Ueber die Grundgestalten der Krystallspecies.

Von

A. Kenngott.

Es ist eine bekannte Thatsache, dass bei jeder Krystallspecies eine sogenannte Grundgestalt aufgestellt wird, von welcher alle anderen Krystallgestalten derselben abgeleitet werden, und die Ermittelung des Axenverhältnisses der Grundgestalt ist die Aufgabe der Krystallmessungen. Aus Allem, was man bis jetzt durch die Krystalle kennen gelernt hat, ergibt sich, dass die Messungsresultate an Krystallen derselben Species auf doppelte Weise Verschiedenheit in dem Axenverhältnisse der Grundgestalt ergeben, des Falles nicht zu gedenken, dass von verschiedenen Forschern eine verschiedene Grundgestalt aufgestellt wird. Entweder differiren die Zahlen durch die Ausbildung der Krystalle und durch die Güte der Messinstrumente oder durch die chemische Beschaffenheit. Die letztere kann auf die Zahlen des Axenverhältnisses der Grundgestalt insofern einen Einfluss haben, als sogenannte vicarirende Bestandtheile Winkeldifferenzen hervorrufen oder selbst Beimengungen bei sehr gut ausgebildeten Krystallen kleine Störungen bedingen, welche man in ihrer Wirkung nicht immer zu beurtheilen im Stande ist. Die Ausbildung aber der Krystalle und die Güte der Messinstrumente erzeugen sehr oft Unterschiede, deren relativer Werth sich in vielen Fällen schwierig beurtheilen lässt. Jedenfalls aber sieht man, dass das Axenverhältniss der Grundgestalt einer Species, welches wie die chemische Formel derselben der bestimmende morphologische Factor derselben sein soll, selten mit vollkommener Übereinstimmung gefunden werden kann. Abgesehen von diesen angedeuteten Schwierigkeiten, das richtige Axenverhältniss der Grundgestalt einer Krystallspecies ermitteln zu können, kommen noch verschiedene Fragen in Betrachtung, welche usuell keine Schwierigkeiten zu bereiten scheinen, deren Besprechung aber mir nicht unwichtig erscheint, obgleich sie in Lehrbüchern der Krystallographie oder Mineralogie wenig hervorgehoben werden, weil man in der Regel darüber übereinstimmende Ansichten zu haben scheint und sich in der Regel auch darüber mit einer gewissen Bestimmtheit auszudrücken pflegt.

Wenn für eine Krystallspecies eine Grundgestalt gewählt wurde, welche bei tesseralen Species das Oktaëder, bei quadratischen eine normale quadratische Pyramide, bei hexagonalen Species eine normale hexagonale Pyramide oder ein normales Rhomboëder ist, bei den anderen eine Pyramide überhaupt, so werden von der Grundgestalt die anderen bei der Species vorkommenden Gestalten insofern abgeleitet, als man annimmt, dass die Flächen der abgeleiteten Gestalten von den Flächen der Grundgestalt dadurch abgeleitet werden können, dass man das Axenverhältniss der Grundgestalt durch Ableitungscoëfficienten verändert und dieselben als rationale Zahlen annimmt. Diese Annahme, dass die Ableitungscoëfficienten rationale Zahlen sind, ist in der Krystallographie so feststehend, dass Niemand daran zweifelt, sie ist aber doch nur eine Annahme und gestützt auf diese Annahme werden die Ableitungscoëfficienten aus den Messungen als rationale Zahlen berechnet. Immerhin bleibt die Frage offen, ob es mathematisch zu erhärten ist, dass die Ableitungscoëfficienten rationale Zahlen sein müssen, wenn auch Niemand daran zweifelt. Naumann z. B. sprach sich in seinem Lehrbuche der reinen und angewandten Krystallographie, Band I, S. 75 darüber in folgenden Worten aus: „Ein sehr merkwürdiges, aber durchgängig bestätigtes Naturgesetz für die Ableitung ist es, dass diese Ableitungscoëfficienten jederzeit rationale Zahlen, irrationale Werthe dagegen gänzlich ausgeschlossen sind. Dieses Grundgesetz muss als das Ergebniss aller Ableitungsmethoden betrachtet werden, wie es denn insofern auch den Prüfstein derselben abgibt, in wiefern jede Methode da naturgemäss zu sein aufhört, wo sie genöthigt ist, irrationale Ableitungscoëfficienten einzuführen."

Ich zweifle keinen Augenblick an der Richtigkeit dieses Ausspruches, dass die Ableitungscoëfficienten rationale Zahlen sind, wogegen man zugeben muss, dass dieses Naturgesetz nicht auf einem mathematischen Beweise beruht. Eine Nothwendigkeit des Beweises liegt insofern nicht vor, als die Messungsresultate immer auf rationale Zahlen führen, nur könnte man in einzelnen Fällen meinen, dass man dem angenommenen Gesetze gemäss die Ableitungscoëfficienten so wählt, dass sie rationale Zahlen sind, auch wenn das Messungsresultat nicht ganz genau solche gibt, weil man dann die geringe Abweichung der Messung selbst zur Last legt.

Betrachtet man so die erste Frage als erledigt, so betrifft eine weitere Frage die Grundgestalt. Sind die Zahlen, durch welche die Axenlängen der Grundgestalten ausgedrückt werden, rationale oder irrationale Zahlen? Nach meiner Ansicht und gestüzt auf die bisherigen Messungsresultate glaube ich mit Bestimmtheit annehmen zu können, dass diese Zahlen irrationale sein müssen. Hierbei kommen nur die nicht tesseralen Species in Betracht, weil das Axenverhältniss des Oktaëders 1 : 1 : 1 weder für rationale noch irrationale Zahlen spricht, nur wie das Axenverhältniss a : a : a angibt, dass die drei Axen gleichlang sind. Die Zahlen dagegen, durch welche das Axenverhältniss der als Grundgestalten gewählten Pyramiden ausgedrückt wird, müssen im quadratischen und orthorhombischen Systeme irrationale sein, weil unter der Annahme, dass die Ableitungscoëfficienten rationale Zahlen sind, rationale Zahlen der Axenlängen nothwendig dazu führen müssten, das Oktaëder als abgeleitete quadratische oder orthorhombische Pyramide durch passende Ableitungscoëfficienten zu erhalten. Dass zufällig an quadratischen oder orthorhombischen Species solche Ableitungscoëfficienten nicht vorkommen würden, kann man nicht voraussetzen.

Wenn aber die Zahlen der Axenlängen bei quadratischen und orthorhombischen Grundgestalten irrationale sein müssen, so wird man es auch für wahrscheinlich halten können, dass in den klinoëdrischen Systemen die Axenlängen der Grundgestalten irrationale Zahlen erhalten müssen. Auch im hexagonalen Systeme wird dies anzunehmen sein, weil, wie eine spätere Betrachtung zeigen wird, rationale Zahlen auf eine unmögliche Form führen würden.

Kann man somit es als ein zweites Gesetz aussprechen, dass die Axenlängen der Grundgestalten auf irrationale Zahlen führen, so entsteht die dritte Frage: Ist die Wahl der Grundgestalt eine begrenzte oder liegen die Werthe der Axenlängen nicht tesseraler Grundgestalten zwischen gewissen Grenzen?

Im Allgemeinen nimmt man an, dass bei nicht tesseralen Species die Wahl der Grundgestalt einer Krystallspecies insofern willkürlich sei, als man entweder dieselbe unter den vorhandenen Gestalten auswählt, oder aus anderen vorkommenden Gestalten, welche nicht Grundgestalten sein können, die Grundgestalt berechnet. Auf diese Auffassungsweise hat die Berechnung der Krystallgestalten hingewiesen, weil es für diese nothwendig ist, eine Grundgestalt zu besitzen. Dass die Wahl der Grundgestalt eine willkürliche ist, ergibt sich schon daraus, dass bei einzelnen Species von verschiedenen Forschern verschiedene Grundgestalten angenommen wurden, wogegen sich nichts einwenden liess und nur aus praktischen Gründen sah man es gern, dass die zuerst für eine Species ausgewählte Grundgestalt beibehalten werde, damit keine Verwechselungen bei der Beschreibung der Species hervorgehen, die man auf diesem Wege am einfachsten vermeidet. Immerhin kam es oft genug vor, dass für dieselbe Species verschiedene Grundgestalten gewählt wurden.

Was dagegen die Zahlen betrifft, welche das Axenverhältniss der Grundgestalt ausdrücken, so findet man nothwendigerweise aus den Eingangs angeführten Gründen, dass sie nicht bei verschiedenen Forschern übereinstimmen oder dass derselbe Forscher nach der Qualität der Krystalle Abweichungen erhalten muss. Es ist auf diese Weise nicht möglich, für eine Species ein bestimmtes Axenverhältniss der Grundgestalt zu erhalten, welches, wie die chemische Formel den krystallographischen Charakter der Species bestimmt ausdrückt, denn es bleibt immer eine schwierige Sache, unter den differirenden Angaben eine vor den anderen zu bevorzugen. Man müsste darin übereinkommen, aus den differirenden Resultaten gleich guter Messungen ein mittleres Resultat zu entnehmen, welches das Axenverhältniss und die Winkel der Grundgestalt der Species ausdrücken würde. Es ist dieses Verfahren wie bei der chemischen Formel zu empfehlen, um den morphologischen Charakter der Species zu präcisiren, während bei einer umfassenden Monographie immerhin angegeben werden kann, welche Zahlen dieser oder jener Forscher für die Grundgestalt fand, gerade wie in einer solchen die verschiedenen Resultate der Analysen angegeben werden.

In diesem Sinne spreche ich von dem Axenverhältniss der Grundgestalten und bin der Ansicht, dass die anzugebenden Zahlen irrationale sind. Unentschieden bleibt es aber noch, welche Gestalt als Grundgestalt gewählt werden soll.

Wenn C. F. Naumann (Lehrbuch d. reinen u. angewandten Krystallographie, Band I, S. 254) beispielsweise vom quadratischen Systeme sagt, dass als geometrische Grundgestalt in diesem Systeme jede Gestalt gelten könne, deren Parameter das endliche Verhältniss a : 1 : 1 haben, so ist zunächst hier nicht von der Grundgestalt dieser oder jener quadratischen Species die Rede, sondern es soll dadurch nur darauf geführt werden, welche Gestalten sich überhaupt im quadratischen Systeme durch ihre Parameterverhältnisse aufstellen lassen. Bei der Ableitung der Gestalten aber geht er etwas mehr auf die Grundgestalt ein, immer aber noch nur insoweit, als es die allgemeine Darstellung quadratischer Gestalten erfordert. Er sagt S. 261, dass die Ableitungen aus einer der geometrischen Grundgestalten vorgenommen werden müssen, dass als solche aber nur die quadratischen Pyramiden von normaler Flächenstellung zu betrachten sind. Aus diesem Grunde wird irgend eine beliebige dergleichen Pyramide von unbestimmten Dimensionen zur Grundgestalt gewählt und mit P bezeichnet. In ihr ist das Verhältniss der halben Hauptaxe zur halben Nebenaxe wie a : 1. Diese Bestimmung ist für die Derivationslehre genügend, dagegen fügte er noch eine Erörterung bei, welche mit der oben erwähnten Ansicht, dass die Zahlen der Grundgestalt irrationale sind, im Zusammenhange steht. Er sagt: „Ob dieses Verhältniss rational oder irrational sei, darüber sind die Meinungen getheilt; Hauy, Weiss, Mohs u. A. drücken a als Quadratwurzel aus, während Breithaupt es wahrscheinlich zu machen gesucht hat, dass diese Zahl rational und jederzeit ein Multiplum des Coëfficienten $^1/_{720}$ sei, wobei entweder die Nebenaxe oder die Zwischenaxe zur Einheit angenommen wird. Wie dem aber auch sei, so ist die Beantwortung dieser Frage für die Selbständigkeit des Systems ganz gleichgiltig, denn die wesentliche Eigenthümlichkeit, mit welcher eine scharfe Grenze zwischen den Gestalten dieses Systems und jenen des Tesseralsystems gezogen ist, besteht in dem Gegensatze der einen Axe gegen die beiden anderen; ein Gegensatz, welcher zwar durch die Ungleichheit der Axen bedingt, aber von dem numerischen Charakter dieser Ungleichheit völlig unabhängig ist. Die um eine einseitig vorherrschende Richtung viergliedrig geordnete Symmetrie, als Folge jenes Gegensatzes, ist es, was dem Grundtypus aller tetragonalen (quadratischen) Gestalten ein so eigenthümliches Gepräge ertheilt, dass der Gedanke an einen Übergang in tesserale Gestalten gar nicht aufkommen kann."

Gerade diese letztere Äusserung steht nicht im Einklange mit der vorher ausgesprochenen Ansicht, dass es für die Selbständigkeit des Systems ganz gleichgiltig sei, ob die Zahlen der Axenlängen der Grundgestalt rational oder irrational sind. Sie können nicht rational sein, weil, wie ich oben bemerkte, rationale Ableitungscoëfficienten eine quadratische normale Pyramide einführen könnten, welche in den Kantenwinkeln mit dem Oktaëder übereinstimmte, das Oktaëder wäre. Man kann nicht behaupten, dass sich keine quadratische Species finden würde, welche eine solche Grundgestalt mit rationalen Zahlen der Axenlängen aufstellen liesse, um aus ihr das Oktaëder als Ableitungsgestalt zu erhalten. Sobald man theoretisch rationale Zahlen zulässig findet, kann auch ein rationaler Ableitungscoëfficient das Oktaëder hervorrufen. Es wäre eine Kleinigkeit, dies durch eine beispielsweise Berechnung zu beweisen.

Um die Ableitung der quadratischen Gestalten von der Grundgestalt zu lehren, bedarf man allerdings nur der Annahme des Axenverhältnisses a : 1 : 1, sobald es sich aber um die Grundgestalt einer Species handelt, darf man dieses Verhältniss nicht so wählen, dass a eine rationale Zahl ist, weil dann das Oktaëder als mögliche Gestalt in die Reihe der normalen Pyramiden fiele, wenn als Gesetz aufgestellt worden ist, dass die Ableitungscoëfficienten rationale Zahlen sind. Könnte das Oktaëder auf diese Weise in die Reihe normaler quadratischer Pyramiden fallen, dann könnte man ja auch dieses Oktaëder als Grundgestalt wählen, weil es sich ja nur darum handelt, aus der Reihe der normalen Pyramiden eine vorhandene als Grundgestalt zu wählen, oder eine nicht vorhandene, wenn sie zur Ableitung bequem erscheint. Ja selbst bei der Annahme, dass die Axenlängen der Grundgestalt durch irrationale Zahlen ausgedrückt werden müssen, ist nicht jedes irrationale Axenverhältniss möglich, wenn durch dasselbe das Oktaëder als eine diagonale quadratische Pyramide als Ableitungsgestalt hervorginge. So ist es unmöglich, dass eine quadratische Species das Axenverhältniss $a^2 : b^2 = 2 : 1$ hat. Die entsprechende Grundgestalt P ergibt die Endkantenwinkel $= 101^0\ 32'\ 13''$, die Seitenkantenwinkel $= 126^0\ 52'\ 12''$ und für diese würde $P\infty$ die End- und Seitenkantenwinkel gleich haben, das Oktaëder sein. Mit dem Axenverhältnisse $a^2 : b^2 = 2 : 1$, welches auf eine unmögliche quadratische Pyramide, auf das Oktaëder führt, sind auch Multipla und Submultipla desselben ausgeschlossen, welche dieselbe Ableitungsgestalt hervorrufen können. Wir ersehen zunächst aus diesem Beispiele, dass die Wahl der Grundgestalt nicht so ganz willkürlich ist, wie man gewöhnlich zu sagen pflegt, dass man vielmehr findet, diese Willkür sei insoweit zu beschränken, dass nie das Oktaëder als Ableitungsgestalt erscheinen könne. Analoge Verhältnisse ergeben sich im hexagonalen und im orthorhombischen Systeme.

Wenden wir uns an das hexagonale System, dessen Gestalten vier Axen zeigen, drei gleiche in einer Ebene liegende Nebenaxen, welche sich unter 60^0 halbiren und eine Hauptaxe, welche die Nebenaxen senkrecht schneidet, so wird als Grundgestalt eine hexagonale normale Pyramide gewählt, deren Flächen das Axenverhältniss $a : b : b$ oder $a : 1 : 1$ haben. Hier kommt in erster Linie die Frage zur Discussion, ob es überhaupt eine hexagonale normale Pyramide geben könne, in welcher die Hauptaxe gleiche Länge mit den Nebenaxen hat, gleichviel ob dieselbe als Grundgestalt gewählt werde oder nicht. Bei der grossen Verwandtschaft, welche das hexagonale System mit dem quadratischen zeigt, tritt diese Frage von selbst entgegen, im quadratischen Systeme muss die Hauptaxe eine andere Länge als die Nebenaxen haben, weil die Gleichheit das tesserale System erzeugt, während die Gleichheit der Länge der Hauptaxe und der Nebenaxen im hexagonalen Systeme als ein möglicher Fall erscheint.

Naumann (Lehrb. der reinen u. angewandten Krystallographie I. Band, S. 365) sagt bezüglich der Grundgestalt: „in der holoëdrischen Abtheilung dieses Systems kann nur irgend eine der hexagonalen Pyramiden von normaler Flächenstellung als Grundgestalt gelten, weil nur für sie das Verhältniss der Parameter insofern dem geometrischen Grundcharakter des Systems entspricht, inwiefern die beiden, in die Nebenaxen fallenden Parameter jeder Fläche gleich gross sind, während der dritte, in die Hauptaxe fallende Parameter grösser oder kleiner ist." Daraus geht natürlich hervor, dass die Längen der Hauptaxe und der Nebenaxen verschiedene sind. Dagegen sagt er sofort: „Die wesentliche Bedingung liegt jedoch mehr in der Gleichheit jener beiden als in der Ungleichheit dieses letzteren Parameters; denn allerdings kann eine hexagonale Pyramide existiren, in welcher die Hauptaxe den Nebenaxen gleich ist, ohne dass der Charakter des Systems nur im Geringsten modificirt würde. Wenn sich indess die Irrationalität der Grunddimensionen der verschiedenen Krystallreihen jedes einaxigen Krystallsystems bestätigen sollte, so ist es nicht wahrscheinlich, dass jene Pyramide wirklich vorkommen sollte, wie sehr sich ihr auch manche Pyramiden nähern mögen. Für unsere gegenwärtigen Betrachtungen ist übrigens die Beantwortung dieser und ähnlicher Fragen ganz gleichgiltig, indem wir allgemein irgend eine beliebige hexagonale Pyramide von normaler Flächenstellung der Ableitung zu Grunde legen, sie selbst mit P bezeichnen und das Verhältniss ihrer halben Hauptaxe zur halben Nebenaxe = a : 1 setzen."

In diesem letzten Punkte hatte Naumann ganz Recht, denn um die Ableitung zu lehren und die Formeln aufzustellen, ist die Beantwortung derartiger Fragen ganz gleichgiltig. Wenn aber einmal eine solche Frage in Anregung gebracht ist, so muss sie wenigstens insoweit beantwortet werden, als man sich darüber entscheidet, wie man den Fall aufgefasst wissen will. Jedenfalls hatte Naumann die Ansicht, dass dieser Fall nicht wahrscheinlich sei und ich glaube, dass wegen der vollständigen Analogie des quadratischen und hexagonalen Systems, welche sich in den Gestaltsverhältnissen, in den Gesetzen der Hemiëdrie und Tetartoëdrie und in den physikalischen Erscheinungen zeigt, auch in dieser Richtung eine Übereinstimmung anzunehmen, die mögliche Gleichheit der Hauptaxe und der Nebenaxen bestimmt auszuschliessen sei. Eine hexagonale normale Pyramide mit dem

Axenverhältnisse a : b = 1 : 1 würde die Endkantenwinkel = 135° 35′ 5″, die Seitenkantenwinkel = 98° 12′ 48″ haben, das daraus hervorgehende Rhomboëder würde die Endkantenwinkel = 98° 12′ 48″ haben und die daraus hervorgehende trigonale Pyramide hätte gleiche End- und Seitenkantenwinkel = 98° 12′ 48″. Die dieser hexagonalen normalen Pyramide entsprechende diagonale hätte die Endkantenwinkel = 138° 35′ 25″ und die Seitenkantenwinkel = 90°, das aus dieser hervorgehende diagonale Rhomboëder hat die Endkantenwinkel = 104° 28′ 39″. Ausser dem fraglichen und nicht wahrscheinlichen Axenverhältnisse a : b = 1 : 1, welches alle möglichen rationalen Axenverhältnisse durch die rationalen Ableitungscoëfficienten nach sich ziehen würde, sind noch die beiden Axenverhältnisse $a^2 : b^2 = 3 : 2$ und $= 2 : 1$ unmögliche. Wenn es auch zulässig ist, das Hexaëder des tesseralen Systems zu benützen, um darnach die Rhomboëder im Allgemeinen als spitze und stumpfe zu unterscheiden und zwar in derselben Weise, wie das Oktaëder benützt wird, um die quadratischen Pyramiden als spitze und stumpfe zu unterscheiden, so kann das Hexaëder in rhomboëdrischer Stellung eben so wenig eine hexagonale Krystallgestalt sein, wie das Oktaëder nicht als quadratische Pyramide angesehen werden kann.

Das Axenverhältniss $a^2 : b^2 = 3 : 2$ ergibt die normale hexagonale Pyramide mit dem Endkantenwinkel = 131° 48′ 36″ und mit dem Seitenkantenwinkel = 109° 28′ 16″, das daraus hervorgehende Rhomboëder ist das Hexaëder und die trigonale normale Pyramide, als Hemiëder jener normalen hexagonalen Pyramide, würde die Endkantenwinkel = 90°, die Seitenkantenwinkel = 109° 48′ 16″ haben. Die bezügliche diagonale hexagonale Pyramide würde die Endkantenwinkel = 134° 25′ 37″ und die Seitenkantenwinkel = 101° 32′ 13″ haben, ihr Hemiëder ein Rhomboëder mit dem Endkantenwinkel = 95° 44′ 21″ sein.

Ist so das Axenverhältniss $a^2 : b^2 = 3 : 2$ ein unmögliches, so ist auch das Axenverhältniss $a^2 : b^2 = 2 : 1$ ein unmögliches, weil dieses gleichfalls auf das Hexaëder als hexagonale Gestalt führt. Die darauf basirende normale hexagonale Pyramide hat den Endkantenwinkel = 129° 31′ 16″ und den Seitenkantenwinkel = 117° 2′ 8″, ihr Hemiëder ist als Rhomboëder ein solches mit dem Endkantenwinkel = 87° 47′ 3″, als trigonale

Pyramide eine solche mit dem Endkantenwinkel = 87° 47′ 3″ und dem Seitenkantenwinkel = 117° 2′ 8″. Die jener normalen Pyramide entsprechende diagonale hexagonale Pyramide hat den Endkantenwinkel = 131° 48′ 36″, den Seitenkantenwinkel = 109° 28′ 16″ und ihr Hemiëder ist das Hexaëder.

Stellt sich somit das Axenverhältniss a : b = 1 : 1 oder $a^2 : b^2 = 1 : 1$ als gelinde ausgedrückt unwahrscheinlich, und stellen sich die Axenverhältnisse $a^2 : b^2 = 3 : 2$ und 2 : 1 als unmögliche heraus, so kommen noch zwei andere in Frage. Wenn nämlich im quadratischen Systeme die quadratischen Pyramiden als spitze und stumpfe unterschieden werden und bei den Rhomboëdern dieselbe Unterscheidung hervortrat, so hing sie einerseits vom Oktaëder, anderseits vom Hexaëder ab, ohne dass man die Lage der Flächen gegen die Axen berücksichtigte, sondern nur Gestalt mit Gestalt verglich. Die Unterscheidung ergab, dass in den spitzen quadratischen Pyramiden die Endkantenwinkel kleiner als die Seitenkantenwinkel sind, in den stumpfen quadratischen Pyramiden der Endkantenwinkel grösser als der Seitenkantenwinkel ist, Gleichheit der End- und Seitenkantenwinkel kann nicht Statt finden, weil eine solche quadratische Pyramide das Oktaëder sein würde. Die Unterscheidung ergab ferner, dass in den spitzen Rhomboëdern der Endkantenwinkel kleiner als der Seitenkantenwinkel ist, in den stumpfen Rhomboëdern der Endkantenwinkel grösser als der Seitenkantenwinkel, Gleichheit der End- und Seitenkantenwinkel nicht Statt finden kann, weil ein solches Rhomboëder das Hexaëder sein würde. In gleichem Sinne kann man auch fragen, ob hexagonale Pyramiden Ungleichheit der End- und Seitenkantenwinkel erfordern, oder ob auch End- und Seitenkantenwinkel gleich sein können. Meine Meinung ist, dass solche hexagonale Pyramiden nicht möglich sind.

Eine normale hexagonale Pyramide, deren End- und Seitenkantenwinkel gleich, = 126° 52′ 12″ sind, erfordert das Axenverhältniss $a^2 : b^2 = 3 : 1$, ihr Hemiëder als Rhomboëder würde die Endkantenwinkel = 78° 27′ 47″ haben und ihr Hemiëder als trigonale Pyramide den Endkantenwinkel = 78° 27′ 47″ und den Seitenkantenwinkel = 126° 52′ 12″. Die bezügliche diagonale Pyramide hätte den Endkantenwinkel = 128° 40′ 56″, den Seitenkantenwinkel = 120°, ihr Hemiëder als diagonales Rhomboëder hätte den Endkantenwinkel = 82° 49′ 9″.

Eine diagonale hexagonale Pyramide, deren End- und Seitenkantenwinkel gleich, = 126° 52′ 12″ sind, und deren Hemiëder ein Rhomboëder diagonaler Stellung mit dem Endkantenwinkel 78° 27′ 47″ ist, erfordert das Axenverhältniss $a^2 : b^2 = 4 : 1$ oder $a : b = 2 : 1$. Die bezügliche normale hexagonale Pyramide hat die Endkantenwinkel = 125° 22′ 36″ und die Seitenkantenwinkel = 133° 10′ 25″; ihre Hälftengestalt als Rhomboëder hat die Endkantenwinkel = 74° 44′ 33″, während die trigonale Pyramide die Endkantenwinkel = 74° 44′ 33″, die Seitenkantenwinkel = 133° 10′ 25″ hat.

Das Axenverhältniss $a : b = 2 : 1$ würde die bezügliche normale Pyramide als Ableitungsgestalt aus der Pyramide mit dem Axenverhältnisse $a : b = 1 : 1$ ergeben, ihr 2P sein. Wurde nun jene als unzulässig befunden, so können auch ihre Ableitungsgestalten nicht zulässig sein, wozu auch die diagonale Pyramide 2P2 mit gleichen End- und Seitenkanten gehört.

Schliesslich muss noch ein unhaltbares Verhältniss angeführt werden, $a^2 : b^2 = 6 : 1$. Die darauf basirende normale hexagonale Pyramide hat die Endkantenwinkel = 123° 44′ 56″ und die Seitenkantenwinkel = 141° 3′ 27″. Ihr Hemiëder als Rhomboëder hat die Endkantenwinkel = 70° 31′ 44″, welches spitze Rhomboëder in Combination mit den Basisflächen bei entsprechender Ausdehnung der Flächen genau dem Oktaëder gleich wäre, indem der Seitenkantenwinkel des Rhomboëders und der Combinationskantenwinkel desselben mit dem Rhomboëder = 109° 28′ 16″ ist. Die bezügliche trigonale Pyramide als Hemiëder obiger hexagonalen Pyramide hat die Endkantenwinkel = 70° 31′ 44″, die Seitenkantenwinkel = 141° 3′ 27″, ihre Flächen sind gleichseitige Dreiseite, und die Endkantenlinien von gleicher Länge wie die Seitenkantenlinien und die Endkanten regelmässige.

Die auf das Verhältniss $a^2 : b^2 = 6 : 1$ basirende diagonale hexagonale Pyramide ergibt die Endkantenwinkel = 124° 51′ 0″, die Seitenkantenwinkel = 135° 35′ 5″ und ihr Hemiëder als diagonales Rhomboëder hat die Endkantenwinkel = 73° 23′ 54″. Dass das Axenverhältniss $a^2 : b^2 = 6 : 1$ ein unhaltbares ist, ergibt sich schon, abgesehen von dem eigenthümlichen Rhomboëder normaler Stellung, aus dem unmöglichen Axenverhältnisse $a^2 : b^2 = 3 : 2$, welches auf das Hexaëder als normales Rhomboëder führte. Das letztere wäre $^1/_2$R von dem Rhomboëder R mit den Endkantenwinkeln $= 70^0\ 31'\ 44''$.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass bei der Annahme rationaler Ableitungscoëfficienten und irrationaler Axenlängen der Grundgestalten nicht jedes beliebige irrationale Axenverhältniss eine Grundgestalt ergeben kann, sondern gewisse ausgeschlossen sind. Hieran würde sich die schon oben berührte Frage schliessen, ob die Zahlen der Axenverhältnisse der möglichen Grundgestalten zwischen bestimmten Grenzen liegen? Es handelt sich hier nicht darum, was die bisher ausgewählten Grundgestalten ergeben, sondern es müsste theoretisch entschieden werden, wie hoch sich die Zahlen der Axenverhältnisse belaufen können. Wenn im quadratischen oder hexagonalen Systeme als Grundgestalt eine jede normale Pyramide (mit Ausschluss derjenigen, welche auf unmögliche Formen führten) möglich gedacht wird, deren Axenverhältniss a : b : b irgend welche beliebige irrationale Zahlen darstellt, so würden, wenn es keine Grenze gäbe, auch die normalen Prismen oder die Basisflächen als Grundgestalt gewählt werden können. Dass man solche nicht wählen wird, ist selbstverständlich, weil sie aber ohne festgesetzte Grenze möglich wären, muss man nach der Grenze fragen. Denken wir z. B. an Species, wie Vesuvian, Korund und Quarz, wo als Ableitungsgestalten von der Grundgestalt sehr stumpfe und sehr spitze Pyramiden vorkommen, so stände die Möglichkeit frei, auch sehr stumpfe oder sehr spitze Pyramiden als Grundgestalt zu wählen. Man wird es nicht thun, es wäre aber ohne bestimmte Grenzen theoretisch zulässig.

Bei der Annahme, dass die Krystalle einer und derselben Species aus gleichgestalteten Krystallmolekulen zusammengesetzt sind, und dass die Krystallmolekule als Bausteine der Krystalle aus Atomen bestehen, welche in bestimmter Anzahl und Anordnung die Gestalt der Krystallmolekule bedingen, kann man mit Recht annehmen, dass das Axenverhältniss von der Zahl und Anordnung der Atome in den Krystallmolekulen abhängt, kein theoretisch beliebiges ist. Ich gebe gern zu, dass man in dieser Richtung gegenwärtig keine Regel, kein Gesetz aufstellen kann, ich wollte nur auf die Nothwendigkeit hinweisen, bei der Wahl der Grundgestalten an solche theoretische Grenzen zu denken. Für die theoretische Krystallographie, für die Lehre der Ableitung ist es allerdings gleichgiltig, wie NAUMANN meint, derartige Fragen zu beantworten, für die Praxis aber wird es eine Nothwendigkeit. Dass diese Nothwendigkeit in der Praxis noch nicht fühlbar geworden ist, lässt sie nicht in Abrede stellen und ich hatte nur den Zweck vor Augen, auf diese Verhältnisse hinzuweisen, weil namentlich von den Lernenden derartige Fragen gestellt werden, welche schliesslich doch beantwortet werden müssen. So ist es z. B. theoretisch richtig und wird jederzeit gelehrt, dass im klinorhombischen Systeme die Haupt- und Längsachse sich unter einem schiefen Winkel schneiden, und dass für die Species dieser Winkel bestimmt werden muss. Als schiefer Winkel kann er zwischen 0° und 90° liegen, und theoretisch ist bei der Wahl der Grundgestalt jeder Winkel zwischen 0° und 90° zulässig, trotzdem aber entsteht die Frage, kann wirklich jeder beliebige Winkel zwischen 0° und 90° als zulässig angesehen werden? In der Praxis stellen sich klinorhombische Species heraus, deren Grundgestalten einen solchen schiefen Winkel haben, welcher so nahe an 90° liegt, dass man den Unterschied nur durch sehr genaue Messungen bestimmen kann. Gegenüber diesen aber entsteht die Frage, ob auch klinorhombische Species gedacht werden können, in denen dieser Winkel nahe an 0° liegt, denn die Theorie sagt, dass jeder Winkel zwischen 0° und 90° zulässig ist. Daraus, dass man keine Grundgestalt wählt, in welcher dieser Winkel sehr klein ist, folgt nicht, dass eine solche Wahl unmöglich ist und es entsteht die sehr natürliche Frage, ob nicht diese Willkür beschränkt werden müsse. Aus allen solchen Erörterungen geht hervor, dass für die Wahl der Grundgestalt gewisse Grenzen aufgestellt werden müssen, und es lag mir nahe, auf die Nothwendigkeit solcher Grenzen hinzuweisen, denn es erscheint mir nothwendig, sie in das Gebiet der Discussion zu ziehen, nachdem die Zahl der mineralischen und nichtmineralischen Krystallspecies eine sehr grosse geworden ist.