Über die Krystallgestalten des Quarzes und die trapezoëdrische Tetartoëdrie des hexagonalen Systems.

Von

Herrn Professor Dr. **A. Kenngott** in Zürich.

(Mit 3 Figuren.)

Als ich mich vor 16 Jahren in einem Aufsatze über die Gestaltengruppen der Krystallspecies (Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften, Band VI, 497 ff.) darüber aussprach, dass nach der allein richtigen Auffassung der trapezoëdrischen Tetartoëdrie des hexagonalen Systems die Krystallgestalten des Quarzes anders als bisher zu deuten wären, dass das als normal angenommene Prisma als diagonales aufzufassen wäre u. s. w., hatte ich die Absicht, die Krystallgestalten des Quarzes in einem späteren Aufsatze ausführlicher zu besprechen. Wie es jedoch bisweilen geht, drängen andere Arbeiten mehr und so wurde die Angelegenheit verschoben. Bei der grossen Bedeutung aber, welche der Quarz als Krystallspecies hat, finde ich es für zweckmässig, jetzt darauf zurück zu kommen, um zu zeigen, dass weder das als hexagonales normales Prisma angenommene ein solches ist, noch auch die als Grundgestalt angenommene Pyramide eine normale ist, sondern eine diagonale, und die aus ihr als Hemiëder hervorgehenden Rhomboëder ebenfalls diagonale Rhomboëder sind.

Diese Zeilen möchten momentan die Entgegnung hervorrufen, dass die Bestimmung der zahlreichen Gestalten des Quarzes bei der bisherigen Auffassungsweise nicht nachtheilig beeinflusst worden ist und dass es daher nicht nothwendig sei, eine so durchgreifende Veränderung in Vorschlag zu bringen, durch welche alle Gestalten ausser der äusserst seltenen Basisfläche anders als bisher aufzufassen sind. Ich selbst bin weit entfernt, bei einzelnen Krystallspecies die Grundgestalten anders gewählt sehen zu wollen, als sie von Anfang an gewählt worden sind, weil dadurch in der Regel die Kenntniss der Species nicht vermehrt wird; wenn ich dagegen für den Quarz eine andere Auffassung in Vorschlag bringe, so gehe ich von der Ansicht aus, dass die bisherige Auffassung dem Charakter des hexagonalen Systems widerspricht, weil die trapezoëdrische Tetartoëdrie in anderer Weise als bisher aufgefasst werden muss.

Alle Krystallographen stimmen darin überein, dass wie C. F. Naumann in seinem Lehrbuche der reinen und angewandten Krystallographie, Band I, S. 62 sagt, ein Krystallsystem der Inbegriff aller derjenigen Gestalten ist, welche bei gleicher Zahl und gleichem allgemeinen Neigungsverhältnisse der Coordinatebenen dasselbe allgemeine Grössenverhältniss der Achsen besitzen. Alle Krystallographen stimmen darin überein, dass wie C. F. Naumann ebendaselbst S. 352 sagt, das hexagonale System der Inbegriff aller möglichen Gestalten ist, deren geometrischer Grundcharakter durch vier Achsen ausgesprochen ist, von welchen sich drei gleiche in einer Ebene unter 60° schneiden, während die vierte auf ihnen rechtwinklig ist. Daraus geht unzweifelhaft hervor, dass eine jede hexagonale Krystallgestalt diese vier Achsen enthalten muss, wie es der allgemeine geometrische Grundcharakter des Systems erfordert, die Hauptachse und die drei gleichen Nebenachsen.

In gleicher Weise wird allgemein angenommen, dass die Achsen eines jeden Krystallsystemes, welche dasselbe bestimmen, durch den Mittelpunkt halbirt werden, dass der Mittelpunkt die Achsen in gleichlange Halbachsen theilt. Hierdurch unterscheiden sich die Achsen von eventuell angenommenen Zwischenachsen, bei denen eine ungleiche Theilung durch den Mittelpunkt in gewissen Fällen möglich ist. So werden im Tetraëder die trigonalen Zwischenachsen des tesseralen Systems ungleich getheilt, während keine tesserale Gestalt existiren kann, in welcher die drei Achsen des Systems durch den Mittelpunkt ungleich getheilt werden.

Wenn nun im hexagonalen Systeme trigonale Pyramiden vorkommen, so können dieselben nur dann als Gestalten des hexagonalen Systems gelten, wenn sie die drei Nebenachsen so enthalten, wie es in allen Systemen für die Achsen aller Gestalten angenommen werden muss, dass die Nebenachsen durch den Mittelpunkt halbirt werden. Der basische Hauptschnitt der trigonalen Pyramiden kann nur so sein, wie es Fig. 1 angibt, wodurch diese Pyramiden Hemiëder der normalen hexagonalen Pyramiden

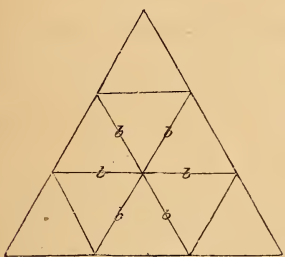

Fig. 1.

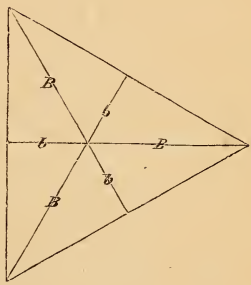

Fig. 2.

sind. Dass Naumann von diesen trigonalen Pyramiden annahm, ihr basischer Hauptschnitt sei der in Fig. 2 angegebene, wodurch die Nebenachsen durch den Mittelpunkt in zwei ungleiche Theile getheilt werden, widerspricht dem Charakter des hexagonalen Systems. Wenn er S. 358 von den trigonalen Pyramiden sagt: „in den bis jetzt beobachteten Varietäten dieser Gestalten verbinden die Nebenachsen die Eckpunkte der Basis mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Mittelkanten,“ so berücksichtigte er nicht den geometrischen Grundcharakter aller hexagonalen Gestalten, sondern nur den successiven Verlauf der Kenntniss der Quarzkrystalle. Weil bei den Krystallen des Quarzes die gewöhnlichste Combination des hexagonalen Prisma und der hexagonalen Pyramide gleicher Stellung als Combination $\infty P \,.\, P$ angenommen wurde, so mussten die trigonalen Pyramiden desselben diagonal gestellt werden und aus diesem Grunde gestattete er bei diesen Pyramiden eine unrichtige Stellung. Diese kann aber nicht angenommen werden, weil sie dem Charakter des Systems widerspricht und desshalb muss die bisher angenommene Combination $\infty P . P$ diagonal gestellt und als Combination $\infty P2 . P2$ angesehen werden. Was von den trigonalen Pyramiden in Betreff der ungleichen Theilung der Nebenachsen zugelassen wurde, bezieht sich auch auf die trigonalen Prismen, die ditrigonalen Prismen und die trigonalen Trapezoëder, sie müssen sämmtlich anders gedeutet werden. Wir vermissen auch bei Naumann bei der Berechnung der bezüglichen Gestalten die sonst nothwendige Angabe der ungleichen Achsenhälften, während im tesseralen Systeme die relativen Längen von t und T der tetraëdrischen Hemiëder angegeben wurden.

In der Überzeugung, dass die obige Auseinandersetzung genügt zuzugeben, dass die bisherige Betrachtung der trapezoëdrischen Tetartoëdrie dem Charakter des Systems widerspricht, weil sie ungleich getheilte Nebenachsen erfordert, eine solche ungleiche Theilung der Achsen nicht zulässig ist, hier so wenig, wie in irgend einem anderen Systeme, so will ich im Nachfolgenden in möglichster Kürze die trapezoëdrische Tetartoëdrie entwickeln und die zur Berechnung nöthigen Formeln angeben, am Schlusse endlich angeben, nach welchen Formeln die bisherigen Symbole der Quarzgestalten für die richtige Auffassung umzugestalten sind.

Aus einer dodekagonalen Pyramide mPn entstehen durch Herrschendwerden der abwechselnden Flächen hexagonale Trapezoëder und die beiden Hemiëder desselben Holoëders werden als ein linkes und ein rechtes Trapezoëder unterschieden. Bezeichnet man durch Zahlen die 24 Flächen einer dodekagonalen Pyramide

1, 2; 3, 4; 5, 6; 7, 8; 9, 10; 11, 12;
13, 14; 15, 16; 17, 18; 19, 20; 21, 22; 23, 24;

so liegen je zwei Flächen 1, 2; 3, 4; 5, 6 u. s. w. paarweise über den Flächen einer eingeschriebenen normalen hexagonalen Pyramide und es liegen die Flächen 1, 3, 5, 7, 9, 11 links an den diagonalen Endkanten, dagegen die Flächen 2, 4, 6, 8, 10, 12 rechts. In gleichem Sinne liegen die Flächen 14, 16, 18, 20, 22, 24 links und die Flächen 13, 15, 17, 19, 21, 23 rechts. Durch Herrschendwerden der abwechselnden Flächen entstehen die beiden hexagonalen Trapezoëder:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & 11 & \\ & 14 & & 16 & & 18 & & 20 & & 22 & & 24 \\ \hline & 2 & & 4 & & 6 & & 8 & & 10 & & 12 \\ 13 & & 15 & & 17 & & 19 & & 21 & & 23 & \end{array}$$

das eine wird von allen links liegenden, das andere von allen rechts liegenden Flächen gebildet und es sind daher die Symbole $l\frac{mPn}{2}$ und $r\frac{mPn}{2}$ gegeben worden. Die Nebenachsenendpunkte liegen in sechs abwechselnden gleichen Seitenkanten, welche die normalen heissen mögen, dieselben halbirend und die anderen sechs abwechselnden gleichen Seitenkantenlinien werden durch die Endpunkte der rhombischen Zwischenachsen halbirt; diese Seitenkanten mögen die diagonalen Seitenkanten heissen.

In jedem durch die vertikalen Hauptschnitte gebildeten Sextanten liegen zwei an einer diagonalen Seitenkante anliegende Flächen, und wenn von diesen sechs Flächenpaaren eines hexagonalen Trapezoëders drei abwechselnde herrschend werden, so entsteht ein trigonales Trapezoëder als Hemiëder des hexagonalen Trapezoëders. Auf diese Weise entstehen aus dem linken hexagonalen Trapezoëder $l\frac{mPn}{2}$ die beiden linken trigonalen Trapezoëder $l\frac{mPn}{4}$ und $l\frac{mP'n}{4}$, das eine durch die Flächen

$$\begin{array}{cccccc} 1 & & 5 & & 9 & \\ & 14 & & 18 & & 22 \end{array}$$

das andere durch die Flächen

$$\begin{array}{cccccc} 3 & & 7 & & 11 & \\ & 16 & & 20 & & 24 \end{array}$$

Aus dem rechten hexagonalen Trapezoëder $r\frac{mPn}{2}$ entstehen in gleicher Weise die beiden rechten trigonalen Trapezoëder $r\frac{mPn}{4}$ und $r\frac{mP'n}{4}$, von denen das eine durch die Flächen

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & & 6 & & 10 \\ 13 & & 17 & & 21 & \end{array}$$

das andere durch die Flächen

4 8 12
15 19 23

gebildet wird.

Die Kantenwinkel der trigonalen Trapezoëder $\frac{mPn}{4}$ werden durch nachfolgende Formeln berechnet, wobei mit X die Endkanten, mit Y die kürzeren schärferen Seitenkanten und mit Z die längeren stumpfen Seitenkanten (die diagonalen der hexagonalen Trapezoëder) bezeichnet sind.

$$\cos X = \frac{2m^2a^2(n^2-n+1)-3n^2b^2}{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} X = \frac{ma\sqrt{3}\,.\,\sqrt{n^2-n+1}}{\sqrt{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2}}$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} X = \frac{\sqrt{m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2}}{ma\sqrt{3}\,.\,\sqrt{n^2-n+1}}$$

$$\cos Y = -\frac{2m^2a^2(2n^2-2n-1)-3n^2b^2}{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} Y = \frac{\sqrt{3}\,.\,\sqrt{m^2a^2+n^2b^2}}{\sqrt{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2}}$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} Y = \frac{ma(2n-1)}{\sqrt{3}\,.\,\sqrt{m^2a^2+n^2b^2}}$$

$$\cos Z = -\frac{2m^2a^2(4n-n^2-1)-3n^2b^2}{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} Z = \frac{\sqrt{3}\,.\,\sqrt{m^2a^2(n-1)^2+n^2b^2}}{\sqrt{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2b^2}}$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} Z = \frac{ma(n+1)}{\sqrt{3}\,.\,\sqrt{m^2a^2(n-1)^2+n^2b^2}}$$

Wird das Gesetz der trapezoëdrischen Tetartoëdrie auf die anderen holoëdrischen Gestalten übertragen, so resultiren die normalen trigonalen Pyramiden $\frac{mP}{2}$ und $\frac{mP'}{2}$ als Hemiëder der normalen hexagonalen Pyramiden mP, wenn in $\frac{mPn}{4}$ $n = 1$ gesetzt wird. Für die Berechnung der Kantenwinkel ergeben sich nachfolgende Formeln, wenn die Endkanten mit X und die Seitenkanten mit Z bezeichnet werden.

$$\cos X = \frac{2m^2a^2 - 3b^2}{4m^2a^2 + 3b^2} \qquad \cos {}^1\!/_2 X = \frac{ma\sqrt{3}}{\sqrt{4m^2a^2 + 3b^2}}$$

$$\operatorname{tang} {}^1\!/_2 X = \frac{\sqrt{m^2a^2 + 3b^2}}{ma\sqrt{3}}$$

$$\cos Z = -\frac{4m^2a^2 - 3b^2}{4m^2a^2 + 3b^2} \qquad \cos {}^1\!/_2 Z = \frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{4m^2a^2 + 3b^2}}$$

$$\operatorname{tang} {}^1\!/_2 Z = \frac{2ma}{b\sqrt{3}}$$

Wird n = 2 gesetzt, so ergeben sich aus den diagonalen hexagonalen Pyramiden mP2 die diagonalen Rhomboëder $\frac{mP2}{2}$ und $\frac{mP'2}{2}$ als parallelflächige Hemiëder, was der doppelte Theilungsstrich andeutet, und für die Kantenwinkel gelten nachfolgende Formeln, bei denen mit X die Endkanten und mit Z die Seitenkanten bezeichnet werden.

$$\cos X = \frac{m^2a^2 - 2b^2}{2(m^2a^2 + b^2)} \qquad \cos {}^1\!/_2 X = \frac{ma\sqrt{3}}{2\sqrt{m^2a^2 + b^2}}$$

$$\operatorname{tang} {}^1\!/_2 X = \frac{\sqrt{m^2a^2 + 4b^2}}{ma\sqrt{3}}$$

$$\cos Z = -\frac{m^2a^2 - 2b^2}{2(m^2a^2 + b^2)} \qquad \cos {}^1\!/_2 Z = \frac{\sqrt{m^2a^2 + 4b^2}}{2\sqrt{m^2a^2 + b^2}}$$

$$\operatorname{tang} {}^1\!/_2 Z = \frac{ma\sqrt{3}}{\sqrt{m^2a^2 + 4b^2}}$$

Wird m = ∞, so ergeben sich die ditrigonalen Prismen $\frac{\infty Pn}{2}$ und $\frac{\infty P'n}{2}$ als Hemiëder der dodekagonalen Prismen ∞Pn; die Formeln für die Kantenwinkel sind nachfolgende, wobei mit Y die schärferen Kanten, mit Z die stumpferen (die diagonalen der Holoëder) bezeichnet werden.

$$\cos Y = -\frac{2n^2 - 2n - 1}{2(n^2 - n + 1)}$$

$$\cos {}^1\!/_2\, Y = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{n^2 - n + 1}} \qquad \operatorname{tang} {}^1\!/_2\, Y = \frac{2n - 1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos Z = -\frac{4n - n^2 - 1}{2(n^2 - n + 1)}$$

$$\cos {}^1\!/_2\, Z = \frac{(n - 1)\sqrt{3}}{2\sqrt{n^2 - n + 1}} \qquad \operatorname{tang} {}^1\!/_2\, Z = \frac{n + 1}{(n - 1)\sqrt{3}}$$

Wird $m = \infty$ und $n = 1$, so resultiren die normalen trigonalen Prismen $\frac{\infty P}{2}$ und $\frac{\infty P'}{2}$ als Hemiëder des normalen hexagonalen Prisma ∞P; wird $m = \infty$ und $n = 2$, so resultirt das diagonale hexagonale Prisma $\infty P2$ und $m = o$ ergibt die hexagonalen Basisflächen. Das Schema

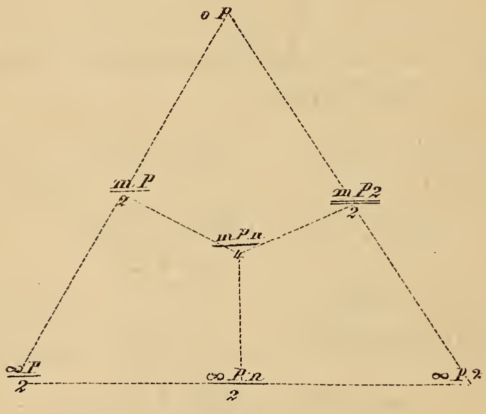

Fig. 3.

zeigt übersichtlich die Gestalten der trapezoëdrischen Tetartoëdrie, als deren Repräsentant der Quarz mit seinen bis jetzt bekannten zahlreichen Gestalten dasteht.

Wie im Eingange bemerkt wurde, muss die sonst angenommene Combination $\infty P \,.\, P$ als diagonal gestellt angenommen werden und ist die Combination $\infty P2 \,.\, P2$. Da aber, wie bekannt ist, die hexagonale Pyramide die Flächen parallelflächig hemiëdrisch entwickelt zeigt, so ist die Combination $\infty P2 \,.\, \frac{P2}{2} \,.\, \frac{P'2}{2}$ die gewöhnliche Form, an welcher die anderen in Combination auftreten.

Wenn früher für den Quarz das Achsenverhältniss $a : b : b = 11 : 10 : 10$ aufgestellt werden konnte, so ist jetzt dasselbe $a : b : b = 11 : 8{,}660255 : 8{,}660255$ oder $a^2 : b^2 : b^2 = 121 : 75 : 75$, wie es aus P2 hervorgeht. Da früher die gewöhnlich vorkommende Pyramide als P gewählt wurde, so ist es auch jetzt räthlich, sie als P2 zu wählen, zumal die Spaltbarkeit parallel diesen Flächen dies anzeigt. Durch diese Wahl lassen sich dann die früheren auf P mit dem Achsenverhältniss $a : b : b = 11 : 10 : 10$ gestützten Symbole mP, mP2, mPn und ∞Pn umrechnen, indem die früheren normalen hexagonalen Pyramiden mP, respective ihre rhomboëdrischen Hemiëder jetzt die Symbole mP2 erhalten, die früheren diagonalen hexagonalen Pyramiden mP2, respective ihre Hemiëder als trigonale Pyramiden jetzt die Symbole $\frac{3m}{4}P$ erhalten, so z. B. die frühere trigonale Pyramide $\frac{2P2}{2}$ jetzt das Symbol $\frac{\frac{3}{2}P}{2}$ erhält. Die früheren trigonalen Trapezoëder $\frac{mPn}{4}$ erhalten jetzt das Symbol $\dfrac{m\frac{(n+1)}{2n}P\frac{n+1}{2n-1}}{4}$, wonach z. B. die Zeichen $6P\frac{6}{5}$ und $4P\frac{4}{3}$ übergehen in $\frac{11}{2}P\frac{11}{7}$ und $\frac{7}{2}P\frac{7}{5}$ und die früheren Zeichen ∞Pn gehen über in $\infty P\frac{n+1}{2n-1}$. Dass durch eine solche Veränderung manche Zeichen weniger einfach, manche einfacher werden, ist selbstverständlich; davon aber hängt hier die Veränderung nicht ab, sie ist nothwendig, weil die bisherige Auffassung, wie ich gezeigt habe, zu Gestalten führt, welche dem geometrischen Charakter des hexagonalen Systems nicht entsprechen, weil sie ungleich getheilte Nebenachsen erfordern, was durchaus nicht zulässig ist.