lediglich oder doch hauptsächlich nach der mathematischen Gestalt der Umrisse der Flächen in ihrer idealen Form, d. h. derjenigen beschrieben und definirt, wo allen gleichwerthigen (physikalisch gleichen) Flächen, beziehungsweise Kanten gleiche räumliche Ausdehnung zukommt. Würfel heisst hiernach diejenige Krystallform, welche von sechs Flächen umschlossen ist, die sämmtlich gleich grosse Quadrate sind, das reguläre Octaeder ist nach jener Definition ein Polyeder, das von acht gleichen gleichseitigen Dreiecken begrenzt ist u. s. w. In ähnlicher Weise wurde die Länge der Kanten und die mathematische Beschaffenheit der Ecken an der idealen Form zur Beschreibung benützt. Bekanntlich finden sich aber in der Natur höchst selten, ja ohne Zweifel niemals solche Vorkommnisse von Krystallen, welche vollkommen die Umrisse der idealen Gestalt zeigten. Es dürfte sich sehr fragen, ob man ein Recht habe, alle die sogenannten »verzerrten« Formen für Abnormitäten oder Krankheits-Erscheinungen zu erklären, wie ja eigentlich durch den Ausdruck »Verzerrung« geschieht, und als normale Form eine Krystallform aufzustellen, welche wohl nie in der Natur gefunden wird. Wollte man aber auch kein Gewicht darauf legen, dass jene Bezeichnung und Beschreibung der Krystallformen, welche die Umrisse der Flächen an der idealen Gestalt in ihrer mathematischen Bedeutung angibt, hinsichtlich des angeführten Gesichtspunctes auf die in Wirklichkeit vorkommenden einfachen Krystalle meistens gar nicht anwendbar ist, so muss man doch jedenfalls zugeben, dass es zum Mindesten unpractisch erscheint, den Anfänger in der Krystallographie vorzugsweise an die Flächenumrisse der einfachen, in's Gleichgewicht der Flächen gesetzten Krystallgestalten zu gewöhnen, da er mit Hülfe dieser Merkmale nicht im Stande ist, die Körper wieder zu erkennen, wenn sie in Combinatiou mit einander vorkommen. Nur die Lage, beziehungsweise die Neigung einer Fläche gegen die andere, nicht ihr Umriss kann unter allen Umständen zur Bestimmung des Körpers, dem sie angehört, dienen.

Mit all diesem soll indessen nicht gesagt werden, dass das Entlehnen mathematischer Ausdrücke für die krystallographischen Bezeichnungen durchaus unstatthaft sei; man kann im Gegentheil einen ganz ausgezeichneten, ja in gewissem Sinne unersetzlichen Gebrauch von den mathematischen Bezeichnungen machen, wenn man sie nur sozusagen symbolisch gebraucht, d. h. wenn man sich stets erinnert, dass an die Stelle des Begriffs mathematischer Gleichheit der der physikalischen Gleichheit tritt. Man darf also z. B. wohl von einem Quadrat sprechen, muss aber darunter eine solche rechtwinklige vierseitige Figur verstehen, deren 4 Seiten physikalische Gleichheit haben. Dann kann die Figur ein Oblongum werden im mathematischen Sinne des Worts, sie bleibt dennoch ein krystallographisches Quadrat und ein Parallelepiped, das von lauter solchen physikalisch gleichen oblongen Quadraten — man verzeihe mir diese unmathematische Bezeichnung — eingeschlossen ist, bleibt unter allen Umständen ein krystallographischer Würfel.

Obwohl nun die Flächenumrisse der Krystallformen, auch wenn sie in dem eben angeführten Sinne bezeichnet werden, nur einen untergeordneten Werth haben, weil sie sich ändern, sobald ein weiterer Körper durch Combination hinzutritt, so dürfte es sich dennoch verlohnen, diese Flächenumrisse genauer zu untersuchen und namentlich durch die verschiedenen Umwandlungen hindurch zu verfolgen, welche sie bei ungleichmässiger räumlicher Ausdehnung der Flächen einer einfachen Form, insbesondere aber bei Combinationen erleiden, und zu untersuchen, ob und welche Gesetzmässigkeiten in dieser Beziehung aufgefunden werden können. Wir wählen zunächst beispielsweise die Körper des regulären Systems. Man kann hierbei für den Umriss der einzelnen Flächen eines Körpers dreierlei Fälle unterscheiden, nämlich den Umriss der Fläche 1) bei der einfachen idealen Gestalt, 2) bei Combinationen mit verschiedenen anderen Körpern, 3) bei den sog. Verzerrungen, d. h. wenn zu der Veränderung des ursprünglichen Flächenumrisses durch Combinationen auch noch die durch ungleiche räumliche Ausdehnung der verschiedenen Flächen gleicher Qualität hinzutritt. Zunächst wollen wir der einfacheren Anschauung wegen nur die zwei erstgenannten Fälle in's Auge fassen, wobei dann den Bezeichnungen der Umrisse zugleich ihre mathematische Bedeutung bleibt, ohne dass die krystallographische sich aufhöbe.

Würfel. — Die Fläche des einfachen Würfels ist ein Quadrat, also eine Figur mit vier gleichen Seiten und vier gleichen Winkeln, eine Figur, welche eine vierfache Symmetrie zeigt, nämlich um zwei Linien, welche durch den Mittelpunct der Figur gehen und parallel sind zu den Seiten des Quadrats, und um zwei Linien, welche die eben genannten Symmetrallinien im Mittelpunct unter Winkeln von 45° schneiden. Werden die Ecken des Würfels durch die Flächen des regulären Octaeders abgestumpft, so wird die Würfelfläche zu einem Achteck, in welchem die ursprünglichen Quadratseiten unter sich gleich bleiben, die vier neuen Seiten ebenfalls unter sich, und die 8 Winkel unter sich gleich (= 135°) sind. Rücken die Octaederflächen näher und näher zusammen, so dass die Würfelfläche kleiner und kleiner wird, so wird letztere schliesslich, indem je zwei Octaederflächen sich berühren, zu einem Quadrat, das zwar noch dieselben Symmetrallinien hat, wie das ursprüngliche, aber um 45° gegen dasselbe gedreht ist. In der Combination des Würfels mit dem Granatoeder bleibt die Würfelfläche quadratisch, nur wird sie um so kleiner, je mehr die Granatoederflächen an Umfang zunehmen, und in der Combination mit Octaeder und Granatoeder zugleich erscheint wieder das beschriebene Achteck. Das Hinzutreten eines Leucitoides zum Würfel ändert den Flächenumriss des letzteren in gleicher Weise, wie das Octaeder, das eines Pyramidenwürfels wie das Granatoeder ab; und Combinationen mit mehreren dieser Körper zugleich liefern ebenfalls keine neue Abänderung am Umriss der Würfelfläche. Anders ist es, wenn der Würfel sich mit einem Pyramidenoctaeder oder einem Achtundvierzigflächner combinirt. Die quadratische Würfelfläche wird alsdann zunächst zum Zwölfeck, in welchem die vier ursprünglichen Seiten gleich und die acht neuen Seiten unter sich gleich sind. Unter den zwölf Winkeln sind die vier in der Gegend der ursprünglichen Quadratecken gleich, die acht übrigen ebenfalls unter sich gleich. Je mehr sich die Flächen der genannten Körper auf Kosten der Würfelflächen vergrössern, desto mehr nähert sich die Gestalt des Zwölfecks der eines Achtecks, in welchem aber im Gegensatz zu dem oben beschriebenen Achteck die acht Seiten gleich, dagegen die Winkel nur je zu 4 und 4 gleich sind. Die Combination des Würfels mit einem Achtundvierzigflächner (oder einem Pyramidenoctaeder) und dem Octaeder (oder einem Leucitoid) gibt zunächst ein Sechszehneck mit 4 gleichen, 8 gleichen und wieder 4 gleichen Seiten und mit je zu 8 und 8 gleichen Winkeln, hernach, indem die ursprünglichen Quadratseiten verschwinden, ein Zwölfeck, das mit dem vorhin beschriebenen Zwölfeck zwar gleiche Symmetrieverhältnisse zeigt, aber gegen dasselbe um 45° gedreht ist.

Überschaut man die ganze Reihe der beschriebenen Figuren, so sieht man leicht ein, dass jene vierfache Symmetrie, welche oben für das erste Quadrat angegeben wurde, auf alle diese Figuren passt. Man kann kurz sagen, mit Ausnahme jener acht Puncte der Peripherie des Polygons, welche auf den 4 Symmetrallinien selbst liegen, lassen sich immer acht Puncte auf der Peripherie angeben, welche unter sich gleiche Lage zu den Symmetrallinien haben. Die Reihe der Figuren, welche die Würfelfläche unter verschiedenen Umständen zeigt, hätte sich leicht noch vermehren lassen; es liesse sich z. B. bei der Combination von Würfel mit Octaeder und zwei verschiedenen Pyramidenoctaedern oder Achtundvierzigflächnern ein Vierundzwanzigeck als Umriss der Würfelfläche denken u. s. w.; aber man sieht leicht ein, dass unter allen Umständen die Figur, welche die Würfelfläche zeigt, dem ausgesprochenen vierfachen Symmetriegesetz unterworfen ist.

Will man eine Bezeichnung suchen, die für alle jene Figuren passt, welche die Würfelfläche unter verschiedenen Umständen annimmt, und die zugleich jene vierfache Symmetrie ausdrückt, so wird man kaum eine passendere als die einer viergliedrigen Figur finden (wobei wir unter „Gliedern« die Elemente des Umrisses, Seiten und Ecken, verstehen).

Die Umständlichkeit, mit der wir die in Rede stehenden Verhältnisse am Würfel durchgegangen haben, gestattet uns, bei den übrigen Körpern etwas kürzer zu sein.

Octaeder. — Die Fläche des einfachen Octaeders ist ein gleichseitiges (und gleichwinkliges) Dreieck Dasselbe wird bei der Combination mit dem Würfel zuerst zu einem 3 + 3seitigen, gleichwinkligen Sechseck, dann wieder zu einem gleichseitigen Dreieck, das gegen das erstgenannte um 60° gedreht ist. Die Combination mit dem Granatoeder oder einem Pyramidenoctaeder lässt das ursprüngliche Dreieck unverändert; ebenso liefert die Combination mit einem Leucitoid (das dieselbe Veränderung wie der Würfel hervorbringt) oder mit mehreren der genannten Körper zugleich keine neue Figur. Dagegen machen die Pyramidenwürfel oder Achtundvierzigflächner aus dem ursprünglichen Dreieck zunächst ein Neuneck, das 6 + 3seitig und 6 + 3winklig ist (d. h. das sechs gleiche und wieder drei gleiche Seiten und sechs gleiche und wieder drei gleiche Winkel hat); hernach ein Sechseck, das zwar 6 gleiche Seiten, aber nur je zu drei und drei gleiche Winkel besitzt, mithin verschieden von den oben beschriebenen ist. Alle diese Figuren, die sich durch complicirtere Combinationen leicht noch vervielfältigen liessen, haben das Gemeinsame, dass sie um drei Linien symmetrisch sind, welche die Lothe von den drei Ecken des ursprünglichen Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten darstellen. Entweder je drei oder je zwei mal drei Glieder sind gleich und liegen symmetrisch zu diesen drei Linien und wir bezeichnen desshalb diese Figuren kurz als dreigliedrig.

Granatoeder. — Der Rhombus, welchen die Fläche des einfachen Granatoeders zeigt, wird bei der Combination mit Würfel oder Octaeder zu einem Sechseck, welches in beiden Fällen 4 + 2seitig und 4 + 2winklig ist, aber mit dem Unterschied, dass die beiden gleichen Winkel bei der Combination mit dem Würfel die zwei stumpfen, bei der Combination mit dem Octaeder die 2 spitzen Winkel des ursprünglichen Rhombus darstellen. Beide Sechsecke sind symmetrisch um die beiden Diagonalen des letzteren. Combination mit Würfel und Octaeder zugleich gibt ein 4 + 2 + 2seitiges und 4 + 4winkliges Achteck, hernach ein Rechteck, dessen Seiten jenen beiden Diagonalen parallel sind. Allen diesen Figuren, sowie denjenigen, welche sich durch anderweitige Combinationen des Granatoeders noch auffinden lassen, ist eine doppelte Symmetrie, nämlich um die beiden Diagonalen des ursprünglichen Rhombus, gemein; ausser dieser haben sie keine Symmetrie und wir nennen sie desshalb am passendsten zweigliedrig; denn zum Mindesten sind je zwei Glieder einander gleich.

Leucitoide. — Am einfachen Leucitoeder (Leucitoid des Leucits, Analcims, Granats), wie an jedem Leucitoid, sind die Flächen Deltoide, symmetrische Vierecke, an denen nur zwei und zwei anliegende Seiten gleich sind, während von den vier Winkeln die beiden zwischen je zwei ungleichen Seiten liegenden einander gleich, die zwei andern diesen, sowie unter sich ungleich sind. Die Combination mit dem Würfel gibt zuerst ein symmetrisches Fünfeck, dann ein gleichschenkliges Dreieck, ebenso die mit dem Octaeder; die mit beiden zugleich ein 2 + 2 + 1 + 1seitiges, aber symmetrisches (2 + 2 + 2winkliges) Sechseck oder, wenn Würfel oder Octaeder stark vorherrschen, ein 2 + 1 + 1seitiges, aber symmetrisches Viereck. Jede von beiden Figuren hat ein Paar paralleler, aber nicht gleicher Seiten. In Combination mit dem Granatoeder ist die Leucitoederfläche ein 2 + 2 + 2seitiges und 2 + 2 + 1 + 1winkliges Sechseck. Bei der Combination mit Würfel, Granatoeder und Octaeder zugleich erscheint ein Rechteck, von dessen vier Seiten aber nur zwei absolut gleich, die zwei andern unter sich zwar mathematisch gleich, aber qualitativ (physikalisch) verschieden sind; seine vier rechten Winkel sind zwar mathematisch gleich, jedoch von zweierlei physikalischem Werth, denn sie gehören verschiedenen Ecken an und werden von physikalisch verschiedenen Kanten gebildet. Alle diese Figuren haben, wie man sieht, nur symmetrische Ausbildung zu beiden Seiten einer einzigen Symmetrallinie, der Längsdiagonale des ursprünglichen Deltoids. Von den Seiten und Winkeln sind die einen zu je zweien gleich, die andern einzig in ihrer Art; mit andern Worten: die Glieder gruppiren sich entweder zu zwei oder nur zu eins; d. h. sie sind zwei- und eingliedrig. Dasselbe gilt von allen anderen Figuren, die man durch anderweitige Combinationen des Leucitoeders auffinden kann. Ähnliche Figuren und jedenfalls dieselben Symmetrie-Verhältnisse zeigen die Flächen der übrigen Leucitoide.

Pyramidenwürfel und Pyramidenoctaeder. — Die Flächen dieser beiden Körper sind, wenn sie für sich ohne Combination auftreten, gleichschenklige Dreiecke und werden, mit andern Körpern combinirt, zu einfach symmetrischen Vierecken, Fünfecken, Sechsecken u. s. w. Deltoide werden z. B. die Flächen der Pyramidenwürfel, wenn sie untergeordnet am Octaeder, die der Pyramidenoctaeder, wenn sie untergeordnet am Würfel auftreten; in den umgekehrten Fällen entstehen symmetrische Vierecke mit einem Paar paralleler, aber ungleicher Seiten u. s. f. Es zeigen sich also hier dieselben Symmetrie-Verhältnisse, wie beim Leucitoeder, d. h. die Flächenumrisse sind zwei- und eingliedrig.

Achtundvierzigflächner. — Die Flächen eines einfachen Körpers dieser Art sind ungleichseitige Dreiecke, welche zwischen ihren Seiten und Winkeln keinerlei Symmetrie zeigen. Diese Symmetrielosigkeit ist auch charakteristisch für alle Figuren, welche aus jenen Dreiecken bei Combinationen mit andern Körpern entstehen (mit Würfel oder Octaeder ungleichseitige Vierecke oder Dreiecke, mit beiden zugleich ungleichseitige Drei-, Vier- oder Fünfecke u. s. w.). Jedes Glied (Seite oder Winkel) einer solchen Figur ist mit keinem andern gleich, steht also einzig da und die Flächenumrisse der Achtundvierzigflächner heissen daher eingliedrig.

Wir haben bis jetzt nur die Vollflächner berücksichtigt. Gehen wir zu den Halbflächnern über, so bemerken wir folgende Regeln: 1) Die Flächen eines Halbflächners haben denselben Charakter, was die Gleichheit oder Ungleichheit der Elemente ihres Umrisses betrifft, zeigen dieselben Symmetrie-Verhältnisse, wie die des Vollflächners, von dem er sich ableitet. (Das Tetraeder zeigt sich dreigliedrig, wie das Octaeder; ein Pyritoeder zwei- und eingliedrig, wie der Pyramidenwürfel, aus dem er durch Hemiedrie entstanden.) 2) Tritt an einem Halbflächner eine andere Krystallform in Combination auf, welche derselben Hemiedrie fähig ist, so behalten auch hier die Flächen den Charakter der Flächen des Vollflächners. (Die Pyramidentetraederflächen sind, mit dem Tetraeder verbunden, zwei- und eingliedrig, wie die Flächen des Leucitoids, aus dem sie sich ableiten. Die Achtundvierzigflächnerflächen behalten ihren eingliedrigen Charakter, wenn sie halbflächig am Tetraeder als Flächen eines gebrochenen Pyramidentetraeders, oder am Pyritoeder als Flächen eines gebrochenen Pyritoeders erscheinen.) 3) Erscheint dagegen an einem Halbflächner ein Vollflächner, welcher der betreffenden Hemiedrie nicht fähig ist, so wird letzterer hinsichtlich der Gleichheit seiner Glieder sozusagen degradirt, d. h. was viergliedrig war, wird am Halbflächner zweigliedrig, was zweigliedrig war, wird zwei- und eingliedrig u. s. w. (In Combination mit dem Tetraeder werden die Würfelflächen zweigliedrige Sechsecke, die Granatoederflächen zwei- und eingliedrige Fünfecke, die Pyramidenwürfelflächen eingliedrige Dreiecke u. s. w.)

Die bisherigen Betrachtungen galten zunächst nur für diejenigen Gestalten der einfachen Körper und Combinationen, an denen den Flächen von gleicher Qualität auch eine gleiche räumliche Ausdehnung zukommt. Dehnen wir nun aber unsere Betrachtungsweise auch auf die sogenannten Verzerrungen aus, d. h. auf Krystallformen von jener ungleichen räumlichen Ausdehnung der physikalisch gleichen Krystallelemente, wie wir sie in der Natur immer finden. Wir brauchen bloss die Voraussetzung zu machen, die schon weiter oben als in der Krystallographie giltig bezeichnet worden ist, dass Gleichheit der Krystallelemente, in unserem Fall zunächst Flächenelemente (Seiten, Winkel), nicht sowohl gleiche lineare oder überhaupt räumliche Ausdehnung als vielmehr gleiche Qualität, gleiche physikalische Beschaffenheit, mit einem Worte G l e i c h w e r t h i g k e i t, bedeutet. Die Granatoederfläche kann unter Umständen ein Sechseck von lauter Seiten verschiedener Länge sein; weil aber von den sechs Winkeln vier unter sich und wieder zwei unter sich gleich sind, so dass dadurch je zwei gegenüberliegende Seiten parallel werden und weil jene unter sich gleichen Winkel an physikalisch gleichen Ecken liegen und die den beiden gleichen Winkeln anliegenden vier Seiten physikalisch gleich sind, ebenso die beiden übrigen Seiten unter sich, so kann man immerhin die Fläche eine zweigliedrige heissen. So wird sich leicht verstehen, in welchem weiteren Sinne wir die Ausdrücke viergliedrig, dreigliedrig, zweigliedrig, zwei- und eingliedrig, eingliedrig gebrauchen, wenn nur die oben als mathematisch gleich beschriebenen Glieder auch bei mathematischer Ungleichheit physikalische Gleichheit besitzen. —

Was ergibt sich nun aus den bisherigen Betrachtungen? — Vor allem springt in die Augen, dass die Flächen der einzelnen Körper des regulären Krystallsystems gewissermassen alle übrigen Systeme andeuten, dass das reguläre System in der viergliedrigen Fläche seines Sechsflächners das viergliedrige, in der dreigliedrigen seines Achtflächners das dreigliedrige, der zweigliedrigen seines Zwölfflächners das zweigliedrige, der zwei- und eingliedrigen seiner Vierundzwanzigflächner das zwei und eingliedrige und in der eingliedrigen seiner Achtundvierzigflächner das eingliedrige System repräsentire. Ein mechanischer Druck senkrecht zu einer viergliedrigen, dreigliedrigen, zweigliedrigen u. s. w. Fläche des regulären Systems müsste eine solche Änderung in der Lagerung der Moleküle im Krystall hervorrufen, wie sie dem vier-, drei, zweigliedrigen u. s. w. System entspricht und die physikalische, z. B. optische Untersuchung müsste alsdann dieses Verhältniss bestätigen.

Jene Repräsentation der übrigen Krystallsysteme durch die Flächen des regulären ist nicht bloss Sache der Vorstellung, sie lässt sich gewissermassen körperlich vollziehen. Sobald nämlich irgend ein Krystall des regulären Systems auf eine viergliedrige, dreigliedrige u. s. w. Fläche gestellt wird, so hat man in Bezug auf die Vertheilung der gleichen Glieder des Krystalls (Flächen, Kanten, Ecken) nach rechts, links, vorn, hinten, oben, unten die Ordnung des betreffenden Systems hergestellt. Man wird sich hiervon leicht überzeugen, wenn man einen Krystall des regulären Systems der Reihe nach auf eine Fläche des Würfels des Octaeders, des Granatoeders, eines der dreierlei Vierundzwanzigflächner, eines Achtundvierzigflächners stellt. Ja, es kommt in der Natur gar nicht selten vor, dass Krystalle des regulären Systems, welche in einer dieser Stellungen aufgewachsen sind, den Charakter des entsprechenden Systems an sich tragen, indem sie hinsichtlich der räumlichen Ausdehnung der einzelnen Flächen viergliedrige, dreigliedrige, zweigliedrige Krystalle nachzuahmen scheinen. *

Suchen wir das bisher vom Standpunct des regulären Systems Gesagte auf die übrigen Systeme auszudehnen, so werden wir ähnliche Bestimmungen machen können, wie dort. Der Kürze wegen führen wir indessen die Resultate der Untersuchung nur tabellarisch auf, es wird keine Schwierigkeit haben, nach dem, was bisher gesagt wurde, den Sinn der folgenden Angaben zu verstehen.

Viergliedriges System:	Endfläche	viergliedrig.
	Beide quadrat. Säulen	zweigliedrig.
	4 + 4kant. Säulen	zwei- und eingliedrig.
	Beiderlei Octaide	zwei- und eingliedrig.
	Vierkantner	eingliedrig.
Dreigliedriges System:	Endfläche	dreigliedrig.
	Beide sechss. Säulen	zwei- und eingliedrig **
	6 + 6kantige Säulen	eingliedrig.
	Rhomboeder	zwei- u. eingliedrig. ***
	Dreikantner	eingliedrig.
(Sechsgliedr. System:	Endfläche	sechsgliedrig.
	Beide sechss. Säulen	zweigliedrig.
	6 + 6kant. Säulen	zwei- und eingliedrig.
	Dihexaeder	zwei- und eingliedrig.
	Sechskantner	eingliedrig.)
Zweigliedriges System:	Endflächen	zweigliedrig.
	Rhombsäulen	zwei- und eingliedrig. †
	Octaide (rhomb.)	eingliedrig.

* Vgl. A. Weisbach, über die Monstrositäten tesseral krystallisirender Mineralien. (Inaugural-Diss.) Mit 4 lithogr. Taf. Freiberg *1858*.

** Diejenigen Säulenflächen, welche die Zickzackkanten abstumpfen, sind rhomboidisch; dass sie als zwei- und eingliedrig gezählt werden müssen, soll weiter unten gezeigt werden. — Stellt man sich eine sechsseitige Säule, verbunden mit der Endfläche, vor, so darf man nicht vergessen, dass vom Standpunct des dreigliedrigen Systems die Kanten oben und unten an einer Säulenfläche physikalisch different sind.

*** Die Rhombenflächen der Rhomboeder sind nicht zweigliedrig, sondern nur zwei- und eingliedrig. Denn entweder sind die zwei oberen Kanten stumpf und die unteren scharf oder umgekehrt; es findet also zwischen oben und unten keine Symmetrie statt.

† Die Säulenflächen in Combinationen mit der Endfläche sind zwar Rechtecke, aber die 4 Winkel sind von zweierlei Qualität, weil an Ecken

Zwei- u. einglidr. System:	Schiefendflächen	zwei- und eingliedrig.
	Medianebene	zwei- u. eingliedrig. *
	Augitpaare oder Schiefrhombsäulen	eingliedrig.
Eingliedriges System:	Einfache Parallelflächenpaare	eingliedrig.

Man sieht, dass im viergliedrigen System das zweigliedrige, zwei- und eingliedrige und eingliedrige, im zweigliedrigen das zwei- und eingliedrige und eingliedrige, im zwei- und eingliedrigen das eingliedrige, endlich im dreigliedrigen das zwei- und eingliedrige und eingliedrige System repräsentirt ist. Während also das reguläre System durch die Mittelglieder des viergliedrigen und zweigliedrigen mit dem zwei- und eingliedrigen und dem eingliedrigen System verbunden wird, so vermittelt das dreigliedrige direct zwischen dem regulären und den beiden letztgenannten Systemen, wie denn auch weder das dreigliedrige System im viergliedrigen oder zweigliedrigen, noch diese in jenem repräsentirt sind.

Die gegenseitigen Beziehungen der einzelnen Krystallsysteme sind durch das Vorstehende in ein nicht uninteressantes Licht gestellt und wenn in der doppelten Stufenfolge vom regulären bis zum eingliedrigen System von einem zwischen dem zwei- und eingliedrigen und dem eingliedrigen liegenden (»diklinometrischen«) Krystallsystem nirgends Etwas angedeutet ist, so dürfte hierin wohl ein weiterer Beweis gegen die Aufstellung eines solchen Systems liegen. (Der Hauptbeweis liegt freilich darin, dass die Symmetrie-Verhältnisse dieses hypothetischen Systems selbst vollständig mit denen des eingliedrigen Systems zusammenfallen.) Ebenso ist die Existenz eines sechsgliedrigen Systems, als dessen Halbflächner die Körper unseres dreigliedrigen erscheinen müssten, durch unsere Betrachtungen unwahrscheinlich gemacht; denn es wäre dasselbe weder im regulären System repräsentirt, noch das reguläre im sechsgliedrigen und nur das in beiden, aber auf

---

von zweierlei Qualität gelegen. Daraus folgt, dass die Flächen jedenfalls nur zwei- und eingliedrig sind.

* Die Medianebene (Endfläche, senkrecht zur Orthodiagonale) stellt in der Regel ein Rhomboid, oder eine davon abgeleitete Form dar; dass diese als zwei- und eingliedrig gelten muss, wird unten nachgewiesen werden.

ganz ungleiche Weise repräsentirte dreigliedrige System würde dieselben mit einander verbinden. Da das dreigliedrige System in ganz analoger Weise, wie das viergliedrige aus dem regulären hervorgeht, so würde die Annahme eines eigentlichen sechsgliedrigen Systems die Möglichkeit der Existenz eines achtgliedrigen bedingen, welches sich zum viergliedrigen verhielte, wie das sechsgliedrige zum dreigliedrigen. Uns scheinen die sechsgliedrigen Formen eher die Rolle von (freilich eigenthümlich ausgeprägten) Zwillingsformen des dreigliedrigen Systems zu spielen.

Gehen wir zum regulären System zurück. In diesem sind, wie wir gesehen haben, die Flächen

des Sechsflächners	viergliedrig,
des Achtflächners	dreigliedrig,
des Zwölfflächners	zweigliedrig,
der Vierundzwanzigflächner	zwei- und eingliedrig.
der Achtundvierzigflächner	eingliedrig.

Es springt von selbst in die Augen, dass die Zahlen auf der einen Seite umsomehr zunehmen, jemehr sie sich auf der andern Seite vermindern, und es ist nicht zu verkennen, dass hierin eine gewisse Gesetzmässigkeit liege. Es gibt aber einen einfacheren Weg, dieselbe nachzuweisen. Die Peripherie eines Achtundvierzigflächners lässt sich in sechs Regionen eintheilen, deren jede 8 Flächen umfasst und die Stelle der Würfelfläche einnimmt; ebenso ordnen sich je 6 Flächen des Achtundvierzigflächners auf der Region einer Octaederfläche zusammen, je vier nehmen die Stelle einer Granatoederfläche ein und je zwei die irgend eines der dreierlei Vierundzwanzigflächner. Man kann in gewissem Sinn sagen, 8 eingliedrige Flächen seien mit einer viergliedrigen, 6 eingliedrige mit einer dreigliedrigen, vier mit einer zweigliedrigen und 2 mit einer zwei- und eingliedrigen äquivalent. Wollte man hiernach für die viergliedrigen Flächen die Zahl 8, für die dreigliedrigen die Zahl 6, für die zweigliedrigen 4, für die zwei- und eingliedrigen 2, für die eingliedrigen 1 als einen Coeffizienten der Gliederigkeit ansehen, so könnte man sagen: Für jeden Körper des regulären Systems ergibt sich als Product der Flächenzahl mit dem Gliedrigkeits-Coeffizienten seiner Flächen die Zahl 48, nämlich beim

Würfel	$6 \times 8 = 48$
Octaeder	$8 \times 6 = 48$
Granatoeder	$12 \times 4 = 48$
Leucitoide	
Pyramidenoctaeder	$24 \times 2 = 48$
Pyramidenwürfel	
Achtundvierzigflächner	$48 \times 1 = 48$

Ganz analoge Verhältnisse ergeben sich in den übrigen Systemen und man erhält so im viergliedrigen System die Zahl 16, im dreigliedrigen die Zahl 12, im zweigliedrigen die Zahl 8, im zwei- und eingliedrigen die Zahl 4, im eingliedrigen die Zahl 2 je als Product der Anzahl der Flächen eines einfachen Körpers und des Coeffizienten der Gliedrigkeit der betreffenden Fläche. Man überzeugt sich hiervon leicht, wenn man die Multiplication für die einzelnen Körper dieser Systeme vornimmt. Es stellt sich heraus, dass die Zahl, welche für eine viergliedrige Fläche charakteristisch ist, halb so gross ist, als die für das viergliedrige System u. s. w. — Nur in zwei Fällen könnte man bei der Bestimmung der Gliedrigkeitszahl in Zweifel kommen, nämlich im zwei- und eingliedrigen System bei der zur Orthodiagonale senkrechten Endfläche (Medianebene) und im dreigliedrigen System bei den Säulenflächen, welche die Zickzackkanten eines Rhomboeders abstumpfen. In beiden Fällen stellt die fragliche Fläche ein Polygon dar, welches lauter paarweise gegenüberliegende und (physikalisch) gleiche Seiten und paarweise gegenüberliegende gleiche Winkel, sonst aber keinerlei Regelmässigkeit, also keine eigentliche Symmetrie besitzt. Letzterer Umstand lässt die Fläche als eine eingliedrige erscheinen, während sie nach dem zuerst Angeführten doch für eine eingliedrige Fläche zu regelmässig erscheint. Obwohl nun diese Fläche nicht im eigentlichen Sinn zwei- und eingliedrig ist, müssen wir sie dennoch als den zwei- und eingliedrigen äquivalent rechnen; denn ihr Gliedrigkeits-Coefficient berechnet sich zu 2, als Quotient der Flächenanzahl in die für das System geltende Normalzahl. (Für den ersten der beiden genannten Fälle erhält man $^4/_2 = 2$, für den letzten $^{12}/_6 = 2$.)

Die als charakteristisch für die einzelnen Systeme genannten Zahlen (48, 16, 12, 8, 4, 2) werden für die hemiedrischen

Körper nur halb so gross. Das reguläre Tetraeder z. B. mit seinen 4 dreigliedrigen Flächen liefert die Zahl $4 \times 6 = 24$. Da diejenigen Körper, welche der betreffenden Hemiedrie nicht fähig sind, an einem Halbflächner vollflächig auftreten, so muss ihr Gliederzahl-Coeffizient halbirt sein, um die gleiche Zahl zu geben. Wir haben auch wirklich gesehen, dass in diesem Fall die viergliedrigen Flächen zweigliedrig, die zweigliedrigen zwei- und eingliedrig werden u. s. w., so dass dadurch der Gliedrigkeitscoeffizient gerade halbirt wird. Ein eigenthümlicher Fall tritt beim Octaeder ein, wenn es am Pyritoeder auftritt; da letzteres einer Hemiedrie angehört, der das Octaeder nicht fähig ist, so muss für die Octaederfläche der Gliedrigkeits-Coeffizient halbirt und die Fläche selbst aus einer dreigliedrigen eine halbdreigliedrige werden. Dieses Verhältniss äussert sich am Körper selbst darin, dass die Octaederfläche bei untergeordnetem Pyritoeder ein unsymmetrisches, nicht dreigliedriges, übrigens 3 + 3-seitiges und 3 + 3winkliges Sechseck darstellt. Letzteres verhält sich zum ursprünglichen Octaederdreieck ähnlich, wie ein Rhomboid oder überhaupt ein Polypon mit je zwei gegenüberliegenden gleichen Seiten und Winkeln zu einem Rechteck oder überhaupt einer entsprechenden zweigliedrigen Figur.

Unsere Betrachtungsweise wäre noch mancher interessanten Anwendungen fähig, wie z. B. auf die verschiedenen Arten von Halbflächnern im viergliedrigen Systeme. Wir beschränken uns jedoch auf die gegebenen Andeutungen. Die Gesetzmässigkeiten, welche wir aufgefunden haben, sind nichts Anderes, als eine der vielen Formen, unter welchen die allgemeinen krystallographischen Symmetrie-Gesetze zum Ausdruck kommen. Nicht die bald so, bald anders, je nachdem es dem Bedürfniss für die Vorstellung oder Berechnung angemessener ist, aufgestellten Axensysteme, sondern nur diese allgemeinen Symmetrie-Gesetze sind es, welche zur Definition, Beschreibung und Benennung der Krystallformen und der Krystallsysteme in erster Linie dienen müssen.