Ueber die Temperaturen in dem Bohrloche zu Sperenberg und die darüber angestellten Rechnungen und Schlüsse.

Von

F. Henrich,

Oberlehrer am Realgymnasium in Wiesbaden.

Die interessanten Ausführungen der Herren Dunker und Hottenroth im 6. Hefte dieses Jahrbuchs (1877) in Betreff der Sperenberger Temperaturen veranlassen mich, noch einmal auf diesen Gegenstand zurückzukommen.

Im April 1876 schickte ich der Redaction dieser Zeitschrift eine Abhandlung, in der ich zeigte, dass die von Herrn Geh. Bergrath Dunker vor mehreren Jahren aufgestellte Gleichung, das Gesetz der Wärmezunahme nach dem Erdinnern für Sperenberg deswegen nicht ausdrücken könnte, weil die eine Constante dieser Gleichung nicht durch Rechnung gefunden, sondern der mittleren Temperatur für Sperenberg gleich gesetzt wurde, wiewohl doch diese mittlere Temperatur im Bohrloche selbst nirgends beobachtet worden ist. Ich stellte darauf zwei Gleichungen auf, von denen die erste die 8 ersten Beobachtungen, die von 200 zu 200 Fuss Tiefe gemacht worden sind, die zweite auch noch die neunte Beobachtung (in der Tiefe von 3390 Fuss) umfasste und behauptete, beide Gleichungen drückten das Gesetz der Wärmezunahme für Sperenberg aus.

In dem 6. Hefte dieses Jahrbuchs (1877) erschienen zwei Abhandlungen zugleich über denselben Gegenstand, die neue Gleichungen aus dem von mir angegebenen Gesichtspunkte enthielten. Herr Dunker geht von der Form:

$$T = \alpha + \beta(S - 700) + \gamma(S - 700)^2,$$

Herr Hottenroth von der Form:

$$T = \alpha + \beta S + \gamma S^2 \text{ aus.}$$

Beide Formeln unterscheiden sich nicht wesentlich. In der Dunker'schen Formel wird nur die Oberfläche in die Tiefe von 700 Fuss gewissermassen gerückt, was natürlich erlaubt ist. Herr Dunker findet folgende Gleichungen:

1) $T = 17{,}503 + 0{,}006691607\,(S - 700) + 0{,}00000078861\,(S - 700)^2$
2) $T = 17{,}2828 + 0{,}0077928\,(S - 700)$
3) $T = 17{,}275901 + 0{,}00799279\,(S - 700)) - 0{,}0000002028138\,(S - 700)^2$
4) $T = 17{,}486492 + 0{,}007450129\,(S - 700)$.

Die Gleichungen 1) und 2) wurden aus den 8 ersten Beobachtungen, die Gleichungen 3) und 4) aus allen 9 Beobachtungen berechnet.

Die Sum. der Fehlerquadr. für d. 8 Beobacht. aus Gl. 1) ist 1,0091
„ „ „ 8 „ „ 2) „ 1,1757
„ „ „ 9 „ „ 3) „ 1,2898
„ „ „ 9 „ „ 4) „ 1,4658.

Herr Hottenroth findet aus den 9 Beobachtungen die Gleichung:

5) $T = 11{,}5816 + 0{,}0082753775\,S - 0{,}0000002024828\,S^2$.

Die Summe der Fehlerquadrate für 9 Beobachtungen ist 1,289066.

Die Gleichungen 2) und 4) liefern dieselben Resultate und dieselbe Quadratsumme der Fehler wie die von mir früher aufgestellten 2 Gleichungen. Die Gleichung 3) liefert wieder dieselben Werthe wie die Gleichung 5) und beide geben dieselbe Quadratsumme der Fehler. Die kleine Abweichung 0,0008 in der Summe der Fehlerquadrate rührt wahrscheinlich nur daher, dass Herr Dunker auf 4 Stellen die Quadrate der Differenzen abrundete.

Die Summe der Fehlerquadrate aus Gl. 3) oder 5) berechnet, weicht von der Summe der Fehlerquadrate, die sich aus der von mir berechneten Gleichung ergibt, nur um 0,176 ab.

Obwohl die Gleichungen 3) und 5) dieselben Resultate liefern, so sind doch die daraus gezogenen Schlüsse der Herren Dunker und Hottenroth genau entgegengesetzt. Herr Dunker sagt:

„Die in der Formel 3) liegende Verzögerung der Wärmezunahme ist so ausserordentlich gering, dass sie nicht in Betracht kommen kann". So ausserordentlich gering? Keineswegs. — Sehr bedeutend! — So ausserordentlich bedeutend, dass die Annahme eines festen (kalten) Erdkernes, die zwar sonst auf schwachen Füssen steht, an den Sperenberger Beobachtungen bis jetzt noch eine starke Stütze hat, meint Herr Hottenroth. Wer hat nun Recht? Ohne Zweifel Herr Hottenroth, wenn man nur auf die Zahlen sieht, ohne Zweifel Herr Dunker, wenn man die Gründe erwägt, die dieser in's Feld führt. Es kann nicht geläugnet werden, dass Herr Dunker den Gegenstand aus vielen Gesichtspunkten sehr gründlich beleuchtet hat. Der von ihm in Aussicht gestellten zweiten Abhandlung darf man daher mit dem grössten Interesse entgegensehen. Ganz erschöpft hat er den Gegenstand gleichwohl nicht. Ich werde daher zu dem von ihm Gebotenen noch Einiges hinzufügen.

Wenn, wie in dem vorliegenden Falle, und bei so vielen physikalischen und mechanischen Problemen, eine Reihe von Beobachtungen vorliegt, in denen man ein Gesetz vermuthet, so trägt man die eine gegebene Grösse (hier die Tiefe) als Abscisse und die andere (hier die Temperatur) als Ordinate auf, verbindet die Punkte und sieht zu, welche von den bekannten Curven der gezeichneten am nächsten kommen mag. Glaubt man eine gefunden zu haben, so legt man sie der Rechnung zu Grunde und ermittelt vermittelst der Methode der kleinsten Quadrate die Constanten und den wahrscheinlichen Fehler. Ist der letztere derart, dass er der Erfahrung entspricht und dass jede andere Curve, die man zu Grunde legt, einen grösseren, wahrscheinlichen Fehler ergibt, so darf man annehmen, die angenommene Curve drücke das Gesetz, das den Beobachtungen zu Grunde liegt, vollkommen gut aus. Nun hat Herr Hottenroth zwar durch Annahme einer Parabel eine um 0,176 kleinere Quadratsumme erhalten, er hat aber nicht angegeben, dass der wahrscheinliche Fehler bei seiner Curve grösser ist als bei der meinigen. Wenn auch der Unterschied sehr klein ist, so ist das doch ein Fingerzeig, der nicht unbeachtet bleiben darf. Vergleicht man die Resultate der Hottenroth'schen Rechnung mit den meinigen, so sieht man, dass die grösste Differenz 0,2° R. in den Temperaturen beträgt, während bei HOTTENROTH wie bei mir die Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung bis zu 0,7° R. steigen. Darf man bei so bewandten Umständen, wenn man alles zusammenstellt, was für einen heissen Erdkern spricht, eine Formel für richtig halten, die zu einer Centralkälte führt, für die auch gar nichts spricht? Darf man es, wenn man weiss, dass gerade die eine Beobachtung in 3390 Fuss Tiefe es ist, die zu dieser auffallenden Formel führt, dass wenn man den 8 ersten Beobachtungen, die von 700 bis 2100 Fuss Tiefe, in Abständen von 200 zu 200 Fuss angestellt worden sind, die Formel $T = \alpha + \beta S + \gamma S^2$ zu Grunde legt, das γ einen positiven Werth erhält? Muss man nicht da allen Scharfsinn aufwenden, um die auffallende Thatsache zu erklären, anstatt einer Formel ein Gewicht beizulegen, das ihr auch aus vielen anderen Gründen gar nicht zukommt? Aber aus welchen Gründen denn? — Wer sagt denn, dass die Annahme einer Parabel sich den Beobachtungen am besten anschliesst? Doch Niemand anders als Herr HOTTENROTH allein. Hat er denn die anderen Curven alle untersucht? Nicht eine einzige mehr. Wie, wenn es aber noch andere gäbe, die eine ebenso grosse Summe der Fehlerquadrate lieferten, die sich also ebenso genau an die Beobachtungen anschliessen, ohne die fatale Eigenschaft zu haben, ein Maximum der Temperatur schon in 20453 Fuss zu liefern und schliesslich zu einer Centralkälte zu führen? Solche Formeln gibt es und ich werde unten eine mittheilen. Es ist aber wahrscheinlich, dass es Formeln gibt, die sich selbst noch besser anschliessen als die Parabel und zwar aus folgendem Grunde.

Wenn wir uns eine heissflüssige Kugel in ein kaltes Medium Millionen von Jahre lang versetzt denken, so können wir es nicht als von vornherein ausgemacht betrachten, dass die Temperaturzunahme von der Oberfläche nach dem Centrum proportional der Tiefe erfolgt. Wollen wir erfahren, nach welchem Gesetz sie erfolgt, so stehen uns zwei Wege offen, der Weg des Experimentes und der Weg, den die mechanische Wärmelehre bietet.

Der Weg des Experimentes ist von G. BISCHOF [1] und von PFAFF [2] betreten werden. Die Versuche von PFAFF sind die

---

[1] G. BISCHOF, die Wärmelehre des Erdinnern.

[2] F. PFAFF, allgemeine Geologie S. 305.

besseren. Betrachtet man die zwei Curven, die Pfaff aus seinen Versuchen construirt hat, so sieht man, dass die Temperaturzunahme in der Tiefe rascher erfolgt als in der Nähe der Oberfläche, und man kommt sogleich auf den Gedanken, dass eine Exponentialgleichung das Gesetz der Wärmezunahme ausdrücken muss.

Der Weg, den die Wärmetheorie bietet, ist von Fourier und von Thomson [3] betreten worden. Fourier stellte sich die Aufgabe: In einem festen Körper, der sich nach allen Richtungen hin in's Unendliche erstreckt, zu irgend einer Zeit die Variation der Temperatur von Punkt zu Punkt, und die in irgend einem Punkte wirklich vorhandene Temperatur unter der Voraussetzung zu bestimmen, dass die Temperatur zu einer anfänglichen Epoche zu beiden Seiten einer gewissen unendlich grossen Ebene zwei verschiedene constante Werthe hatte. Die Lösung ist folgende:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{V}{\sqrt{\pi k t}} e^{-\frac{xx}{4kt}}$$

$$v = v_0 + \frac{2V}{\sqrt{\pi}} \int^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-z^2} dz.$$

Darin bedeutet:

k, das durch die Wärmecapacität der Masseneinheit ausgedrückte Leitungsvermögen des festen Körpers,

V, die halbe Differenz der beiden anfänglichen Temperaturen,

v_0, das arithmetische Mittel dieser Temperaturen,

t, die Zeit,

x, den Abstand irgend eines Punktes von der Mittelebene,

v, die Temperatur des Punktes x zur Zeit t.

Die Lösung des von Fourier gestellten Problems lässt sich für eine gewisse Zeit ohne merklichen Irrthum auf eine Vollkugel von der Grösse der Erde anwenden, wenn man voraussetzt, dass die Erde vor etwa 1000 Millionen Jahren gleichmässig heiss war, und dann in einem gleichmässig kalten Raume sich abkühlen konnte. Construirt man aus der sich darstellenden Exponentialfunktion eine Curve, so sieht man, dass die Temperatur

[3] Thomson und Tait, Handbuch der theoretischen Physik 1. Bd. 2. Th. S. 441.

von der Oberfläche nach der Mitte für die ersten 100000 Fuss zwar nicht genau, aber nahezu der Tiefe proportional, um 0,0011 C. per Fuss etwa zunimmt. Unter dieser Tiefe beginnt die Temperatur langsamer zu steigen. Bei einer Tiefe von 400000 Fuss beträgt ihre Zunahme nur noch $^1/_{141}{}^0$ F. per Fuss. Dies steht zwar im Widerspruch mit den von Pfaff gefundenen Resultaten, allein die Pfaff'schen Versuche gehen nicht über 109° R. hinaus. Das folgern aber beide, dass die Temperatur nicht der Tiefe proportional zunimmt, und das ist der Grund, warum ich glaube, dass eine Exponentialfunktion vielleicht noch besser an die Beobachtungen sich anschliessen kann.

Ist nun bewiesen, dass die Parabelgleichung nimmermehr das Gesetz der Temperaturzunahme ausdrücken kann? Für diejenigen, die nur auf die Summe der Fehlerquadrate sehen, ist der Beweis noch nicht erbracht worden. Für diese soll er jetzt erbracht werden. Geht man von der Gleichung $T = a + bS + cS^2 + dS^3$ aus, so hat man zur Bestimmung der Constante a, b, c, d nach der Methode der kleinsten Quadrate die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
a \, . \, n + b\Sigma(S) + c\Sigma(S^2) + d\Sigma(S^3) &= \Sigma(T)\\
a\Sigma(S) + b\Sigma(S^2) + c\Sigma(S^3) + d\Sigma(S^4) &= \Sigma(ST)\\
a\Sigma(S^2) + b\Sigma(S^3) + c\Sigma(S^4) + d\Sigma(S^5) &= \Sigma(S^2T)\\
a\Sigma(S^3) + b\Sigma(S^4) + c\Sigma(S^5) + d\Sigma(S^6) &= \Sigma(S^3T)
\end{aligned}$$

In diesen Gleichungen ist:

$$\begin{array}{lll}
\lg n = 0{,}95424 & \lg\Sigma(S) = 4{,}16405 & \lg\Sigma(S^2) = 7{,}46018\\
\lg\Sigma(S^3) = 10{,}83229 & \lg\Sigma(S^4) = 14{,}26288 & \lg\Sigma(S^5) = 17{,}73335\\
\lg\Sigma(S^6) = 21{,}22874 & \lg\Sigma(T) = 2{,}34090 & \lg\Sigma(ST) = 5{,}59582\\
\lg\Sigma(S^2T) = 8{,}93479 & \lg\Sigma(S^3T) = 12{,}34176. &
\end{array}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
a &= + 11{,}419\\
b &= + 0{,}0084487\\
c &= - 0{,}000000241986\\
d &= + 0{,}00000000000256645.
\end{aligned}$$

Die Gleichung heisst mithin:

$$T = 11{,}419 + 0{,}0084487\,S - 0{,}000000241986 \, . \, S^2 + d \, . \, 0{,}00000000000256645 \, . \, S^3.$$

Sucht man den ersten und zweiten Differentialquotienten, so bemerkt man sogleich, dass diese Gleichung weder ein Maximum noch ein Minimum hat. Wenn mithin diese Gleichung auch noch eine gleich grosse Summe der Fehlerquadrate liefert wie die Parabelgleichung, so muss ihr der Vorzug gegeben werden. Stellen wir die Resultate tabellarisch zusammen, so erhalten wir:

Tiefe in Fussen	Beobachtete Temperatur (Réaum.)	Berechnete Temperatur	Differenz der berechneten und der beobachteten Temperatur	Temperaturzunahme für 200 Fuss nach der Beobachtung	Temperaturzunahme für 200 Fuss nach der Rechnung	Summe der Fehlerquadrate
700	17,275	17,215	— 0,060	1,505	1,614	0,004
900	18,780	18,829	+ 0,049	2,367	1,594	0,002
1100	21,147	20,423	— 0,724	0,363	1,576	0,524
1300	21,510	21,999	+ 0,489	1,767	1,557	0,239
1500	23,277	23,556	+ 0,279	1,464	1,539	0,078
1700	24,741	25,095	+ 0,354	1,763	1,520	0,125
1900	26,504	26,615	+ 0,111	2,164	1,503	0,012
2100	28,668	28,118	— 0,550			0,302
3390	37,328	37,379	+ 0,051			0,003
						1,289

Die Summe der Fehlerquadrate ist also genau so gross wie bei Hottenroth. Der wahrscheinliche Fehler 0,3424 ist grösser als bei Annahme einer geraden Linie, was wiederum darauf hinweist, dass die gerade Linie das Gesetz mindestens ebenso gut ausdrückt. Die Temperatur nimmt nach vorstehender Tabelle mit der Tiefe nicht stetig zu; sie wird von 200 zu 200 Fuss bis zu einer gewissen Tiefe kleiner, dann aber wieder grösser, erreicht kein Maximum und führt folglich zu keiner Centralkälte.

Die erste Constante der letzten Gleichung (11,419) ist kleiner als bei Hottenroth, was darauf hinweist, dass, wenn man die in 50 Fuss Tiefe bei Wasserabschluss beobachtete Temperatur 9,86° R. mit in Rechnung bringt, die Summe der Fehlerquadrate nach der letzten Gleichung kleiner wird als nach der Parabelgleichung. Warum wird diese Temperatur nicht mit in Rechnung gebracht? — Weil das Bohrloch bei 50 Fuss Tiefe in

Blechröhren stand, die die Wärme sehr gut leiten. In dieser Tiefe hatte man die mittlere Temperatur von Sperenberg erwartet, aber nicht gefunden, und Herr Dunker schreibt die Abweichung von der mittleren Temperatur allein der guten Wärmeleitungsfähigkeit der Verröhrung zu. In der „Zeitschrift für Berg-, Hütten- und Salinenwesen im preussischen Staate“ habe ich gezeigt, dass die Verröhrung allein nicht ausreicht, diese Eigenthümlichkeit zu erklären, dass vielmehr der Hauptgrund in Folgendem liegt: In dem Sperenberger Bohrloche wurde in 3390 Fuss Tiefe die Temperatur ohne Abschluss der Wassersäule 33,6° R., nach Abschluss der Wassersäule aber gleich 36,6° R. gefunden. Damit ist constatirt, dass in dieser Tiefe das Wasser zur Zeit der Messung eine 3° niedrigere Temperatur hatte als das Gestein. Hier wird jahraus jahrein dem Gestein Wärme entzogen, die nicht wieder ersetzt wird, und folglich muss das Gestein bis zu einer gewissen Tiefe — die Tiefe senkrecht zur Richtung des Bohrlochs verstanden — um eine gewisse Anzahl von Graden abgekühlt werden.

In der Nähe der Oberfläche ist es umgekehrt. Durch die Strömung steht hier das Gestein mit Wasser in Berührung, welches 3 bis 4° wärmer ist als das Gestein. Dem Gestein wird hier fort und fort Wärme zugeführt, und folglich muss seine Temperatur um eine gewisse Anzahl von Graden höher werden. Das ist der Hauptgrund, warum im Sperenberger Bohrloche die mittlere Temperatur nicht mehr angetroffen wird, obwohl sie doch einmal muss vorhanden gewesen sein. Durch diese Strömung findet eine fortwährende Änderung der Temperatur des Gesteins statt, die so lange dauert, bis eine vollkommene Ausgleichung stattgefunden hat, d. h. bis die Temperatur im Bohrloche an allen Stellen dieselbe geworden ist, was aber begreiflicherweise erst nach unendlich langer Zeit geschehen kann. Das ist auch der Grund, warum die erste Constante in den von mir aufgestellten Gleichungen nicht mit der mittleren Temperatur übereinstimmt. Es ist auch der Grund, warum die Temperaturänderung von 200 zu 200 Fuss immer kleiner wird, wenn man die letzte, neunte Beobachtung mit zur Rechnung heranzieht, während ohne diese eine Beobachtung die Temperaturänderung gerade umgekehrt erfolgt. Die neunte Beobachtung ist eben in 3390 Fuss Tiefe gemacht, wo fort und fort Wasser vorbeiströmt, das 3° kälter ist als das Gestein, das also dem Gestein mehr und mehr Wärme entzieht. In der Abhandlung für das Berg-, Hütten- und Salinenwesen habe ich die Ansicht ausgesprochen, dass in Folge dieser constanten Strömungen vielleicht die Gleichung

$$T = a + bS - cS^2 + dS^3$$

am besten den Beobachtungen sich anschliessen dürfte. Durch die mitgetheilte Rechnung ist dem nicht widersprochen worden.

Zum Schlusse muss ich noch darauf aufmerksam machen, dass Herr Hottenroth die in meinen Vorträgen über Geologie aufgestellte Behauptung — „dass in grossen Tiefen auch bei Abschluss einer Wassersäule das eingeschlossene Thermometer deswegen die Temperatur des Gesteins mit absoluter Genauigkeit nicht angeben könne, weil eine Wassersäule auf der oberen Kautschukhülle ruhe, die 2 bis 3° kälter ist als das umgebende Gestein" — dadurch zu entkräften sucht, dass er die Worte citirt, die ich in meiner Abhandlung vom Jahre 1876 in diesem Jahrbuch ausgesprochen habe: „Auf diese Weise konnte das Thermometer die Temperatur des Gesteins vollkommen annehmen". Meine Vorträge sind aber später erschienen als die Abhandlung, und nachdem ich mittlerweile mehr über den Gegenstand nachgedacht hatte, kam ich zu der Überzeugung, dass auch bei Abschluss einer Wassersäule die Temperatur des Gesteins in der Tiefe ein wenig zu niedrig angegeben werden dürfte. Wie viel zu niedrig, ob $^1/_{10}$ oder $^1/_{100}{}^0$, das kann ich natürlich nicht angeben, aber man muss das doch nicht als einen Widerspruch hinstellen wollen. Es wäre nur dann ein Widerspruch, wenn die Abhandlung später erschienen wäre als die Vorträge.